Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Bildung der Gruppenlasten

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

6. Momente im vierfach statisch unbestimmten System (Abb. 259):

$$M = M_0^{(1)} - X_a^{(1)} M_a^{(1)} - X_b^{(1)} M_b^{(1)} - X_c^{(1)} M_c^{(1)}$$

k	M [mt]	k	M [mt]
1	− 0,5575	4	− 16,5268
2'	− 2,2586	5	+ 18,5125
2	− 5,5222	6'	− 5,6046
3'	+ 5,5087	6	− 7,2228
3	+ 13,4847	7'	− 7,8485
4'	+ 1,6040	7	+ 14,0258

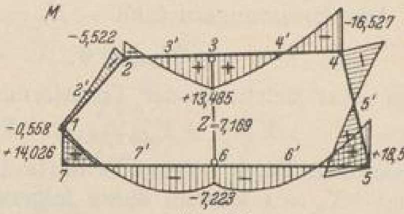

Abb. 259.

36. Die Entwicklung statisch unbestimmter Gruppenlasten.

Die einfachen Methoden zur unabhängigen Berechnung statisch unbestimmter Schnittkräfte versagen bei mehr als drei Unbekannten. Aus diesem Grunde wird der Begriff der überzähligen Größe durch die Bildung von Gruppen dieser ausgezeichneten Schnittkräfte erweitert. Sie sind bei einem n fach statisch unbestimmten Tragwerk in n facher Mannigfaltigkeit vorhanden, jedoch nur mit n Gruppen unabhängig voneinander. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte werden mit Y_J $(J = A \ldots N)$ bezeichnet, also durch große Buchstaben unterschieden. Daher beschreiben die Wege δ_{JK} den Verschiebungszustand des Hauptsystems infolge der Belastung durch einzelne statisch unbestimmte Schnittkräfte $-Y_K = 1$. Sie werden im Sinne von $-Y_J$ positiv gerechnet. Die Gruppen statisch unbestimmter Schnittkräfte erhalten als überzählige Größen des Ansatzes wie bisher die Bezeichnung X_k, sind also durch kleine Buchstaben $(k = a \ldots n)$ unterschieden. Die Wege δ_{Jk} bedeuten daher Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems infolge von $-X_k = 1$ in Richtung von $-Y_J$.

Die Gruppenlasten X_k sind äußere Kräfte des Hauptsystems, mit denen die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks wie in (288) nach dem Superpositionsgesetz entwickelt werden.

$$M = M_0 - \sum X_k M_k, \qquad (k = a \ldots n). \tag{466}$$

In diesem Ansatz bedeuten M_0, M_k wieder die Schnittkräfte des Hauptsystems infolge der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Gruppenlast $-X_k = 1$ $(k = a \ldots n)$.

Die Bildung der Gruppenlasten. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J werden durch Superposition der Anteile aus den überzähligen Größen X_k gefunden.

$$Y_J = \sum_{k=a}^{k=n} X_k Y_{Jk}, \qquad (J = A \ldots N). \tag{467}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc|}
 & X_a & X_b & & X_h & X_i & X_k & & X_n \\
\hline
Y_A & Y_{Aa} & Y_{Ab} & \cdots & Y_{Ah} & Y_{Ai} & Y_{Ak} & \cdots & Y_{An} \\
Y_B & Y_{Ba} & Y_{Bb} & \cdots & Y_{Bh} & Y_{Bi} & Y_{Bk} & \cdots & Y_{Bn} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
Y_H & Y_{Ha} & Y_{Hb} & \cdots & Y_{Hh} & Y_{Hi} & Y_{Hk} & \cdots & Y_{Hn} \\
Y_J & Y_{Ja} & Y_{Jb} & \cdots & Y_{Jh} & Y_{Ji} & Y_{Jk} & \cdots & Y_{Jn} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
Y_N & Y_{Na} & Y_{Nb} & \cdots & Y_{Nh} & Y_{Ni} & Y_{Nk} & \cdots & Y_{Nn} \\
\hline
\end{array} \tag{468}$$

Daher bedeutet der Index k von Y_{Jk} im Gegensatz zu (466) die Ursache $+X_k = 1$. Der Ansatz besteht aus n Gleichungen zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J und den überzähligen Gruppenlasten X_k mit der umstehenden Matrix:

Der Belastungszustand $-X_k = 1$ ist gleichbedeutend mit

$$X_a = \cdots = X_{k-1} = 0, \qquad -X_k = 1, \qquad X_{k+1} = \cdots = X_n = 0,$$

und setzt sich nach der Transformation aus den Schnittkräften

$$Y_A = -Y_{Ak} \ldots, \qquad Y_J = -Y_{Jk} \ldots, \qquad Y_N = -Y_{Nk}$$

zusammen. Die beliebigen Schnittkräfte M_k des Hauptsystems infolge der Gruppenlast $-X_k = 1$ können daher folgendermaßen entwickelt werden:

$$M_k = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} M_J, \qquad (k = a \ldots n). \tag{469}$$

Hierbei ist M_J die Schnittkraft infolge von $-Y_J = 1$.

Die Ableitung der Elastizitätsgleichung für statisch unbestimmte Gruppenlasten. Das Hauptsystem entsteht nach Abschn. 24 durch die Verwendung von statisch unbestimmten Stütz- und Schnittkräften Y_J des Stabwerks als äußere Kräfte. Sie werden durch die Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen aus vorgeschriebenen geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand des Hauptsystems berechnet. Dabei entstehen Gleichungen über die Arbeit von virtuellen Kräften $\overline{\mathfrak{P}}$ und vorgeschriebenen Verschiebungen δ_J. Sie sind in Abschn. 24 mit $\overline{\mathfrak{P}} = -Y_J = 1$ und $\delta_J = 0$ angeschrieben worden.

$$1_J \cdot \delta_J = 1_J \cdot (\delta_{J0} - \sum_{H=A}^{H=N} Y_H \delta_{JH}) = 0, \qquad (J = A \ldots N). \tag{470}$$

Unter ungünstigen Umständen sind alle δ_{JH} von Null verschieden und damit n Gleichungen mit n Unbekannten zu lösen.

Um diese unabhängig voneinander anzugeben, werden Arbeitsgleichungen mit der virtuellen Belastung $-X_i = 1$ $(i = a \ldots n)$, also mit den äußeren Kräften $-Y_{Hi}$ $(H = A \ldots N)$ entwickelt.

$$\sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi} \delta_H = \frac{J_c}{F_c} \int \overline{N}_i N \frac{F_c}{F} ds + \int \overline{M}_i M \frac{J_c}{J} ds$$
$$+ E J_c \Big(\int \overline{N}_i \alpha_t t \, ds + \int \overline{M}_i \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \overline{C}_{Ei} \Delta_E \Big), \qquad (i = 1 \ldots n). \tag{471}$$

Die linke Seite der Gleichungen ist durch die mit dem Tragwerk vorgeschriebene Verträglichkeit des Formänderungszustandes des Hauptsystems $(\delta_H = 0, H = A \ldots N)$ wiederum Null, so daß mit der Entwicklung von N, M nach (288) in Anlehnung an (293) folgender Ansatz entsteht:

$$1_i \delta_i = 1_i (\delta_{i0} - \sum_{k=1}^{k=n} X_k \delta_{ik}) = 0, \qquad (i = 1 \ldots n). \tag{472}$$

Die Vorzahlen $1_i \cdot \delta_{ik}$ und $1_i \cdot \delta_{i0}$ dieser n Elastizitätsgleichungen besitzen nicht mehr wie früher kinematische Bedeutung, sondern sind Ausdrücke für die virtuelle Arbeit der Gruppenbelastung $-X_i = 1$, also der Schnittkräfte $-Y_H = Y_{Hi}$, bei einer Verschiebung δ_{Hk} der Punkte H des Hauptsystems infolge der Gruppenlast $-X_k = 1$ oder infolge der vorgegebenen Belastung, der Temperaturänderung und Stützenbewegung $(\delta_{H\otimes})$

$$\left.\begin{aligned} 1_i \delta_{ik} &= \sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi} \delta_{Hk}, \qquad (i, k = a \ldots n), \\ 1_i \delta_{i\otimes} &= \sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi} \delta_{H\otimes}, \qquad (i = a \ldots n). \end{aligned}\right\} \tag{473}$$