Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Auswahl der Gruppenlasten für die Nebenbedingung $\delta_{ik} = 0$

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Die Verschiebung δ_{Hk} im Sinne von $-Y_H = 1$ wird von der Gruppenbelastung $-X_k = 1$, also von den Schnittkräften $-Y_{Hk}$ hervorgerufen und nach **Maxwell** in Verbindung mit (469) folgendermaßen berechnet:

$$1_H \delta_{Hk} = 1_k \delta_{kH} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \delta_{JH}, \qquad (H = A \ldots N),$$

$$1_H \delta_{Hk} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \int M_H M_J \frac{J_c}{J} ds = \int M_H \Big(\sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} M_J\Big) \frac{J_c}{J} ds,$$

$$1_H \delta_{Hk} = \int M_H M_k \frac{J_c}{J} ds. \tag{474}$$

Um jede überzählige Größe unabhängig von den übrigen angeben zu können, werden die Gruppenlasten X_k derart aus den statisch unbestimmten Schnittkräften zusammengesetzt, daß alle Vorzahlen δ_{ik} $(i \neq k)$ des Ansatzes (472) Null sind. Auf diese Weise entstehen $\frac{1}{2} \cdot n\,(n-1)$ Nebenbedingungen, welche mit den n Gleichungen (467) zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J und den überzähligen Größen X_k erfüllt werden können. Sie bilden die lineare Transformation, um die n Elastizitätsgleichungen mit vollbesetzter Matrix derart umzuformen, daß jede von ihnen nur eine überzählige Größe X_k enthält (465).

Die Auswahl der Gruppenlasten für die Nebenbedingung $\delta_{ik} = 0$. Die Transformation (468) der statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J als Funktion der überzähligen Größen X_k enthält n^2 Koeffizienten Y_{Jk}. Von diesen werden $\frac{1}{2} \cdot n\,(n-1)$ als Parameter gebraucht, um dieselbe Anzahl von Nebenbedingungen $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ zu erfüllen. Die virtuelle Arbeit $1_i \cdot \delta_{ik}$ wird hierzu nach (473) als Funktion dieser Parameter entwickelt. Über die anderen $n^2 - \frac{1}{2} n\,(n-1) = \frac{1}{2} n\,(n+1)$ Koeffizienten kann frei verfügt werden. Sie werden derart angenommen, daß die $\frac{1}{2} \cdot n\,(n-1)$ abhängigen Parameter übersichtlich, schnell und fehlerfrei bestimmt werden. Sollen nur einzelne δ_{ik} des Ansatzes Null werden, um die Matrix der Elastizitätsgleichungen in geeigneter Weise aufzuspalten und damit die Lösung zu vereinfachen, so ist die Anzahl der frei wählbaren Parameter Y_{Jk} größer.

Die Lösung eines allgemeinen Ansatzes wird am einfachsten, wenn die Koeffizienten Y_{Ji} der Hauptdiagonalen gleich 1 und die Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen Null gesetzt werden. Damit entsteht die folgende Transformation der n statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J:

	X_a	X_b	X_c		X_h	X_i	X_k		X_n
Y_A	1	Y_{Ab}	Y_{Ac}		Y_{Ah}	Y_{Ai}	Y_{Ak}		Y_{An}
Y_B	0	1	Y_{Bc}		Y_{Bh}	Y_{Bi}	Y_{Bk}		Y_{Bn}
Y_C	0	0	1		Y_{Ch}	Y_{Ci}	Y_{Ck}		Y_{Cn}
Y_H	0	0	0		1	Y_{Hi}	Y_{Hk}		Y_{Hn}
Y_J	0	0	0		0	1	Y_{Jk}		Y_{Jn}
Y_K	0	0	0		0	0	1		Y_{Kn}
Y_N	0	0	0		0	0	0		1

(475)

Die überzähligen Größen X_i werden demnach aus einer stetig zunehmenden Anzahl von statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J gebildet, so daß die abhängigen Koeffizienten schrittweise aus den Nebenbedingungen $\delta_{ik} = 0$ durch Gleichungen mit je einer Unbekannten erhalten werden. Der Parameter Y_{Ab} der Kolonne X_b ergibt sich aus der Bedingung $\delta_{ba} = 0$. Die Parameter Y_{Ac}, Y_{Bc} der Kolonne X_c werden mit den Nebenbedingungen $\delta_{ca} = 0$, $\delta_{cb} = 0$ bestimmt. Zur Berechnung der $(k-1)$ unbekannten Parameter Y_{Jk} der Spalte k stehen ebenso viele Bedingungsgleichungen $\delta_{ka} = 0 \ldots \delta_{k(k-1)} = 0$ zur Verfügung.

