



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

35. Methoden bei wenigen überzähligen Größen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

der überzähligen Größen X_k bei der Bildung der Schnittkräfte ab. Diese ist auch bei der Auswahl unter den verschiedenen Hauptsystemen entscheidend, welche sich für die unabhängige Berechnung der überzähligen Größen eignen. Im allgemeinen werden diejenigen Hauptsysteme bevorzugt, deren überzählige Größen klein sind.

Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, I. Abt. 5. Aufl. Stuttgart 1922. — Grüning, M.: Theorie der Baukonstruktionen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV 29a. Leipzig 1907—1914.

35. Methoden bei wenigen überzähligen Größen.

Die Vorzahlen δ_{ik} bedeuten allgemein eine virtuelle Arbeit $1_i \cdot \delta_{ik}$ der Kräftegruppe $-X_i = 1$ bei den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte i durch die Kräftegruppe $-X_k = 1$. Sie erhalten in einzelnen Fällen geometrische Bedeutung und bezeichnen die Projektion des Vektors einer Verdrehung oder Verschiebung. Die Bedingung $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ kann dann kinematisch erklärt werden.

Sind X_i und X_k zwei statisch unbestimmte Stützkräfte, so bedeutet $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ die winkelrechte Lage des Vektors $\vec{i}i'$ der von $-X_k = 1$ hervorgerufenen Verschiebung des Punktes i zur Richtung des Kraftvektors X_i . Die Bedingung $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ kann daher mit einem Verschiebungsplan des Hauptsystems erfüllt werden, der für $-X_k = 1$ gezeichnet wird und $\vec{i}i'$ liefert (S. 139). X_i ist dann senkrecht dazu.

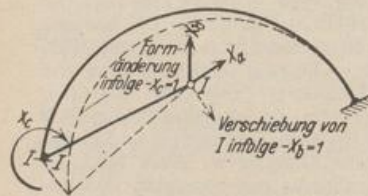


Abb. 233. $\delta_{ab} = 0$; $\delta_{ac} = 0$; $\delta_{bc} = 0$. Die Nebenbedingungen bedeuten kinematisch, daß $X_b \perp \vec{bb}'$ infolge $-X_a = 1$ ist und die Wirkungslinien von X_a und X_b durch den Pol der elastischen Bewegung der Endtangentialen in I infolge von $-X_c = 1$ verlaufen.

Ist X_k ein Spannungsmoment, so wird $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$, wenn die Wirkungslinie von X_i während der Bewegung infolge von $-X_k = 1$ durch den Drehpunkt der Stabtangente verläuft. Ist X_k ein Biegemoment, so ist die Lage von k bei $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ dadurch bestimmt, daß die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung der Querschnitte i infolge $-X_k = 1$ Null ist (Abb. 233).

Diese zeichnerischen Hilfsmittel sind meist nicht genau genug, um die Nebenbedingungen $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ vollständig zu erfüllen, so daß sie besser durch analytische Lösung ersetzt werden. In einfachen Fällen treten an die Stelle der statisch unbestimmten Schnittkräfte eines ausgezeichneten Querschnitts

äquivalente Kräfte mit geometrischen Freiwerten. Die überzähligen Größen erscheinen daher als Funktionen der Koordinaten x_0, y_0 ihres Schnittpunktes und des Winkels φ zwischen ihren Richtungen. Damit werden auch die Schnittkräfte N_i, N_k, M_i, M_k des Hauptsystems infolge von $-X_i = 1, -X_k = 1$ Funktionen dieser Koordinaten. Sie können mit den Nebenbedingungen

$$\delta_{ik} = \frac{J_c}{F_c} \int N_i N_k \frac{F_c}{F} ds + \int M_i M_k \frac{J_c}{J} ds = 0 \quad (466)$$

so bestimmt werden, daß je drei einander zugeordnete überzählige Größen voneinander unabhängig sind.

Anwendung auf zweifach statisch unbestimmte Stabwerke. Als überzählige Größen werden die Komponenten einer Gelenkkraft $X_1 \uparrow X_2$ mit dem Winkel $\varphi = 90 - \psi$ (Abb. 239b) oder die Biegemomente X_1, X_2 zweier Querschnitte im Abstand e (Abb. 239f) verwendet. Dann sind φ und e geometrische Freiwerte, die so bestimmt werden, daß $1_1 \cdot \delta_{12} = 0$. Dies wird mit der Berechnung des Rahmens Abb. 239a ausführlich gezeigt.

a) Die überzähligen Größen sind die Komponenten X_1, X_2 der Stützkraft im Punkte a . Die Richtung von X_2 schließt mit der Waagerechten den Winkel ψ ein.

Dieser dient als geometrischer Freiwert. Die Kraft $-X_1 = 1$ liefert M_1 , die waagerechte Kraft 1 in a die Momente M_k . Aus der Bedingung

$$\int M_1 M_2 \frac{J^e}{J} ds = \int M_1 (M_1 \sin \psi + M_k \cos \psi) \frac{J^e}{J} ds = 0$$

folgt

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{\int M_1 M_k \frac{J^e}{J} ds}{\int M_1^2 \frac{J^e}{J} ds}. \quad (467)$$

Besitzen die beiden Rahmenstäbe konstantes Trägheitsmoment, so ist

$$\operatorname{tg} \psi = + \frac{3 l' h}{2 l^2 l'} = + \frac{3 h}{2 l}.$$

b) Die überzähligen Größen sind das Biegemoment X_1 und die waagerechte Komponente X_2 des Stützendrucks A . Parameter ist die Abszisse e des Quer-

