Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

36. Die Entwicklung statisch unbestimmter Gruppenlasten

6. Momente im vierfach statisch unbestimmten System (Abb. 259):

$$M = M_0^{(1)} - X_a^{(1)} M_a^{(1)} - X_b^{(1)} M_b^{(1)} - X_c^{(1)} M_c^{(1)}$$

k	M [mt]	k	M [mt]
1	− 0,5575	4	− 16,5268
2′	− 2,2586	5	+ 18,5125
2	− 5,5222	6′	− 5,6046
3′	+ 5,5087	6	− 7,2228
3	+ 13,4847	7′	− 7,8485
4′	+ 1,6040	7	+ 14,0258

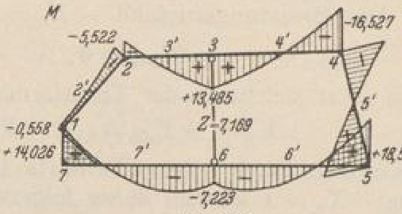

Abb. 259.

36. Die Entwicklung statisch unbestimmter Gruppenlasten.

Die einfachen Methoden zur unabhängigen Berechnung statisch unbestimmter Schnittkräfte versagen bei mehr als drei Unbekannten. Aus diesem Grunde wird der Begriff der überzähligen Größe durch die Bildung von Gruppen dieser ausgezeichneten Schnittkräfte erweitert. Sie sind bei einem n fach statisch unbestimmten Tragwerk in n facher Mannigfaltigkeit vorhanden, jedoch nur mit n Gruppen unabhängig voneinander. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte werden mit Y_J ($J = A \ldots N$) bezeichnet, also durch große Buchstaben unterschieden. Daher beschreiben die Wege δ_{JK} den Verschiebungszustand des Hauptsystems infolge der Belastung durch einzelne statisch unbestimmte Schnittkräfte $-Y_K = 1$. Sie werden im Sinne von $-Y_J$ positiv gerechnet. Die Gruppen statisch unbestimmter Schnittkräfte erhalten als überzählige Größen des Ansatzes wie bisher die Bezeichnung X_k, sind also durch kleine Buchstaben ($k = a \ldots n$) unterschieden. Die Wege δ_{Jk} bedeuten daher Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems infolge von $-X_k = 1$ in Richtung von $-Y_J$.

Die Gruppenlasten X_k sind äußere Kräfte des Hauptsystems, mit denen die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks wie in (288) nach dem Superpositionsgesetz entwickelt werden.

$$M = M_0 - \sum X_k M_k, \qquad (k = a \ldots n). \tag{466}$$

In diesem Ansatz bedeuten M_0, M_k wieder die Schnittkräfte des Hauptsystems infolge der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Gruppenlast $-X_k = 1$ ($k = a \ldots n$).

Die Bildung der Gruppenlasten. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J werden durch Superposition der Anteile aus den überzähligen Größen X_k gefunden.

$$Y_J = \sum_{k=a}^{k=n} X_k Y_{Jk}, \qquad (J = A \ldots N). \tag{467}$$

$$\begin{array}{c|cc:c:ccc:c:c|}
 & X_a & X_b & & X_h & X_i & X_k & & X_n \\
\hline
Y_A & Y_{Aa} & Y_{Ab} & & Y_{Ah} & Y_{Ai} & Y_{Ak} & & Y_{An} \\
Y_B & Y_{Ba} & Y_{Bb} & & Y_{Bh} & Y_{Bi} & Y_{Bk} & & Y_{Bn} \\
\hdashline
 & & & & & & & & \\
\hdashline
Y_H & Y_{Ha} & Y_{Hb} & & Y_{Hh} & Y_{Hi} & Y_{Hk} & & Y_{Hn} \\
Y_J & Y_{Ja} & Y_{Jb} & & Y_{Jh} & Y_{Ji} & Y_{Jk} & & Y_{Jn} \\
\hdashline
 & & & & & & & & \\
\hdashline
Y_N & Y_{Na} & Y_{Nb} & & Y_{Nh} & Y_{Ni} & Y_{Nk} & & Y_{Nn} \\
\hline
\end{array} \tag{468}$$

Daher bedeutet der Index k von Y_{Jk} im Gegensatz zu (466) die Ursache $+X_k = 1$. Der Ansatz besteht aus n Gleichungen zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J und den überzähligen Gruppenlasten X_k mit der umstehenden Matrix:

Der Belastungszustand $-X_k = 1$ ist gleichbedeutend mit

$$X_a = \cdots = X_{k-1} = 0, \qquad -X_k = 1, \qquad X_{k+1} = \cdots = X_n = 0,$$

und setzt sich nach der Transformation aus den Schnittkräften

$$Y_A = -Y_{Ak} \ldots, \qquad Y_J = -Y_{Jk} \ldots, \qquad Y_N = -Y_{Nk}$$

zusammen. Die beliebigen Schnittkräfte M_k des Hauptsystems infolge der Gruppenlast $-X_k = 1$ können daher folgendermaßen entwickelt werden:

$$M_k = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} M_J, \qquad (k = a \ldots n). \tag{469}$$

Hierbei ist M_J die Schnittkraft infolge von $-Y_J = 1$.

Die Ableitung der Elastizitätsgleichung für statisch unbestimmte Gruppenlasten. Das Hauptsystem entsteht nach Abschn. 24 durch die Verwendung von statisch unbestimmten Stütz- und Schnittkräften Y_J des Stabwerks als äußere Kräfte. Sie werden durch die Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen aus vorgeschriebenen geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand des Hauptsystems berechnet. Dabei entstehen Gleichungen über die Arbeit von virtuellen Kräften $\overline{\mathfrak{P}}$ und vorgeschriebenen Verschiebungen δ_J. Sie sind in Abschn. 24 mit $\overline{\mathfrak{P}} = -Y_J = 1$ und $\delta_J = 0$ angeschrieben worden.

$$1_J \cdot \delta_J = 1_J \cdot (\delta_{J0} - \sum_{H=A}^{H=N} Y_H \delta_{JH}) = 0, \qquad (J = A \ldots N). \tag{470}$$

Unter ungünstigen Umständen sind alle δ_{JH} von Null verschieden und damit n Gleichungen mit n Unbekannten zu lösen.

Um diese unabhängig voneinander anzugeben, werden Arbeitsgleichungen mit der virtuellen Belastung $-X_i = 1$ $(i = a \ldots n)$, also mit den äußeren Kräften $-Y_{Hi}$ $(H = A \ldots N)$ entwickelt.

$$\sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi} \delta_H = \frac{J_c}{F_c} \int \overline{N}_i N \frac{F_c}{F} ds + \int \overline{M}_i M \frac{J_c}{J} ds$$
$$+ E J_c \left(\int \overline{N}_i \alpha_t t \, ds + \int \overline{M}_i \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \overline{C}_{Ei} \Delta_E \right), \qquad (i = 1 \ldots n). \tag{471}$$

Die linke Seite der Gleichungen ist durch die mit dem Tragwerk vorgeschriebene Verträglichkeit des Formänderungszustandes des Hauptsystems ($\delta_H = 0$, $H = A \ldots N$) wiederum Null, so daß mit der Entwicklung von N, M nach (288) in Anlehnung an (293) folgender Ansatz entsteht:

$$1_i \delta_i = 1_i (\delta_{i0} - \sum_{k=1}^{k=n} X_k \delta_{ik}) = 0, \qquad (i = 1 \ldots n). \tag{472}$$

