Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Beziehungen der überzähligen Gruppenlasten zu den statisch unbestimmten Schnittkräften statisch unbestimmter Hauptsysteme

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Das Ergebnis wird in der folgenden Matrix zusammengefaßt.

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e
Y_1	1	1	$-\frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}}$	$-\frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}}$	Y_{1e}
Y_2	1	-1	$-\frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}}$	$+\frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}}$	Y_{1e}
Y_3			1	0	Y_{3e}
Y_4				1	0
Y_5					1

Sie liefert die überzähligen Schnittkräfte nach (467)

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= X_a + X_b - \frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}} X_c - \frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}} X_d + Y_{1e} X_e, \\
Y_2 &= X_a - X_b - \frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}} X_c + \frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}} X_d + Y_{1e} X_e, \\
Y_3 &= X_c + Y_{3e} X_e, \\
Y_4 &= X_d, \\
Y_5 &= X_e.
\end{aligned}
$$

Die Berechnung der Hallenbinder Abb. 267 und 268 unterscheidet sich demnach nur durch die Vorzahlen.

Die Beziehungen der überzähligen Gruppenlasten zu den statisch unbestimmten Schnittkräften statisch unbestimmter Hauptsysteme. Der Belastungszustand $-X_i = 1$ besteht nach (475) aus den unbekannten Schnittkräften $Y_{Ai}, \ldots Y_{(J-1)i}$ und den frei wählbaren Komponenten $-Y_J = Y_{Ji} = 1$, $Y_{(J+1)i} = 0$, $\ldots Y_{Ni} = 0$. Die unbekannten Komponenten $Y_{Ai}, \ldots Y_{(J-1)i}$ sind durch die Bedingungen $\delta_{ik} = 0$ vorgeschrieben und in der Regel von Null verschieden. Daher sind mit

$$1_i \delta_{ik} = \sum_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{Hk} = 0, \quad i = a, \ldots (k-1) \tag{480}$$

alle Verschiebungen δ_{Hi} $(H = A, \ldots J-1)$ Null. Der Verschiebungszustand des Hauptsystems infolge von $-X_i = 1$ erfüllt also die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen eines $(i-1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Der Belastungszustand $-X_i = 1$ im statisch bestimmten Hauptsystem ist also identisch mit dem Belastungszustand $-Y_i = 1$ des $(i-1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Daher ist

$$Y_J^{(i)} = \frac{\delta_{J0}^{(i-1)}}{\delta_{JJ}^{(i-1)}} = \frac{\sum\limits_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{H0}}{\sum\limits_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{Hi}} = \frac{1_i \delta_{i0}}{1_i \delta_{ii}} = X_i. \tag{481}$$

Die überzähligen Gruppenlasten $X_a \ldots X_k \ldots X_n$ erhalten damit die Bedeutung von statisch unbestimmten Einzelkräften $Y_A^{(1)} \dots Y_K^{(k)} \dots Y_N^{(n)}$, welche die Belastung $\mathfrak{P}$ in Hauptsystemen von Eins aus ansteigenden Grades hervorruft. Die Gruppenlast X_i kann daher für eine ruhende Belastung auch folgendermaßen angegeben werden:

$$X_i = Y_i^{(i)} = \frac{\int N_0^{(0)} N_i^{(i-1)} \frac{ds}{EF} + \int M_0^{(0)} M_i^{(i-1)} \frac{ds}{EJ} + \int N_i^{(i-1)} \alpha_t t\, ds + \int M_i^{(i-1)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{ci}^{(i-1)} \Delta_c}{\int N_i^{(0)} N_i^{(i-1)} \frac{ds}{EF} + \int M_i^{(0)} M_i^{(i-1)} \frac{ds}{EJ}}.$$

Ihre mit $\delta_{ii} = \delta_{JJ}^{(i-1)}$ $(i = a \dots n,\ J = A \dots N)$ erweiterten Einflußlinien sind die Biegelinien $\delta_{mA}^{(0)} \dots \delta_{mJ}^{(i-1)} \dots \delta_{mN}^{(n-1)}$ der Lastgurte von Hauptsystemen von Eins aus ansteigender statischer Unbestimmtheit für $-Y_A^{(1)} = 1 \dots -Y_J^{(i)} = 1 \dots -Y_N^{(n)} = 1$. Nach **Maxwell** ist

$$1_m \delta_{mJ}^{(i-1)} = 1_m \delta_{mi}^{(0)} = \sum Y_{Hi} \delta_{Hm} = \sum_{H=A}^{H=J} Y_{Hi} \delta_{mH}^{(0)}. \tag{482}$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J ergeben sich durch Superposition

$$Y_J = X_i + \sum_{i+1}^{n} Y_{Jk} X_k = Y_J^{(i)} + \sum_{J+1}^{N} Y_{Jk} Y_K^{(k)}. \tag{483}$$

