Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

33. Integration der Elastizitätsgleichungen als lineare Differenzgleichungen

Um die Gleichungen zeichnerisch aufzulösen, werden nach S. 261 zuerst die Festpunkte $F_{12} \dots F_{56}$, $F_{65} \dots F_{21}$ und die Punkte $E_1 \dots E_6$ mit den Ergebnissen $a_{12} \dots a_{56}$, $a_{65} \dots a_{21}$, $e_1 \dots e_6$ der Rechnung auf der Achse $A_1 \dots A_6$ eingetragen und die Ordinaten $T_1 \dots T_6$ für jeden einzelnen Belastungsfall in $E_1 \dots E_6$ abgesteckt. Die positiven Werte erscheinen in der oberen Halbebene. Daher gilt das gleiche von den überzähligen Schnittkräften X_k. Mit den Ordinaten T_1, T_6 in den Festpunkten F_{12}, F_{65} und den Endpunkten E'_k der Strecken T_k sind die beiden Geradenzüge ζ_{0n}, ζ_{n0} und damit in jedem Abschnitt Δ_k zwei Punkte $F'_{(k-1)k}$, $F'_{k(k-1)}$ des Geradenzuges ξ_k bestimmt, welcher auf den Ordinaten A_1, A_2 usw. die gesuchten Strecken X_1, X_2 usw. abschneidet.

Die statisch unbestimmten Stützenmomente nach Abb. 235 in mt für jeden Belastungsfall:

Belastung	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Eigengewicht. . .	10,2	15,8	19,7	19,7	15,8	10,2 mt
Nutzlast.	−3,4	12,1	14,5	− 0,7	0,3	0 ,,
Temperatur . . .	0,05	−0,18	0,63	0,63	−0,18	0,05 ,,
Lagerverdrehung .	−0,50	1,50	−5,40	−11,20	3,30	−0,80 ,,

Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Bereichs des Hauptsystems sind

$$M = M_0^{(3)} - X_3 M_3^{(3)} - X_4 M_4^{(3)}.$$

Die Momente $M_0^{(3)}$ aus den einzelnen Belastungen werden nach den Tabellen Abschn. 61 berechnet.

Biegungsmomente in mt.

Belastung	M_a	M_c	$M_3 = -X_3$	M_h	M_k	$M_4 = -X_4$	M_d	M_b
Eigengewicht. . .	− 0,29	+0,58	−19,7	−19,1	−19,1	−19,7	+ 0,58	− 0,29
Nutzlast.	− 1,24	+5,13	−14,5	− 9,38	+ 4,06	+ 0,7	+ 3,36	− 3,01
Temperatur . . .	− 1,03	+0,85	− 0,63	+ 0,22	+ 0,22	+ 0,63	+ 0,85	− 1,03
Lagerverdrehung .	+32,70	− 3,94	+ 5,40	+ 1,41	− 5,78	+11,2	−16,98	+19,47

Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, 3. Aufl. S. 83. Berlin 1928. — Culmann: Anwendungen der graphischen Statik Bd. 3. Zürich 1900. — Fidler, Claxton: Trans. Inst. C. E. Bd. 74. Okt. 1883. — Massau, J.: Annales de l'association des ingénieurs de Gand 1889. — Vianello: Der durchgehende Träger auf elastisch senkbaren Stützen. Hamburg 1904. — Ostenfeld, A.: Graphische Behandlung der kont. Träger. Z. Arch.- Ing.-Wesen 1905 S. 47; 1908 Heft 1. — Vlachos: Zeichnerische Behandlung der durchgehenden Träger. Öst. Wochenschr. öffentl. Baudienst 1908. — Marcus, H.: Die Berechnung von Silozellen. Z. Arch.- u. Ing.-Wesen 1911. — Mehmke, R.: Leitfaden z. graphischen Rechnen. Leipzig 1917. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.

