



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

geschrieben (Abb. 247). Sie bedeuten die EJ_c fachen Drehwinkel des Anschlußquerschnitts a des symmetrischen Stabzugs infolge eines Kräftepaars von 1 mt und einer zur y -Achse winkelrechten Einzellast von 1 t.

$$1_a \delta_{ac} = -2(y'_0 \epsilon_{22} + \epsilon_{21}) + \int (y' - y'_0) ds' = 0, \quad \left. \begin{aligned} y'_0 &= \frac{\int y' ds' - 2 \epsilon_{21}}{\int ds' + 2 \epsilon_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (474)$$



Abb. 247.

Bei zwei Symmetrieachsen ist der geometrische Mittelpunkt gleichzeitig auch elastischer Schwerpunkt (Abb. 245).

Die drei Vorzahlen δ_{aa} , δ_{bb} , δ_{cc} sind ebenso wie die Koordinaten des elastischen Schwerpunkts x'_0 , y'_0 , ψ unabhängig von der Wahl des Hauptsystems und werden aus

$$\left. \begin{aligned} \sum s'_k; \quad \sum x'_{k0} s'_k; \quad \sum y'_{k0} s'_k; \\ \sum x'^2_{k0} s'_k; \quad \sum y'^2_{k0} s'_k; \quad \sum x'_{k0} y'_{k0} s'_k; \\ \sum s'^2_{kx} s'_k; \quad \sum s'^2_{ky} s'_k; \quad \sum s_{kx} s_{ky} s'_k; \end{aligned} \right\} \quad (\text{Abb. 248}) \quad (475)$$

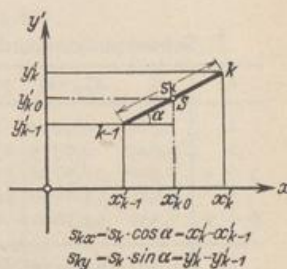


Abb. 248.

folgendermaßen berechnet:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\sum x'_{k0} s'_k}{\sum s'_k} = \frac{\delta_{b'c}}{\delta_{cc}}; \quad y'_0 = \frac{\sum y'_{k0} s'_k}{\sum s'_k} = \frac{\delta_{a'c}}{\delta_{cc}}; \\ \delta_{b'b} &= \sum x'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s'^2_{kx} s'_k - x'_0 \sum x'_{k0} s'_k = \delta_{b'b'} - x'_0 \delta_{b'c}, \\ \delta_{a'a,1} &= \sum y'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s'^2_{ky} s'_k - y'_0 \sum y'_{k0} s'_k = \delta_{a'a'} - y'_0 \delta_{a'c}, \\ \delta_{a'b} &= \sum x'_{k0} y'_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s_{kx} s_{ky} s'_k - x'_0 \sum y'_{k0} s'_k = \delta_{a'b'} - x'_0 \delta_{a'c}, \\ \text{tg } \psi &= \frac{\delta_{a'b}}{\delta_{b'b}}; \quad \delta_{a'a,2} = \text{tg } \psi \delta_{a'b}. \end{aligned} \right\} \quad (476)$$

Hierbei hat $\delta_{i'k}$ die Bedeutung einer gegenseitigen Verschiebung oder Verdrehung im Sinne einer Kraft $-X'_i \uparrow \uparrow -X'_k$, die im Ursprung des Koordinatensystems x', y' angreift, hervorgerufen durch $-X'_k = 1$ im Punkte O . Ebenso bedeutet $\delta_{i'k'}$ die Verschiebung infolge $-X'_k = 1$ ($X'_k \uparrow \uparrow X'_k$, im Punkte $x' = 0, y' = 0$). Danach ist $\delta_{i'k} = \int M'_i M'_k \frac{J_c}{J} ds$. Für ein $r = (n - 3)$ fach statisch unbestimmtes Hauptsystem werden die Verschiebungen mit $\delta_{i'k}^{(r)}$, $\delta_{i'k'}^{(r)}$ bezeichnet und in derselben Weise berechnet. Die Vorzahlen in (465) sind:

$$\delta_{cc} = \sum s'_k; \quad \delta_{bb} = \delta_{b'b}; \quad \delta_{aa} = \delta_{a'a,1} - \delta_{a'a,2}. \quad (477)$$

Die Untersuchung erfährt bei einem statisch unbestimmtem Hauptsystem keine grundsätzliche Änderung. Die geometrischen Freiwerte sind durch (468) bestimmt.