Derselbe Ansatz gilt für die Einflußlinien. Für ein sechsfach statisch unbestimmtes Stabwerk ist daher mit $J = 1 \dots 6$

$$\left.\begin{array}{lllllll}
Y_1 = & +1\frac{\delta_{10}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} & + Y_{1b}\frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} & + Y_{1c}\frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} & + Y_{1d}\frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} & + Y_{1e}\frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} & + Y_{1f}\frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_2 = & & +\ 1\ \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} & + Y_{2c}\frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} & + Y_{2d}\frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} & + Y_{2e}\frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} & + Y_{2f}\frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_3 = & & & +\ 1\ \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} & + Y_{3d}\frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} & + Y_{3e}\frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} & + Y_{3f}\frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_4 = & & & & +\ 1\ \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} & + Y_{4e}\frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} & + Y_{4f}\frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_5 = & & & & & +\ 1\ \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} & + Y_{5f}\frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
Y_6 = & & & & & & +\ 1\ \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}
\end{array}\right\} \tag{484}$$

Die Parameter Y_{Jk} sind nach S. 285:

$$-Y_{1b} = \frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}};\quad -Y_{2c} = \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}};\quad -Y_{3d} = \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}};\quad -Y_{4e} = \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}};\quad -Y_{5f} = \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}};$$

$$-Y_{1c} = \frac{\delta_{13}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} + Y_{2c}\frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}};\ \dots\ -Y_{4f} = \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{5f}\frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} = \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}},$$

so daß

$$\begin{aligned}
Y_5 = \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot Y_6;\quad Y_4 &= \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}\frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} - \left[\frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}\right]\frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
&= \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}\left[\frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}\right] - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\
&= \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_6 .
\end{aligned}$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte lassen sich daher folgendermaßen umformen:

$$\left.\begin{array}{llllll}
Y_1 = \frac{\delta_{10}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_2 & - \frac{\delta_{13}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_3 & - \frac{\delta_{14}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_4 & - \frac{\delta_{15}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_5 & - \frac{\delta_{16}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_6 \\
Y_2 = \qquad \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot 1 & - \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_3 & - \frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_4 & - \frac{\delta_{25}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_5 & - \frac{\delta_{26}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_6 \\
Y_3 = & \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot 1 & - \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot Y_4 & - \frac{\delta_{35}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot Y_5 & - \frac{\delta_{36}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot Y_6 \\
Y_4 = & & \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot 1 & - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_5 & - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_6 \\
Y_5 = & & & \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot 1 & - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot Y_6 \\
Y_6 = & & & & \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \cdot 1
\end{array}\right\} \quad (485)$$

Die Lösung ist damit auf die reduzierte Matrix eines sechsfach statisch unbestimmten Systems zurückgeführt und auf diese Weise der Anschluß an die allgemeine Auflösung gefunden.

Die Formänderungsenergie des vorgegebenen Tragwerks kann nach dem Clapeyronschen Gesetz durch die äußeren Kräfte ausgedrückt werden. Sie zerfällt, bezogen auf das Hauptsystem, in zwei Teile, die von der Belastung $\mathfrak{P}$ und den statisch überzähligen Größen Y_K oder X_k herrühren:

$$A_i = \tfrac{1}{2} \sum P_m \delta_m^{(0)} - \tfrac{1}{2} \sum Y_K \delta_{K0} = \tfrac{1}{2} \sum P_m \delta_m^{(0)} - \tfrac{1}{2} \sum X_k \delta_{k0}$$
$$(K = A \ldots N, \quad k = a \ldots n).$$

Daher ist

$$\sum Y_K \delta_{K0} = \sum X_k \delta_{k0}$$

und mit den bereits bekannten Beziehungen (481)

$$\delta_{k0} = \delta_{K0}^{(k-1)}, \qquad X_k = \frac{\delta_{K0}^{(k-1)}}{\delta_{KK}^{(k-1)}} \quad \text{und} \quad \delta_{K0} = \sum Y_H \delta_{KH},$$

$$\sum Y_K \delta_{K0} = \sum \frac{(\delta_{K0}^{(k-1)})^2}{\delta_{KK}^{(k-1)}} = \sum Y_K^{(k)} \delta_{K0}^{(k-1)} = \sum_K \sum_H Y_K Y_H \delta_{KH} \begin{array}{l}(K = A \ldots N) \\ (H = A \ldots N)\end{array}. \quad (486)$$

Der Ansatz eignet sich nach S. 229 zur Nachprüfung der nach irgendeiner Elimination berechneten Wurzeln Y_K.

Müller, S.: Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke. Zbl. Bauverw. 1907 S. 23. — Müller-Breslau, H.: Die Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 1. Abt. Stuttgart 1922. — Hertwig, A.: Über die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme und verwandter Aufgaben in der Statik der Baukonstruktionen. Z. Bauwes. 1910 S. 487. — Pirlet, J.: Die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1910 S. 331. — Derselbe: Verwendung vereinfachter Elastizitätsgleichungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1915 S. 167. — Derselbe: Kompendium der Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 1. Teil. Berlin 1921. — Kaufmann, W.: Statik. Handbibl. f. Bauing. Berlin 1923. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerkes. Berlin 1923. — Derselbe: Elastizitätsgleichungen gegenseitiger Unabhängigkeit. Eisenbau 1921 S. 305.

37. Die Verwendung statisch unbestimmter Hauptsysteme.

Von den n statisch unbestimmten Schnittkräften eines Stabwerks gelten h als überzählig. Sie werden durch äußere Kräfte X_i $(i = 1 \ldots h)$ ersetzt und aus ebenso vielen geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand des $(n - h) = r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems berechnet, da die relativen Verschiebungen