33. Integration der Elastizitätsgleichungen als lineare Differenzengleichungen.

Die Wurzeln des Ansatzes sind bisher durch die algebraische Rekursion der linearen Gleichungen bestimmt und zeichnerisch einer Punktfolge $1 \dots k \dots n$ zugeordnet worden. Das Ergebnis erscheint dabei geometrisch in einem funktionalen Zusammenhang, dessen Unbekannte nur für ganzzahlige Werte k der Veränderlichen $(k \cdot \Delta)$ Lösungen besitzen. Damit entsteht die Frage nach derjenigen stetigen Funktion, die für ganzzahlige unabhängige Veränderliche Lösungen des linearen Ansatzes ergibt. Dieser erhält damit die Eigenschaft einer Differenzengleichung.

Die Elastizitätsgleichung $\sum_{h=k}^{k+m} \delta_{rh} X_h = \delta_{r0}$, $\left(k = r - \frac{m}{2}\right)$ ist eine lineare Funktion von der Form

$$F_1(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+m}) = N_r \tag{462a}$$

mit $(m+1)$ aufeinander folgenden abhängigen Veränderlichen X_k. Sie kann als Funktion von Differenzen $\Delta^h X_k$ $(h = 1 \ldots m)$ entwickelt und damit als lineare Differenzengleichung

$$F_2(X_k, \Delta X_k, \Delta^2 X_k, \ldots, \Delta^m X_k) = N_r \tag{462b}$$

mit der ganzzahligen Veränderlichen k angeschrieben werden. Der Grenzübergang mit $\overline{(k-1), k} \equiv \Delta x \to dx \approx 0$ würde eine Differentialgleichung ergeben, so daß die Verwandtschaft der allgemeinen mathematischen Beziehungen und Lösungsmethoden von Differenzen- und Differentialgleichungen verständlich ist.

Die Gleichung (462a) mit X_k und den folgenden Unbekannten bis X_{k+m} heißt nach der Umformung in (462b) Differenzengleichung $m$ter Ordnung, so daß die dreigliedrigen, fünfgliedrigen und siebengliedrigen Ansätze als Differenzengleichungen zweiter, vierter und sechster Ordnung behandelt werden können. Sie heißen homogen, wenn die Belastungszahlen Null sind. Sind die Störungsglieder N_r vorhanden, so spricht man wie in der Infinitesimalrechnung von vollständigen Gleichungen und nennt Funktionen, welche die Differenzengleichungen erfüllen, Partikularlösungen.

Die Differenzenrechnung ist ein selbständiger Teil der Mathematik, dessen Methoden in zahlreichen Sonderwerken studiert werden können. Ihre Beziehungen zur Baustatik sind von F. Bleich und E. Melan eingehend dargestellt worden. Die nachstehenden Bemerkungen sind daher nur als kurzer Hinweis zu verstehen, welcher zu einem Vergleich mit der algebraischen Auflösung einer Gruppe von linearen Gleichungen ausreicht.

Der Ansatz einer Differenzengleichung $m$ter Ordnung mit n linearen Gleichungen $1, 2 \ldots n$ und $(n+m)$ Unbekannten X_k wird für beliebige Werte der m ersten oder letzten Wurzeln erfüllt. Die allgemeine Lösung X_k^* einer vollständigen Differenzengleichung $m$ter Ordnung enthält daher stets m willkürlich wählbare konstante Größen. Sie kann aus der allgemeinen Lösung X_k der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung $\overline{X_k}$ der vollständigen Gleichung zusammengesetzt werden. Die vollständige Lösung X_k der homogenen Gleichung besteht aus der Summe der m voneinander unabhängigen, mit den Konstanten C_ν $(\nu = 1, \ldots m)$ erweiterten partikulären Lösungen.

$$X_k^* = \overline{X_k} + X_k .$$

Die m in der Funktion X_k^* enthaltenen Integrationskonstanten C_ν werden aus den Randbedingungen des statischen Problems bestimmt.

Die linearen Differenzengleichungen der baustatischen Probleme sind infolge des Maxwellschen Gesetzes stets symmetrisch und von gerader Ordnung. Sie ergeben nur bei konstanten Koeffizienten einfache Lösungsfunktionen. Die homogene Differenzengleichung $m$ter Ordnung wird dann durch ein partikuläres Integral $X_k = \varrho_\nu^k$ befriedigt, in dem die ϱ_ν $(\nu = 1 \ldots m)$ als Wurzeln einer charakteristischen Gleichung $m$ten Grades berechnet werden. Damit entsteht die folgende allgemeine Lösung:

$$X_k = C_1 \varrho_1^k + C_2 \varrho_2^k + \cdots C_m \varrho_m^k . \tag{463}$$

Dies ist nach einiger Umformung auch möglich, wenn einzelne Wurzeln gleich oder komplex sind.

