



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

37. Die Verwendung statisch unbestimmter Hauptsysteme

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte lassen sich daher folgendermaßen umformen:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{\delta_{10}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_2 - \frac{\delta_{13}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_3 - \frac{\delta_{14}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_4 - \frac{\delta_{15}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{16}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_6 \\ Y_2 &= \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_3 - \frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_4 - \frac{\delta_{25}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{26}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_6 \\ Y_3 &= \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot Y_4 - \frac{\delta_{35}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{36}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot Y_6 \\ Y_4 &= \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_6 \\ Y_5 &= \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot Y_6 \\ Y_6 &= \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \cdot 1 \end{aligned} \right\} (485)$$

Die Lösung ist damit auf die reduzierte Matrix eines sechsfach statisch unbestimmten Systems zurückgeführt und auf diese Weise der Anschluß an die allgemeine Auflösung gefunden.

Die Formänderungsenergie des vorgegebenen Tragwerks kann nach dem Clapeyronschen Gesetz durch die äußeren Kräfte ausgedrückt werden. Sie zerfällt, bezogen auf das Hauptsystem, in zwei Teile, die von der Belastung  $\mathfrak{P}$  und den statisch überzähligen Größen  $Y_K$  oder  $X_k$  herrühren:

$$A_t = \frac{1}{2} \sum P_m \delta_m^{(0)} - \frac{1}{2} \sum Y_K \delta_{K0} = \frac{1}{2} \sum P_m \delta_m^{(0)} - \frac{1}{2} \sum X_k \delta_{k0} \\ (K = A \dots N, \quad k = a \dots n).$$

Daher ist

$$\sum Y_K \delta_{K0} = \sum X_k \delta_{k0}$$

und mit den bereits bekannten Beziehungen (481)

$$\delta_{k0} = \frac{\delta_{k0}^{(k-1)}}{\delta_{kk}^{(k-1)}}, \quad X_k = \frac{\delta_{k0}^{(k-1)}}{\delta_{kk}^{(k-1)}} \quad \text{und} \quad \delta_{K0} = \sum Y_H \delta_{KH},$$

$$\sum Y_K \delta_{K0} = \sum \frac{(\delta_{K0}^{(k-1)})^2}{\delta_{kk}^{(k-1)}} = \sum Y_K^{(k)} \delta_{K0}^{(k-1)} = \sum_K \sum_H Y_K Y_H \delta_{KH} \quad (K = A \dots N, \quad H = A \dots N). \quad (486)$$

Der Ansatz eignet sich nach S. 229 zur Nachprüfung der nach irgendeiner Elimination berechneten Wurzeln  $Y_K$ .

Müller, S.: Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke. Zbl. Bauverw. 1907 S. 23. — Müller-Breslau, H.: Die Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 1. Abt. Stuttgart 1922. — Hertwig, A.: Über die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme und verwandter Aufgaben in der Statik der Baukonstruktionen. Z. Bauwes. 1910 S. 487. — Pirlet, J.: Die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1910 S. 331. — Derselbe: Verwendung vereinfachter Elastizitätsgleichungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1915 S. 167. — Derselbe: Kompendium der Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 1. Teil. Berlin 1921. — Kaufmann, W.: Statik. Handbibl. f. Bauing. Berlin 1923. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerkes. Berlin 1923. — Derselbe: Elastizitätsgleichungen gegenseitiger Unabhängigkeit. Eisenbau 1921 S. 305.