Die Vorzahlen $1_i \cdot \delta_{ik}$ und $1_i \cdot \delta_{i0}$ dieser n Elastizitätsgleichungen besitzen nicht mehr wie früher kinematische Bedeutung, sondern sind Ausdrücke für die virtuelle Arbeit der Gruppenbelastung $-X_i = 1$, also der Schnittkräfte $-Y_H = Y_{Hi}$, bei einer Verschiebung δ_{Hk} der Punkte H des Hauptsystems infolge der Gruppenlast $-X_k = 1$ oder infolge der vorgegebenen Belastung, der Temperaturänderung und Stützenbewegung $(\delta_{H\otimes})$

$$\left.\begin{aligned} 1_i \delta_{ik} &= \sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi} \delta_{Hk}, \qquad (i, k = a \ldots n), \\ 1_i \delta_{i\otimes} &= \sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi} \delta_{H\otimes}, \qquad (i = a \ldots n). \end{aligned}\right\} \tag{473}$$

Die Verschiebung δ_{Hk} im Sinne von $-Y_H = 1$ wird von der Gruppenbelastung $-X_k = 1$, also von den Schnittkräften $-Y_{Hk}$ hervorgerufen und nach **Maxwell** in Verbindung mit (469) folgendermaßen berechnet:

$$1_H \delta_{Hk} = 1_k \delta_{kH} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \delta_{JH}, \qquad (H = A \ldots N),$$

$$1_H \delta_{Hk} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \int M_H M_J \frac{J_c}{J} ds = \int M_H \Big(\sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} M_J\Big) \frac{J_c}{J} ds,$$

$$1_H \delta_{Hk} = \int M_H M_k \frac{J_c}{J} ds. \qquad (474)$$

Um jede überzählige Größe unabhängig von den übrigen angeben zu können, werden die Gruppenlasten X_k derart aus den statisch unbestimmten Schnittkräften zusammengesetzt, daß alle Vorzahlen δ_{ik} $(i \neq k)$ des Ansatzes (472) Null sind. Auf diese Weise entstehen $\frac{1}{2} \cdot n\,(n-1)$ Nebenbedingungen, welche mit den n Gleichungen (467) zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J und den überzähligen Größen X_k erfüllt werden können. Sie bilden die lineare Transformation, um die n Elastizitätsgleichungen mit vollbesetzter Matrix derart umzuformen, daß jede von ihnen nur eine überzählige Größe X_k enthält (465).

Die Auswahl der Gruppenlasten für die Nebenbedingung $\delta_{ik} = 0$. Die Transformation (468) der statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J als Funktion der überzähligen Größen X_k enthält n^2 Koeffizienten Y_{Jk}. Von diesen werden $\frac{1}{2} \cdot n\,(n-1)$ als Parameter gebraucht, um dieselbe Anzahl von Nebenbedingungen $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ zu erfüllen. Die virtuelle Arbeit $1_i \cdot \delta_{ik}$ wird hierzu nach (473) als Funktion dieser Parameter entwickelt. Über die anderen $n^2 - \frac{1}{2}\,n\,(n-1) = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$ Koeffizienten kann frei verfügt werden. Sie werden derart angenommen, daß die $\frac{1}{2} \cdot n\,(n-1)$ abhängigen Parameter übersichtlich, schnell und fehlerfrei bestimmt werden. Sollen nur einzelne δ_{ik} des Ansatzes Null werden, um die Matrix der Elastizitätsgleichungen in geeigneter Weise aufzuspalten und damit die Lösung zu vereinfachen, so ist die Anzahl der frei wählbaren Parameter Y_{Jk} größer.

Die Lösung eines allgemeinen Ansatzes wird am einfachsten, wenn die Koeffizienten Y_{Ji} der Hauptdiagonalen gleich 1 und die Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen Null gesetzt werden. Damit entsteht die folgende Transformation der n statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J:

	X_a	X_b	X_c		X_h	X_i	X_k		X_n
Y_A	1	Y_{Ab}	Y_{Ac}		Y_{Ah}	Y_{Ai}	Y_{Ak}		Y_{An}
Y_B	0	1	Y_{Bc}		Y_{Bh}	Y_{Bi}	Y_{Bk}		Y_{Bn}
Y_C	0	0	1		Y_{Ch}	Y_{Ci}	Y_{Ck}		Y_{Cn}
Y_H	0	0	0		1	Y_{Hi}	Y_{Hk}		Y_{Hn}
Y_J	0	0	0		0	1	Y_{Jk}		Y_{Jn}
Y_K	0	0	0		0	0	1		Y_{Kn}
Y_N	0	0	0		0	0	0		1

(475)

Die überzähligen Größen X_i werden demnach aus einer stetig zunehmenden Anzahl von statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J gebildet, so daß die abhängigen Koeffizienten schrittweise aus den Nebenbedingungen $\delta_{ik} = 0$ durch Gleichungen mit je einer Unbekannten erhalten werden. Der Parameter Y_{Ab} der Kolonne X_b ergibt sich aus der Bedingung $\delta_{ba} = 0$. Die Parameter Y_{Ac}, Y_{Bc} der Kolonne X_c werden mit den Nebenbedingungen $\delta_{ca} = 0$, $\delta_{cb} = 0$ bestimmt. Zur Berechnung der $(k-1)$ unbekannten Parameter Y_{Jk} der Spalte k stehen ebenso viele Bedingungsgleichungen $\delta_{ka} = 0 \ldots \delta_{k(k-1)} = 0$ zur Verfügung.

Der Belastungszustand $-X_a = 1$ ist nach (475) gleichbedeutend mit $-Y_A = 1$. Er liefert die Verschiebungen δ_{Ja} $(J = A \ldots N)$.

$$1_a\,\delta_{ab} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Ja}\,\delta_{Jb} = 1_{Aa}\delta_{Ab} = 0, \qquad \text{d. h.} \quad \delta_{Ab} = 0.$$

$$1_b\,\delta_{ba} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jb}\,\delta_{Ja} = Y_{Ab}\delta_{Aa} + 1_{Bb}\delta_{Ba} = 0; \quad Y_{Ab} = -\frac{\delta_{Ba}}{\delta_{Aa}}.$$

$-Y_A = Y_{Ab} = -\delta_{Ba}/\delta_{Aa}$ und $-Y_B = Y_{Bb} = 1$ bilden den Belastungszustand $-X_b = 1$. Damit sind dann auch die Formänderungen δ_{Jb} $(J = A \ldots N)$ bekannt. Die Koeffizienten Y_{Ac} und Y_{Bc} werden mit den folgenden Bedingungen bestimmt:

$$1_a\delta_{ac} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Ja}\delta_{Jc} = 1_{Aa}\,\delta_{Ac} = 0; \qquad \delta_{Ac} = 0;$$

$$1_b\delta_{bc} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jb}\delta_{Jc} = Y_{Ab}\delta_{Ac} + 1_{Bb}\,\delta_{Bc} = 0; \; \delta_{Bc} = 0;$$

$$1_c\delta_{cb} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jc}\delta_{Jb} = Y_{Ac}\delta_{Ab} + Y_{Bc}\delta_{Bb} + 1_{Cc}\delta_{Cb} = 0;$$

$$Y_{Bc} = -\frac{1_{Cc}\delta_{Cb}}{\delta_{Bb}};$$

$$1_c\delta_{ca} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jc}\delta_{Ja} = Y_{Ac}\delta_{Aa} + Y_{Bc}\delta_{Ba} + 1_{Cc}\delta_{Ca} = 0;$$

$$Y_{Ac} = -\frac{Y_{Bc}\delta_{Ba} + 1_{Cc}\delta_{Ca}}{\delta_{Aa}}.$$

Damit ist der Belastungszustand $-X_c = 1$ bestimmt. Er besteht aus den Schnittkräften $-Y_A = Y_{Ac}$, $-Y_B = Y_{Bc}$, $-Y_C = 1$ und liefert die Formänderungen δ_{Jc} $(J = A \ldots N)$. Werden die Indizes der statisch unbestimmten Schnittkräfte mit Rücksicht auf die spätere Anwendung durch Ziffern ersetzt, so entsteht die Rechenvorschrift auf S. 285.

