



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Anwendung auf dreifach statisch unbestimmte Stabwerke

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe ist

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h_1 (3l'_1 + 2l'_2) + h_2 l'_2}{2l_1 (l'_1 + l'_2)}$$

b) Überzählige Größen: Stützkraft $C = X_1$ und das Biegemoment $M_E = X_2$. Parameter ist die Strecke e (Abb. 240 d, e).

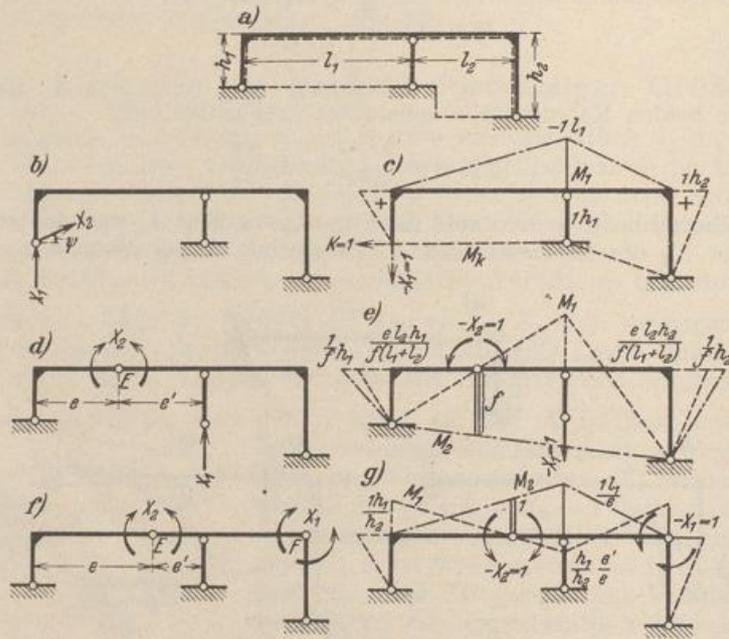


Abb. 240.

c) Überzählige Größen: Biegemomente X_1 und X_2 in F und E . Als Parameter dient der Abstand e (Abb. 240 f, g). Er wird bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe folgendermaßen berechnet:

$$\delta_{12} = \int M_1 M_2 \frac{J_c}{J} ds = l'_1 \frac{1}{6} \frac{l_1}{e} \left(\frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{h_1}{h_2} \frac{e'}{e} \right) + l'_2 \frac{1}{6} \frac{l_1}{e} \left(1,0 - 2 \frac{h_1}{h_2} \frac{e'}{e} \right) = 0;$$

$$\lambda'_1 = \frac{l'_2}{l'_1}; \quad \lambda_h = \frac{h_2}{h_1}; \quad e = \frac{2 + 2\lambda'_1}{3 + 2\lambda'_1 + \lambda'_1 \lambda_h} l_1.$$

Diese Ansätze werden nach der Fehlerempfindlichkeit der Superposition der Anteile aus Belastung und überzähligen Größen bewertet. Aus diesem Grunde verdient der dritte Ansatz in beiden Beispielen den Vorzug.

Anwendung auf dreifach statisch unbestimmte Stabwerke. Die überzähligen Größen X_a, X_b, X_c eines Hauptsystems können entweder aus den drei Schnittkräften eines Querschnitts b (Abb. 241) oder aus drei Biegemomenten (Abb. 243) abgeleitet werden. Außerdem besteht die Möglichkeit, dafür die Biegemomente der Querschnitte k_1, k_2 und die waagerechte Komponente der Kraft $\int (\tau \mp \sigma) dF$ eines der beiden Querschnitte (k_2) zu wählen (Abb. 242).

Die geometrischen Freiwerte (x'_0, y'_0, ψ), die auf diese Weise eingehen, werden aus den Nebenbedingungen

$$1_a \delta_{ab} = 0, \quad 1_b \delta_{bc} = 0, \quad 1_c \delta_{ca} = 0 \quad (468)$$

so bestimmt, daß die überzähligen Größen X_a, X_b, X_c nicht mehr voneinander abhängen. Diese bestehen in dem Ansatz zu Abb. 241 aus den Schnittkräften des

Querschnitts b , also aus zwei Gruppen von Kräften, die wiederum miteinander im Gleichgewicht sind. Die überzähligen Größen des Ansatzes zu Abb. 242 bilden zweimal zwei Gruppen von Kräften, von denen ebenfalls je zwei im Gleichgewicht

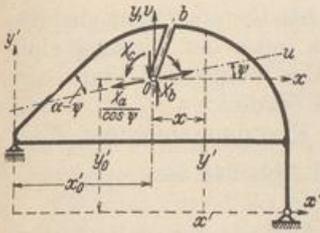


Abb. 241.