### 37. Die Verwendung statisch unbestimmter Hauptssysteme.

Von den  $n$  statisch unbestimmten Schnittkräften eines Stabwerks gelten  $h$  als überzählig. Sie werden durch äußere Kräfte  $X_i$  ( $i = 1 \dots h$ ) ersetzt und aus ebenso vielen geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand des  $(n-h) = r$  fach statisch unbestimmten Hauptsystems berechnet, da die relativen Verschiebungen

( $i = 1 \dots h$ ) im vorgegebenen Tragwerk Null sind. Nach dem Superpositionsgesetz ist dann

$$M = M_{\otimes}^{(n-h)} - \sum X_k M_k^{(n-h)} \quad (k = 1 \dots h), \quad (487)$$

$$\delta_i = \delta_{i\otimes}^{(n-h)} - \sum_{k=1}^h X_k \delta_{ik}^{(n-h)} = 0 \quad (i = 1 \dots h). \quad (488)$$

Die Belastung  $\mathfrak{P}$ , die Temperaturänderung  $t$  und die Stützenbewegung  $\Delta_e$  erzeugen Schnittkräfte  $M_{\otimes}^{(n-h)}$  und Verschiebungen  $\delta_{i\otimes}^{(n-h)}$ , die äußeren Kräfte  $-X_k = 1$  Schnittkräfte  $M_k^{(n-h)}$  und Verschiebungen  $\delta_{ik}^{(n-h)}$ . Sie können bei zahlreichen Aufgaben nach Tabellen eingesetzt, bei anderen nach (311) berechnet werden. Darnach ist

$$\left. \begin{aligned} 1_i^{(n-h)} \delta_{i\otimes}^{(n-h)} &= \int M_i^{(n-h)} M_{\otimes}^{(0)} \frac{J_e}{J} ds + \int N_i^{(n-h)} \alpha_i t ds - \sum C_{ei}^{(n-h)} \Delta_e, \\ 1_i^{(n-h)} \delta_{ik}^{(n-h)} &= \int M_i^{(0)} M_k^{(n-h)} \frac{J_e}{J} ds = \int M_i^{(n-h)} M_k^{(0)} \frac{J_e}{J} ds. \end{aligned} \right\} \quad (489)$$

Die Genauigkeit dieser Vorzahlen ist oft wegen der Fehlerempfindlichkeit des Ansatzes für die Brauchbarkeit des Ergebnisses von großer Bedeutung, so daß die zuverlässige Berechnung der Spannungszustände  $M_{\otimes}^{(n-h)}$ ,  $M_i^{(n-h)}$  des Hauptsystems aus den äußeren Ursachen und den Kräften  $-X_i = 1$  durch den Nachweis der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung zu prüfen ist.

Die Schnittkräfte  $M_{\otimes}^{(0)}$ ,  $M_i^{(0)}$ ,  $M_k^{(0)}$  werden durch die Belastung  $\mathfrak{P}$  und die äußeren Kräfte  $-X_i = 1$ ,  $-X_k = 1$  in einem beliebig gegliederten statisch bestimmten Hauptsystem hervorgerufen, das in dem  $(n-h)$  fach statisch unbestimmten Hauptsystem enthalten ist. Es liegt nahe, dabei diejenige Form zu wählen, welche einfache, wenig fehlerempfindliche Rechnungen und daher auch genaue Ergebnisse  $\delta_{i\otimes}^{(n-h)}$ ,  $\delta_{ik}^{(n-h)}$  verbürgt. Die Einflußlinien der überzähligen Schnittkräfte  $X_i$  werden mit  $\delta_{i0}^{(n-h)} = \delta_{im}^{(n-h)} = \delta_{mi}^{(n-h)}$  aus den Biegelinien des Laststabzuges des Hauptsystems und daher ebenfalls aus den Schnittkräften  $M_i^{(n-h)}$  entwickelt.

