Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Gruppenbildung bei Symmetrie des Tragwerks

Die Gruppenbildung bei Symmetrie des Tragwerks. Bei Auflösung der Elastizitätsgleichungen mit symmetrisch liegenden statisch unbestimmten Schnittkräften sind durch die Addition und Subtraktion einander zugeordneter Gleichungen neue Unbekannte entstanden, die bereits in Abschn. 28 als Gruppenlasten X_{a+i}, X_{r-i} erkannt und unabhängig voneinander berechnet wurden. Die Gruppenlast $-X_{a+i}=1$ bestand aus $-Y_{A+J}=1$, $-Y_{R-J}=1$, die Gruppenlast $-X_{r-i}=1$ aus $-Y_{A+J}=1$, $+Y_{R-J}=1$. Die Matrix zerfiel damit in zwei voneinander unabhängige Teile. Im Sinne dieses Abschnitts wurde also über alle übrigen Komponenten $Y_{H(a+i)}$, $Y_{H(r-i)}$ frei verfügt. Sie waren Null. Sollen jedoch nunmehr alle überzähligen Gruppenlasten unabhängig voneinander sein, so werden die Ansätze von S. 281 für die Transformation der statisch unbestimmten Schnittkräfte mit den Ergebnissen aus Abschn. 28 bei Auswahl der frei verfügbaren Komponenten unterhalb der Hauptdiagonale des Ansatzes verbunden.

a) Träger auf vier Stützen nach Abb. 264 (eine Symmetrieachse):

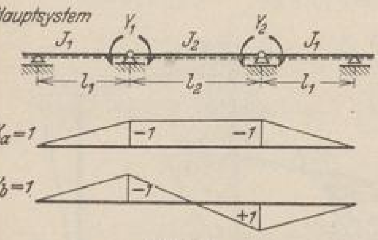

Abb. 264.

Transformation

	X_a	X_b
Y_1	1	Y_{1b}
Y_2	1	-1

$\delta_{1a}=\delta_{2a}$

Nebenbedingung $\delta_{ba}=0$

$$Y_{1b}\,\delta_{1a}-1_{2b}\,\delta_{2a}=0,$$

$$Y_{1b}=1.$$

Statisch unbestimmte Schnittkräfte

$$Y_1=X_a+X_b, \qquad Y_2=X_a-X_b.$$

b) Bunkerrahmen nach Abb. 265 (eine Symmetrieachse).

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e	X_f
Y_1	1	Y_{1b}	Y_{1c}	Y_{1d}	Y_{1e}	Y_{1f}
Y_2		1	1	Y_{2d}	Y_{2e}	Y_{2f}
Y_3		1	-1	Y_{3d}	Y_{3e}	Y_{3f}
Y_4				1	Y_{4e}	Y_{4f}
Y_5					1	1
Y_6					1	-1

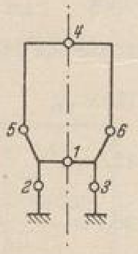

Abb. 265.

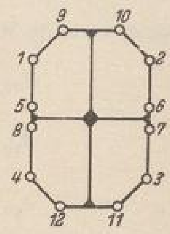

Abb. 266.

Damit ist: $Y_{2c}=Y_{5f}=1,$

$$Y_{1c}=Y_{1f}=Y_{4f}=0,$$

$$Y_{2d}=Y_{3d}, \qquad Y_{2e}=Y_{3e}, \qquad Y_{2f}=-Y_{3f}.$$

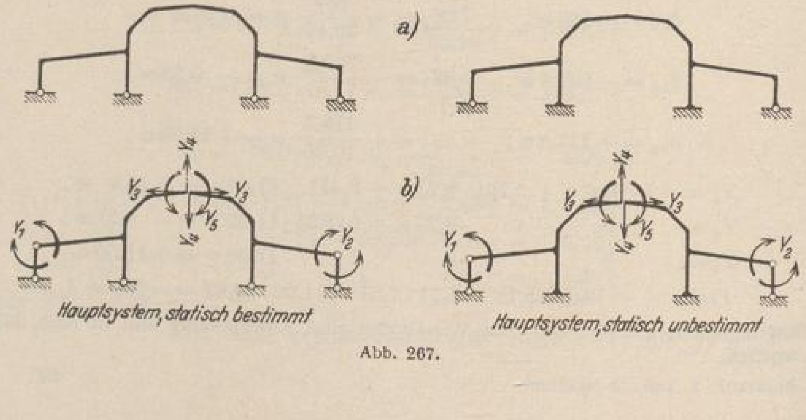

Abb. 267.

c) Behälterrahmen nach Abb. 266 (zwei Symmetrieachsen).