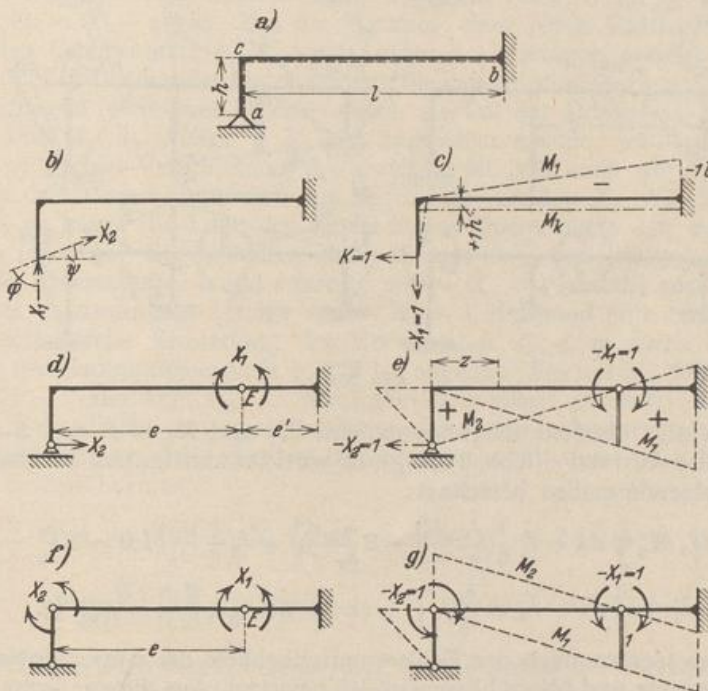


Abb. 239.

schnitts E (Abb. 239 d, e). Bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe ist $e = 2/3 \cdot l$. Der Ansatz erfährt keine Änderung, wenn die beiden Biegemomente X_1 und X_2 in E und C als überzählige Größen gewählt werden (Abb. 239 f, g) und der Parameter e so bestimmt wird, daß die Nebenbedingung $1_1 \cdot \delta_{12} = 0$ erfüllt ist.

In ähnlicher Weise wird der Rahmen Abb. 240 berechnet.

a) Überzählige Größen: Die Komponenten X_1, X_2 des Stützendrucks A (Abb. 240 b, c). Parameter ist der Winkel ψ .

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{\int M_1 M_k \frac{J^e}{J} ds}{\int M_1^2 \frac{J^e}{J} ds}.$$

Bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe ist

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h_1 (3l'_1 + 2l'_2) + h_2 l'_2}{2l_1 (l'_1 + l'_2)}$$

b) Überzählige Größen: Stützkraft $C = X_1$ und das Biegemoment $M_E = X_2$. Parameter ist die Strecke e (Abb. 240 d, e).

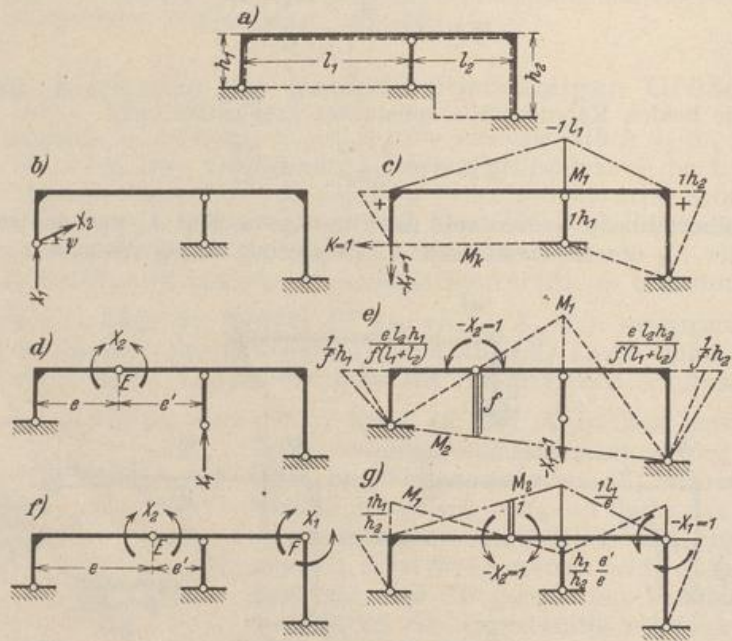


Abb. 240.

c) Überzählige Größen: Biegemomente X_1 und X_2 in F und E . Als Parameter dient der Abstand e (Abb. 240 f, g). Er wird bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe folgendermaßen berechnet:

$$\delta_{12} = \int M_1 M_2 \frac{J_c}{J} ds = l'_1 \frac{1}{6} \frac{l_1}{e} \left(\frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{h_1}{h_2} \frac{e'}{e} \right) + l'_2 \frac{1}{6} \frac{l_1}{e} \left(1,0 - 2 \frac{h_1}{h_2} \frac{e'}{e} \right) = 0;$$

$$\lambda'_1 = \frac{l'_2}{l'_1}; \quad \lambda_h = \frac{h_2}{h_1}; \quad e = \frac{2 + 2\lambda'_1}{3 + 2\lambda'_1 + \lambda'_1 \lambda_h} l_1.$$

Diese Ansätze werden nach der Fehlerempfindlichkeit der Superposition der Anteile aus Belastung und überzähligen Größen bewertet. Aus diesem Grunde verdient der dritte Ansatz in beiden Beispielen den Vorzug.

Anwendung auf dreifach statisch unbestimmte Stabwerke. Die überzähligen Größen X_a, X_b, X_c eines Hauptsystems können entweder aus den drei Schnittkräften eines Querschnitts b (Abb. 241) oder aus drei Biegemomenten (Abb. 243) abgeleitet werden. Außerdem besteht die Möglichkeit, dafür die Biegemomente der Querschnitte k_1, k_2 und die waagerechte Komponente der Kraft $\int (\tau \mp \sigma) dF$ eines der beiden Querschnitte (k_2) zu wählen (Abb. 242).