Die Komponenten $Y_H = -Y_{Hi}$ des Belastungszustandes $-X_i = 1$ werden als Summe von positiven und negativen Anteilen entwickelt, in denen sich Abrundungsfehler unter Umständen in unzulässigem Maße fortpflanzen und die Brauchbarkeit des Ergebnisses Y_{Hi} gefährden. Die Fehlerempfindlichkeit der Auflösung von n Gleichungen mit n Unbekannten ist daher durch die Verwendung von überzähligen Gruppenlasten nicht beseitigt, sie gefährdet vielmehr die einwandfreie Bildung der Gruppen, also die Transformation der statisch unbestimmten Einzelkräfte. Die unabhängige Berechnung der überzähligen Gruppenlasten nach (465)

$$X_k = \delta_{k0}/\delta_{kk} \tag{476}$$

ist daher stets an den Nachweis geknüpft, daß die Nebenbedingungen

$$1_i\delta_{ik} = 0\,, \qquad (i \neq k)$$

durch die Schnittkräfte Y_{Hi} und Y_{Hk} $(H = A \ldots N)$ erfüllt werden.

1. $\delta_{ab} = 0$	$1\,\delta_{1b} = 0$	
$\delta_{ac} = 0$	$1\,\delta_{1c} = 0$	
$\cdots$	$\cdots$	
$\delta_{an} = 0$	$1\,\delta_{1n} = 0$	
$\delta_{ba} = 0$	$Y_{1b}\delta_{1a} + 1\,\delta_{2a} = 0$	$Y_{1b} = -\dfrac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}$
2. $\delta_{bc} = 0$	$1\,\delta_{2c} = 0$	
$\cdots$	$\cdots$	
$\delta_{bn} = 0$	$1\,\delta_{2n} = 0$	
$\delta_{cb} = 0$	$Y_{2c}\delta_{2b} + 1\,\delta_{3b} = 0$	$Y_{2c} = -\dfrac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}}$
$\delta_{ca} = 0$	$Y_{1c}\delta_{1a} + Y_{2c}\delta_{2a} + 1\,\delta_{3a} = 0$	$Y_{1c} = -\dfrac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} - \dfrac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} Y_{2c}$
3. $\delta_{cd} = 0$	$1\,\delta_{3d} = 0$	
$\cdots$	$\cdots$	
$\delta_{cn} = 0$	$1\,\delta_{3n} = 0$	
$\delta_{dc} = 0$	$Y_{3d}\delta_{3c} + 1\,\delta_{4c} = 0$	$Y_{3d} = -\dfrac{\delta_{4c}}{\delta_{3c}}$
$\delta_{db} = 0$	$Y_{2d}\delta_{2b} + Y_{3d}\delta_{3b} + 1\,\delta_{4b} = 0$	$Y_{2d} = -\dfrac{\delta_{4b}}{\delta_{2b}} - \dfrac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} Y_{3d}$
$\delta_{da} = 0$	$Y_{1d}\delta_{1a} + Y_{2d}\delta_{2a} + Y_{3d}\delta_{3a} + 1\,\delta_{4a} = 0$	$Y_{1d} = -\dfrac{\delta_{4a}}{\delta_{1a}} - \dfrac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} Y_{3d} - \dfrac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} Y_{2d}$

Die Zähler und Nenner von (476) sind wiederum Ausdrücke für die virtuelle Arbeit der Kräfte $-Y_J = Y_{Jk}$ der Gruppenlast $-X_k = 1$.

$$\left.\begin{aligned}
1_k\delta_{kk} &= \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk}\delta_{Jk} \quad (k = a \ldots n),\\
1_a\delta_{aa} &= 1_{Aa}\delta_{Aa},\\
1_b\delta_{bb} &= Y_{Ab}\delta_{Ab} + 1_{Bb}\delta_{Bb} = 1_{Bb}\delta_{Bb},\\
1_c\delta_{cc} &= Y_{Ac}\delta_{Ac} + Y_{Bc}\delta_{Bc} + 1_{Cc}\delta_{Cc} = 1_{Cc}\delta_{Cc},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
1_k\delta_{kk} &= 1_{Kk}\delta_{Kk}.
\end{aligned}\right\} \tag{477}$$

Die Nenner sind daher bereits aus der Transformation bekannt. Die Zähler erhalten für vorgegebene äußere Ursachen folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}
1_k\delta_{k\otimes} &= \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk}\delta_{J\otimes}, \quad \delta_{J\otimes} = \delta_{J0} + \delta_{Jt} + \delta_{Js}, \quad (k = a \ldots n),\\
1_a\delta_{a\otimes} &= 1_{Aa}\delta_{A\otimes},\\
1_b\delta_{b\otimes} &= Y_{Ab}\delta_{A\otimes} + 1_{Bb}\delta_{B\otimes},\\
1_c\delta_{c\otimes} &= Y_{Ac}\delta_{A\otimes} + Y_{Bc}\delta_{B\otimes} + 1_{Cc}\delta_{C\otimes}.
\end{aligned}\right\} \tag{478}$$

Die Einflußlinien $X_k\delta_{kk}$ ergeben sich nach dem Satze von E. **Betti** aus

$$\left.\begin{aligned}
1_k\delta_{km} &= 1_m\delta_{mk},\\
X_k\delta_{kk} &= 1_m\delta_{mk} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jm}\delta_{Jk} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk}\delta_{mJ},\\
X_a\delta_{aa} &= 1_{Aa}\delta_{mA},\\
X_b\delta_{bb} &= Y_{Ab}\delta_{mA} + 1_{Bb}\delta_{mB},\\
X_c\delta_{cc} &= Y_{Ac}\delta_{mA} + Y_{Bc}\delta_{mB} + 1_{Cc}\delta_{mC}.
\end{aligned}\right\} \tag{479}$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte sind dann nach (467)

$$Y_K = 1_{Kk} X_k + Y_{K(k+1)} X_{k+1} + \cdots Y_{Kn} X_n .$$

Für die Bildung des Hauptsystems gelten die gleichen Gesichtspunkte wie auf Seite 170.

Das Wesen der Rechenvorschrift wird am besten an einfachen Beispielen gezeigt.

a) Zweifach statisch unbestimmtes Tragwerk.

Transformation: | Nebenbedingung: | Statisch unbestimmte Schnittkräfte:

	X_a	X_b
Y_1	1	Y_{1b}
Y_2	0	1

$$\delta_{ba} = 0,$$
$$Y_{1b}\,\delta_{1a} + 1_{2b}\,\delta_{2a} = 0,$$
$$Y_{1b} = -1\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}},$$

$$Y_1 = 1\,X_a - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} X_b,$$
$$Y_2 = 1\,X_b.$$

Durchgehender Träger über vier Stützen (Abb. 260). Die statisch nicht bestimmbaren Schnittkräfte sind die Stützenmomente Y_1, Y_2.

Belastungszustand $-X_a = 1$: $-Y_1 = Y_{1a} = 1$; $-Y_2 = Y_{2a} = 0$

$$\delta_{1a} = \frac{l_1' + l_2'}{3}; \qquad \delta_{2a} = \frac{l_2'}{6}.$$

Belastungszustand $-X_b = 1$: $-Y_1 = Y_{1b} = -\dfrac{l_2'}{2(l_1' + l_2')}$; $-Y_2 = Y_{2b} = 1.$

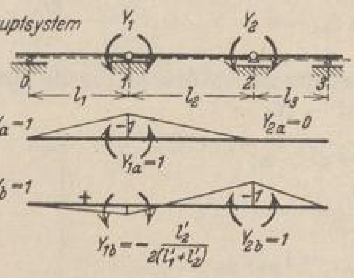

Abb. 260.

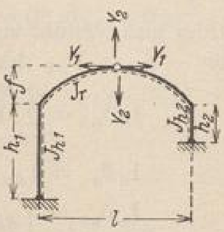

Abb. 261.

