Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Spannungszustand eines Bogenträgers mit steifem Zugband

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Berechnung der Stützenmomente des durchgehenden Trägers mit freibeweglichen, starren Stützen $0 \ldots k \ldots n$; $l' = \text{const} = l$, $X_0 = 0$, $X_n = 0$.

Ansatz nach (293) $X_{k-1} + 4X_k + X_{k+1} = \frac{6}{l}\delta_{k0}$ (Abb. 236).

a) Gleichmäßige Belastung aller Felder: $\frac{6}{l}\delta_{k0} = N = \text{const}$.

Lösung:

$$X_k = \frac{N}{6} + C_1\varrho^k + C_2\varrho^{-k};$$

$$\varrho = -2 + \sqrt{3} = -0{,}2679.$$

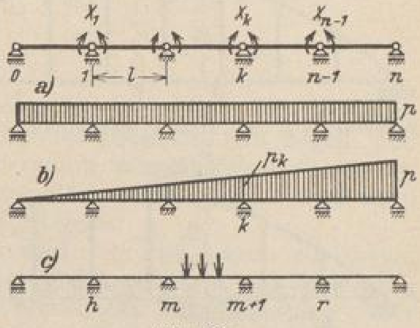


Abb. 236.

Integrationskonstanten C_1, C_2 aus $X_0 = 0$; $X_n = 0$.

$$\frac{N}{6} + C_1 + C_2 = 0;$$
$$\frac{N}{6} + C_1\varrho^n + C_2\varrho^{-n} = 0.$$

$$X_k = \frac{\delta_{k0}}{l}\left(1 - \frac{\varrho^{n-k} + \varrho^k}{1 + \varrho^n}\right);\qquad \text{bei großer Felderzahl ist } \varrho^n \approx 0.$$

Gleichförmige Belastung p (Abb. 236a):

$$\frac{\delta_{k0}}{l} = \frac{p l^2}{12} \approx X_k.$$

$$X_1 = 0{,}10566\,p l^2;\qquad X_2 = 0{,}07735\,p l^2;\qquad X_3 = 0{,}08494\,p l^2.$$

b) Stetige hydraulische Belastung der Felder l_1 bis l_n. $p_0 = 0$; $p_n = p$ (Abb. 236b).

$$p_k = p\,\frac{k}{n} = \frac{2P}{n^2 l}k;\qquad N_k = \frac{6}{l}\delta_{k0} = \frac{Pl}{n^2}k.$$

$$X_k = \frac{Pl}{6n^2}k + C_1\varrho^k + C_2\varrho^{-k};\qquad C_1, C_2 \text{ aus } X_0 = X_n = 0.$$

$$X_k = \frac{Pl}{6n}\left(\frac{k}{n} - \frac{\varrho^{n-k} - \varrho^{n+k}}{1 - \varrho^{2n}}\right),$$

$$n = 10:\quad X_1 = 0{,}001667\,Pl,\; X_5 = 0{,}008357\,Pl,\; X_9 = 0{,}019465\,Pl.$$

c) Belastung eines einzelnen Feldes l_{m+1}. $h < m$, $r > m + 1$ (Abb. 236c)

$$X_{h-1} + 4X_h + X_{h+1} = 0.\qquad X_{r-1} + 4X_r + X_{r+1} = 0.$$
$$X_h = C_1\varrho^h + C_2\varrho^{-h},\qquad X_r = C_3\varrho^r + C_4\varrho^{-r}.$$

$C_1 \ldots C_4$ aus $X_0 = X_n = 0$ und den Gleichungen m, $(m+1)$.

$$m:\; X_{m-1} + 4X_m + X_{+m1} = \frac{6\,\delta_{m0}}{l},\quad (m+1):\; X_m + 4X_{m+1} + X_{m+2} = \frac{6\,\delta_{(m+1)0}}{l},$$

$$C_1 = -C_2 = \frac{6\varrho}{l(\varrho^2 - 1)(\varrho^{2n} - 1)}\left[\delta_{m0}(\varrho^m - \varrho^{2n-m}) + \delta_{(m+1)0}(\varrho^{m+1} - \varrho^{2n-(m+1)})\right],$$