Die geometrischen Freiwerte (x'_0, y'_0, ψ), die auf diese Weise eingehen, werden aus den Nebenbedingungen

$$1_a \delta_{ab} = 0, \quad 1_b \delta_{bc} = 0, \quad 1_c \delta_{ca} = 0 \quad (468)$$

so bestimmt, daß die überzähligen Größen X_a, X_b, X_c nicht mehr voneinander abhängen. Diese bestehen in dem Ansatz zu Abb. 241 aus den Schnittkräften des

Querschnitts b , also aus zwei Gruppen von Kräften, die wiederum miteinander im Gleichgewicht sind. Die überzähligen Größen des Ansatzes zu Abb. 242 bilden zweimal zwei Gruppen von Kräften, von denen ebenfalls je zwei im Gleichgewicht

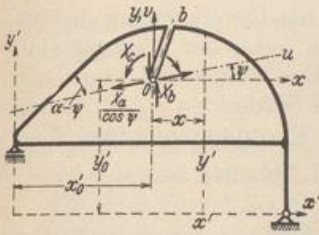


Abb. 241.

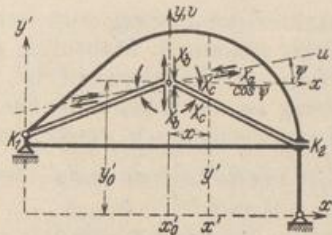


Abb. 242.

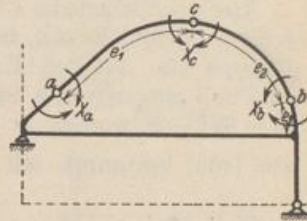


Abb. 243.

sind. Jeder Ansatz enthält eine Kraft $X_a \uparrow X_b$ und ein Kräftepaar X_c . Die Wirkungslinien der Kräfte schneiden sich in einem Punkt $O(x'_0, y'_0)$ und schließen den Winkel $\varphi = 90 - \psi$ ein. Um die Wirkung einer jeden Kräftegruppe auf die zugeordneten Querschnitte k_1, k_2 zum Ausdruck zu bringen, werden diese mit O durch starre Stäbe verbunden angenommen, die keine Formänderung erleiden. Nach den Bedingungen (468) kann O kinematisch als Pol der Drehbewegung der Querschnitte k oder k_1, k_2 infolge $-X_c = 1$ angesehen werden, während X_a winkelrecht zur wirklichen Verschiebung δ_{ab} gerichtet ist (vgl. auch Abb. 238).

Werden drei Biegemomente als überzählige Größen X_a, X_b, X_c verwendet (Abb. 243), so hängt die Lage der zugeordneten Querschnitte a, b, c von den Bedingungen (468) ab. Sie bedeuten dann kinematisch, daß die gegenseitige Verdrehung der Querschnitte b und c infolge von $-X_a = 1$ und die gegenseitige Verdrehung des Querschnitts c infolge von $-X_b = 1$ Null sind (vgl. S. 272).

Die zeichnerische Ermittlung der Koordinaten x'_0, y'_0, ψ durch kinematische Auslegung der Bedingungen nach S. 272 ist ungenau. Sie werden daher analytisch mit $M_a, M_b \dots$ oder $M_a^{(r)}, M_b^{(r)} \dots$ als Funktionen dieser geometrischen Freiwerte entwickelt, je nachdem ein statisch bestimmtes oder r fach statisch unbestimmtes Hauptsystem vorliegt. Jede der drei Bedingungen erhält dann nach (299) eine der folgenden beiden Formen:

$$\left. \begin{aligned} 1_a \delta_{ab} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_a N_b \frac{F_c}{F} ds + \int M_a M_b \frac{J_c}{J} ds = 0, \\ 1_a^{(r)} \delta_{ab}^{(r)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_a^{(r)} N_b^{(r)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_a^{(r)} M_b^{(r)} \frac{J_c}{J} ds = 0. \end{aligned} \right\} \quad (469)$$

Ihre Anzahl kann auch beschränkt werden, um die Matrix der überzähligen Größen auf diese Weise aufzuspalten. Dies geschieht oft mit Rücksicht auf die Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Bei unsymmetrischen Bogen- und Rahmenträgern (Abb. 244) wird daher auch $1_a \delta_{ab} \neq 0$ verwendet und mit der folgenden Matrix gerechnet.

	X_a	X_b	X_c	
δ_{aa}	δ_{ab}			δ_{a0}
δ_{ba}	δ_{bb}			δ_{b0}
			δ_{cc}	δ_{c0}

(470)

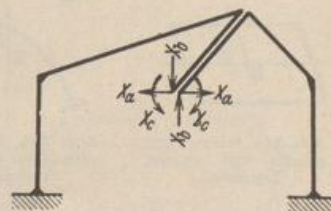


Abb. 244.

Der Ansatz ist durch die Untersuchung geschlossener oder eingespannter ein- und mehrteiliger Stabzüge mit statisch bestimmtem oder unbestimmtem Haupt-

system bekannt geworden. Unter verschiedenen Lösungen verdient stets diejenige Anordnung den Vorzug, deren überzählige Schnittkräfte klein sind, das Kräftebild des Hauptsystems also wenig ändern und einfache Ausdrücke für $N_a, M_a \dots$ oder $N_a^{(r)}, M_a^{(r)} \dots$ liefern.

Der grundsätzliche Charakter der Lösung zeigt sich bei Untersuchung des einteiligen, geschlossenen, beliebig geformten Stabzuges, der unter der Wirkung einer Gruppe von äußeren Kräften im Gleichgewicht ist. Der beiderseits starr oder elastisch eingespannte Stabzug ist ein Sonderfall. Die Koordinaten x'_0, y'_0, φ oder $\psi = 90^\circ - \varphi$ werden in einem geometrisch geeigneten Koordinatensystem x', y' aus (468) bestimmt. Mit $\frac{J_c}{J} ds = ds', \frac{F_c}{F} ds = ds''$ und Abb. 241 ist

$$\left. \begin{aligned} 1_a \delta_{ac} &= \int 1 [y' - y'_0 - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi] ds' = 0, & 1_b \delta_{bc} &= \int 1 (x' - x'_0) ds' = 0, \\ 1_b \delta_{ab} &= \frac{J_c}{F_c} \int \frac{\cos(\psi - \alpha) \sin \alpha}{\cos \psi} ds'' + \int (x' - x'_0) [y' - y'_0 - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi] ds' = 0, \\ y'_0 &= \frac{\int y' ds'}{\int ds'}, & x'_0 &= \frac{\int x' ds'}{\int ds'}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\int (x' - x'_0)(y' - y'_0) ds' + \frac{J_c}{F_c} \int \sin \alpha \cos \alpha ds''}{\int (x' - x'_0)^2 ds' + \frac{J_c}{F_c} \int \sin^2 \alpha ds''} \approx \frac{\int (x' - x'_0) y' ds'}{\int (x' - x'_0)^2 ds'}. \end{aligned} \right\} (471)$$