Unsymmetrischer Eingelenkrahmen (Abb. 261). Die statisch nicht bestimmbaren Schnittkräfte sind die Komponenten Y_1 und Y_2 der Gelenkkraft.

$$-X_a = 1:\quad -Y_1 = Y_{1a} = 1; \qquad -Y_2 = Y_{2a} = 0 \quad \text{(Abb. 262a)};$$
$$-X_b = 1:\quad -Y_1 = Y_{1b} = -\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}; \qquad -Y_2 = Y_{2b} = 1 \quad \text{(Abb. 262b)}.$$
$$Y_{1b} = -\frac{15\,l\,[h_1'(2f + h_1) - h_2'(2f + h_2)]}{4\,\{3\,l'\,f^2 + 5\,h_1'[3f(h_1 + f) + h_1^2] + 5\,h_2'[3f(h_2 + f) + h_2^2]\}},$$
$$Y_1 = X_a - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} X_b; \qquad Y_2 = X_b.$$

Bei symmetrischer Trägerausbildung mit $h_1 = h_2$ und $h_1' = h_2'$ ist $Y_{1b} = 0$.

b) Dreifach statisch unbestimmtes Tragwerk. Transformation für die Nebenbedingungen $\delta_{ab} = \delta_{bc} = \delta_{ca} = 0$ nach S. 285

	X_a	X_b	X_c
Y_1	1	Y_{1b}	Y_{1c}
Y_2		1	Y_{2c}
Y_3			1

	X_a	X_b	X_c
Y_1	1	$-\dfrac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}$	$-\dfrac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} + \dfrac{\delta_{2a}\,\delta_{3b}}{\delta_{1a}\,\delta_{2b}}$
Y_2		1	$-\dfrac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}}$
Y_3			1

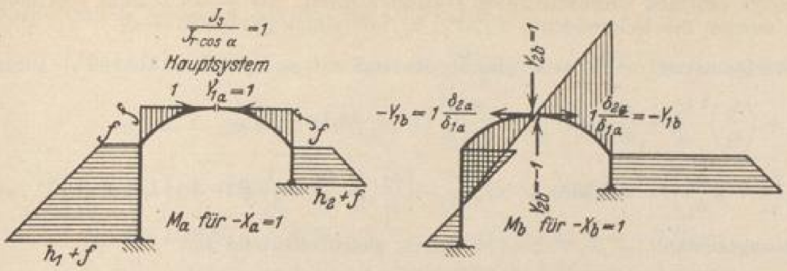

Abb. 262.

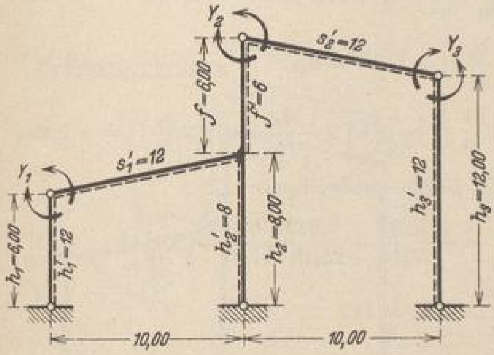

Abb. 263a. Hauptsystem.

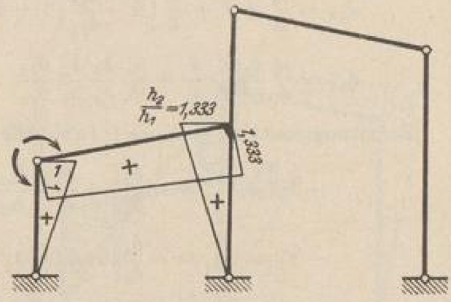

Abb. 263b. $-Y_1 = 1$.

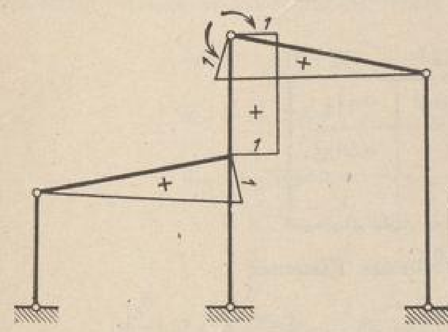

Abb. 263c. $-Y_2 = 1$.

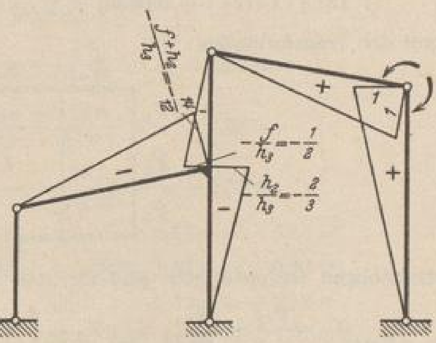

Abb. 263d. $-Y_3 = 1$.

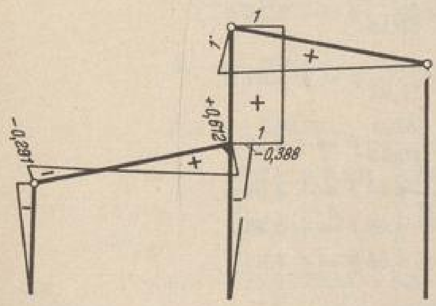

Abb. 263e. $-X_b = 1$.

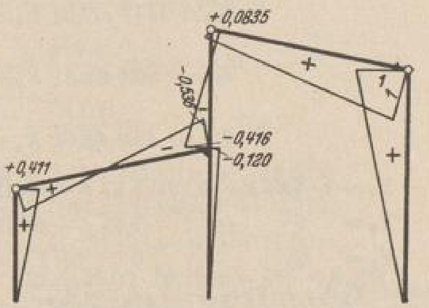

Abb. 263f. $-X_c = 1$.

Dreifach statisch unbestimmter Hallenrahmen. Als statisch nicht bestimmbare Einzelkräfte werden die Eckmomente Y_1, Y_2, Y_3 verwendet (Abb. 263a—d).

Belastungszustand $-X_a = 1$, gleichbedeutend mit $-Y_1 = 1$ (Abb. 263b), führt zu

$$\delta_{1a} = \frac{h_1'}{3} + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \frac{h_2'}{3} + \frac{s_1'}{3}\left[1 + \frac{h_2}{h_1} + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\right] = +25{,}18 = \delta_{aa},$$

$$\delta_{2a} = \frac{s_1'}{6}\left(1 + 2\frac{h_2}{h_1}\right) = +7{,}333; \qquad \delta_{3a} = -\left[\frac{h_2}{h_1}\frac{h_2}{h_3}\frac{h_2'}{3} + \frac{1}{h_3}(f + h_2)\left(1 + 2\frac{h_2}{h_1}\right)\frac{s_1'}{6}\right] = -10{,}87.$$

Belastungszustand $-X_b = 1$ (Abb. 263e), gleichbedeutend mit

$$-Y_1 = Y_{1b} = -\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} = -\frac{7{,}333}{25{,}18} = -0{,}291; \qquad -Y_2 = 1,$$

liefert M_b und die Formänderungen δ_{2b} und δ_{3b}; $\delta_{1b} = 0$.

$$\delta_{2b} = \frac{s_2'}{3} + f' + \frac{s_1'}{6}\left[2 - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}\left(1 + 2\frac{h_2}{h_1}\right)\right] = 11{,}87 = \delta_{bb},$$

$$\delta_{3b} = \frac{s_2'}{6} - \frac{f'}{2}\frac{f}{h_3} + \frac{h_2'}{3}\frac{h_2}{h_3}\frac{h_2}{h_1}\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} - \frac{1}{6}s_1'\frac{f + h_2}{h_3}\left[2 - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}\left(1 + 2\frac{h_2}{h_1}\right)\right] = -0{,}99.$$

Belastungszustand $-X_c = 1$ (Abb. 263f), gleichbedeutend mit

$$-Y_1 = Y_{1c} = -\frac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} + \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}\frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} = +\frac{10{,}87}{25{,}18} - \frac{7{,}333 \cdot 0{,}99}{25{,}18 \cdot 11{,}87} = 0{,}411;$$

$$-Y_2 = Y_{2c} = -\frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} = 0{,}0835; \qquad -Y_3 = 1,$$

liefert M_c und damit die Formänderungen $\delta_{1c} = 0$, $\delta_{2c} = 0$.

