Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Anwendung auf zweifach statisch unbestimmte Stabwerke der überzähligen Größen X_k bei der Bildung der Schnittkräfte ab. Diese ist auch bei der Auswahl unter den verschiedenen Hauptsystemen entscheidend, welche sich für die unabhängige Berechnung der überzähligen Größen eignen. Im allgemeinen werden diejenigen Hauptsysteme bevorzugt, deren überzählige Größen klein sind.

Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 1. Abt. 5. Aufl. Stuttgart 1922. — Grüning, M.: Theorie der Baukonstruktionen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV 29a. Leipzig 1907—1914.

35. Methoden bei wenigen überzähligen Größen.

Die Vorzahlen δ_{ik} bedeuten allgemein eine virtuelle Arbeit $1_i \cdot \delta_{ik}$ der Kräftegruppe $-X_i = 1$ bei den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte i durch die Kräftegruppe $-X_k = 1$. Sie erhalten in einzelnen Fällen geometrische Bedeutung und bezeichnen die Projektion des Vektors einer Verdrehung oder Verschiebung. Die Bedingung $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ kann dann kinematisch erklärt werden.

Sind X_i und X_k zwei statisch unbestimmte Stützkräfte, so bedeutet $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ die winkelrechte Lage des Vektors $\overrightarrow{i\,i'}$ der von $-X_k = 1$ hervorgerufenen Verschiebung des Punktes i zur Richtung des Kraftvektors X_i. Die Bedingung $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ kann daher mit einem Verschiebungsplan des Hauptsystems erfüllt werden, der für $-X_k = 1$ gezeichnet wird und $\overrightarrow{i\,i'}$ liefert (S. 139). X_i ist dann senkrecht dazu. Ist X_k ein Einspannungsmoment, so wird $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$, wenn die Wirkungslinie von X_i während der Bewegung infolge von $-X_k = 1$ durch den Drehpunkt der Stabtangente verläuft. Ist X_k ein Biegungsmoment, so ist die Lage von k bei $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ dadurch bestimmt, daß die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung der Querschnitte i infolge $-X_k = 1$ Null ist (Abb. 238).

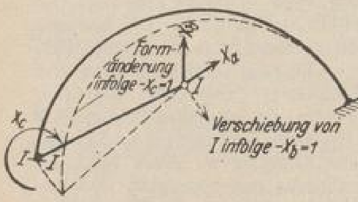

Abb. 238. $\delta_{ab} = 0$; $\delta_{ac} = 0$; $\delta_{bc} = 0$. Die Nebenbedingungen bedeuten kinematisch, daß $X_b \perp \overrightarrow{b\,b'}$ infolge $-X_a = 1$ ist und die Wirkungslinien von X_a und X_b durch den Pol der elastischen Bewegung der Endtangenten in I infolge von $-X_c = 1$ verlaufen.

Diese zeichnerischen Hilfsmittel sind meist nicht genau genug, um die Nebenbedingungen $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ vollständig zu erfüllen, so daß sie besser durch analytische Lösung ersetzt werden. In einfachen Fällen treten an die Stelle der statisch unbestimmten Schnittkräfte eines ausgezeichneten Querschnitts äquivalente Kräfte mit geometrischen Freiwerten. Die überzähligen Größen erscheinen daher als Funktionen der Koordinaten x_0, y_0 ihres Schnittpunktes und des Winkels φ zwischen ihren Richtungen. Damit werden auch die Schnittkräfte N_i, N_k, M_i, M_k des Hauptsystems infolge von $-X_i = 1$, $-X_k = 1$ Funktionen dieser Koordinaten. Sie können mit den Nebenbedingungen

$$\delta_{ik} = \frac{J_c}{F_c}\int N_i N_k \frac{F_c}{F} ds + \int M_i M_k \frac{J_c}{J} ds = 0 \qquad (466)$$

so bestimmt werden, daß je drei einander zugeordnete überzählige Größen voneinander unabhängig sind.