Der Belastungszustand $-X_a = 1$ ist nach (475) gleichbedeutend mit $-Y_A = 1$. Er liefert die Verschiebungen δ_{Ja} $(J = A \ldots N)$.

$$1_a \delta_{ab} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Ja} \delta_{Jb} = 1_{Aa} \delta_{Ab} = 0, \qquad \text{d. h.} \quad \delta_{Ab} = 0.$$

$$1_b \delta_{ba} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jb} \delta_{Ja} = Y_{Ab} \delta_{Aa} + 1_{Bb} \delta_{Ba} = 0; \quad Y_{Ab} = -\frac{\delta_{Ba}}{\delta_{Aa}}.$$

$-Y_A = Y_{Ab} = -\delta_{Ba}/\delta_{Aa}$ und $-Y_B = Y_{Bb} = 1$ bilden den Belastungszustand $-X_b = 1$. Damit sind dann auch die Formänderungen δ_{Jb} $(J = A \ldots N)$ bekannt. Die Koeffizienten Y_{Ac} und Y_{Bc} werden mit den folgenden Bedingungen bestimmt:

$$1_a \delta_{ac} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Ja} \delta_{Jc} = 1_{Aa} \delta_{Ac} = 0; \qquad \delta_{Ac} = 0;$$

$$1_b \delta_{bc} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jb} \delta_{Jc} = Y_{Ab} \delta_{Ac} + 1_{Bb} \delta_{Bc} = 0; \quad \delta_{Bc} = 0;$$

$$1_c \delta_{cb} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jc} \delta_{Jb} = Y_{Ac} \delta_{Ab} + Y_{Bc} \delta_{Bb} + 1_{Cc} \delta_{Cb} = 0;$$

$$Y_{Bc} = -\frac{1_{Cc} \delta_{Cb}}{\delta_{Bb}};$$

$$1_c \delta_{ca} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jc} \delta_{Ja} = Y_{Ac} \delta_{Aa} + Y_{Bc} \delta_{Ba} + 1_{Cc} \delta_{Ca} = 0;$$

$$Y_{Ac} = -\frac{Y_{Bc} \delta_{Ba} + 1_{Cc} \delta_{Ca}}{\delta_{Aa}}.$$

Damit ist der Belastungszustand $-X_c = 1$ bestimmt. Er besteht aus den Schnittkräften $-Y_A = Y_{Ac}$, $-Y_B = Y_{Bc}$, $-Y_C = 1$ und liefert die Formänderungen δ_{Jc} $(J = A \ldots N)$. Werden die Indizes der statisch unbestimmten Schnittkräfte mit Rücksicht auf die spätere Anwendung durch Ziffern ersetzt, so entsteht die Rechenvorschrift auf S. 285.

Die Komponenten $Y_H = -Y_{Hi}$ des Belastungszustandes $-X_i = 1$ werden als Summe von positiven und negativen Anteilen entwickelt, in denen sich Abrundungsfehler unter Umständen in unzulässigem Maße fortpflanzen und die Brauchbarkeit des Ergebnisses Y_{Hi} gefährden. Die Fehlerempfindlichkeit der Auflösung von n Gleichungen mit n Unbekannten ist daher durch die Verwendung von überzähligen Gruppenlasten nicht beseitigt, sie gefährdet vielmehr die einwandfreie Bildung der Gruppen, also die Transformation der statisch unbestimmten Einzelkräfte. Die unabhängige Berechnung der überzähligen Gruppenlasten nach (465)

$$X_k = \delta_{k0}/\delta_{kk} \tag{476}$$

ist daher stets an den Nachweis geknüpft, daß die Nebenbedingungen

$$1_i \delta_{ik} = 0, \qquad (i \neq k)$$

durch die Schnittkräfte Y_{Hi} und Y_{Hk} $(H = A \ldots N)$ erfüllt werden.