Die überzähligen Größen  $X_i$  ergeben sich nach diesen Vorarbeiten durch die Auflösung der  $h$  linearen Gleichungen (488). In der Regel wird die zu den Vorzahlen  $\delta_{ik}^{(n-h)}$  konjugierte Matrix  $\beta_{ik}$  bestimmt und

$$X_i = \sum_{k=1}^h \beta_{ik} \delta_{k\otimes}^{(n-h)} \quad (i = 1 \dots h) \quad (490)$$

berechnet. Dabei gelten alle Bemerkungen des Abschnitts 25 für die Auflösung der Ansätze aus statisch bestimmten Hauptsystemen. Ebenso ist selbstverständlich, daß Gruppenlasten  $X_i$  an Stelle von statisch unbestimmten Schnittkräften verwendet und nach Abschn. 36 unabhängig voneinander angegeben werden können. Der Ansatz (488) läßt sich daher auf das statisch bestimmte Hauptsystem zurückführen, in welchem auch die übrigen  $(n-h) = r$  überzähligen Schnittkräfte  $X_c$  des Tragwerks als äußere Kräfte wirken. Diese werden zur leichteren Unterscheidung mit  $Y_c$  bezeichnet. Darnach ist

$$\left. \begin{aligned} M &= M_{\otimes}^{(n-h)} - \sum_{i=1}^h M_i^{(n-h)} X_i = M_{\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r M_{\sigma}^{(0)} Y_{\sigma}^{(r)} - \sum_{i=1}^h X_i \left\{ M_i^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r M_{\sigma}^{(0)} Y_{\sigma}^{(r)} \right\}, \\ &= M_{\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r M_{\sigma}^{(0)} (Y_{\sigma}^{(r)} - \sum_{i=1}^h Y_{\sigma}^{(r)} X_i) - \sum_{i=1}^h M_i^{(0)} X_i = M_{\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r M_{\sigma}^{(0)} X_{\sigma}, \\ 0 &= \delta_{k\otimes}^{(n-h)} - \sum_{i=1}^h X_i \delta_{ki}^{(n-h)} = \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r \delta_{k\sigma}^{(0)} Y_{\sigma}^{(r)} - \sum_{i=1}^h X_i \left\{ \delta_{ki}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r \delta_{k\sigma}^{(0)} Y_{\sigma}^{(r)} \right\} \\ &= \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r \delta_{k\sigma}^{(0)} (Y_{\sigma}^{(r)} - \sum_{i=1}^h Y_{\sigma}^{(r)} X_i) - \sum_{i=1}^h \delta_{ki}^{(0)} X_i = \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r \delta_{k\sigma}^{(0)} X_{\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (491)$$

Die geometrischen Bedingungen (488) für den Verschiebungszustand des statisch unbestimmten Hauptsystems stimmen nach dieser Ableitung mit denjenigen des statisch bestimmten Hauptsystems überein.

Diese algebraischen Beziehungen werden bei der Berechnung eines Ansatzes mit  $n$  Unbekannten in zwei Stufen verwendet. Die Zerlegung richtet sich nach der Struktur der Matrix. Werden die überzähligen Größen  $X_1 = Y_1, \dots, X_{n-h} = Y_R$  in der ersten Stufe zusammengefaßt, so gehören die übrigen Schnittkräfte  $X_i (1 \dots h)$  der Gleichungen 1 bis  $r$  zunächst zu den Belastungsgliedern. Damit ist

$$X_c = Y_c = Y_{c\otimes}^{(r)} - \sum_{k=1}^h Y_{c\otimes k}^{(r)} X_k \quad (492)$$

und die Normalgleichung  $i^k$  der zweiten Stufe

$$\left. \begin{aligned} \sum_{c=1}^h (Y_{c\otimes}^{(r)} - \sum_{k=1}^h Y_{c\otimes k}^{(r)} X_k) \delta_{ic}^{(0)} + \sum_{k=1}^h X_k \delta_{ik}^{(0)} &= \delta_{i\otimes}^{(0)}, \\ \sum_{k=1}^h (\delta_{ik}^{(0)} - \sum_{c=1}^r \delta_{ic}^{(0)} Y_{c\otimes k}^{(r)}) X_k &= \delta_{i\otimes}^{(0)} - \sum_{c=1}^r \delta_{ic}^{(0)} Y_{c\otimes}^{(r)}, \\ \sum_{k=1}^h \delta_{ik}^{(n-h)} X_k &= \delta_{i\otimes}^{(n-h)}. \end{aligned} \right\} \quad (493)$$