Beispiel: Lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung mit den konstanten Koeffizienten a, b, c:

$$a X_{k-1} + b X_k + c X_{k+1} = 0 . \tag{464}$$

Lösungsansatz: $X_k = \varrho^k$, charakteristische Gleichung: $a + b\varrho + c\varrho^2 = 0$

$$\varrho_{1,2} = -\frac{b}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac} .$$

allgemeine Lösung:

$$X_k = C_1 \varrho_1^k + C_2 \varrho_2^k .$$

Ist die Gleichung das Ergebnis einer baustatischen Untersuchung, so ist $a = c$, daher

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = 1; \qquad \varrho_1 = \varrho; \qquad \varrho_2 = \frac{1}{\varrho}; \qquad X_k = C_1 \varrho^k + C_2 \varrho^{-k} .$$

Die Gleichung (464) läßt sich für $a = c$ auch folgendermaßen anschreiben:

$$X_{k-1} + 2\beta X_k + X_{k+1} = 0 .$$

Lösungsansatz $e^{\alpha k}$, charakteristische Gleichung: $\operatorname{Cos} \alpha + \beta = 0$ mit den Wurzeln $\alpha_1 = m, \alpha_2 = -m$ und der Lösung

$$X_k = A_1 e^{mk} + A_2 e^{-mk} = C_1 \operatorname{Cos} mk + C_2 \operatorname{Sin} mk .$$

Sie läßt sich auch leicht für die homogenen und symmetrischen Differenzengleichungen vierter und höherer Ordnung entwickeln, wenn die Koeffizienten konstant sind.

Das partikuläre Integral der vollständigen Differenzengleichung kann stets nach den allgemeinen Methoden von Lagrange und Cauchy angegeben werden. Diese sind in der Literatur über Differenzenrechnung zu finden. In der Regel sind jedoch die Störungsglieder der baustatischen Ansätze einfache algebraische Funktionen der Veränderlichen, für die das partikuläre Integral als ganze rationale Funktion mit unbestimmten Beiwerten angeschrieben werden kann. Diese werden dann derart bestimmt, daß der Ansatz erfüllt ist.

Ansatz. $$a X_{k-1} + b X_k + c X_{k+1} = N = \text{const}: \quad \overline{X_k} = \zeta N ,$$

$$\zeta (a + b + c) N = N; \qquad \overline{X_k} = \frac{N}{a + b + c} .$$

Ansatz. $$a X_{k-1} + b X_k + c X_{k+1} = N + r k: \quad \overline{X_k} = \alpha + \beta k .$$

$$a(\alpha + \beta(k-1)) + b(\alpha + \beta k) + c(\alpha + \beta(k+1)) = N + rk ,$$

$$\alpha(a + b + c) - \beta(a - c) + \beta(a + b + c) k = N + rk ,$$

$$\beta = \frac{r}{a + b + c}; \qquad \alpha = \frac{N(a + b + c) + r(a - c)}{(a + b + c)^2} ,$$

$$X_k^* = \frac{N(a + b + c) + r(a - c)}{(a + b + c)^2} + \frac{r}{a + b + c} k + C_1 \varrho_1^k + C_2 \varrho_2^k .$$

Jedem stetigen Bereiche einer Differenzengleichung zweiter Ordnung ist eine Lösung mit zwei Integrationskonstanten zugeordnet. Diese werden aus den vorgeschriebenen Randbedingungen und aus der Stetigkeit der Lösung an den Grenzen benachbarter Abschnitte bestimmt. Sie ändern sich mit jedem Belastungsfall.

Bei der Berechnung der Vorzahlen β_{hk} sind die Belastungsglieder außer $N_k = 1$ Null. Der Ansatz ist daher in k unstetig und zerfällt in zwei homogene Teile. I: (0 bis $k-1$), II: ($k+1$ bis n). Die vier Integrationskonstanten werden aus den vorgeschriebenen Randwerten X_0, X_n und aus der Stetigkeit der Lösung in (k) berechnet. Diese verlangt, daß $\beta_{kk.I} = \beta_{kk.II}$ und daß Gleichung (k) mit $N_k = 1$ erfüllt ist.

