Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Ableitung der Elastizitätsgleichung für statisch unbestimmte Gruppenlasten

Daher bedeutet der Index k von Y_{Jk} im Gegensatz zu (466) die Ursache $+X_k = 1$. Der Ansatz besteht aus n Gleichungen zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J und den überzähligen Gruppenlasten X_k mit der umstehenden Matrix:

Der Belastungszustand $-X_k = 1$ ist gleichbedeutend mit

$$X_a = \cdots = X_{k-1} = 0\,, \qquad -X_k = 1\,, \qquad X_{k+1} = \cdots = X_n = 0\,,$$

und setzt sich nach der Transformation aus den Schnittkräften

$$Y_A = -Y_{Ak} \ldots, \qquad Y_J = -Y_{Jk} \ldots; \qquad Y_N = -Y_{Nk}$$

zusammen. Die beliebigen Schnittkräfte M_k des Hauptsystems infolge der Gruppenlast $-X_k = 1$ können daher folgendermaßen entwickelt werden:

$$M_k = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} M_J\,, \qquad (k = a \ldots n)\,. \tag{469}$$

Hierbei ist M_J die Schnittkraft infolge von $-Y_J = 1$.

Die Ableitung der Elastizitätsgleichung für statisch unbestimmte Gruppenlasten. Das Hauptsystem entsteht nach Abschn. 24 durch die Verwendung von statisch unbestimmten Stütz- und Schnittkräften Y_J des Stabwerks als äußere Kräfte. Sie werden durch die Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen aus vorgeschriebenen geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand des Hauptsystems berechnet. Dabei entstehen Gleichungen über die Arbeit von virtuellen Kräften $\overline{\mathfrak{P}}$ und vorgeschriebenen Verschiebungen δ_J. Sie sind in Abschn. 24 mit $\overline{\mathfrak{P}} = -Y_J = 1$ und $\delta_J = 0$ angeschrieben worden.

$$1_J \cdot \delta_J = 1_J \cdot (\delta_{J0} - \sum_{H=A}^{H=N} Y_H \delta_{JH}) = 0\,, \qquad (J = A \ldots N)\,. \tag{470}$$

Unter ungünstigen Umständen sind alle δ_{JH} von Null verschieden und damit n Gleichungen mit n Unbekannten zu lösen.

Um diese unabhängig voneinander anzugeben, werden Arbeitsgleichungen mit der virtuellen Belastung $-X_i = 1$ $(i = a \ldots n)$, also mit den äußeren Kräften $-Y_{Hi}$ $(H = A \ldots N)$ entwickelt.

$$\sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi}\,\delta_H = \frac{J_c}{F_c}\int \overline{N}_i N \frac{F_c}{F}\,ds + \int \overline{M}_i M \frac{J_c}{J}\,ds$$
$$+ E J_c\left(\int \overline{N}_i \alpha_t t\,ds + \int \overline{M}_i \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,ds - \sum \overline{C}_{Ei}\,\Delta_E\right), \qquad (i = 1 \ldots n)\,. \tag{471}$$

Die linke Seite der Gleichungen ist durch die mit dem Tragwerk vorgeschriebene Verträglichkeit des Formänderungszustandes des Hauptsystems $(\delta_H = 0,\, H = A \ldots N)$ wiederum Null, so daß mit der Entwicklung von N, M nach (288) in Anlehnung an (293) folgender Ansatz entsteht:

$$1_i\,\delta_i = 1_i\,(\delta_{i0} - \sum_{k=1}^{k=n} X_k \delta_{ik}) = 0\,, \qquad (i = 1 \ldots n)\,. \tag{472}$$

Die Vorzahlen $1_i \cdot \delta_{ik}$ und $1_i \cdot \delta_{i0}$ dieser n Elastizitätsgleichungen besitzen nicht mehr wie früher kinematische Bedeutung, sondern sind Ausdrücke für die virtuelle Arbeit der Gruppenbelastung $-X_i = 1$, also der Schnittkräfte $-Y_H = Y_{Hi}$, bei einer Verschiebung δ_{Hk} der Punkte H des Hauptsystems infolge der Gruppenlast $-X_k = 1$ oder infolge der vorgegebenen Belastung, der Temperaturänderung und Stützenbewegung $(\delta_{H\otimes})$

$$\left.\begin{aligned} 1_i\,\delta_{ik} &= \sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi}\,\delta_{Hk}\,, \qquad (i, k = a \ldots n)\,,\\ 1_i\,\delta_{i\otimes} &= \sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi}\,\delta_{H\otimes}\,, \qquad (i = a \ldots n)\,. \end{aligned}\right\} \tag{473}$$