Die Auflösung des Ansatzes in zwei Stufen ist daher gleichbedeutend mit der Verwendung eines statisch unbestimmten Hauptsystems. Sie bringt stets Vorteile für die Rechnung, wenn die statisch unbestimmten Schnittkräfte der ersten Stufe durch Tabellen bekannt sind oder aus drei- und fünfgliedrigen Gleichungen berechnet werden können. Entscheidend sind Abkürzung und geringe Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Am meisten werden Rahmen, eingespannte Träger und durchgehende Träger mit starren, oder elastisch drehbaren Stützen als statisch unbestimmte Hauptsysteme verwendet.

**Berechnung eines Hallenrahmens.**

1. Geometrische Grundlagen: ( $n = E_d/E_s = 10$ ) Abb. 269.

$$\begin{aligned} J_1 &= 0,0213 \text{ m}^4; & J_2 &= 0,0417 \text{ m}^4 = J_c; & F_z &= 0,008 \text{ m}^2, \\ J_c/J_1 &= J_2/J_1 = 1,95775; & J_c/n F_c &= J_2/n F_z = 0,52125, \\ l &= 18,00 \text{ m}, & l_1 &= 5,00 \text{ m}, & f &= 3,00 \text{ m}, \\ h &= 12,00 \text{ m} = h', & h_1 &= 3,00 \text{ m}, & h_2 &= 9,00 \text{ m} = h_2', \\ s &= 9,487 \text{ m}, & s_1 &= 2,635 \text{ m}, & s_2 &= 6,852 \text{ m}, \\ s' &= 18,573 \text{ m}, & s_1' &= 5,159 \text{ m}, & s_2' &= 13,414 \text{ m}. \end{aligned}$$

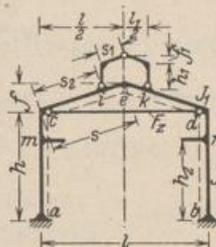


Abb. 269.

2. Hauptsystem. Das Hauptsystem Abb. 270a ist der dreifach statisch unbestimmte Rahmen. Die Längskraft des Zugbandes als überzählige Größe beträgt nach (488) und (311):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(3)}}{\delta_{11}^{(3)}} = \frac{\int M_0^{(0)} M_1^{(3)} \frac{J_c}{J} ds}{\int M_1^{(0)} M_1^{(3)} \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{n F_z} 1,0^2 l}$$

Hilfswerte zur Berechnung von  $M_0^{(3)}$  aus der Belastung und von  $M_1^{(3)}$  aus  $-X_1 = 1$  (Abb. 271) mit den Tabellen des Abschn. 61:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1,50000, & \kappa &= 0,64610, & \mu &= 5,92016, & \psi_1 &= 8,31154, \\ \varphi &= 0,25000, & \varrho &= 0,83848, & \nu &= 5,87660, & \psi_2 &= 6,13058, \\ H_{d1}^{(3)} &= -2 \frac{-1}{2} \left[ \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 0,83848}{3 \cdot 5,87660} (2 \cdot 0,25 \cdot 8,31154 + 3) \right] = + 0,16892 \text{ t}, \\ M_{d1}^{(3)} &= 2 \frac{-1 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,25}{3 \cdot 5,92016} (2 \cdot 0,25 \cdot 0,83848 + 3) = -1,15512 \text{ mt}, \\ M_{c1}^{(3)} &= -1,15512 + 0,16892 \cdot 12,0 = + 0,87192 \text{ mt}, \\ M_{c1}^{(3)} &= -1,15512 - (0,16892 - 1,0) 3,0 = + 1,33812 \text{ mt}. \end{aligned}$$

Zugeordnetes statisch bestimmtes Hauptsystem: Balken auf 2 Stützen.  $M_1^{(0)}$  aus  $-X_1 = 1$  (Abb. 270 b).