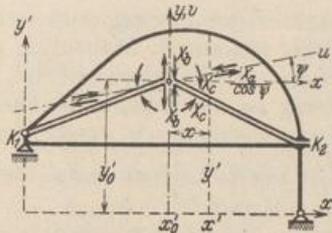


Abb. 242.

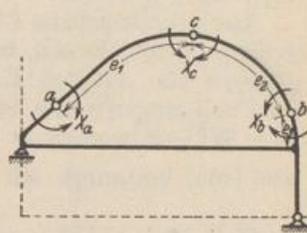


Abb. 243.

sind. Jeder Ansatz enthält eine Kraft $X_a \uparrow X_b$ und ein Kräftepaar X_c . Die Wirkungslinien der Kräfte schneiden sich in einem Punkt $O(x'_0, y'_0)$ und schließen den Winkel $\varphi = 90 - \psi$ ein. Um die Wirkung einer jeden Kräftegruppe auf die zugeordneten Querschnitte k_1, k_2 zum Ausdruck zu bringen, werden diese mit O durch starre Stäbe verbunden angenommen, die keine Formänderung erleiden. Nach den Bedingungen (468) kann O kinematisch als Pol der Drehbewegung der Querschnitte k oder k_1, k_2 infolge $-X_c = 1$ angesehen werden, während X_a winkelrecht zur wirklichen Verschiebung δ_{ab} gerichtet ist (vgl. auch Abb. 238).

Werden drei Biegemomente als überzählige Größen X_a, X_b, X_c verwendet (Abb. 243), so hängt die Lage der zugeordneten Querschnitte a, b, c von den Bedingungen (468) ab. Sie bedeuten dann kinematisch, daß die gegenseitige Verdrehung der Querschnitte b und c infolge von $-X_a = 1$ und die gegenseitige Verdrehung des Querschnitts c infolge von $-X_b = 1$ Null sind (vgl. S. 272).

Die zeichnerische Ermittlung der Koordinaten x'_0, y'_0, ψ durch kinematische Auslegung der Bedingungen nach S. 272 ist ungenau. Sie werden daher analytisch mit $M_a, M_b \dots$ oder $M_a^{(r)}, M_b^{(r)} \dots$ als Funktionen dieser geometrischen Freiwerte entwickelt, je nachdem ein statisch bestimmtes oder r fach statisch unbestimmtes Hauptsystem vorliegt. Jede der drei Bedingungen erhält dann nach (299) eine der folgenden beiden Formen:

$$\left. \begin{aligned} 1_a \delta_{ab} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_a N_b \frac{F_c}{F} ds + \int M_a M_b \frac{J_c}{J} ds = 0, \\ 1_a^{(0)} \delta_{ab}^{(r)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_a^{(0)} N_b^{(r)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_a^{(0)} M_b^{(r)} \frac{J_c}{J} ds = 0. \end{aligned} \right\} \quad (469)$$

Ihre Anzahl kann auch beschränkt werden, um die Matrix der überzähligen Größen auf diese Weise aufzuspalten. Dies geschieht oft mit Rücksicht auf die Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Bei unsymmetrischen Bogen- und Rahmenträgern (Abb. 244) wird daher auch $1_a \delta_{ab} \neq 0$ verwendet und mit der folgenden Matrix gerechnet.

	X_a	X_b	X_c	
δ_{aa}	δ_{ab}			δ_{a0}
δ_{ba}	δ_{bb}			δ_{b0}
			δ_{cc}	δ_{c0}

(470)

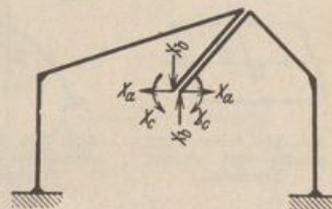


Abb. 244.

Der Ansatz ist durch die Untersuchung geschlossener oder eingespannter ein- und mehrteiliger Stabzüge mit statisch bestimmtem oder unbestimmtem Haupt-

system bekannt geworden. Unter verschiedenen Lösungen verdient stets diejenige Anordnung den Vorzug, deren überzählige Schnittkräfte klein sind, das Kräftebild des Hauptsystems also wenig ändern und einfache Ausdrücke für $N_a, M_a \dots$ oder $N_a^{(r)}, M_a^{(r)} \dots$ liefern.