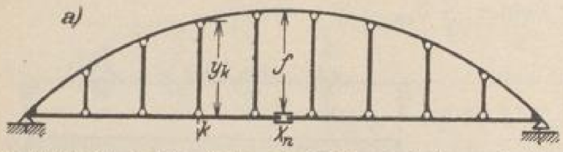
$$C_3 = -\frac{C_4}{\varrho^{2n}} = \frac{6\varrho}{l(\varrho^2 - 1)(\varrho^{2n} - 1)}\left[\delta_{m0}(\varrho^m - \varrho^{-m}) + \delta_{(m+1)0}(\varrho^{m+1} - \varrho^{-(m+1)})\right].$$

Spannungszustand eines Bogenträgers mit steifem Zugband. Die Längskraft X_n wird als die überzählige Schnittkraft des $(n-1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystems Abb. 237a berechnet, dessen statisch unbestimmte Schnittkräfte $M_1 \ldots M_k \ldots M_{n-1}$ in Abb. 237b eingetragen sind.

$$M_k = M_{k0}^{(n-1)} - M_{kn}^{(n-1)} X_n.$$

Wird die Längenänderung der Hängestangen vernachlässigt, so können die Biegungsmomente $M_{k0}^{(n-1)}$, $M_{kn}^{(n-1)}$ aus dreigliedrigen Bedingungsgleichungen berechnet werden (Abb. 237b).

$$M_{(k-1)}^{(n-1)} \delta_{k(k-1)} + M_k^{(n-1)} \delta_{kk} + M_{k+1}^{(n-1)} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}.$$



Stützweite: $l = (n-2)\,c$, Abszissen des Punktes k: $(k-1)\,c$, $(n-1-k)\,c$.

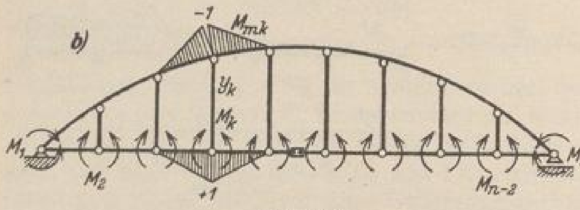


Abb. 237.

Die Vorzahlen der Gleichungen bleiben unverändert, wenn die Abstände c der Hängestangen und das Trägheitsmoment des Untergurtes konstant und die Abschnitte des Bogengurts derart ausgebildet sind, daß $J_b : J\cos\varphi = 1$ und das Trägheitsmoment J_z des Streckträgers konstant ist $(J_b/J_z = \mu)$. Die Biegungsmomente $M_{k0}^{(n-1)}$, $M_{kn}^{(n-1)}$ werden dann aus den folgenden Differenzengleichungen berechnet:

Beliebige Belastung der Fahrbahn, die durch Querträger an den Hängestangen auf das statisch unbestimmte Hauptsystem übertragen wird.

$$(1+\mu)\,[M_{(k-1)0}^{(n-1)} + 4\,M_{k0}^{(n-1)} + M_{(k+1)0}^{(n-1)}] = M_{(k-1)0,b}^{(0)} + 4\,M_{k0,b}^{(0)} + M_{(k+1)0,b}^{(0)}.$$

Belastung des statisch unbestimmten Hauptsystems durch $-X_n = 1$

$$(1+\mu)\,[M_{(k-1)n}^{(n-1)} + 4\,M_{kn}^{(n-1)} + M_{(k+1)n}^{(n-1)}] = y_{k-1} + 4\,y_k + y_{k+1}.$$