Berechnung von Dachrahmen.

A. Geometrische Grundlagen.

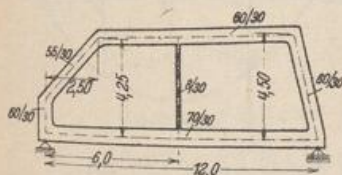


Abb. 249.

$$\begin{aligned} J_c &= 0,0054 \text{ m}^4; \\ F_{e1} (\text{Eisen}) &= 0,0016 \text{ m}^2; \\ E_b &= 210 \text{ t/cm}^2; \\ n &= E_s/E_b = 10. \end{aligned}$$

Bezeichnungen vgl. Abb. 248.

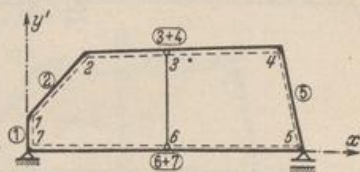


Abb. 250.

* $\uparrow \uparrow$ bedeutet parallel und gleichgerichtet (vgl. Hütte).

k	x'_k	y'_k	x'_{k0}	y'_{k0}	s_{kx}	s_{ky}	s_k	J_c/J	s'_k
0	0,00	0,00							
1	0,00	1,50	0,00	0,750	0,00	1,50	1,50	1,0000	1,500
2	2,50	4,25	1,250	2,875	2,50	2,75	3,72	1,2980	4,829
3	6,00	4,35	6,750	4,375	8,50	0,25	3,50	1,0000	3,500
4	11,00	4,50					5,00	1,0000	5,000
5	12,00	0,00	11,500	2,250	1,00	-4,50	4,61	1,0000	4,610
6	6,00	0,00	6,000	0,000	-12,00	0,00	6,00	0,6294	3,776
7	0,00	0,00					6,00	0,6294	3,776

B. Dachrahmen ohne Hängesäule.

1. Schwerpunktskoordinaten und Vorzahlen nach (475) u. (476).

k	s'_k	x'_{k0} \cdot s'_k	y'_{k0} \cdot s'_k	x'^2_{k0} s'_k	y'^2_{k0} s'_k	x'_{k0} y'_{k0} s'_k	s^2_{kx} s'_k	s^2_{ky} s'_k	s_{kx} s_{ky} s'_k
1	1,500	0,0000	1,1250	0,0000	0,8438	0,0000	0,0000	3,3750	0,000
2	4,829	6,0375	13,8863	7,5469	39,9231	17,3578	30,1813	36,5193	33,1994
3 + 4	8,500	57,3750	37,1875	387,2813	162,6953	251,0156	614,1250	0,5313	18,0625
5	4,610	53,0150	10,3725	609,6725	23,3381	119,2838	4,6100	93,3525	-20,7450
6 + 7	7,552	45,3000	0,0000	271,8000	0,0000	0,0000	1087,4880	0,0000	0,0000
Σ	26,991	161,7275	62,5713	1276,3007	226,8003	387,6572	1736,4043	133,7781	30,5169

$$\delta_{b'e} = \Sigma x'_{k0} s'_k = 161,7275; \quad \delta_{a'e} = \Sigma y'_{k0} s'_k = 62,5713; \quad \delta_{ee} = \Sigma s'_k = 26,991;$$

$$\delta_{b'b'} = \Sigma x'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s^2_{kx} s'_k = 1276,3007 + \frac{1}{12} 1736,4043 = 1421,0011;$$

$$\delta_{a'a'} = \Sigma y'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s^2_{ky} s'_k = 226,8003 + \frac{1}{12} 133,7781 = 237,9485;$$

$$\delta_{a'b'} = \Sigma x'_{k0} y'_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s_{kx} s_{ky} s'_k = 387,6572 + \frac{1}{12} 30,5169 = 390,2003;$$

$$x'_0 = \frac{\delta_{b'e}}{\delta_{ee}} = \frac{161,7275}{26,991} = 5,9921; \quad y'_0 = \frac{\delta_{a'e}}{\delta_{ee}} = \frac{62,5713}{26,991} = 2,3183;$$

$$\delta_{b'b} = \delta_{b'b'} - x'_0 \delta_{b'e} = 1421,0011 - 5,9921 \cdot 161,7275 = 451,914;$$

$$\delta_{a'a,1} = \delta_{a'a'} - y'_0 \delta_{a'e} = 237,9485 - 2,3183 \cdot 62,5713 = 92,8895;$$