Der grundsätzliche Charakter der Lösung zeigt sich bei Untersuchung des einteiligen, geschlossenen, beliebig geformten Stabzuges, der unter der Wirkung einer Gruppe von äußeren Kräften im Gleichgewicht ist. Der beiderseits starr oder elastisch eingespannte Stabzug ist ein Sonderfall. Die Koordinaten x'_0, y'_0, φ oder $\psi = 90^\circ - \varphi$ werden in einem geometrisch geeigneten Koordinatensystem x', y' aus (468) bestimmt. Mit $\frac{J_c}{J} ds = ds', \frac{F_c}{F} ds = ds''$ und Abb. 241 ist

$$\left. \begin{aligned} 1_a \delta_{ac} &= \int 1 [y' - y'_0 - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi] ds' = 0, & 1_b \delta_{bc} &= \int 1 (x' - x'_0) ds' = 0, \\ 1_b \delta_{ab} &= \frac{J_c}{F_c} \int \frac{\cos(\psi - \alpha) \sin \alpha}{\cos \psi} ds'' + \int (x' - x'_0) [y' - y'_0 - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi] ds' = 0, \\ y'_0 &= \frac{\int y' ds'}{\int ds'}, & x'_0 &= \frac{\int x' ds'}{\int ds'}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\int (x' - x'_0)(y' - y'_0) ds' + \frac{J_c}{F_c} \int \sin \alpha \cos \alpha ds''}{\int (x' - x'_0)^2 ds' + \frac{J_c}{F_c} \int \sin^2 \alpha ds''} \approx \frac{\int (x' - x'_0) y' ds'}{\int (x' - x'_0)^2 ds'}. \end{aligned} \right\} (471)$$

Besteht das Stabwerk aus geraden Elementen s_k von konstantem Trägheitsmoment J_k , deren Projektionen auf die Richtungen x', y' mit s_{kx}, s_{ky} und deren Schwerpunktsabstände mit x'_{k0}, y'_{k0} bezeichnet werden, so ist mit $s'_k = s_k \cdot J_c / J_k$:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\sum x'_{k0} s'_k}{\sum s'_k}; & y'_0 &= \frac{\sum y'_{k0} s'_k}{\sum s'_k}; \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\sum y'_{k0} x'_{k0} s'_k + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \sum s_{ky} s_{kx} s'_k - x'_0 \sum y'_{k0} s'_k}{\sum x'_{k0} s'_k + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \sum s_{kx}^2 s'_k - x'_0 \sum x'_{k0} s'_k}. \end{aligned} \right\} (472)$$

In bezug auf das neue Koordinatensystem u, v (Abb. 241 u. 242) ist dann

$$\int u \frac{ds}{EJ} = 0; \quad \int v \frac{ds}{EJ} = 0; \quad \int uv \frac{ds}{EJ} = 0. \quad (473)$$

Der Ursprung O wird daher als Schwerpunkt elastischer Gewichte ds/EJ bezeichnet, deren Deviationsmoment bezogen auf die Richtungen der Kräfte X_b und $X_a/\cos \psi$

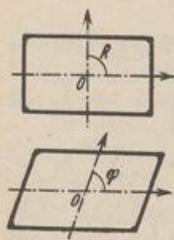


Abb. 245. Rahmen mit gerader und schiefer Symmetrie.

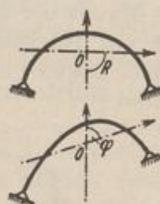


Abb. 246. Bogen mit gerader und schiefer Symmetrie.

Null ist. Diese Analogie zur Geometrie der Massen hat zur Aufzeichnung einer Elastizitätsellipse und eines Elastizitätskreises geführt, deren zugeordnete Achsen die Bedingungen (473) erfüllen. Schwerpunkt und Achsensystem sind von der Lage der ausgezeichneten Querschnitte k oder k_1, k_2 (Abb. 242) unabhängig. Sie können beliebig liegen, werden jedoch stets so gewählt, daß die Schnittkräfte aus den Belastungszuständen des Hauptsystems einfach anzugeben sind. Der elastische Schwerpunkt liegt bei gerader und schiefer Symmetrie

auf deren Achse (Abb. 245 u. 246). Diese bestimmt gemeinsam mit der Symmetrierichtung das Bezugssystem. Die Lage des elastischen Schwerpunktes folgt aus $\delta_{ac} = 0$. Die Bedingung wird unter Umständen in Verbindung mit den Komponenten $\epsilon_{22}, \epsilon_{21}$ des Verschiebungszustandes der anschließenden Bauteile ange-

geschrieben (Abb. 247). Sie bedeuten die EJ_c fachen Drehwinkel des Anschlußquerschnitts a des symmetrischen Stabzugs infolge eines Kräftepaars von 1 mt und einer zur y -Achse winkelrechten Einzellast von 1 t.

$$1_a \delta_{ac} = -2(y'_0 \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21}) + \int (y' - y'_0) ds' = 0, \left. \begin{aligned} y'_0 &= \frac{\int y' ds' - 2\varepsilon_{21}}{\int ds' + 2\varepsilon_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (474)$$

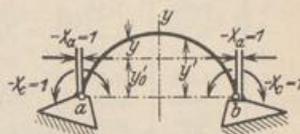


Abb. 247.