Die Bedingungsgleichungen sind in beiden Fällen reziproke Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, deren homogener Ansatz durch

$$M_{k0}^{(n-1)} = C_1\varrho^k + C_2\varrho^{-k}$$

befriedigt wird. Hierzu treten als partikuläre Lösungen

$$\overline{M}_{k0}^{(n-1)} = \frac{1}{1+\mu} M_{k0,b}^{(0)}; \qquad \overline{M}_{kn}^{(n-1)} = \frac{1}{1+\mu} y_k = \frac{1}{1+\mu} 4 f \frac{(k-1)(n-1-k)}{(n-2)^2}.$$

Mit $y_1 = y_{n-1} = 0$ ist das vollständige Integral

$$M_{1n}^{(n-1)} = C_1\varrho + C_2\varrho^{-1}; \qquad M_{2n}^{(n-1)} = \frac{1}{1+\mu} y_2 + C_1\varrho^2 + C_2\varrho^{-2},$$

$$M_{(n-2)n}^{(n-1)} = \frac{1}{1+\mu} y_{n-2} + C_1\varrho^{(n-2)} + C_2\varrho^{-(n-2)}; \qquad M_{(n-1)n}^{(n-1)} = C_1\varrho^{(n-1)} + C_2\varrho^{-(n-1)}.$$

Die Randbedingungen $\delta_1^{(n-1)} = 0$, $\delta_{n-1}^{(n-1)} = 0$ ergeben damit

$$\delta_1^{(n-1)} = 0 = (1+\mu)\,(2\,M_{1n}^{(n-1)} + M_{2n}^{(n-1)}) - y_2; \quad C_1\varrho_1(2+\varrho_1) + C_2\varrho_1^{-1}(2+\varrho_1^{-1}) = 0,$$

$$\delta_{n-1}^{(n-1)} = 0 = (1+\mu)\,(2\,M_{(n-1)n}^{(n-1)} + M_{(n-2)n}^{(n-1)}) - y_{n-2};$$

$$C_1\varrho_1^{(n-2)}(2\varrho_1+1) + C_2\varrho_1^{-(n-2)}(2\varrho_1^{-1}+1) = 0; \qquad C_1 = 0. \qquad C_2 = 0.$$

Die Integrationskonstanten werden für die Funktion $M_{k0}^{(n-1)}$ in derselben Weise bestimmt. Sie sind ebenfalls Null, so daß folgende Biegungsmomente entstehen:

$$\text{Streckträger: } M_{kn,z}^{(n-1)} = \frac{y_k}{1+\mu}; \qquad M_{k0,z}^{(n-1)} = \frac{M_{k0,b}^{(0)}}{1+\mu};$$

$$\text{Bogen: } M_{kn,b}^{(n-1)} = y_k - \frac{y_k}{1+\mu} = \frac{\mu}{1+\mu} y_k; \quad M_{k0,b}^{(n-1)} = M_{k0,b}^{(0)} - \frac{M_{k0,b}^{(0)}}{1+\mu} = \frac{\mu}{1+\mu} M_{k0,b}^{(0)}.$$

$$X_n = \frac{\delta_{mn}^{(n-1)}}{\delta_{nn}^{(n-1)}} = \frac{\dfrac{\mu}{1+\mu}\displaystyle\int M_{m0,b}^{(0)}\, y_k\, dx}{\dfrac{\mu}{1+\mu}\displaystyle\int y_k^2\, dx + \left(\dfrac{J_b}{F_b} + \dfrac{J_b}{F_z}\right) l}.$$