Besteht das Stabwerk aus geraden Elementen s_k von konstantem Trägheitsmoment J_k , deren Projektionen auf die Richtungen x', y' mit s_{kx}, s_{ky} und deren Schwerpunktsabstände mit x'_{k0}, y'_{k0} bezeichnet werden, so ist mit $s'_k = s_k \cdot J_c / J_k$:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\sum x'_{k0} s'_k}{\sum s'_k}; & y'_0 &= \frac{\sum y'_{k0} s'_k}{\sum s'_k}; \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\sum y'_{k0} x'_{k0} s'_k + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \sum s_{ky} s_{kx} s'_k - x'_0 \sum y'_{k0} s'_k}{\sum x'_{k0} s'_k + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \sum s_{kx}^2 s'_k - x'_0 \sum x'_{k0} s'_k}. \end{aligned} \right\} (472)$$

In bezug auf das neue Koordinatensystem u, v (Abb. 241 u. 242) ist dann

$$\int u \frac{ds}{EJ} = 0; \quad \int v \frac{ds}{EJ} = 0; \quad \int uv \frac{ds}{EJ} = 0. \quad (473)$$

Der Ursprung O wird daher als Schwerpunkt elastischer Gewichte ds/EJ bezeichnet, deren Deviationsmoment bezogen auf die Richtungen der Kräfte X_b und $X_a/\cos \psi$

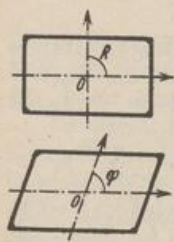


Abb. 245. Rahmen mit gerader und schiefer Symmetrie.

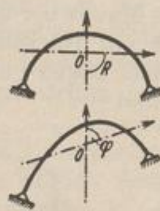


Abb. 246. Bogen mit gerader und schiefer Symmetrie.

Null ist. Diese Analogie zur Geometrie der Massen hat zur Aufzeichnung einer Elastizitätsellipse und eines Elastizitätskreises geführt, deren zugeordnete Achsen die Bedingungen (473) erfüllen. Schwerpunkt und Achsensystem sind von der Lage der ausgezeichneten Querschnitte k oder k_1, k_2 (Abb. 242) unabhängig. Sie können beliebig liegen, werden jedoch stets so gewählt, daß die Schnittkräfte aus den Belastungszuständen des Hauptsystems einfach anzugeben sind. Der elastische Schwerpunkt liegt bei gerader und schiefer Symmetrie

auf deren Achse (Abb. 245 u. 246). Diese bestimmt gemeinsam mit der Symmetrierichtung das Bezugssystem. Die Lage des elastischen Schwerpunktes folgt aus $\delta_{ac} = 0$. Die Bedingung wird unter Umständen in Verbindung mit den Komponenten $\epsilon_{22}, \epsilon_{21}$ des Verschiebungszustandes der anschließenden Bauteile ange-

geschrieben (Abb. 247). Sie bedeuten die EJ_c fachen Drehwinkel des Anschlußquerschnitts a des symmetrischen Stabzugs infolge eines Kräftepaars von 1 mt und einer zur y -Achse winkelrechten Einzellast von 1 t.

$$1_a \delta_{ac} = -2(y'_0 \epsilon_{22} + \epsilon_{21}) + \int (y' - y'_0) ds' = 0, \quad \left. \begin{aligned} y'_0 &= \frac{\int y' ds' - 2 \epsilon_{21}}{\int ds' + 2 \epsilon_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (474)$$

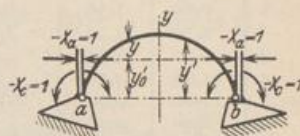


Abb. 247.

Bei zwei Symmetrieachsen ist der geometrische Mittelpunkt gleichzeitig auch elastischer Schwerpunkt (Abb. 245).

Die drei Vorzahlen δ_{aa} , δ_{bb} , δ_{cc} sind ebenso wie die Koordinaten des elastischen Schwerpunkts x'_0 , y'_0 , ψ unabhängig von der Wahl des Hauptsystems und werden aus

$$\left. \begin{aligned} \sum s'_k; \quad \sum x'_{k0} s'_k; \quad \sum y'_{k0} s'_k; \\ \sum x'^2_{k0} s'_k; \quad \sum y'^2_{k0} s'_k; \quad \sum x'_{k0} y'_{k0} s'_k; \\ \sum s'^2_{kx} s'_k; \quad \sum s'^2_{ky} s'_k; \quad \sum s_{kx} s_{ky} s'_k; \end{aligned} \right\} \quad (\text{Abb. 248}) \quad (475)$$

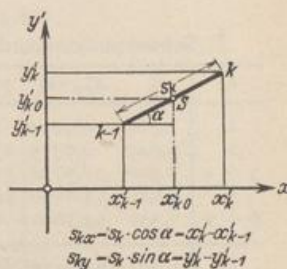


Abb. 248.