$$\begin{aligned}\delta_{3c} = &+ 12{,}0 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{14}{12}(2 \cdot 0{,}536 - 0{,}411) + 8 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}12 \cdot \tfrac{2}{3} + 6 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{2}(2 \cdot 0{,}416 - 0{,}0835)\\ &+ 12 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 + 0{,}0835) + 12 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 1 = 10{,}30 = \delta_{cc}.\end{aligned}$$

Ergebnis der Transformation:

	X_a	X_b	X_c
Y_1	1	− 0,291	0,411
Y_2		1	0,0835
Y_3			1

Die überzähligen Gruppenlasten sind für eine beliebige Belastung

$$X_a = \frac{\delta_{a0}}{\delta_{aa}} = \frac{\delta_{a0}}{25{,}18}; \qquad X_b = \frac{\delta_{b0}}{\delta_{bb}} = \frac{\delta_{b0}}{11{,}87}; \qquad X_c = \frac{\delta_{c0}}{\delta_{cc}} = \frac{\delta_{c0}}{10{,}30}.$$

Gleichförmig verteilte Belastung der beiden Riegel (Abb. 263g).

$$\delta_{a0} = 117\,p, \qquad X_a = \frac{117}{25{,}18}\,p = +4{,}64\,p,$$

$$\delta_{b0} = 66{,}0\,p, \qquad X_b = \frac{66{,}0}{11{,}87}\,p = +5{,}57\,p,$$

$$\delta_{c0} = 48{,}0\,p, \qquad X_c = \frac{48{,}0}{10{,}30}\,p = +4{,}66\,p.$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= 1 \cdot 4{,}64\,p - 0{,}291 \cdot 5{,}57\,p + 0{,}411 \cdot 4{,}66\,p = +4{,}94\,p,\\ Y_2 &= 0 + 1 \cdot 5{,}57\,p + 0{,}0835 \cdot 4{,}66\,p = +5{,}96\,p,\\ Y_3 &= 0 \quad 0 + 1 \cdot 4{,}66\,p = +4{,}66\,p,\end{aligned}$$

Probe: $Y_1 \delta_{1a} + Y_2 \delta_{2a} + Y_3 \delta_{3a} = \delta_{a0}$,

$$4{,}94 \cdot 25{,}18 + 5{,}96 \cdot 7{,}33 - 4{,}66 \cdot 10{,}87 = 117 \approx \delta_{a0}/p.$$

Gleichförmig verteilte Windlast auf den linken Pfosten.

$$\delta_{a0} = -243\,w, \qquad X_a = -\frac{243}{25{,}18}\,w = -9{,}66\,w,$$

$$\delta_{b0} = -\;\;25{,}2\,w, \qquad X_b = -\frac{25{,}2}{11{,}87}\,w = -2{,}12\,w,$$

$$\delta_{c0} = +\;\;46{,}9\,w, \qquad X_c = +\frac{46{,}9}{10{,}30}\,w = +4{,}55\,w.$$

$$\begin{array}{ll} Y_1 = -1\cdot 9{,}66\,w + 0{,}291\cdot 2{,}12\,w + 0{,}411 & \cdot 4{,}55\,w = -7{,}04\,w, \\ Y_2 = \quad 0 \qquad -1 \qquad\;\; \cdot 2{,}12\,w + 0{,}0835 & \cdot 4{,}55\,w = -1{,}74\,w, \\ Y_3 = \quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad\;\; 1 & \cdot 4{,}55\,w = +4{,}55\,w, \end{array}$$

Probe: $-7{,}04\cdot 25{,}18 - 1{,}74\cdot 7{,}33 - 4{,}55\cdot 10{,}87 = -240 \approx \delta_{a0}/w$.

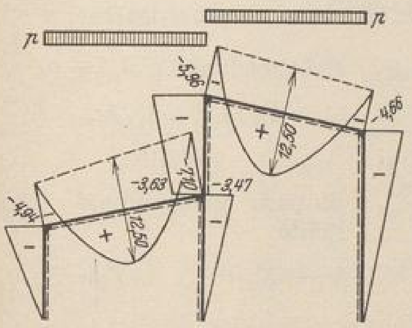

Abb. 263g. Lotrechte Belastung der Riegel, Momente in mt für $p = 1$ t/m.

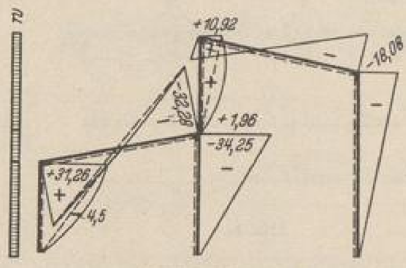

Abb. 263h. Windbelastung. Momente in mt für $w = 1$ t/m.

Gleichförmig verteilte Windlast auf den linken Riegel.

$$\delta_{a0} = -170\,w, \qquad X_a = -\frac{170}{25{,}18}\,w = -6{,}77\,w,$$

$$\delta_{b0} = -12{,}8\,w, \qquad X_b = -\frac{12{,}8}{11{,}87}\,w = -1{,}08\,w,$$

$$\delta_{c0} = +26{,}1\,w, \qquad X_c = +\frac{26{,}1}{10{,}30}\,w = +2{,}53\,w,$$

$$\begin{array}{ll} Y_1 = -1\cdot 6{,}77\,w + 0{,}291\cdot 1{,}08\,w + 0{,}411 & \cdot 2{,}53\,w = -5{,}42\,w, \\ Y_2 = \quad 0 \qquad -1 \qquad\;\; \cdot 1{,}08\,w + 0{,}0835 & \cdot 2{,}53\,w = -0{,}87\,w, \\ Y_3 = \quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad +1 & \cdot 2{,}53\,w = +2{,}53\,w, \end{array}$$

Probe: $-5{,}42\cdot 25{,}18 - 0{,}87\cdot 7{,}33 - 2{,}53\cdot 10{,}87 = -170 \approx \delta_{a0}/w$.

Gleichförmig verteilte Windlast auf den mittleren Pfosten.

$$\delta_{a0} = -655\,w, \qquad X_a = -\frac{655}{25{,}18}\,w = -26{,}0\;\;w,$$

$$\delta_{b0} = -109{,}4\,w, \qquad X_b = -\frac{109{,}4}{11{,}87}\,w = -\;\;9{,}23\,w,$$

$$\delta_{c0} = +113{,}2\,w, \qquad X_c = +\frac{113{,}2}{10{,}30}\,w = +11{,}00\,w,$$

$$\begin{array}{ll} Y_1 = -1\cdot 26{,}0\,w + 0{,}291\cdot 9{,}23\,w + 0{,}411 & \cdot 11{,}00\,w = -18{,}8\;\;w, \\ Y_2 = \quad 0 \qquad -1 \qquad\;\; \cdot 9{,}23\,w + 0{,}0835 & \cdot 11{,}00\,w = -\;\;8{,}31\,w, \\ Y_3 = \quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad +1 & \cdot 11{,}00\,w = +11{,}00\,w, \end{array}$$

Probe: $-18{,}8\cdot 25{,}18 - 8{,}31\cdot 7{,}33 - 11{,}00\cdot 10{,}87 = -654 \approx \delta_{a0}/w$.

Die Biegungsmomente aus den drei Windlasten sind superponiert und in Abb. 263h aufgetragen worden.