$$\delta_{a'a} = \delta_{a'a'} - x'_0 \delta_{a'e} = 390,2003 - 5,9921 \cdot 62,5713 = 15,2668;$$

$$\text{tg } \psi = \frac{\delta_{a'a}}{\delta_{b'b}} = \frac{15,2668}{451,914} = 0,03378; \quad \delta_{a'a,2} = \text{tg } \psi \cdot \delta_{a'a} = 0,5157;$$

$$\delta_{ee} = 26,991; \quad \delta_{bb} = \delta_{b'b} = 451,914;$$

$$\delta_{aa} = \delta_{a'a} = \delta_{a'a,1} - \delta_{a'a,2} = 92,8895 - 0,5157 = 92,3738;$$

Probe für die Koordinaten x'_0 ; y'_0 ; ψ nach (472):

$$\Sigma (y'_{k0} - y'_0) s'_k = 0,0; \quad \Sigma (x'_{k0} - x'_0) s'_k = 0,0;$$

$$\Sigma (x'_{k0} - x'_0) (y'_{k0} - x'_0 \text{tg } \psi) s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s_{kx} (s_{ky} - s_{kx} \text{tg } \psi) s'_k = 0,0.$$

2. Belastung und Wahl des Hauptsystems nach (Abb. 242).

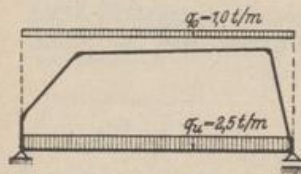


Abb. 251.

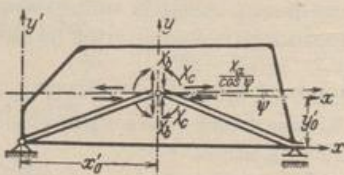


Abb. 252.

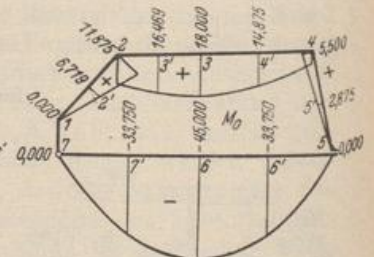


Abb. 253.

Belastung: Gleichmäßig verteilte Last aus Eigengewicht und Nutzlast nach Abb. 251.
 Hauptsystem: Zwei Balken auf zwei Stützen nach Abb. 252. Die überzähligen Schnittkräfte werden durch eine äquivalente Kräftegruppe X_a, X_b, X_c im elastischen Schwerpunkt ersetzt.

Momente M_0 im Hauptsystem: Abb. 253; Momente im Hauptsystem aus:

$$\begin{aligned} -X_c &= 1, & M_c &= -1,0; \\ -X_b &= 1, & M_b &= -x = -(x' - x'_0); \\ -X_a &= 1, & M_a &= -[y - x \operatorname{tg} \psi] = -[(y' - y'_0) - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi]. \end{aligned}$$

3. Belastungszahlen: Tabellarische Berechnung von:

$$\begin{aligned} \delta_{b'0} &= -\int x' M_0 ds' = +354,455; & \delta_{a'0} &= -\int y' M_0 ds' = -687,355; \\ \delta_{c0} &= -\int 1 M_0 ds' = +57,224; & \delta_{a0} &= -\int (y - x \operatorname{tg} \psi) M_0 ds' = \delta_{a'0} - y'_0 \delta_{c0} - \operatorname{tg} \psi \delta_{b0}; \\ \delta_{a0} &= -687,355 - 2,3183 \cdot 57,224 - 0,03378 \cdot 11,563 = -820,408; \\ \delta_{b0} &= -\int x M_0 ds' = \delta_{b'0} - x'_0 \delta_{c0} = 354,455 - 5,9921 \cdot 57,224 = 11,563. \end{aligned}$$

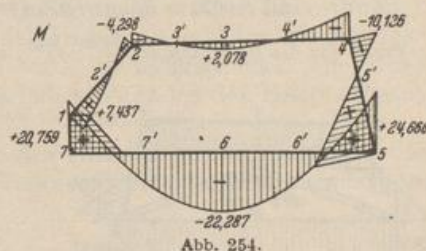
4. Überzählige Größen:

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{\delta_{a0}}{\delta_{aa}} = \frac{-820,408}{92,3738} = -8,8814 \text{ t}, \\ X_b &= \frac{\delta_{b0}}{\delta_{bb}} = \frac{11,563}{451,914} = +0,02559 \text{ t}, \\ X_c &= \frac{\delta_{c0}}{\delta_{cc}} = \frac{57,224}{26,991} = +2,1201 \text{ mt}. \end{aligned}$$

5. Momente im dreifach statisch unbestimmten System (Abb. 254):

$$\begin{aligned} M &= M_0 - X_a M_a - X_b M_b - X_c M_c \\ &= M_0 + X_a [(y' - y'_0) - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi] + X_b (x' - x'_0) + X_c \\ &= M_0 + X_a y' + (X_b - X_a \operatorname{tg} \psi) x' + [X_c - X_b x'_0 - X_a (y'_0 - \operatorname{tg} \psi x'_0)] \\ &= M_0 - 8,8815 y' + 0,32559 x' + 20,7593. \end{aligned}$$

k	M [mt]	k	M [mt]
1	+ 7,4370	4	- 10,1260
2'	+ 2,3507	5	+ 24,6664
2	- 4,2981	6'	- 10,0604
3'	+ 0,4213	6	- 22,2872
3	+ 2,0783	7'	- 12,0139
4'	- 0,8988	7	+ 20,7593



C. Dachrahmen mit Hängestange.

Das System ist vierfach statisch unbestimmt. Die Schnittkräfte X_1, X_2, X_3 an den Querschnitten 5 und 7 (Abb. 250) werden durch eine äquivalente Kräftegruppe X_a, X_b, X_c ersetzt, für die

$$\delta_{b'c}^{(1)} = 0; \quad \delta_{a'c}^{(1)} = 0; \quad \delta_{a'b}^{(1)} = 0$$

ist. Dies sind die Nebenbedingungen für die Koordinaten $x'_0, y'_0, \psi^{(1)}$. In den Ansätzen unter B dieser Aufgabe treten daher an Stelle der Formänderungen δ_{ik} die Formänderungen $\delta_{ik}^{(1)}$ des einfach statisch unbestimmten Hauptsystems.

1. Belastung: Gleichmäßig verteilte Last aus Eigengewicht und Nutzlast nach Abb. 251.

2. Hauptsystem, einfach statisch unbestimmt: Zwei übereinanderliegende einfache Träger mit Hängestange. Statisch unbestimmte Schnittkraft: Y_A (Längskraft der Hängestange). Die Formänderungen des statisch unbestimmten Hauptsystems werden aus den folgenden zugeordneten Formänderungen des statisch bestimmten Hauptsystems berechnet (Abb. 255):

$$\delta_{AA} = \int M_A^2 ds' + \frac{J_c}{11 F_Z} S_Z^2 s_Z = 61,6325;$$

$$\delta_{Ac} = -\int 1 M_A ds' = 31,6838;$$

$$\delta_{A'b'} = -\int x' M_A ds' = 188,6054;$$

$$\delta_{A'a'} = -\int y' M_A ds' = 84,1148.$$

$\delta_{b'e}, \delta_{a'e}, \delta_{c'e}$ usw. aus B, 1.

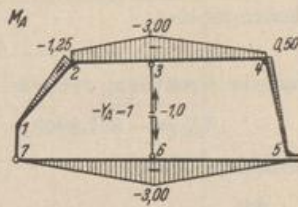


Abb. 255.

3. Schwerpunktskoordinaten und Vorzahlen $\delta_{kk}^{(1)}$:

$$Y_{Ac} = \frac{\delta_{Ac}}{\delta_{AA}} = 0,51407; \quad Y_{Ab'} = \frac{\delta_{Ab'}}{\delta_{AA}} = 3,06016; \quad Y_{Aa'} = \frac{\delta_{Aa'}}{\delta_{AA}} = 1,36478;$$