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e	X_f	X_g	X_h	X_i	X_k	X_l	X_m
Y_1	1	1	1	1	Y_{1e}	Y_{2f}	Y_{3g}	Y_{4h}	Y_{1i}	Y_{2k}	Y_{3l}	Y_{4m}
Y_2	1	1	-1	-1	Y_{1e}	Y_{2f}	$-Y_{3g}$	$-Y_{4h}$	Y_{1i}	Y_{2k}	$-Y_{3l}$	$-Y_{4m}$
Y_3	1	-1	-1	1	Y_{1e}	$-Y_{2f}$	$-Y_{3g}$	Y_{4h}	Y_{1i}	$-Y_{2k}$	$-Y_{3l}$	Y_{4m}
Y_4	1	-1	1	-1	Y_{1e}	$-Y_{2f}$	Y_{3g}	$-Y_{4h}$	Y_{1i}	$-Y_{2k}$	Y_{3l}	$-Y_{4m}$
Y_5					1	1	1	1	Y_{5i}	Y_{6k}	Y_{7l}	Y_{8m}
Y_6					1	1	-1	-1	Y_{5i}	Y_{6k}	$-Y_{7l}$	$-Y_{8m}$
Y_7					1	-1	-1	1	Y_{5i}	$-Y_{6k}$	$-Y_{7l}$	Y_{8m}
Y_8					1	-1	1	-1	Y_{5i}	$-Y_{6k}$	Y_{7l}	$-Y_{8m}$
Y_9									1	1	1	1
Y_{10}									1	1	-1	-1
Y_{11}									1	-1	-1	1
Y_{12}									1	-1	1	-1

Die Abkürzung des Ansatzes bei Symmetrie des Tragwerks und Verwendung statisch unbestimmter Hauptsysteme wird mit der einheitlichen Untersuchung der Binder der dreischiffigen Hallen Abb. 267 und 268 gezeigt, deren Riegelzug unter Wahrung symmetrischer Anordnung beliebig geformt sein kann. Die Hauptsysteme zählen fünf statisch unbestimmte Schnittkräfte $Y_1 \ldots Y_5$, deren Lage und Sinn aus den Abbildungen hervorgeht.

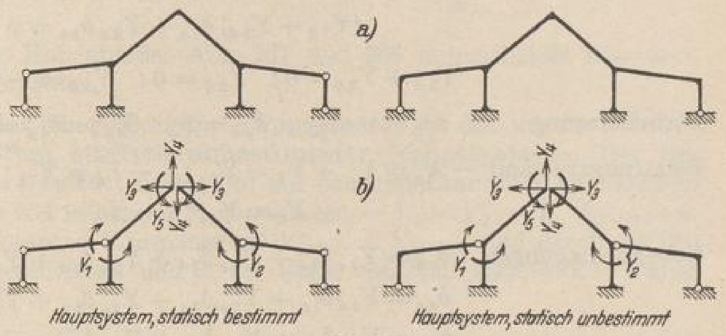

Abb. 268.

Beziehung zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften und den überzähligen Gruppenlasten.

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e
Y_1	1	Y_{1b}	Y_{1c}	Y_{1d}	Y_{1e}
Y_2	1	-1	Y_{2c}	Y_{2d}	Y_{2e}
Y_3			1	Y_{3d}	Y_{3e}
Y_4				1	Y_{4e}
Y_5					1

Belastungszustand $-X_a = 1:\ -Y_1 = 1;\ \ -Y_2 = 1;\ \ Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0.$

Formänderung $\delta_{1a} = \delta_{2a};\ \ \delta_{3a};\ \ \delta_{4a} = 0;\ \ \delta_{5a}.$

Belastungszustand $-X_b = 1:\ -Y_1 = Y_{1b};\ \ -Y_2 = -1;\ \ Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0.$