Die Gruppenbildung bei Symmetrie des Tragwerks. Bei Auflösung der Elastizitätsgleichungen mit symmetrisch liegenden statisch unbestimmten Schnittkräften sind durch die Addition und Subtraktion einander zugeordneter Gleichungen neue Unbekannte entstanden, die bereits in Abschn. 28 als Gruppenlasten X_{a+i}, X_{r-i} erkannt und unabhängig voneinander berechnet wurden. Die Gruppenlast $-X_{a+i}=1$ bestand aus $-Y_{A+J}=1$, $-Y_{R-J}=1$, die Gruppenlast $-X_{r-i}=1$ aus $-Y_{A+J}=1$, $+Y_{R-J}=1$. Die Matrix zerfiel damit in zwei voneinander unabhängige Teile. Im Sinne dieses Abschnitts wurde also über alle übrigen Komponenten $Y_{H(a+i)}$, $Y_{H(r-i)}$ frei verfügt. Sie waren Null. Sollen jedoch nunmehr alle überzähligen Gruppenlasten unabhängig voneinander sein, so werden die Ansätze von S. 281 für die Transformation der statisch unbestimmten Schnittkräfte mit den Ergebnissen aus Abschn. 28 bei Auswahl der frei verfügbaren Komponenten unterhalb der Hauptdiagonale des Ansatzes verbunden.

a) Träger auf vier Stützen nach Abb. 264 (eine Symmetrieachse):

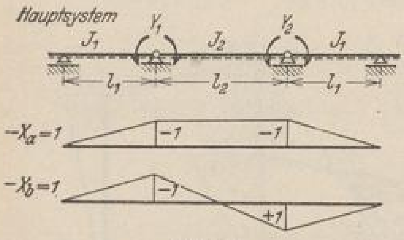

Abb. 264.

Transformation

	X_a	X_b
Y_1	1	Y_{1b}
Y_2	1	-1

$\delta_{1a}=\delta_{2a}$

Nebenbedingung $\delta_{ba}=0$

$$Y_{1b}\,\delta_{1a}-1_{2b}\,\delta_{2a}=0,$$
$$Y_{1b}=1.$$

Statisch unbestimmte Schnittkräfte

$$Y_1=X_a+X_b,\qquad Y_2=X_a-X_b.$$

b) Bunkerrahmen nach Abb. 265 (eine Symmetrieachse).

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e	X_f
Y_1	1	Y_{1b}	Y_{1c}	Y_{1d}	Y_{1e}	Y_{1f}
Y_2		1	1	Y_{2d}	Y_{2e}	Y_{2f}
Y_3		1	-1	Y_{3d}	Y_{3e}	Y_{3f}
Y_4				1	Y_{4e}	Y_{4f}
Y_5					1	1
Y_6					1	-1

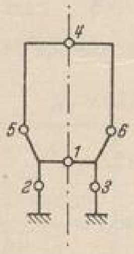

Abb. 265.

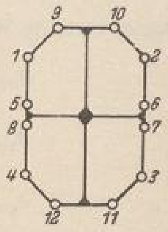

Abb. 266.

Damit ist: $Y_{2c}=Y_{5f}=1$,

$$Y_{1c}=Y_{1f}=Y_{4f}=0,$$

$$Y_{2d}=Y_{3d},\qquad Y_{2e}=Y_{3e},\qquad Y_{2f}=-Y_{3f}.$$

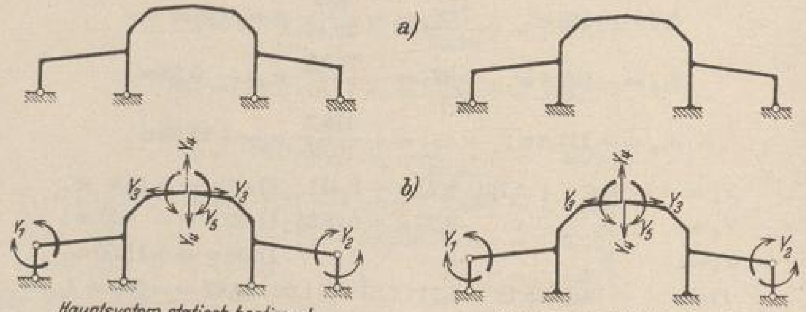

Abb. 267.

c) Behälterrahmen nach Abb. 266 (zwei Symmetrieachsen).

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e	X_f	X_g	X_h	X_i	X_k	X_l	X_m
Y_1	1	1	1	1	Y_{1e}	Y_{2f}	Y_{3g}	Y_{4h}	Y_{1i}	Y_{2k}	Y_{3l}	Y_{4m}
Y_2	1	1	-1	-1	Y_{1e}	Y_{2f}	$-Y_{3g}$	$-Y_{4h}$	Y_{1i}	Y_{2k}	$-Y_{3l}$	$-Y_{4m}$
Y_3	1	-1	-1	1	Y_{1e}	$-Y_{2f}$	$-Y_{3g}$	Y_{4h}	Y_{1i}	$-Y_{2k}$	$-Y_{3l}$	Y_{4m}
Y_4	1	-1	1	-1	Y_{1e}	$-Y_{2f}$	Y_{3g}	$-Y_{4h}$	Y_{1i}	$-Y_{2k}$	Y_{3l}	$-Y_{4m}$
Y_5					1	1	1	1	Y_{5i}	Y_{6k}	Y_{7l}	Y_{8m}
Y_6					1	1	-1	-1	Y_{5i}	Y_{6k}	$-Y_{7l}$	$-Y_{8m}$
Y_7					1	-1	-1	1	Y_{5i}	$-Y_{6k}$	$-Y_{7l}$	Y_{8m}
Y_8					1	-1	1	-1	Y_{5i}	$-Y_{6k}$	Y_{7l}	$-Y_{8m}$
Y_9									1	1	1	1
Y_{10}									1	1	-1	-1
Y_{11}									1	-1	-1	1
Y_{12}									1	-1	1	-1

Die Abkürzung des Ansatzes bei Symmetrie des Tragwerks und Verwendung statisch unbestimmter Hauptsysteme wird mit der einheitlichen Untersuchung der Binder der dreischiffigen Hallen Abb. 267 und 268 gezeigt, deren Riegelzug unter Wahrung symmetrischer Anordnung beliebig geformt sein kann. Die Hauptsysteme zählen fünf statisch unbestimmte Schnittkräfte $Y_1 \ldots Y_5$, deren Lage und Sinn aus den Abbildungen hervorgeht.

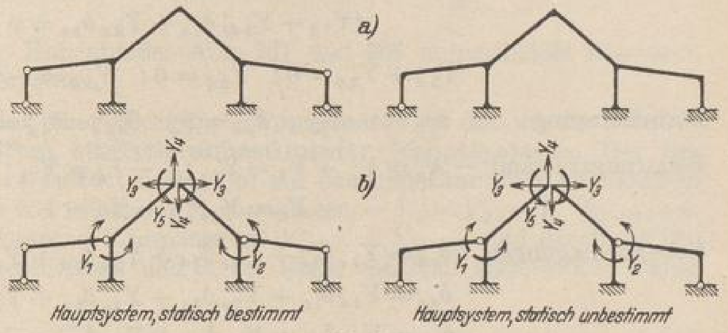

Abb. 268.

Beziehung zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften und den überzähligen Gruppenlasten.