$$\begin{aligned} \delta_{b'c}^{(1)} &= \delta_{b'c} - Y_{Ac} \delta_{Ab'} = 161,7275 - 0,51407 \cdot 188,6054 = 64,7711, \\ \delta_{a'c}^{(1)} &= \delta_{a'c} - Y_{Ac} \delta_{Aa'} = 62,5713 - 0,51407 \cdot 84,1148 = 19,3304, \\ \delta_{cc}^{(1)} &= \delta_{cc} - Y_{Ac} \delta_{Ac} = 26,991 - 0,51407 \cdot 31,6838 = 10,7033, \\ \delta_{b'b'}^{(1)} &= \delta_{b'b'} - Y_{Ab'} \delta_{Ab'} = 1421,0011 - 3,06016 \cdot 188,6054 = 843,8384, \\ \delta_{a'a'}^{(1)} &= \delta_{a'a'} - Y_{Aa'} \delta_{Aa'} = 237,9485 - 1,36478 \cdot 84,1148 = 123,1503, \\ \delta_{a'b'}^{(1)} &= \delta_{a'b'} - Y_{Aa'} \delta_{Ab'} = 390,2003 - 1,36478 \cdot 188,6054 = 132,7954, \\ x_0^{(1)} &= \frac{\delta_{b'c}^{(1)}}{\delta_{cc}^{(1)}} = \frac{64,7711}{10,7033} = 6,0515; \quad y_0^{(1)} = \frac{\delta_{a'c}^{(1)}}{\delta_{cc}^{(1)}} = \frac{19,3304}{10,7033} = 1,8060, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{b'b}^{(1)} &= \delta_{b'b'}^{(1)} - x_0^{(1)} \delta_{b'c}^{(1)} = 843,8384 - 6,0515 \cdot 64,7711 = 451,8761, \\ \delta_{a'a,1}^{(1)} &= \delta_{a'a'}^{(1)} - y_0^{(1)} \delta_{a'c}^{(1)} = 123,1503 - 1,8060 \cdot 19,3304 = 88,2396, \\ \delta_{a'b}^{(1)} &= \delta_{a'b'}^{(1)} - x_0^{(1)} \delta_{a'c}^{(1)} = 132,7954 - 6,0515 \cdot 19,3304 = 15,8175, \\ \text{tg } \psi^{(1)} &= \frac{\delta_{a'b}^{(1)}}{\delta_{b'b}^{(1)}} = \frac{15,8175}{451,8761} = 0,0350; \quad \delta_{a'a,2}^{(1)} = \text{tg } \psi^{(1)} \cdot \delta_{a'b}^{(1)} = 0,5536, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{cc}^{(1)} &= 10,7033, & \delta_{bb}^{(1)} &= \delta_{b'b}^{(1)} = 451,8761; \\ \delta_{aa}^{(1)} &= \delta_{a'a}^{(1)} = \delta_{a'a,1}^{(1)} - \delta_{a'a,2}^{(1)} = 88,2396 - 0,5536 = 87,6860; \end{aligned}$$

Probe für die Koordinaten $x_0^{(1)}$; $y_0^{(1)}$; $\psi^{(1)}$: Ermittlung von $M_a^{(1)}$, $M_b^{(1)}$, $M_c^{(1)}$:

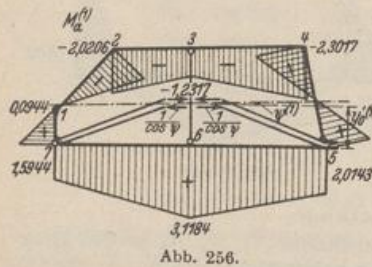


Abb. 256.

$$\begin{aligned} Y_{Ac} &= 0,51407; \\ Y_{Ab} &= Y_{Ab'} - x_0^{(1)} Y_{Ac} = -0,05077; \\ Y_{Aa} &= Y_{Aa'} - y_0^{(1)} Y_{Ac} - \text{tg } \psi^{(1)} Y_{Ab} = 0,4381; \\ \int M_b M_c^{(1)} ds' &= 0,0; \quad \int M_a M_c^{(1)} ds' = 0,0; \\ \int M_a M_b^{(1)} ds' &= 0,0. \quad (\text{Abb. 256 bis 258}). \end{aligned}$$

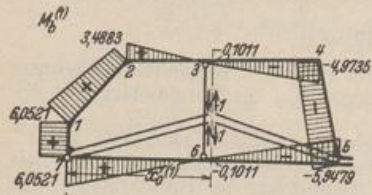


Abb. 257.

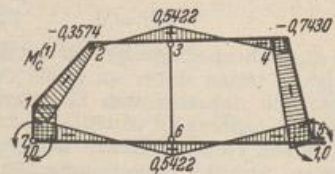


Abb. 258.