Anwendung auf zweifach statisch unbestimmte Stabwerke. Als überzählige Größen werden die Komponenten einer Gelenkkraft $X_1 \dotplus X_2$ mit dem Winkel $\varphi = 90 - \psi$ (Abb. 239b) oder die Biegungsmomente X_1, X_2 zweier Querschnitte im Abstand e (Abb. 239f) verwendet. Dann sind φ und e geometrische Freiwerte, die so bestimmt werden, daß $1_1 \cdot \delta_{12} = 0$. Dies wird mit der Berechnung des Rahmens Abb. 239a ausführlich gezeigt.

a) Die überzähligen Größen sind die Komponenten X_1, X_2 der Stützkraft im Punkte a. Die Richtung von X_2 schließt mit der Waagerechten den Winkel ψ ein.

Dieser dient als geometrischer Freiwert. Die Kraft $-X_1 = 1$ liefert M_1, die waagerechte Kraft $1\,t$ in a die Momente M_k. Aus der Bedingung

$$\int M_1 M_2 \frac{J_c}{J}\,ds = \int M_1 (M_1 \sin\psi + M_k \cos\psi) \frac{J_c}{J}\,ds = 0$$

folgt

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{\int M_1 M_k \frac{J_c}{J}\,ds}{\int M_1^2 \frac{J_c}{J}\,ds}. \tag{467}$$

Besitzen die beiden Rahmenstäbe konstantes Trägheitsmoment, so ist

$$\operatorname{tg}\psi = +\frac{3\,l\,l'\,h}{2\,l^2\,l'} = +\frac{3\,h}{2\,l}.$$

b) Die überzähligen Größen sind das Biegungsmoment X_1 und die waagerechte Komponente X_2 des Stützendrucks A. Parameter ist die Abszisse e des Quer-

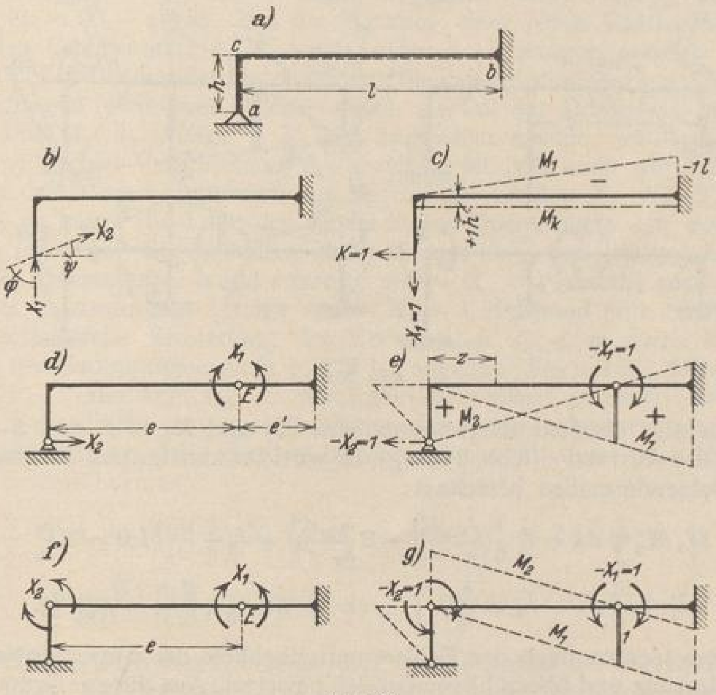

Abb. 239.

schnitts E (Abb. 239d, e). Bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe ist $e = 2/3 \cdot l$. Der Ansatz erfährt keine Änderung, wenn die beiden Biegungsmomente X_1 und X_2 in E und C als überzählige Größen gewählt werden (Abb. 239f, g) und der Parameter e so bestimmt wird, daß die Nebenbedingung $1_1 \cdot \delta_{12} = 0$ erfüllt ist.

In ähnlicher Weise wird der Rahmen Abb. 240 berechnet.

a) Überzählige Größen: Die Komponenten X_1, X_2 des Stützendrucks A (Abb. 240b, c). Parameter ist der Winkel ψ.

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{\int M_1 M_k \frac{J_c}{J}\,ds}{\int M_1^2 \frac{J_c}{J}\,ds}.$$

Bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{h_1\,(3\,l_1' + 2\,l_2') + h_2\,l_2'}{2\,l_1\,(l_1' + l_2')}.$$

b) Überzählige Größen: Stützkraft $C = X_1$ und das Biegungsmoment $M_E = X_2$. Parameter ist die Strecke e (Abb. 240d, e).