folgendermaßen berechnet:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\sum x'_{k0} s'_k}{\sum s'_k} = \frac{\delta_{b'e}}{\delta_{cc}}; \quad y'_0 = \frac{\sum y'_{k0} s'_k}{\sum s'_k} = \frac{\delta_{a'e}}{\delta_{cc}}; \\ \delta_{b'b} &= \sum x'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s'^2_{kx} s'_k - x'_0 \sum x'_{k0} s'_k = \delta_{b'b'} - x'_0 \delta_{b'e}, \\ \delta_{a'a,1} &= \sum y'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s'^2_{ky} s'_k - y'_0 \sum y'_{k0} s'_k = \delta_{a'a'} - y'_0 \delta_{a'e}, \\ \delta_{a'b} &= \sum x'_{k0} y'_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s_{kx} s_{ky} s'_k - x'_0 \sum y'_{k0} s'_k = \delta_{a'b'} - x'_0 \delta_{a'e}, \\ \text{tg } \psi &= \frac{\delta_{a'b}}{\delta_{b'b}}; \quad \delta_{a'a,2} = \text{tg } \psi \delta_{a'b}. \end{aligned} \right\} \quad (476)$$

Hierbei hat $\delta_{i'k}$ die Bedeutung einer gegenseitigen Verschiebung oder Verdrehung im Sinne einer Kraft $-X'_i \uparrow \uparrow -X'_k$, die im Ursprung des Koordinatensystems x', y' angreift, hervorgerufen durch $-X'_k = 1$ im Punkte O . Ebenso bedeutet $\delta_{i'k'}$ die Verschiebung infolge $-X'_k = 1$ ($X'_k \uparrow \uparrow X'_k$, im Punkte $x' = 0, y' = 0$). Danach ist $\delta_{i'k} = \int M'_i M'_k \frac{J_c}{J} ds$. Für ein $r = (n - 3)$ fach statisch unbestimmtes Hauptsystem werden die Verschiebungen mit $\delta_{i'k}^{(r)}$, $\delta_{i'k'}^{(r)}$ bezeichnet und in derselben Weise berechnet. Die Vorzahlen in (465) sind:

$$\delta_{cc} = \sum s'_k; \quad \delta_{bb} = \delta_{b'b}; \quad \delta_{aa} = \delta_{a'a,1} - \delta_{a'a,2}. \quad (477)$$

Die Untersuchung erfährt bei einem statisch unbestimmtem Hauptsystem keine grundsätzliche Änderung. Die geometrischen Freiwerte sind durch (468) bestimmt.

Berechnung von Dachrahmen.

A. Geometrische Grundlagen.

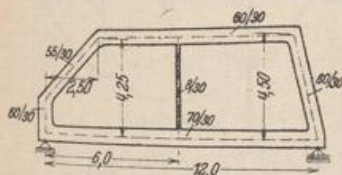


Abb. 249.

$$\begin{aligned} J_c &= 0,0054 \text{ m}^4; \\ F_{e1} (\text{Eisen}) &= 0,0016 \text{ m}^2; \\ E_b &= 210 \text{ t/cm}^2; \\ n &= E_s/E_b = 10. \end{aligned}$$

Bezeichnungen vgl. Abb. 248.

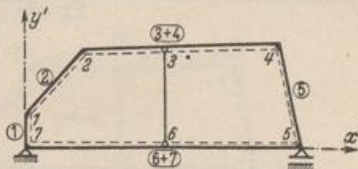


Abb. 250.

* $\uparrow \uparrow$ bedeutet parallel und gleichgerichtet (vgl. Hütte).

k	x'_k	y'_k	x'_{k0}	y'_{k0}	s_{kx}	s_{ky}	s_k	J_c/J	s'_k
0	0,00	0,00							
1	0,00	1,50	0,00	0,750	0,00	1,50	1,50	1,0000	1,500
2	2,50	4,25	1,250	2,875	2,50	2,75	3,72	1,2980	4,829
3	6,00	4,35	6,750	4,375	8,50	0,25	3,50	1,0000	3,500
4	11,00	4,50					5,00	1,0000	5,000
5	12,00	0,00	11,500	2,250	1,00	-4,50	4,61	1,0000	4,610
6	6,00	0,00	6,000	0,000	-12,00	0,00	6,00	0,6294	3,776
7	0,00	0,00					6,00	0,6294	3,776

B. Dachrahmen ohne Hängesäule.

1. Schwerpunktskoordinaten und Vorzahlen nach (475) u. (476).

h	s'_k	x'_{k0} \cdot s'_k	y'_{k0} \cdot s'_k	x'^2_{k0} s'_k	y'^2_{k0} s'_k	x'_{k0} y'_{k0} s'_k	s^2_{kx} s'_k	s^2_{ky} s'_k	s_{kx} s_{ky} s'_k
1	1,500	0,0000	1,1250	0,0000	0,8438	0,0000	0,0000	3,3750	0,000
2	4,829	6,0375	13,8863	7,5469	39,9231	17,3578	30,1813	36,5193	33,1994
3 + 4	8,500	57,3750	37,1875	387,2813	162,6953	251,0156	614,1250	0,5313	18,0625
5	4,610	53,0150	10,3725	609,6725	23,3381	119,2838	4,6100	93,3525	-20,7450
6 + 7	7,552	45,3000	0,0000	271,8000	0,0000	0,0000	1087,4880	0,0000	0,0000
Σ	26,991	161,7275	62,5713	1276,3007	226,8003	387,6572	1736,4043	133,7781	30,5169

$$\delta_{b'e} = \Sigma x'_{k0} s'_k = 161,7275; \quad \delta_{a'e} = \Sigma y'_{k0} s'_k = 62,5713; \quad \delta_{ee} = \Sigma s'_k = 26,991;$$

$$\delta_{b'b} = \Sigma x'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s^2_{kx} s'_k = 1276,3007 + \frac{1}{12} 1736,4043 = 1421,0011;$$

$$\delta_{a'a} = \Sigma y'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s^2_{ky} s'_k = 226,8003 + \frac{1}{12} 133,7781 = 237,9485;$$

$$\delta_{a'b} = \Sigma x'_{k0} y'_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s_{kx} s_{ky} s'_k = 387,6572 + \frac{1}{12} 30,5169 = 390,2003;$$

$$x'_0 = \frac{\delta_{b'e}}{\delta_{ee}} = \frac{161,7275}{26,991} = 5,9921; \quad y'_0 = \frac{\delta_{a'e}}{\delta_{ee}} = \frac{62,5713}{26,991} = 2,3183;$$