4. Belastungszahlen:

$$\delta_{k0}^{(1)} = \int M_0' M_k^{(1)} ds';$$

die tabellarische Ermittlung führt zu:

$$\delta_{a0}^{(1)} = -851,8949; \quad \delta_{b0}^{(1)} = 15,2279; \quad \delta_{c0}^{(1)} = -14,2402.$$

5. Überzählige Größen:

$$X_a^{(1)} = \frac{\delta_{a0}^{(1)}}{\delta_{aa}^{(1)}} = -9,7222 \text{ t}; \quad X_b^{(1)} = \frac{\delta_{b0}^{(1)}}{\delta_{bb}^{(1)}} = +0,0337 \text{ t}; \quad X_c^{(1)} = \frac{\delta_{c0}^{(1)}}{\delta_{cc}^{(1)}} = -1,2713 \text{ mt}.$$

6. Momente im vierfach statisch unbestimmten System (Abb. 259):

$$M = M_0^{(1)} - X_a^{(1)} M_a^{(1)} - X_b^{(1)} M_b^{(1)} - X_c^{(1)} M_c^{(1)}$$

k	M [mt]	k	M [mt]
1	- 0,5575	4	- 16,5268
2'	- 2,2586	5	+ 18,5125
2	- 5,5222	6'	- 5,6046
3'	+ 5,5087	6	- 7,2228
3	+ 13,4847	7'	- 7,8485
4'	+ 1,6040	7	+ 14,0258

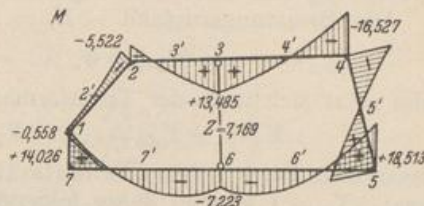


Abb. 259.

36. Die Entwicklung statisch unbestimmter Gruppenlasten.

Die einfachen Methoden zur unabhängigen Berechnung statisch unbestimmter Schnittkräfte versagen bei mehr als drei Unbekannten. Aus diesem Grunde wird der Begriff der überzähligen Größe durch die Bildung von Gruppen dieser ausgezeichneten Schnittkräfte erweitert. Sie sind bei einem n fach statisch unbestimmtem Tragwerk in n facher Mannigfaltigkeit vorhanden, jedoch nur mit n Gruppen unabhängig voneinander. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte werden mit Y_J ($J = A \dots N$) bezeichnet, also durch große Buchstaben unterschieden. Daher beschreiben die Wege δ_{JK} den Verschiebungszustand des Hauptsystems infolge der Belastung durch einzelne statisch unbestimmte Schnittkräfte $-Y_K = 1$. Sie werden im Sinne von $-Y_J$ positiv gerechnet. Die Gruppen statisch unbestimmter Schnittkräfte erhalten als überzählige Größen des Ansatzes wie bisher die Bezeichnung X_k , sind also durch kleine Buchstaben ($k = a \dots n$) unterschieden. Die Wege δ_{Jk} bedeuten daher Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems infolge von $-X_k = 1$ in Richtung von $-Y_J$.

Die Gruppenlasten X_k sind äußere Kräfte des Hauptsystems, mit denen die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks wie in (288) nach dem Superpositionsgesetz entwickelt werden.

$$M = M_0 - \sum X_k M_k, \quad (k = a \dots n). \quad (466)$$

In diesem Ansatz bedeuten M_0, M_k wieder die Schnittkräfte des Hauptsystems infolge der Belastung \mathfrak{B} und der Gruppenlast $-X_k = 1$ ($k = a \dots n$).

Die Bildung der Gruppenlasten. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J werden durch Superposition der Anteile aus den überzähligen Größen X_k gefunden.

$$Y_J = \sum_{k=a}^{k=n} X_k Y_{Jk}, \quad (J = A \dots N). \quad (467)$$

	X_a	X_b		X_h	X_i	X_k		X_n
Y_A	Y_{Aa}	Y_{Ab}		Y_{Ah}	Y_{Ai}	Y_{Ak}		Y_{An}
Y_B	Y_{Ba}	Y_{Bb}		Y_{Bh}	Y_{Bi}	Y_{Bk}		Y_{Bn}
Y_H	Y_{Ha}	Y_{Hb}		Y_{Hh}	Y_{Hi}	Y_{Hk}		Y_{Hn}
Y_J	Y_{Ja}	Y_{Jb}		Y_{Jh}	Y_{Ji}	Y_{Jk}		Y_{Jn}
Y_N	Y_{Na}	Y_{Nb}		Y_{Nh}	Y_{Ni}	Y_{Nk}		Y_{Nn}

(468)