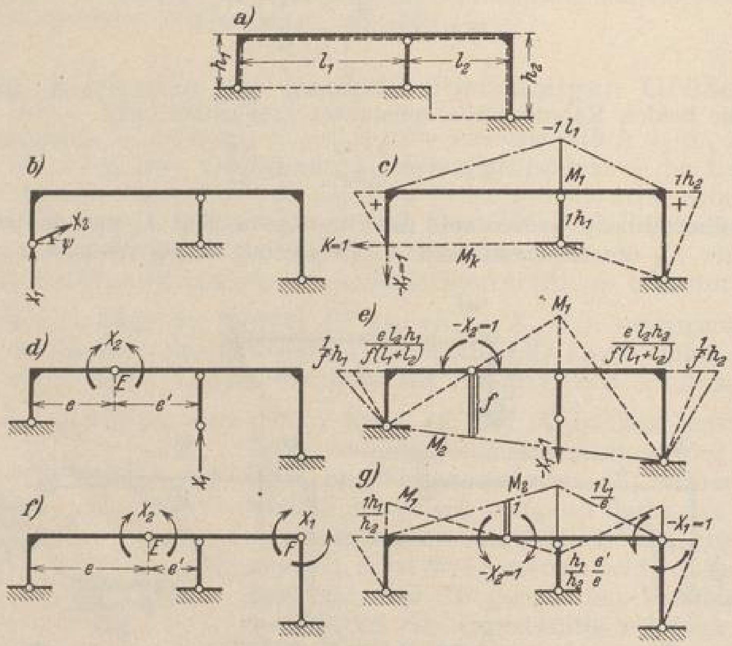

Abb. 240.

c) Überzählige Größen: Biegungsmomente X_1 und X_2 in F und E. Als Parameter dient der Abstand e (Abb. 240f, g). Er wird bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe folgendermaßen berechnet:

$$\delta_{12} = \int M_1 M_2 \frac{J_c}{J}\,ds = l_1' \frac{1}{6}\frac{l_1}{e}\left(\frac{h_1}{h_2} - 2\frac{h_1}{h_2}\frac{e'}{e}\right) + l_2' \frac{1}{6}\frac{l_1}{e}\left(1{,}0 - 2\frac{h_1}{h_2}\frac{e'}{e}\right) = 0;$$

$$\lambda_l' = \frac{l_2'}{l_1'}; \qquad \lambda_h = \frac{h_2}{h_1}; \qquad e = \frac{2 + 2\,\lambda_l'}{3 + 2\,\lambda_l' + \lambda_l'\,\lambda_h}\,l_1.$$

Diese Ansätze werden nach der Fehlerempfindlichkeit der Superposition der Anteile aus Belastung und überzähligen Größen bewertet. Aus diesem Grunde verdient der dritte Ansatz in beiden Beispielen den Vorzug.

Anwendung auf dreifach statisch unbestimmte Stabwerke. Die überzähligen Größen X_a, X_b, X_c eines Hauptsystems können entweder aus den drei Schnittkräften eines Querschnitts b (Abb. 241) oder aus drei Biegungsmomenten (Abb. 243) abgeleitet werden. Außerdem besteht die Möglichkeit, dafür die Biegungsmomente der Querschnitte k_1, k_2 und die waagerechte Komponente der Kraft $\int (\tau \mp \sigma)\,dF$ eines der beiden Querschnitte (k_2) zu wählen (Abb. 242).

Die geometrischen Freiwerte (x_0', y_0', ψ), die auf diese Weise eingehen, werden aus den Nebenbedingungen

$$1_a\,\delta_{ab} = 0, \qquad 1_b\,\delta_{bc} = 0, \qquad 1_c\,\delta_{ca} = 0 \tag{468}$$

so bestimmt, daß die überzähligen Größen X_a, X_b, X_c nicht mehr voneinander abhängen. Diese bestehen in dem Ansatz zu Abb. 241 aus den Schnittkräften des