$$\delta_{b'b} = \delta_{b'b} - x'_0 \delta_{b'e} = 1421,0011 - 5,9921 \cdot 161,7275 = 451,914;$$

$$\delta_{a'a,1} = \delta_{a'a} - y'_0 \delta_{a'e} = 237,9485 - 2,3183 \cdot 62,5713 = 92,8895;$$

$$\delta_{a'a} = \delta_{a'a} - x'_0 \delta_{a'e} = 390,2003 - 5,9921 \cdot 62,5713 = 15,2668;$$

$$\text{tg } \psi = \frac{\delta_{a'a}}{\delta_{b'b}} = \frac{15,2668}{451,914} = 0,03378; \quad \delta_{a'a,2} = \text{tg } \psi \cdot \delta_{a'a} = 0,5157;$$

$$\delta_{ee} = 26,991; \quad \delta_{bb} = \delta_{b'b} = 451,914;$$

$$\delta_{aa} = \delta_{a'a} = \delta_{a'a,1} - \delta_{a'a,2} = 92,8895 - 0,5157 = 92,3738;$$

Probe für die Koordinaten x'_0 ; y'_0 ; ψ nach (472):

$$\Sigma (y'_{k0} - y'_0) s'_k = 0,0; \quad \Sigma (x'_{k0} - x'_0) s'_k = 0,0;$$

$$\Sigma (x'_{k0} - x'_0) (y'_{k0} - x'_0 \text{tg } \psi) s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s_{kx} (s_{ky} - s_{kx} \text{tg } \psi) s'_k = 0,0.$$

2. Belastung und Wahl des Hauptsystems nach (Abb. 242).

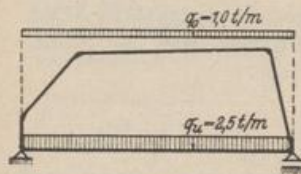


Abb. 251.

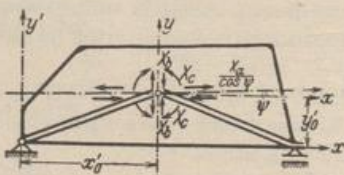


Abb. 252.

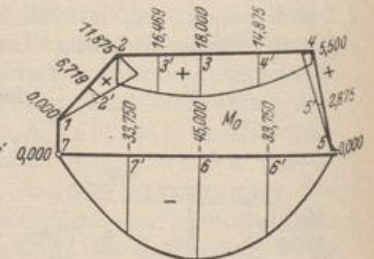


Abb. 253.

Belastung: Gleichmäßig verteilte Last aus Eigengewicht und Nutzlast nach Abb. 251.
 Hauptsystem: Zwei Balken auf zwei Stützen nach Abb. 252. Die überzähligen Schnittkräfte werden durch eine äquivalente Kräftegruppe X_a, X_b, X_c im elastischen Schwerpunkt ersetzt.

Momente M_0 im Hauptsystem: Abb. 253; Momente im Hauptsystem aus:

$$\begin{aligned} -X_c &= 1, & M_c &= -1,0; \\ -X_b &= 1, & M_b &= -x = -(x' - x'_0); \\ -X_a &= 1, & M_a &= -[y - x \operatorname{tg} \psi] = -[(y' - y'_0) - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi]. \end{aligned}$$

3. Belastungszahlen: Tabellarische Berechnung von:

$$\begin{aligned} \delta_{b'0} &= -\int x' M_0 ds' = +354,455; & \delta_{a'0} &= -\int y' M_0 ds' = -687,355; \\ \delta_{c0} &= -\int 1 M_0 ds' = +57,224; & \delta_{a0} &= -\int (y - x \operatorname{tg} \psi) M_0 ds' = \delta_{a'0} - y'_0 \delta_{c0} - \operatorname{tg} \psi \delta_{b0}; \\ \delta_{a0} &= -687,355 - 2,3183 \cdot 57,224 - 0,03378 \cdot 11,563 = -820,408; \\ \delta_{b0} &= -\int x M_0 ds' = \delta_{b'0} - x'_0 \delta_{c0} = 354,455 - 5,9921 \cdot 57,224 = 11,563. \end{aligned}$$

4. Überzählige Größen:

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{\delta_{a0}}{\delta_{aa}} = \frac{-820,408}{92,3738} = -8,8814 \text{ t}, \\ X_b &= \frac{\delta_{b0}}{\delta_{bb}} = \frac{11,563}{451,914} = +0,02559 \text{ t}, \\ X_c &= \frac{\delta_{c0}}{\delta_{cc}} = \frac{57,224}{26,991} = +2,1201 \text{ mt}. \end{aligned}$$

5. Momente im dreifach statisch unbestimmten System (Abb. 254):

$$\begin{aligned} M &= M_0 - X_a M_a - X_b M_b - X_c M_c \\ &= M_0 + X_a [(y' - y'_0) - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi] + X_b (x' - x'_0) + X_c \\ &= M_0 + X_a y' + (X_b - X_a \operatorname{tg} \psi) x' + [X_c - X_b x'_0 - X_a (y'_0 - \operatorname{tg} \psi x'_0)] \\ &= M_0 - 8,8815 y' + 0,32559 x' + 20,7593. \end{aligned}$$

k	M [mt]	k	M [mt]
1	+ 7,4370	4	- 10,1260
2'	+ 2,3507	5	+ 24,6664
2	- 4,2981	6'	- 10,0604
3'	+ 0,4213	6	- 22,2872
3	+ 2,0783	7'	- 12,0139
4'	- 0,8988	7	+ 20,7593

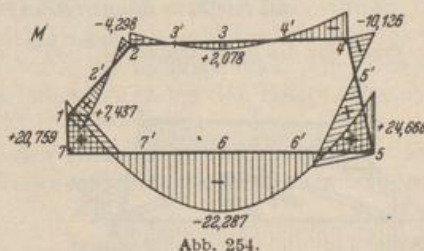


Abb. 254.