Bei zwei Symmetrieachsen ist der geometrische Mittelpunkt gleichzeitig auch elastischer Schwerpunkt (Abb. 245).

Die drei Vorzahlen δ_{aa} , δ_{bb} , δ_{cc} sind ebenso wie die Koordinaten des elastischen Schwerpunkts x'_0 , y'_0 , ψ unabhängig von der Wahl des Hauptsystems und werden aus

$$\left. \begin{aligned} \sum s'_k; \quad \sum x'_{k0} s'_k; \quad \sum y'_{k0} s'_k; \\ \sum x'^2_{k0} s'_k; \quad \sum y'^2_{k0} s'_k; \quad \sum x'_{k0} y'_{k0} s'_k; \\ \sum s'^2_{kx} s'_k; \quad \sum s'^2_{ky} s'_k; \quad \sum s_{kx} s_{ky} s'_k; \end{aligned} \right\} \quad (\text{Abb. 248}) \quad (475)$$

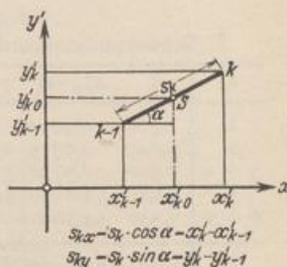


Abb. 248.

folgendermaßen berechnet:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\sum x'_{k0} s'_k}{\sum s'_k} = \frac{\delta_{b'e}}{\delta_{cc}}; \quad y'_0 = \frac{\sum y'_{k0} s'_k}{\sum s'_k} = \frac{\delta_{a'e}}{\delta_{cc}}; \\ \delta_{b'b} &= \sum x'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s'^2_{kx} s'_k - x'_0 \sum x'_{k0} s'_k = \delta_{b'b'} - x'_0 \delta_{b'e}, \\ \delta_{a'a,1} &= \sum y'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s'^2_{ky} s'_k - y'_0 \sum y'_{k0} s'_k = \delta_{a'a'} - y'_0 \delta_{a'e}, \\ \delta_{a'b} &= \sum x'_{k0} y'_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s_{kx} s_{ky} s'_k - x'_0 \sum y'_{k0} s'_k = \delta_{a'b'} - x'_0 \delta_{a'e}, \\ \text{tg } \psi &= \frac{\delta_{a'b}}{\delta_{b'b}}; \quad \delta_{a'a,2} = \text{tg } \psi \delta_{a'b}. \end{aligned} \right\} \quad (476)$$

Hierbei hat $\delta_{i'k}$ die Bedeutung einer gegenseitigen Verschiebung oder Verdrehung im Sinne einer Kraft $-X'_i \uparrow \uparrow -X'_k$, die im Ursprung des Koordinatensystems x', y' angreift, hervorgerufen durch $-X'_k = 1$ im Punkte O . Ebenso bedeutet $\delta_{i'k'}$ die Verschiebung infolge $-X'_k = 1$ ($X'_k \uparrow \uparrow X'_k$, im Punkte $x' = 0, y' = 0$). Danach ist $\delta_{i'k} = \int M'_i M'_k \frac{J_c}{J} ds$. Für ein $r = (n - 3)$ fach statisch unbestimmtes Hauptsystem werden die Verschiebungen mit $\delta_{i'k}^{(r)}$, $\delta_{i'k'}^{(r)}$ bezeichnet und in derselben Weise berechnet. Die Vorzahlen in (465) sind:

$$\delta_{cc} = \sum s'_k; \quad \delta_{bb} = \delta_{b'b}; \quad \delta_{aa} = \delta_{a'a,1} - \delta_{a'a,2}. \quad (477)$$

Die Untersuchung erfährt bei einem statisch unbestimmtem Hauptsystem keine grundsätzliche Änderung. Die geometrischen Freiwerte sind durch (468) bestimmt.

Berechnung von Dachrahmen.

A. Geometrische Grundlagen.

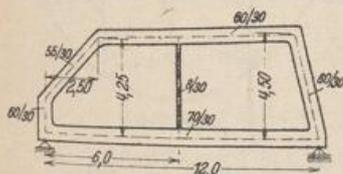


Abb. 249.

$$\begin{aligned} J_c &= 0,0054 \text{ m}^4; \\ F_{e1} (\text{Eisen}) &= 0,0016 \text{ m}^2; \\ E_b &= 210 \text{ t/cm}^2; \\ n &= E_s/E_b = 10. \end{aligned}$$

Bezeichnungen vgl. Abb. 248.

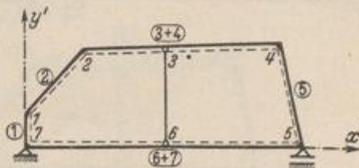


Abb. 250.

* $\uparrow \uparrow$ bedeutet parallel und gleichgerichtet (vgl. Hütte).