1. $\delta_{ab} = 0$	$1\,\delta_{1b} = 0$	
$\delta_{ac} = 0$	$1\,\delta_{1c} = 0$	
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	
$\delta_{an} = 0$	$1\,\delta_{1n} = 0$	
$\delta_{ba} = 0$	$Y_{1b}\delta_{1a} + 1\,\delta_{2a} = 0$	$Y_{1b} = -\dfrac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}$
2. $\delta_{bc} = 0$	$1\,\delta_{2c} = 0$	
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	
$\delta_{bn} = 0$	$1\,\delta_{2n} = 0$	
$\delta_{cb} = 0$	$Y_{2c}\delta_{2b} + 1\,\delta_{3b} = 0$	$Y_{2c} = -\dfrac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}}$
$\delta_{ca} = 0$	$Y_{1c}\delta_{1a} + Y_{2c}\delta_{2a} + 1\,\delta_{3a} = 0$	$Y_{1c} = -\dfrac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} - \dfrac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} Y_{2c}$
3. $\delta_{cd} = 0$	$1\,\delta_{3d} = 0$	
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	
$\delta_{cn} = 0$	$1\,\delta_{3n} = 0$	
$\delta_{dc} = 0$	$Y_{3d}\delta_{3c} + 1\,\delta_{4c} = 0$	$Y_{3d} = -\dfrac{\delta_{4c}}{\delta_{3c}}$
$\delta_{db} = 0$	$Y_{2d}\delta_{2b} + Y_{3d}\delta_{3b} + 1\,\delta_{4b} = 0$	$Y_{2d} = -\dfrac{\delta_{4b}}{\delta_{2b}} - \dfrac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} Y_{3d}$
$\delta_{da} = 0$	$Y_{1d}\delta_{1a} + Y_{2d}\delta_{2a} + Y_{3d}\delta_{3a} + 1\,\delta_{4a} = 0$	$Y_{1d} = -\dfrac{\delta_{4a}}{\delta_{1a}} - \dfrac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} Y_{3d} - \dfrac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} Y_{2d}$

Die Zähler und Nenner von (476) sind wiederum Ausdrücke für die virtuelle Arbeit der Kräfte $-Y_J = Y_{Jk}$ der Gruppenlast $-X_k = 1$.

$$\left.\begin{aligned}
1_k \delta_{kk} &= \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \delta_{Jk} \quad (k = a \ldots n), \\
1_a \delta_{aa} &= 1_{Aa} \delta_{Aa}, \\
1_b \delta_{bb} &= Y_{Ab}\delta_{Ab} + 1_{Bb}\delta_{Bb} = 1_{Bb}\delta_{Bb}, \\
1_c \delta_{cc} &= Y_{Ac}\delta_{Ac} + Y_{Bc}\delta_{Bc} + 1_{Cc}\delta_{Cc} = 1_{Cc}\delta_{Cc}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1_k \delta_{kk} &= 1_{Kk} \delta_{Kk}.
\end{aligned}\right\} \tag{477}$$

Die Nenner sind daher bereits aus der Transformation bekannt. Die Zähler erhalten für vorgegebene äußere Ursachen folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}
1_k \delta_{k\otimes} &= \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \delta_{J\otimes}, \quad \delta_{J\otimes} = \delta_{J0} + \delta_{Jt} + \delta_{Js}, \quad (k = a \ldots n), \\
1_a \delta_{a\otimes} &= 1_{Aa} \delta_{A\otimes}, \\
1_b \delta_{b\otimes} &= Y_{Ab}\delta_{A\otimes} + 1_{Bb}\delta_{B\otimes}, \\
1_c \delta_{c\otimes} &= Y_{Ac}\delta_{A\otimes} + Y_{Bc}\delta_{B\otimes} + 1_{Cc}\delta_{C\otimes}.
\end{aligned}\right\} \tag{478}$$

Die Einflußlinien $X_k \delta_{kk}$ ergeben sich nach dem Satze von E. **Betti** aus

$$\left.\begin{aligned}
1_k \delta_{km} &= 1_m \delta_{mk}, \\
X_k \delta_{kk} &= 1_m \delta_{mk} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jm} \delta_{Jk} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \delta_{mJ}, \\
X_a \delta_{aa} &= 1_{Aa} \delta_{mA}, \\
X_b \delta_{bb} &= Y_{Ab}\delta_{mA} + 1_{Bb}\delta_{mB}, \\
X_c \delta_{cc} &= Y_{Ac}\delta_{mA} + Y_{Bc}\delta_{mB} + 1_{Cc}\delta_{mC}.
\end{aligned}\right\} \tag{479}$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte sind dann nach (467)

$$Y_K = 1_{Kk} X_k + Y_{K(k+1)} X_{k+1} + \cdots Y_{Kn} X_n .$$

Für die Bildung des Hauptsystems gelten die gleichen Gesichtspunkte wie auf Seite 170.