Die Lösung wird für $n = \infty$ kürzer. Ist diese Annahme unzulässig, so kann diejenige Belastung $\mathfrak{P}^*$ des unendlich ausgedehnten Bereichs durch Spiegelung der vorgeschriebenen Belastung $\mathfrak{P}_n$ des endlichen Bereichs entwickelt werden, welche dieselbe Formänderung des Stabwerks liefert. Der Ansatz wird dann für den unendlich ausgedehnten Bereich ($n = \infty$) mit $\mathfrak{P}^*$ berechnet. Die Lösung kann aber auch für $n = \infty$ mit $\mathfrak{P}_n$ angegeben und dann durch eine homogene Lösung ergänzt werden, welche die vorgeschriebenen Randbedingungen des kurzen Bereichs herstellt (vgl. Abschn. 22).

Berechnung der Stützenmomente des durchgehenden Trägers mit freibeweglichen, starren Stützen $0 \ldots k \ldots n$; $l' = \text{const} = l$, $X_0 = 0$, $X_n = 0$.

Ansatz nach (293) $X_{k-1} + 4X_k + X_{k+1} = \frac{6}{l}\delta_{k0}$ (Abb. 236).

a) Gleichmäßige Belastung aller Felder: $\frac{6}{l}\delta_{k0} = N = \text{const.}$

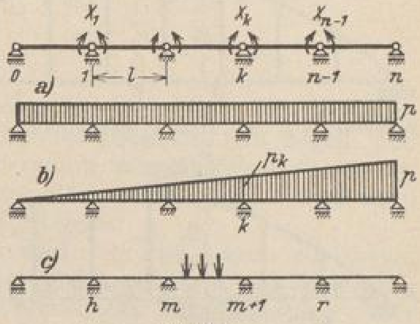


Abb. 236.

Lösung:

$$X_k = \frac{N}{6} + C_1\varrho^k + C_2\varrho^{-k};$$

$$\varrho = -2 + \sqrt{3} = -0{,}2679.$$

Integrationskonstanten C_1, C_2 aus $X_0 = 0$; $X_n = 0$.

$$\frac{N}{6} + C_1 + C_2 = 0;$$
$$\frac{N}{6} + C_1\varrho^n + C_2\varrho^{-n} = 0.$$

$$X_k = \frac{\delta_{k0}}{l}\left(1 - \frac{\varrho^{n-k} + \varrho^k}{1 + \varrho^n}\right);$$ bei großer Felderzahl ist $\varrho^n \approx 0$.

Gleichförmige Belastung p (Abb. 236a):

$$\frac{\delta_{k0}}{l} = \frac{pl^2}{12} \approx X_k.$$

$$X_1 = 0{,}10566\,pl^2; \qquad X_2 = 0{,}07735\,pl^2; \qquad X_3 = 0{,}08494\,pl^2.$$

b) Stetige hydraulische Belastung der Felder l_1 bis l_n. $p_0 = 0$; $p_n = p$ (Abb. 236b).

$$p_k = p\frac{k}{n} = \frac{2P}{n^2 l}k; \qquad N_k = \frac{6}{l}\delta_{k0} = \frac{Pl}{n^2}k.$$

$$X_k = \frac{Pl}{6n^2}k + C_1\varrho^k + C_2\varrho^{-k}; \qquad C_1, C_2 \text{ aus } X_0 = X_n = 0.$$

$$X_k = \frac{Pl}{6n}\left(\frac{k}{n} - \frac{\varrho^{n-k} - \varrho^{n+k}}{1 - \varrho^{2n}}\right),$$

$n = 10$: $X_1 = 0{,}001667\,Pl$, $X_5 = 0{,}008357\,Pl$, $X_9 = 0{,}019465\,Pl$.

c) Belastung eines einzelnen Feldes l_{m+1}. $h < m$, $r > m + 1$ (Abb. 236c)

$$X_{h-1} + 4X_h + X_{h+1} = 0. \qquad X_{r-1} + 4X_r + X_{r+1} = 0.$$
$$X_h = C_1\varrho^h + C_2\varrho^{-h}, \qquad X_r = C_3\varrho^r + C_4\varrho^{-r}.$$