Die Verschiebung δ_{Hk} im Sinne von $-Y_H = 1$ wird von der Gruppenbelastung $-X_k = 1$, also von den Schnittkräften $-Y_{Hk}$ hervorgerufen und nach **Maxwell** in Verbindung mit (469) folgendermaßen berechnet:

$$1_H \delta_{Hk} = 1_k \delta_{kH} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \delta_{JH}, \qquad (H = A \ldots N),$$

$$1_H \delta_{Hk} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \int M_H M_J \frac{J_c}{J} ds = \int M_H \left(\sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} M_J \right) \frac{J_c}{J} ds,$$

$$1_H \delta_{Hk} = \int M_H M_k \frac{J_c}{J} ds. \tag{474}$$

Um jede überzählige Größe unabhängig von den übrigen angeben zu können, werden die Gruppenlasten X_k derart aus den statisch unbestimmten Schnittkräften zusammengesetzt, daß alle Vorzahlen δ_{ik} $(i \neq k)$ des Ansatzes (472) Null sind. Auf diese Weise entstehen $\frac{1}{2} \cdot n \, (n-1)$ Nebenbedingungen, welche mit den n Gleichungen (467) zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J und den überzähligen Größen X_k erfüllt werden können. Sie bilden die lineare Transformation, um die n Elastizitätsgleichungen mit vollbesetzter Matrix derart umzuformen, daß jede von ihnen nur eine überzählige Größe X_k enthält (465).

Die Auswahl der Gruppenlasten für die Nebenbedingung $\delta_{ik} = 0$. Die Transformation (468) der statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J als Funktion der überzähligen Größen X_k enthält n^2 Koeffizienten Y_{Jk}. Von diesen werden $\frac{1}{2} \cdot n \, (n-1)$ als Parameter gebraucht, um dieselbe Anzahl von Nebenbedingungen $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ zu erfüllen. Die virtuelle Arbeit $1_i \cdot \delta_{ik}$ wird hierzu nach (473) als Funktion dieser Parameter entwickelt. Über die anderen $n^2 - \frac{1}{2} n \, (n-1) = \frac{1}{2} n \, (n+1)$ Koeffizienten kann frei verfügt werden. Sie werden derart angenommen, daß die $\frac{1}{2} \cdot n \, (n-1)$ abhängigen Parameter übersichtlich, schnell und fehlerfrei bestimmt werden. Sollen nur einzelne δ_{ik} des Ansatzes Null werden, um die Matrix der Elastizitätsgleichungen in geeigneter Weise aufzuspalten und damit die Lösung zu vereinfachen, so ist die Anzahl der frei wählbaren Parameter Y_{Jk} größer.

Die Lösung eines allgemeinen Ansatzes wird am einfachsten, wenn die Koeffizienten Y_{Ji} der Hauptdiagonalen gleich 1 und die Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen Null gesetzt werden. Damit entsteht die folgende Transformation der n statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J:

	X_a	X_b	X_c		X_h	X_i	X_k		X_n
Y_A	1	Y_{Ab}	Y_{Ac}		Y_{Ah}	Y_{Ai}	Y_{Ak}		Y_{An}
Y_B	0	1	Y_{Bc}		Y_{Bh}	Y_{Bi}	Y_{Bk}		Y_{Bn}
Y_C	0	0	1		Y_{Ch}	Y_{Ci}	Y_{Ck}		Y_{Cn}
Y_H	0	0	0		1	Y_{Hi}	Y_{Hk}		Y_{Hn}
Y_J	0	0	0		0	1	Y_{Jk}		Y_{Jn}
Y_K	0	0	0		0	0	1		Y_{Kn}
Y_N	0	0	0		0	0	0		1

(475)