Das Wesen der Rechenvorschrift wird am besten an einfachen Beispielen gezeigt.

a) Zweifach statisch unbestimmtes Tragwerk.

Transformation:

	X_a	X_b
Y_1	1	Y_{1b}
Y_2	0	1

Nebenbedingung:

$$\delta_{ba} = 0,$$
$$Y_{1b}\,\delta_{1a} + 1_{2b}\,\delta_{2a} = 0,$$
$$Y_{1b} = -1\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}},$$

Statisch unbestimmte Schnittkräfte:

$$Y_1 = 1\,X_a - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} X_b,$$
$$Y_2 = 1\,X_b.$$

Durchgehender Träger über vier Stützen (Abb. 260). Die statisch nicht bestimmbaren Schnittkräfte sind die Stützenmomente Y_1, Y_2.

Belastungszustand $-X_a = 1: \; -Y_1 = Y_{1a} = 1; \; -Y_2 = Y_{2a} = 0$

$$\delta_{1a} = \frac{l_1' + l_2'}{3}; \qquad \delta_{2a} = \frac{l_2'}{6}.$$

Belastungszustand $-X_b = 1: \; -Y_1 = Y_{1b} = -\frac{l_2'}{2(l_1' + l_2')}; \; -Y_2 = Y_{2b} = 1.$

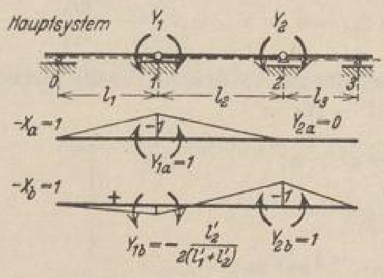

Abb. 260.

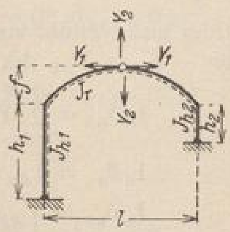

Abb. 261.

Unsymmetrischer Eingelenkrahmen (Abb. 261). Die statisch nicht bestimmbaren Schnittkräfte sind die Komponenten Y_1 und Y_2 der Gelenkkraft.

$$-X_a = 1: \quad -Y_1 = Y_{1a} = 1; \qquad -Y_2 = Y_{2a} = 0 \quad \text{(Abb. 262a)};$$

$$-X_b = 1: \quad -Y_1 = Y_{1b} = -\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}; \qquad -Y_2 = Y_{2b} = 1 \quad \text{(Abb. 262b)}.$$

$$Y_{1b} = -\frac{15\,l\,[h_1'(2f + h_1) - h_2'(2f + h_2)]}{4\{3\,l'\,f^2 + 5\,h_1'[3f(h_1 + f) + h_1^2] + 5\,h_2'[3f(h_2 + f) + h_2^2]\}},$$

$$Y_1 = X_a - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} X_b; \qquad Y_2 = X_b.$$

Bei symmetrischer Trägerausbildung mit $h_1 = h_2$ und $h_1' = h_2'$ ist $Y_{1b} = 0$.

b) Dreifach statisch unbestimmtes Tragwerk. Transformation für die Nebenbedingungen $\delta_{ab} = \delta_{bc} = \delta_{ca} = 0$ nach S. 285

	X_a	X_b	X_c
Y_1	1	Y_{1b}	Y_{1c}
Y_2		1	Y_{2c}
Y_3			1

	X_a	X_b	X_c
Y_1	1	$-\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}$	$-\frac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} + \frac{\delta_{2a}\,\delta_{3b}}{\delta_{1a}\,\delta_{2b}}$
Y_2		1	$-\frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}}$
Y_3			1