(F_b der Querschnitt des Bogens im Scheitel, F_z der Querschnitt des Zugbandes.) Ohne Berücksichtigung der Längskräfte bei der Formänderung des Bogens ist die Längskraft X_n ebenso groß wie bei einem Zugband. Nach der im Ansatz gewählten Superposition sind die Momente im

$$\text{Bogen: } M_{k,b} = M_{k0,b}^{(n-1)} - M_{kn}^{(n-1)} X_n = \frac{\mu}{1+\mu}(M_{k0,b}^{(0)} - X_n y_k),$$

$$\text{Streckträger: } M_{k,z} = \frac{1}{1+\mu}(M_{k0,b}^{(0)} - X_n y_k).$$

Das Ergebnis ist eine Bestätigung für die bekannte Aufteilung der Biegungsmomente des Bogenträgers im Verhältnis der Trägheitsmomente von Bogen- und Streckträger. Sie kann sich allerdings wesentlich ändern, wenn die einschränkenden Voraussetzungen für die Integration des Ansatzes nicht erfüllt sind. Er wird dann nach der allgemeinen Rechenvorschrift Abschn. 29 gelöst.

Die Integration der Elastizitätsgleichungen wird, wie dies bereits aus diesen kurzen Bemerkungen einzusehen ist, nur bei einer größeren Anzahl von Unbekannten und bei konstanten Vorzahlen des Ansatzes verwendet. Die Bedeutung dieser Lösung liegt in der Beschreibung des Kräftebildes regelmäßig ausgebildeter Tragwerke, dessen Gesetzmäßigkeiten am besten durch einen funktionalen Zusammenhang dargestellt werden können. Daher sind vor allem mehrfache Tragwerke mit Erfolg durch Differenzengleichungen untersucht worden.

Seliwanoff, D.: Lehrbuch der Differenzenrechnung. Leipzig 1904. — Wallenberg, G.: Theorie der linearen Differenzengleichungen. Leipzig u. Berlin 1911. — Funk, P.: Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin 1920. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin 1925. — Derselbe: Anwendung von Differenzengleichungen in der Statik hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke. Eisenbau 1918 S. 122. — Mann, L.: Statische Berechnung steifer Vierecknetze. Dissertation Berlin 1909 und Z. Bauwes. 1909. — Wanke, J.: Über die Berechnung von Bogenträgern mit einem Streckträger. Eisenbau 1921 S. 264; außerdem in der Melanfestschrift. Leipzig u. Wien 1923. — Fritsche, J.: Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzengleichungen. Berlin 1923. — Melan, E.: Ein Beitrag zur Auflösung linearer Differenzengleichungen mit beliebiger Störungsfunktion. Eisenbau 1920 S. 88. — Bleich u. Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Berlin 1927.

34. Ansätze mit unabhängigen überzähligen Größen.

Die Elastizitätsgleichungen sind durch die Ausnützung der Symmetrie des Tragwerks bei der Bildung des Hauptsystems wesentlich einfacher geworden und enthalten im Vergleich zum allgemeinen Ansatz nur einen Bruchteil der überzähligen Größen. Die algebraische Auflösung linearer Gleichungen wird jedoch ganz überflüssig, wenn alle Vorzahlen $\delta_{ik} (i \neq k)$ durch die Struktur des Hauptsystems oder durch Zusammenfassung der statisch unbestimmten Schnittkräfte zu ausgezeichneten Gruppen ausfallen. Die überzähligen Größen sind dann unabhängig voneinander.

$$X_k \delta_{kk} = \delta_{k\otimes}, \qquad X_k = \frac{\delta_{k\otimes}}{\delta_{kk}} = \frac{\delta_{k0} + \delta_{kt} + \delta_{ks}}{\delta_{kk}}. \tag{465}$$

Ein derartiger Ansatz kann grundsätzlich bei jedem statisch unbestimmten Tragwerk angegeben werden. Er verdient aber nur Beachtung, wenn die Fehlerfortpflanzung bei der Auswertung der $\frac{1}{2} \cdot n (n+1)$ Bedingungen $\delta_{ik} = 0 \ (i \neq k)$ keine Schwierigkeiten bereitet und damit zuverlässige Ergebnisse für Zähler und Nenner erhalten werden. In allen anderen Fällen ist die Formulierung der überzähligen Größen und die Auflösung der Bedingungsgleichungen nach Abschn. 29 einfacher. Die Brauchbarkeit des Ansatzes hängt außerdem von der fehlerfreien Superposition