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e
Y_1	1	Y_{1b}	Y_{1c}	Y_{1d}	Y_{1e}
Y_2	1	-1	Y_{2c}	Y_{2d}	Y_{2e}
Y_3			1	Y_{3d}	Y_{3e}
Y_4				1	Y_{4e}
Y_5					1

Belastungszustand $-X_a = 1:\ -Y_1 = 1;\ \ -Y_2 = 1;\ \ Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0.$

Formänderung $\delta_{1a} = \delta_{2a};\ \ \delta_{3a};\ \ \delta_{4a} = 0;\ \ \delta_{5a}.$

Belastungszustand $-X_b = 1:\ -Y_1 = Y_{1b};\ \ -Y_2 = -1;\ \ Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0.$

Nebenbedingung $\delta_{ba} = Y_{1b}\,\delta_{1a} + Y_{2b}\,\delta_{2a} = 0;\ \ Y_{1b} = 1.$

Formänderung $\delta_{1b} = -\delta_{2b};\ \ \delta_{3b} = 0;\ \ \delta_{4b};\ \ \delta_{5b} = 0.$

Belastungszustand $-X_c = 1:\ -Y_1 = Y_{1c};\ -Y_2 = Y_{2c};\ -Y_3 = 1;\ Y_4 = Y_5 = 0.$

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\delta_{cb} &= Y_{1c}\,\delta_{1b} + Y_{2c}\,\delta_{2b} + 1\,\delta_{3b} = 0,\\
\delta_{ca} &= Y_{1c}\,\delta_{1a} + Y_{2c}\,\delta_{2a} + 1\,\delta_{3a} = 0,\\
&(Y_{1c} - Y_{2c})\,\delta_{1b} = 0,\\
&(Y_{1c} + Y_{2c})\,\delta_{1a} + 1\,\delta_{3a} = 0,\\
&Y_{1c} = Y_{2c} = -\frac{\delta_{3a}}{2\,\delta_{1a}}.
\end{aligned}$$

Formänderung $\delta_{1c} = \delta_{2c};\ \ \delta_{3c};\ \ \delta_{4c} = 0;\ \ \delta_{5c}.$

Belastungszustand $-X_d = 1:\ -Y_1 = Y_{1d};\ \ -Y_2 = Y_{2d};\ \ -Y_3 = Y_{3d};$
$-Y_4 = 1;\ \ Y_5 = 0.$

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\delta_{dc} &= Y_{1d}\,\delta_{1c} + Y_{2d}\,\delta_{2c} + Y_{3d}\,\delta_{3c} + 1\,\delta_{4c} = 0,\\
\delta_{db} &= Y_{1d}\,\delta_{1b} + Y_{2d}\,\delta_{2b} + Y_{3d}\,\delta_{3b} + 1\,\delta_{4b} = 0,\\
\delta_{da} &= Y_{1d}\,\delta_{1a} + Y_{2d}\,\delta_{2a} + Y_{3d}\,\delta_{3a} + 1\,\delta_{4a} = 0,\\
&(Y_{1d} + Y_{2d})\,\delta_{1c} + Y_{3d}\,\delta_{3c} = 0,\\
&(Y_{1d} - Y_{2d})\,\delta_{1b} + 1\,\delta_{4b} = 0,\\
&(Y_{1d} + Y_{2d})\,\delta_{1a} + Y_{3d}\,\delta_{3a} = 0,
\end{aligned}$$

$$Y_{1d} + Y_{2d} = 0;\ \ Y_{3d} = 0;\ \ Y_{1d} = -Y_{2d} = -\frac{\delta_{4b}}{2\,\delta_{1b}}.$$

Formänderung $\delta_{1d} = -\delta_{2d};\ \ \delta_{3d} = 0;\ \ \delta_{4d};\ \ \delta_{5d} = 0.$

Belastungszustand $-X_e = 1:\ -Y_1 = Y_{1e};\ \ -Y_2 = Y_{2e};\ \ -Y_3 = Y_{3e};$
$-Y_4 = Y_{4e};\ \ -Y_5 = 1.$

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\delta_{ed} &= Y_{1e}\,\delta_{1d} + Y_{2e}\,\delta_{2d} + Y_{3e}\,\delta_{3d} + Y_{4e}\,\delta_{4d} + 1\,\delta_{5d} = 0,\\
\delta_{ec} &= Y_{1e}\,\delta_{1c} + Y_{2e}\,\delta_{2c} + Y_{3e}\,\delta_{3c} + Y_{4e}\,\delta_{4c} + 1\,\delta_{5c} = 0,\\
\delta_{eb} &= Y_{1e}\,\delta_{1b} + Y_{2e}\,\delta_{2b} + Y_{3e}\,\delta_{3b} + Y_{4e}\,\delta_{4b} + 1\,\delta_{5b} = 0,\\
\delta_{ea} &= Y_{1e}\,\delta_{1a} + Y_{2e}\,\delta_{2a} + Y_{3e}\,\delta_{3a} + Y_{4e}\,\delta_{4a} + 1\,\delta_{5a} = 0,\\
&(Y_{1e} - Y_{2e})\,\delta_{1d} + Y_{4e}\,\delta_{4d} = 0,\\
&(Y_{1e} + Y_{2e})\,\delta_{1c} + Y_{3e}\,\delta_{3c} + 1\,\delta_{5c} = 0,\\
&(Y_{1e} - Y_{2e})\,\delta_{1b} + Y_{4e}\,\delta_{4b} = 0,\\
&(Y_{1e} + Y_{2e})\,\delta_{1a} + Y_{3e}\,\delta_{3a} + 1\,\delta_{5a} = 0,\\
&Y_{1e} - Y_{2e} = 0;\ \ Y_{4e} = 0;\ \ Y_{1e} = +Y_{2e},\\
&2\,Y_{1e}\,\delta_{1c} + Y_{3e}\,\delta_{3c} = -\delta_{5c},\\
&2\,Y_{1e}\,\delta_{1a} + Y_{3e}\,\delta_{3a} = -\delta_{5a},
\end{aligned}$$

$$Y_{1e} = \frac{-\delta_{5c}\,\delta_{3a} + \delta_{5a}\,\delta_{3c}}{2\,(\delta_{1c}\,\delta_{3a} - \delta_{1a}\,\delta_{3c})};\qquad Y_{3e} = \frac{-\delta_{1c}\,\delta_{5a} + \delta_{1a}\,\delta_{5c}}{2\,(\delta_{1c}\,\delta_{3a} - \delta_{1a}\,\delta_{3c})}.$$

Das Ergebnis wird in der folgenden Matrix zusammengefaßt.

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e
Y_1	1	1	$-\frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}}$	$-\frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}}$	Y_{1e}
Y_2	1	−1	$-\frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}}$	$+\frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}}$	Y_{1e}
Y_3			1	0	Y_{3e}
Y_4				1	0
Y_5					1

Sie liefert die überzähligen Schnittkräfte nach (467)

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= X_a + X_b - \frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}} X_c - \frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}} X_d + Y_{1e} X_e, \\
Y_2 &= X_a - X_b - \frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}} X_c + \frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}} X_d + Y_{1e} X_e, \\
Y_3 &= X_c + Y_{3e} X_e, \\
Y_4 &= X_d, \\
Y_5 &= X_e.
\end{aligned}
$$

Die Berechnung der Hallenbinder Abb. 267 und 268 unterscheidet sich demnach nur durch die Vorzahlen.

Die Beziehungen der überzähligen Gruppenlasten zu den statisch unbestimmten Schnittkräften statisch unbestimmter Hauptsysteme. Der Belastungszustand $-X_i = 1$ besteht nach (475) aus den unbekannten Schnittkräften $Y_{Ai}, \ldots Y_{(J-1)i}$ und den frei wählbaren Komponenten $-Y_J = Y_{Ji} = 1$, $Y_{(J+1)i} = 0$, $\ldots Y_{Ni} = 0$. Die unbekannten Komponenten $Y_{Ai}, \ldots Y_{(J-1)i}$ sind durch die Bedingungen $\delta_{ik} = 0$ vorgeschrieben und in der Regel von Null verschieden. Daher sind mit

$$1_i \delta_{ik} = \sum_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{Hk} = 0, \quad i = a, \ldots (k-1) \tag{480}$$

alle Verschiebungen δ_{Hi} $(H = A, \ldots J-1)$ Null. Der Verschiebungszustand des Hauptsystems infolge von $-X_i = 1$ erfüllt also die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen eines $(i-1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Der Belastungszustand $-X_i = 1$ im statisch bestimmten Hauptsystem ist also identisch mit dem Belastungszustand $-Y_i = 1$ des $(i-1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Daher ist

$$Y_J^{(i)} = \frac{\delta_{J0}^{(i-1)}}{\delta_{JJ}^{(i-1)}} = \frac{\sum\limits_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{H0}}{\sum\limits_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{Hi}} = \frac{1_i \delta_{i0}}{1_i \delta_{ii}} = X_i. \tag{481}$$