$C_1 \ldots C_4$ aus $X_0 = X_n = 0$ und den Gleichungen m, $(m + 1)$.

$$m\colon X_{m-1} + 4X_m + X_{+m1} = \frac{6\delta_{m0}}{l}, \quad (m+1)\colon X_m + 4X_{m+1} + X_{m+2} = \frac{6\delta_{(m+1)0}}{l},$$

$$C_1 = -C_2 = \frac{6\varrho}{l(\varrho^2 - 1)(\varrho^{2n} - 1)}\left[\delta_{m0}(\varrho^m - \varrho^{2n-m}) + \delta_{(m+1)0}(\varrho^{m+1} - \varrho^{2n-(m+1)})\right],$$

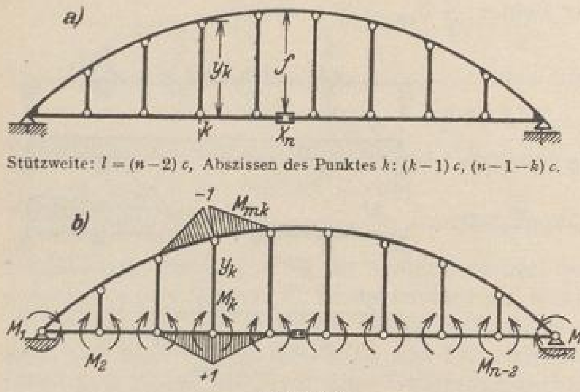
$$C_3 = -\frac{C_4}{\varrho^{2n}} = \frac{6\varrho}{l(\varrho^2 - 1)(\varrho^{2n} - 1)}\left[\delta_{m0}(\varrho^m - \varrho^{-m}) + \delta_{(m+1)0}(\varrho^{m+1} - \varrho^{-(m+1)})\right].$$

Spannungszustand eines Bogenträgers mit steifem Zugband. Die Längskraft X_n wird als die überzählige Schnittkraft des $(n - 1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystems Abb. 237a berechnet, dessen statisch unbestimmte Schnittkräfte $M_1 \ldots M_k \ldots M_{n-1}$ in Abb. 237b eingetragen sind.

$$M_k = M_{k0}^{(n-1)} - M_{kn}^{(n-1)} X_n.$$

Wird die Längenänderung der Hängestangen vernachlässigt, so können die Biegungsmomente $M_{k0}^{(n-1)}$, $M_{kn}^{(n-1)}$ aus dreigliedrigen Bedingungsgleichungen berechnet werden (Abb. 237b).

$$M_{(k-1)}^{(n-1)}\,\delta_{k(k-1)} + M_{k}^{(n-1)}\,\delta_{kk} + M_{k+1}^{(n-1)}\,\delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}.$$



Stützweite: $l = (n-2)\,c$, Abszissen des Punktes k: $(k-1)\,c$, $(n-1-k)\,c$.

Abb. 237.

Die Vorzahlen der Gleichungen bleiben unverändert, wenn die Abstände c der Hängestangen und das Trägheitsmoment des Untergurtes konstant und die Abschnitte des Bogengurts derart ausgebildet sind, daß $J_b : J\cos\varphi = 1$ und das Trägheitsmoment J_z des Streckträgers konstant ist $(J_b/J_z = \mu)$. Die Biegungsmomente $M_{k0}^{(n-1)}$, $M_{kn}^{(n-1)}$ werden dann aus den folgenden Differenzengleichungen berechnet:

Beliebige Belastung der Fahrbahn, die durch Querträger an den Hängestangen auf das statisch unbestimmte Hauptsystem übertragen wird.

$$(1+\mu)\,[M_{(k-1)0}^{(n-1)} + 4\,M_{k0}^{(n-1)} + M_{(k+1)0}^{(n-1)}] = M_{(k-1)0,b}^{(0)} + 4\,M_{k0,b}^{(0)} + M_{(k+1)0,b}^{(0)}.$$