Nebenbedingung $\delta_{ba} = Y_{1b}\,\delta_{1a} + Y_{2b}\,\delta_{2a} = 0;\ \ Y_{1b} = 1.$

Formänderung $\delta_{1b} = -\delta_{2b};\ \ \delta_{3b} = 0;\ \ \delta_{4b};\ \ \delta_{5b} = 0.$

Belastungszustand $-X_c = 1:\ -Y_1 = Y_{1c};\ -Y_2 = Y_{2c};\ -Y_3 = 1;\ Y_4 = Y_5 = 0.$

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\delta_{cb} &= Y_{1c}\,\delta_{1b} + Y_{2c}\,\delta_{2b} + 1\,\delta_{3b} = 0,\\
\delta_{ca} &= Y_{1c}\,\delta_{1a} + Y_{2c}\,\delta_{2a} + 1\,\delta_{3a} = 0,\\
&(Y_{1c} - Y_{2c})\,\delta_{1b} = 0,\\
&(Y_{1c} + Y_{2c})\,\delta_{1a} + 1\,\delta_{3a} = 0,\\
&Y_{1c} = Y_{2c} = -\frac{\delta_{3a}}{2\,\delta_{1a}}.
\end{aligned}$$

Formänderung $\delta_{1c} = \delta_{2c};\ \ \delta_{3c};\ \ \delta_{4c} = 0;\ \ \delta_{5c}.$

Belastungszustand $-X_d = 1:\ -Y_1 = Y_{1d};\ \ -Y_2 = Y_{2d};\ \ -Y_3 = Y_{3d};$
$-Y_4 = 1;\ \ Y_5 = 0.$

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\delta_{dc} &= Y_{1d}\,\delta_{1c} + Y_{2d}\,\delta_{2c} + Y_{3d}\,\delta_{3c} + 1\,\delta_{4c} = 0,\\
\delta_{db} &= Y_{1d}\,\delta_{1b} + Y_{2d}\,\delta_{2b} + Y_{3d}\,\delta_{3b} + 1\,\delta_{4b} = 0,\\
\delta_{da} &= Y_{1d}\,\delta_{1a} + Y_{2d}\,\delta_{2a} + Y_{3d}\,\delta_{3a} + 1\,\delta_{4a} = 0,\\
&(Y_{1d} + Y_{2d})\,\delta_{1c} + Y_{3d}\,\delta_{3c} = 0,\\
&(Y_{1d} - Y_{2d})\,\delta_{1b} + 1\,\delta_{4b} = 0,\\
&(Y_{1d} + Y_{2d})\,\delta_{1a} + Y_{3d}\,\delta_{3a} = 0,\\
&Y_{1d} + Y_{2d} = 0;\ \ Y_{3d} = 0;\ \ Y_{1d} = -Y_{2d} = -\frac{\delta_{4b}}{2\,\delta_{1b}}.
\end{aligned}$$

Formänderung $\delta_{1d} = -\delta_{2d};\ \ \delta_{3d} = 0;\ \ \delta_{4d};\ \ \delta_{5d} = 0.$

Belastungszustand $-X_e = 1:\ -Y_1 = Y_{1e};\ \ -Y_2 = Y_{2e};\ \ -Y_3 = Y_{3e};$
$-Y_4 = Y_{4e};\ \ -Y_5 = 1.$