Die überzähligen Gruppenlasten $X_a \ldots X_k \ldots X_n$ erhalten damit die Bedeutung von statisch unbestimmten Einzelkräften $Y_A^{(1)} \ldots Y_K^{(k)} \ldots Y_N^{(n)}$, welche die Belastung $\mathfrak{P}$ in Hauptsystemen von Eins aus ansteigenden Grades hervorruft. Die Gruppenlast X_i kann daher für eine ruhende Belastung auch folgendermaßen angegeben werden:

$$X_i = Y_i^{(i)} = \frac{\int N_0^{(0)} N_i^{(i-1)} \frac{ds}{EF} + \int M_0^{(0)} M_i^{(i-1)} \frac{ds}{EJ} + \int N_i^{(i-1)} \alpha_t t\, ds + \int M_i^{(i-1)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{ei}^{(i-1)} \Delta_e}{\int N_i^{(0)} N_i^{(i-1)} \frac{ds}{EF} + \int M_i^{(0)} M_i^{(i-1)} \frac{ds}{EJ}}.$$

Ihre mit $\delta_{ii} = \delta_{JJ}^{(i-1)}$ $(i = a \ldots n,\ J = A \ldots N)$ erweiterten Einflußlinien sind die Biegelinien $\delta_{mA}^{(0)} \ldots \delta_{mJ}^{(i-1)} \ldots \delta_{mN}^{(n-1)}$ der Lastgurte von Hauptsystemen von Eins aus ansteigender statischer Unbestimmtheit für $-Y_A^{(1)} = 1 \ldots -Y_J^{(i)} = 1 \ldots -Y_N^{(n)} = 1$. Nach **Maxwell** ist

$$1_m \delta_{mJ}^{(i-1)} = 1_m \delta_{mi}^{(0)} = \sum Y_{Hi} \delta_{Hm} = \sum_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{mH}^{(0)}. \tag{482}$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J ergeben sich durch Superposition

$$Y_J = X_i + \sum_{i+1}^{n} Y_{Jk} X_k = Y_J^{(i)} + \sum_{J+1}^{N} Y_{Jk} Y_K^{(k)}. \tag{483}$$

Derselbe Ansatz gilt für die Einflußlinien. Für ein sechsfach statisch unbestimmtes Stabwerk ist daher mit $J = 1 \ldots 6$

$$\left.\begin{array}{l}
Y_1 = +1 \frac{\delta_{10}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} + Y_{1b} \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} + Y_{1c} \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} + Y_{1d} \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{1e} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{1f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_2 = \qquad + 1 \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} + Y_{2c} \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} + Y_{2d} \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{2e} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{2f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_3 = \qquad\qquad + 1 \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} + Y_{3d} \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{3e} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{3f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_4 = \qquad\qquad\qquad + 1 \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{4e} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{4f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_5 = \qquad\qquad\qquad\qquad + 1 \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{5f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_6 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 1 \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}
\end{array}\right\} \tag{484}$$

Die Parameter Y_{Jk} sind nach S. 285:

$$-Y_{1b} = \frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}}; \quad -Y_{2c} = \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}; \quad -Y_{3d} = \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}; \quad -Y_{4e} = \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}; \quad -Y_{5f} = \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}};$$

$$-Y_{1c} = \frac{\delta_{13}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} + Y_{2c} \frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}}; \ \ldots \ -Y_{4f} = \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{5f} \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} = \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}},$$

so daß

$$Y_5 = \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot Y_6; \quad Y_4 = \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} - \left[\frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}\right] \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}$$

$$= \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \left[\frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}\right] - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}$$

$$= \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_6.$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte lassen sich daher folgendermaßen umformen:

$$\left.\begin{array}{ll}
Y_1 = \frac{\delta_{10}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}}\cdot 1 - \frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}}\cdot Y_2 - \frac{\delta_{13}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}}\cdot Y_3 - \frac{\delta_{14}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}}\cdot Y_4 - \frac{\delta_{15}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}}\cdot Y_5 - \frac{\delta_{16}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}}\cdot Y_6 \\
Y_2 = \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}\cdot 1 - \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}\cdot Y_3 - \frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}\cdot Y_4 - \frac{\delta_{25}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}\cdot Y_5 - \frac{\delta_{26}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}\cdot Y_6 \\
Y_3 = \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}\cdot 1 - \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}\cdot Y_4 - \frac{\delta_{35}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}\cdot Y_5 - \frac{\delta_{36}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}\cdot Y_6 \\
Y_4 = \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}\cdot 1 - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}\cdot Y_5 - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}\cdot Y_6 \\
Y_5 = \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}}\cdot 1 - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}}\cdot Y_6 \\
Y_6 = \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}\cdot 1
\end{array}\right\} \quad (485)$$

Die Lösung ist damit auf die reduzierte Matrix eines sechsfach statisch unbestimmten Systems zurückgeführt und auf diese Weise der Anschluß an die allgemeine Auflösung gefunden.

Die Formänderungsenergie des vorgegebenen Tragwerks kann nach dem Clapeyronschen Gesetz durch die äußeren Kräfte ausgedrückt werden. Sie zerfällt, bezogen auf das Hauptsystem, in zwei Teile, die von der Belastung $\mathfrak{P}$ und den statisch überzähligen Größen Y_K oder X_k herrühren:

$$A_i = \tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m^{(0)} - \tfrac{1}{2}\sum Y_K \delta_{K0} = \tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m^{(0)} - \tfrac{1}{2}\sum X_k \delta_{k0}$$
$$(K = A \ldots N, \quad k = a \ldots n).$$

Daher ist

$$\sum Y_K \delta_{K0} = \sum X_k \delta_{k0}$$

und mit den bereits bekannten Beziehungen (481)

$$\delta_{k0} = \delta_{K0}^{(k-1)}, \qquad X_k = \frac{\delta_{K0}^{(k-1)}}{\delta_{KK}^{(k-1)}} \quad \text{und} \quad \delta_{K0} = \sum Y_H \delta_{KH},$$

$$\sum Y_K \delta_{K0} = \sum \frac{(\delta_{K0}^{(k-1)})^2}{\delta_{KK}^{(k-1)}} = \sum Y_K^{(k)} \delta_{K0}^{(k-1)} = \sum_K \sum_H Y_K Y_H \delta_{KH} \quad \begin{array}{l}(K = A \ldots N)\\(H = A \ldots N)\end{array}. \quad (486)$$

Der Ansatz eignet sich nach S. 229 zur Nachprüfung der nach irgendeiner Elimination berechneten Wurzeln Y_K.

Müller, S.: Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke. Zbl. Bauverw. 1907 S. 23. — Müller-Breslau, H.: Die Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 1. Abt. Stuttgart 1922. — Hertwig, A.: Über die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme und verwandter Aufgaben in der Statik der Baukonstruktionen. Z. Bauwes. 1910 S. 487. — Pirlet, J.: Die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1910 S. 331. — Derselbe: Verwendung vereinfachter Elastizitätsgleichungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1915 S. 167. — Derselbe: Kompendium der Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 1. Teil. Berlin 1921. — Kaufmann, W.: Statik. Handbibl. f. Bauing. Berlin 1923. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerkes. Berlin 1923. — Derselbe: Elastizitätsgleichungen gegenseitiger Unabhängigkeit. Eisenbau 1921 S. 305.

37. Die Verwendung statisch unbestimmter Hauptsysteme.

Von den n statisch unbestimmten Schnittkräften eines Stabwerks gelten h als überzählig. Sie werden durch äußere Kräfte X_i ($i = 1 \ldots h$) ersetzt und aus ebenso vielen geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand des $(n-h) = r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems berechnet, da die relativen Verschiebungen