Belastung des statisch unbestimmten Hauptsystems durch $-X_n = 1$

$$(1+\mu)\,[M_{(k-1)n}^{(n-1)} + 4\,M_{kn}^{(n-1)} + M_{(k+1)n}^{(n-1)}] = y_{k-1} + 4\,y_k + y_{k+1}.$$

Die Bedingungsgleichungen sind in beiden Fällen reziproke Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, deren homogener Ansatz durch

$$M_{k0}^{(n-1)} = C_1\,\varrho^k + C_2\,\varrho^{-k}$$

befriedigt wird. Hierzu treten als partikuläre Lösungen

$$\overline{M}_{k0}^{(n-1)} = \frac{1}{1+\mu}\,M_{k0,b}^{(0)};\qquad \overline{M}_{kn}^{(n-1)} = \frac{1}{1+\mu}\,y_k = \frac{1}{1+\mu}\,4\,f\,\frac{(k-1)\,(n-1-k)}{(n-2)^2}.$$

Mit $y_1 = y_{n-1} = 0$ ist das vollständige Integral

$$M_{1n}^{(n-1)} = C_1\,\varrho + C_2\,\varrho^{-1};\qquad M_{2n}^{(n-1)} = \frac{1}{1+\mu}\,y_2 + C_1\,\varrho^2 + C_2\,\varrho^{-2},$$

$$M_{(n-2)n}^{(n-1)} = \frac{1}{1+\mu}\,y_{n-2} + C_1\,\varrho^{(n-2)} + C_2\,\varrho^{-(n-2)};\qquad M_{(n-1)n}^{(n-1)} = C_1\,\varrho^{(n-1)} + C_2\,\varrho^{-(n-1)}.$$

Die Randbedingungen $\delta_1^{(n-1)} = 0$, $\delta_{n-1}^{(n-1)} = 0$ ergeben damit

$$\delta_1^{(n-1)} = 0 = (1+\mu)\,(2\,M_{1n}^{(n-1)} + M_{2n}^{(n-1)}) - y_2;\quad C_1\,\varrho_1\,(2+\varrho_1) + C_2\,\varrho_1^{-1}\,(2+\varrho_1^{-1}) = 0,$$

$$\delta_{n-1}^{(n-1)} = 0 = (1+\mu)\,(2\,M_{(n-1)n}^{(n-1)} + M_{(n-2)n}^{(n-1)}) - y_{n-2};$$

$$C_1\,\varrho_1^{(n-2)}\,(2\,\varrho_1 + 1) + C_2\,\varrho_1^{-(n-2)}\,(2\,\varrho_1^{-1} + 1) = 0;\qquad C_1 = 0.\qquad C_2 = 0.$$

Die Integrationskonstanten werden für die Funktion $M_{k0}^{(n-1)}$ in derselben Weise bestimmt. Sie sind ebenfalls Null, so daß folgende Biegungsmomente entstehen:

Streckträger: $M_{kn,z}^{(n-1)} = \dfrac{y_k}{1+\mu}$; $\qquad M_{k0,z}^{(n-1)} = \dfrac{M_{k0,b}^{(0)}}{1+\mu}$;

Bogen: $M_{kn,b}^{(n-1)} = y_k - \dfrac{y_k}{1+\mu} = \dfrac{\mu}{1+\mu}\,y_k$; $\quad M_{k0,b}^{(n-1)} = M_{k0,b}^{(0)} - \dfrac{M_{k0,b}^{(0)}}{1+\mu} = \dfrac{\mu}{1+\mu}\,M_{k0,b}^{(0)}$.

$$X_n = \frac{\delta_{mn}^{(n-1)}}{\delta_{nn}^{(n-1)}} = \frac{\dfrac{\mu}{1+\mu}\displaystyle\int M_{m0,b}^{(0)}\,y_k\,dx}{\dfrac{\mu}{1+\mu}\displaystyle\int y_k^2\,dx + \left(\dfrac{J_b}{F_b} + \dfrac{J_b}{F_z}\right) l}.$$