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\delta_{ed} &= Y_{1e}\,\delta_{1d} + Y_{2e}\,\delta_{2d} + Y_{3e}\,\delta_{3d} + Y_{4e}\,\delta_{4d} + 1\,\delta_{5d} = 0,\\
\delta_{ec} &= Y_{1e}\,\delta_{1c} + Y_{2e}\,\delta_{2c} + Y_{3e}\,\delta_{3c} + Y_{4e}\,\delta_{4c} + 1\,\delta_{5c} = 0,\\
\delta_{eb} &= Y_{1e}\,\delta_{1b} + Y_{2e}\,\delta_{2b} + Y_{3e}\,\delta_{3b} + Y_{4e}\,\delta_{4b} + 1\,\delta_{5b} = 0,\\
\delta_{ea} &= Y_{1e}\,\delta_{1a} + Y_{2e}\,\delta_{2a} + Y_{3e}\,\delta_{3a} + Y_{4e}\,\delta_{4a} + 1\,\delta_{5a} = 0,\\
&(Y_{1e} - Y_{2e})\,\delta_{1d} + Y_{4e}\,\delta_{4d} = 0,\\
&(Y_{1e} + Y_{2e})\,\delta_{1c} + Y_{3e}\,\delta_{3c} + 1\,\delta_{5c} = 0,\\
&(Y_{1e} - Y_{2e})\,\delta_{1b} + Y_{4e}\,\delta_{4b} = 0,\\
&(Y_{1e} + Y_{2e})\,\delta_{1a} + Y_{3e}\,\delta_{3a} + 1\,\delta_{5a} = 0,\\
&Y_{1e} - Y_{2e} = 0;\ \ Y_{4e} = 0;\ \ Y_{1e} = +Y_{2e},\\
&2\,Y_{1e}\,\delta_{1c} + Y_{3e}\,\delta_{3c} = -\delta_{5c},\\
&2\,Y_{1e}\,\delta_{1a} + Y_{3e}\,\delta_{3a} = -\delta_{5a},\\
&Y_{1e} = \frac{-\delta_{5c}\,\delta_{3a} + \delta_{5a}\,\delta_{3c}}{2\,(\delta_{1c}\,\delta_{3a} - \delta_{1a}\,\delta_{3c})};\qquad Y_{3e} = \frac{-\delta_{1c}\,\delta_{5a} + \delta_{1a}\,\delta_{5c}}{2\,(\delta_{1c}\,\delta_{3a} - \delta_{1a}\,\delta_{3c})}.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in der folgenden Matrix zusammengefaßt.

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e
Y_1	1	1	$-\frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}}$	$-\frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}}$	Y_{1e}
Y_2	1	-1	$-\frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}}$	$+\frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}}$	Y_{1e}
Y_3			1	0	Y_{3e}
Y_4				1	0
Y_5					1

Sie liefert die überzähligen Schnittkräfte nach (467)

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= X_a + X_b - \frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}} X_c - \frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}} X_d + Y_{1e} X_e,\\
Y_2 &= X_a - X_b - \frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}} X_c + \frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}} X_d + Y_{1e} X_e,\\
Y_3 &= X_c + Y_{3e} X_e,\\
Y_4 &= X_d,\\
Y_5 &= X_e.
\end{aligned}
$$

Die Berechnung der Hallenbinder Abb. 267 und 268 unterscheidet sich demnach nur durch die Vorzahlen.

Die Beziehungen der überzähligen Gruppenlasten zu den statisch unbestimmten Schnittkräften statisch unbestimmter Hauptsysteme. Der Belastungszustand $-X_i = 1$ besteht nach (475) aus den unbekannten Schnittkräften $Y_{Ai}, \dots Y_{(J-1)i}$ und den frei wählbaren Komponenten $-Y_J = Y_{Ji} = 1$, $Y_{(J+1)i} = 0$, $\dots Y_{Ni} = 0$. Die unbekannten Komponenten $Y_{Ai}, \dots Y_{(J-1)i}$ sind durch die Bedingungen $\delta_{ik} = 0$ vorgeschrieben und in der Regel von Null verschieden. Daher sind mit

$$1_i \delta_{ik} = \sum_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{Hk} = 0, \quad i = a, \dots (k-1) \tag{480}$$

alle Verschiebungen δ_{Hi} $(H = A, \dots J-1)$ Null. Der Verschiebungszustand des Hauptsystems infolge von $-X_i = 1$ erfüllt also die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen eines $(i-1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Der Belastungszustand $-X_i = 1$ im statisch bestimmten Hauptsystem ist also identisch mit dem Belastungszustand $-Y_i = 1$ des $(i-1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Daher ist

$$Y_J^{(i)} = \frac{\delta_{J0}^{(i-1)}}{\delta_{JJ}^{(i-1)}} = \frac{\sum\limits_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{H0}}{\sum\limits_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{Hi}} = \frac{1_i \delta_{i0}}{1_i \delta_{ii}} = X_i. \tag{481}$$

Die überzähligen Gruppenlasten $X_a \dots X_k \dots X_n$ erhalten damit die Bedeutung