C. Dachrahmen mit Hängestange.

Das System ist vierfach statisch unbestimmt. Die Schnittkräfte X_1, X_2, X_3 an den Querschnitten 5 und 7 (Abb. 250) werden durch eine äquivalente Kräftegruppe X_a, X_b, X_c ersetzt, für die

$$\delta_{b'c}^{(1)} = 0; \quad \delta_{a'c}^{(1)} = 0; \quad \delta_{a'b}^{(1)} = 0$$

ist. Dies sind die Nebenbedingungen für die Koordinaten $x'_0, y'_0, \psi^{(1)}$. In den Ansätzen unter B dieser Aufgabe treten daher an Stelle der Formänderungen δ_{ik} die Formänderungen $\delta_{ik}^{(1)}$ des einfach statisch unbestimmten Hauptsystems.

1. Belastung: Gleichmäßig verteilte Last aus Eigengewicht und Nutzlast nach Abb. 251.

2. Hauptsystem, einfach statisch unbestimmt: Zwei übereinanderliegende einfache Träger mit Hängestange. Statisch unbestimmte Schnittkraft: Y_A (Längskraft der Hängestange). Die Formänderungen des statisch unbestimmten Hauptsystems werden aus den folgenden zugeordneten Formänderungen des statisch bestimmten Hauptsystems berechnet (Abb. 255):

$$\delta_{AA} = \int M_A^2 ds' + \frac{J_c}{11 F_Z} S_Z^2 s_Z = 61,6325;$$

$$\delta_{Ac} = -\int 1 M_A ds' = 31,6838;$$

$$\delta_{A'b'} = -\int x' M_A ds' = 188,6054;$$

$$\delta_{A'a'} = -\int y' M_A ds' = 84,1148.$$

$\delta_{b'e}, \delta_{a'e}, \delta_{c'e}$ usw. aus B, 1.

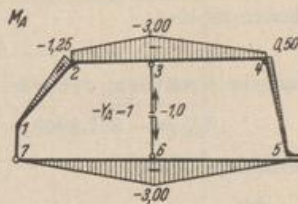


Abb. 255.

3. Schwerpunktskoordinaten und Vorzahlen $\delta_{kk}^{(1)}$:

$$Y_{Ac} = \frac{\delta_{Ac}}{\delta_{AA}} = 0,51407; \quad Y_{Ab'} = \frac{\delta_{Ab'}}{\delta_{AA}} = 3,06016; \quad Y_{Aa'} = \frac{\delta_{Aa'}}{\delta_{AA}} = 1,36478;$$

$$\begin{aligned} \delta_{b'c}^{(1)} &= \delta_{b'c} - Y_{Ac} \delta_{Ab'} = 161,7275 - 0,51407 \cdot 188,6054 = 64,7711, \\ \delta_{a'c}^{(1)} &= \delta_{a'c} - Y_{Ac} \delta_{Aa'} = 62,5713 - 0,51407 \cdot 84,1148 = 19,3304, \\ \delta_{cc}^{(1)} &= \delta_{cc} - Y_{Ac} \delta_{Ac} = 26,991 - 0,51407 \cdot 31,6838 = 10,7033, \\ \delta_{b'b'}^{(1)} &= \delta_{b'b'} - Y_{Ab'} \delta_{Ab'} = 1421,0011 - 3,06016 \cdot 188,6054 = 843,8384, \\ \delta_{a'a'}^{(1)} &= \delta_{a'a'} - Y_{Aa'} \delta_{Aa'} = 237,9485 - 1,36478 \cdot 84,1148 = 123,1503, \\ \delta_{a'b'}^{(1)} &= \delta_{a'b'} - Y_{Aa'} \delta_{Ab'} = 390,2003 - 1,36478 \cdot 188,6054 = 132,7954, \\ x_0^{(1)} &= \frac{\delta_{b'c}^{(1)}}{\delta_{cc}^{(1)}} = \frac{64,7711}{10,7033} = 6,0515; \quad y_0^{(1)} = \frac{\delta_{a'c}^{(1)}}{\delta_{cc}^{(1)}} = \frac{19,3304}{10,7033} = 1,8060, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{b'b}^{(1)} &= \delta_{b'b'}^{(1)} - x_0^{(1)} \delta_{b'c}^{(1)} = 843,8384 - 6,0515 \cdot 64,7711 = 451,8761, \\ \delta_{a'a,1}^{(1)} &= \delta_{a'a'}^{(1)} - y_0^{(1)} \delta_{a'c}^{(1)} = 123,1503 - 1,8060 \cdot 19,3304 = 88,2396, \\ \delta_{a'b}^{(1)} &= \delta_{a'b'}^{(1)} - x_0^{(1)} \delta_{a'c}^{(1)} = 132,7954 - 6,0515 \cdot 19,3304 = 15,8175, \\ \text{tg } \psi^{(1)} &= \frac{\delta_{a'b}^{(1)}}{\delta_{b'b}^{(1)}} = \frac{15,8175}{451,8761} = 0,0350; \quad \delta_{a'a,2}^{(1)} = \text{tg } \psi^{(1)} \cdot \delta_{a'b}^{(1)} = 0,5536, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{cc}^{(1)} &= 10,7033, & \delta_{bb}^{(1)} &= \delta_{b'b}^{(1)} = 451,8761; \\ \delta_{aa}^{(1)} &= \delta_{a'a}^{(1)} = \delta_{a'a,1}^{(1)} - \delta_{a'a,2}^{(1)} = 88,2396 - 0,5536 = 87,6860; \end{aligned}$$

Probe für die Koordinaten $x_0^{(1)}$; $y_0^{(1)}$; $\psi^{(1)}$: Ermittlung von $M_a^{(1)}$, $M_b^{(1)}$, $M_c^{(1)}$:

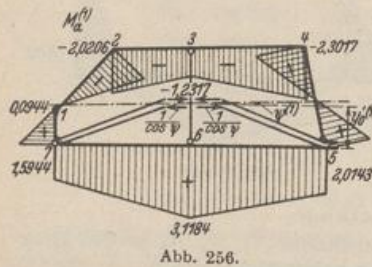


Abb. 256.

$$\begin{aligned} Y_{Ac} &= 0,51407; \\ Y_{Ab} &= Y_{Ab'} - x_0^{(1)} Y_{Ac} = -0,05077; \\ Y_{Aa} &= Y_{Aa'} - y_0^{(1)} Y_{Ac} - \text{tg } \psi^{(1)} Y_{Ab} = 0,4381; \\ \int M_b M_c^{(1)} ds' &= 0,0; \quad \int M_a M_c^{(1)} ds' = 0,0; \\ \int M_a M_b^{(1)} ds' &= 0,0. \quad (\text{Abb. 256 bis 258}). \end{aligned}$$

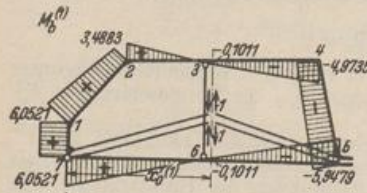


Abb. 257.

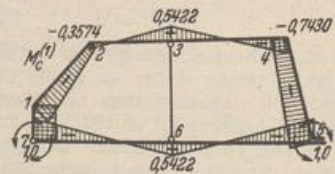


Abb. 258.

4. Belastungszahlen:

$$\delta_{k0}^{(1)} = \int M_0' M_k^{(1)} ds';$$

die tabellarische Ermittlung führt zu:

$$\delta_{a0}^{(1)} = -851,8949; \quad \delta_{b0}^{(1)} = 15,2279; \quad \delta_{c0}^{(1)} = -14,2402.$$

5. Überzählige Größen:

$$X_a^{(1)} = \frac{\delta_{a0}^{(1)}}{\delta_{aa}^{(1)}} = -9,7222 \text{ t}; \quad X_b^{(1)} = \frac{\delta_{b0}^{(1)}}{\delta_{bb}^{(1)}} = +0,0337 \text{ t}; \quad X_c^{(1)} = \frac{\delta_{c0}^{(1)}}{\delta_{cc}^{(1)}} = -1,2713 \text{ mt}.$$

6. Momente im vierfach statisch unbestimmten System (Abb. 259):

$$M = M_0^{(1)} - X_a^{(1)} M_a^{(1)} - X_b^{(1)} M_b^{(1)} - X_c^{(1)} M_c^{(1)}$$

k	M [mt]	k	M [mt]
1	- 0,5575	4	- 16,5268
2'	- 2,2586	5	+ 18,5125
2	- 5,5222	6'	- 5,6046
3'	+ 5,5087	6	- 7,2228
3	+ 13,4847	7'	- 7,8485
4'	+ 1,6040	7	+ 14,0258

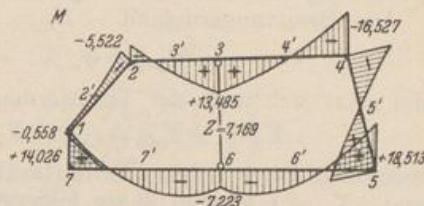


Abb. 259.

36. Die Entwicklung statisch unbestimmter Gruppenlasten.

Die einfachen Methoden zur unabhängigen Berechnung statisch unbestimmter Schnittkräfte versagen bei mehr als drei Unbekannten. Aus diesem Grunde wird der Begriff der überzähligen Größe durch die Bildung von Gruppen dieser ausgezeichneten Schnittkräfte erweitert. Sie sind bei einem n fach statisch unbestimmtem Tragwerk in n facher Mannigfaltigkeit vorhanden, jedoch nur mit n Gruppen unabhängig voneinander. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte werden mit Y_J ($J = A \dots N$) bezeichnet, also durch große Buchstaben unterschieden. Daher beschreiben die Wege δ_{JK} den Verschiebungszustand des Hauptsystems infolge der Belastung durch einzelne statisch unbestimmte Schnittkräfte $-Y_K = 1$. Sie werden im Sinne von $-Y_J$ positiv gerechnet. Die Gruppen statisch unbestimmter Schnittkräfte erhalten als überzählige Größen des Ansatzes wie bisher die Bezeichnung X_k , sind also durch kleine Buchstaben ($k = a \dots n$) unterschieden. Die Wege δ_{Jk} bedeuten daher Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems infolge von $-X_k = 1$ in Richtung von $-Y_J$.

Die Gruppenlasten X_k sind äußere Kräfte des Hauptsystems, mit denen die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks wie in (288) nach dem Superpositionsgesetz entwickelt werden.

$$M = M_0 - \sum X_k M_k, \quad (k = a \dots n). \quad (466)$$

In diesem Ansatz bedeuten M_0, M_k wieder die Schnittkräfte des Hauptsystems infolge der Belastung \mathfrak{B} und der Gruppenlast $-X_k = 1$ ($k = a \dots n$).

Die Bildung der Gruppenlasten. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J werden durch Superposition der Anteile aus den überzähligen Größen X_k gefunden.

$$Y_J = \sum_{k=a}^{k=n} X_k Y_{Jk}, \quad (J = A \dots N). \quad (467)$$

	X_a	X_b	X_h	X_i	X_k	X_n
Y_A	Y_{Aa}	Y_{Ab}	Y_{Ah}	Y_{Ai}	Y_{Ak}	Y_{An}
Y_B	Y_{Ba}	Y_{Bb}	Y_{Bh}	Y_{Bi}	Y_{Bk}	Y_{Bn}
Y_H	Y_{Ha}	Y_{Hb}	Y_{Hh}	Y_{Hi}	Y_{Hk}	Y_{Hn}
Y_J	Y_{Ja}	Y_{Jb}	Y_{Jh}	Y_{Ji}	Y_{Jk}	Y_{Jn}
Y_N	Y_{Na}	Y_{Nb}	Y_{Nh}	Y_{Ni}	Y_{Nk}	Y_{Nn}

(468)