(F_b der Querschnitt des Bogens im Scheitel, F_z der Querschnitt des Zugbandes.) Ohne Berücksichtigung der Längskräfte bei der Formänderung des Bogens ist die Längskraft X_n ebenso groß wie bei einem Zugband. Nach der im Ansatz gewählten Superposition sind die Momente im

$$\text{Bogen: } M_{k,b} = M_{k0,b}^{(n-1)} - M_{kn}^{(n-1)} X_n = \frac{\mu}{1+\mu} (M_{k0,b}^{(0)} - X_n y_k),$$

$$\text{Streckträger: } M_{k,z} = \frac{1}{1+\mu} (M_{k0,b}^{(0)} - X_n y_k).$$

Das Ergebnis ist eine Bestätigung für die bekannte Aufteilung der Biegungsmomente des Bogenträgers im Verhältnis der Trägheitsmomente von Bogen- und Streckträger. Sie kann sich allerdings wesentlich ändern, wenn die einschränkenden Voraussetzungen für die Integration des Ansatzes nicht erfüllt sind. Er wird dann nach der allgemeinen Rechenvorschrift Abschn. 29 gelöst.

Die Integration der Elastizitätsgleichungen wird, wie dies bereits aus diesen kurzen Bemerkungen einzusehen ist, nur bei einer größeren Anzahl von Unbekannten und bei konstanten Vorzahlen des Ansatzes verwendet. Die Bedeutung dieser Lösung liegt in der Beschreibung des Kräftebildes regelmäßig ausgebildeter Tragwerke, dessen Gesetzmäßigkeiten am besten durch einen funktionalen Zusammenhang dargestellt werden können. Daher sind vor allem mehrfache Tragwerke mit Erfolg durch Differenzengleichungen untersucht worden.

Seliwanoff, D.: Lehrbuch der Differenzenrechnung. Leipzig 1904. — Wallenberg, G.: Theorie der linearen Differenzengleichungen. Leipzig u. Berlin 1911. — Funk, P.: Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin 1920. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin 1925. — Derselbe: Anwendung von Differenzengleichungen in der Statik hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke. Eisenbau 1918 S. 122. — Mann, L.: Statische Berechnung steifer Vierecknetze. Dissertation Berlin 1909 und Z. Bauwes. 1909. — Wanke, J.: Über die Berechnung von Bogenträgern mit einem Streckträger. Eisenbau 1921 S. 264; außerdem in der Melanfestschrift. Leipzig u. Wien 1923. — Fritsche, J.: Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzengleichungen. Berlin 1923. — Melan, E.: Ein Beitrag zur Auflösung linearer Differenzengleichungen mit beliebiger Störungsfunktion. Eisenbau 1920 S. 88. — Bleich u. Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Berlin 1927.

34. Ansätze mit unabhängigen überzähligen Größen.

Die Elastizitätsgleichungen sind durch die Ausnützung der Symmetrie des Tragwerks bei der Bildung des Hauptsystems wesentlich einfacher geworden und enthalten im Vergleich zum allgemeinen Ansatz nur einen Bruchteil der überzähligen Größen. Die algebraische Auflösung linearer Gleichungen wird jedoch ganz überflüssig, wenn alle Vorzahlen $\delta_{ik} (i \neq k)$ durch die Struktur des Hauptsystems oder durch Zusammenfassung der statisch unbestimmten Schnittkräfte zu ausgezeichneten Gruppen ausfallen. Die überzähligen Größen sind dann unabhängig voneinander.

$$X_k \delta_{kk} = \delta_{k\otimes}, \qquad X_k = \frac{\delta_{k\otimes}}{\delta_{kk}} = \frac{\delta_{k0} + \delta_{kt} + \delta_{ks}}{\delta_{kk}}. \tag{465}$$

Ein derartiger Ansatz kann grundsätzlich bei jedem statisch unbestimmten Tragwerk angegeben werden. Er verdient aber nur Beachtung, wenn die Fehlerfortpflanzung bei der Auswertung der $\frac{1}{2} \cdot n (n+1)$ Bedingungen $\delta_{ik} = 0 \; (i \neq k)$ keine Schwierigkeiten bereitet und damit zuverlässige Ergebnisse für Zähler und Nenner erhalten werden. In allen anderen Fällen ist die Formulierung der überzähligen Größen und die Auflösung der Bedingungsgleichungen nach Abschn. 29 einfacher. Die Brauchbarkeit des Ansatzes hängt außerdem von der fehlerfreien Superposition