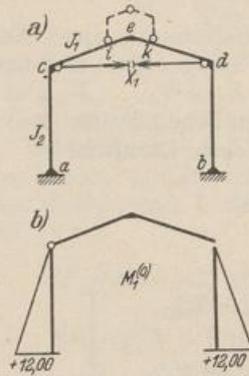


Abb. 270.

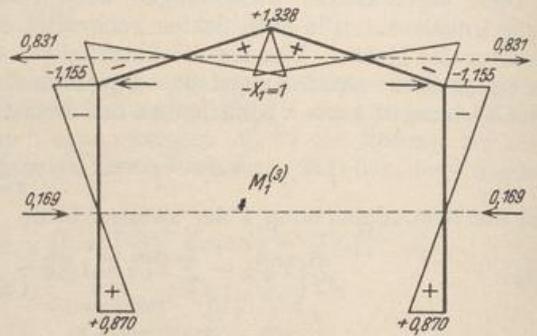


Abb. 271.

$$3. \delta_{11}^{(3)} = 2 \cdot 12,00 \cdot \frac{1}{8} 12,00 (2 \cdot 0,87192 - 1,15512) + 0,52125 \cdot 1,0^2 \cdot 18,0 = 37,641.$$

4. Schnittkräfte im vorgelegten Tragwerk

$$C = C_0^{(3)} - X_1 C_1^{(3)}; \quad M = M_0^{(3)} - X_1 M_1^{(3)}.$$

a) Belastung aus Eigengewicht der Laterne:  $p_1 = 2,0 \text{ t/m}$  (Abb. 272 a).

$$P = 2,0 \cdot 5,0/2 = 5,0 \text{ t}; \quad \xi = 0,36111; \quad \xi' = 0,63889;$$

$$W = \frac{2,0 \cdot 5,0^2}{8 \cdot 3,833} = 1,631 \text{ t}; \quad \zeta = 0,7222; \quad \zeta' = 0,27787;$$

$$M_{11}^{(3)} = \left( 1,33812 - \frac{1,33812 + 1,15512}{18,00} \cdot 5,00 \right) = 0,64555;$$

$$\delta_{10}^{(3)} = 2 \left[ \frac{18,573}{6} \cdot 45,00 (2 \cdot 1,33812 - 1,15512) - \frac{5,159}{6} 11,1417 (2 \cdot 1,33812 + 0,64555) \right] = 360,131;$$

$$X_1 = \frac{360,131}{37,6411} = 9,5675 \text{ t}.$$

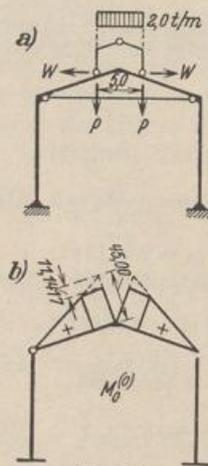


Abb. 272.

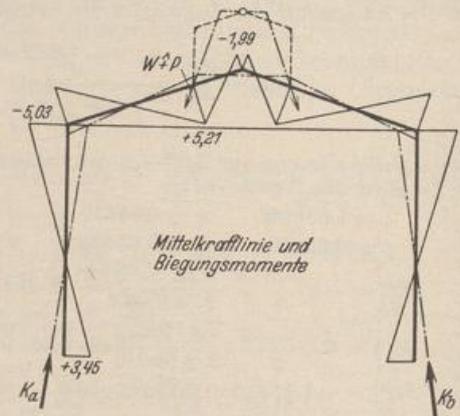


Abb. 273.

Nach Abschn. 61 wird:

aus P:  $H''_{a0}^{(3)} = 2 \cdot 5,0 \cdot \frac{1,5 \cdot 0,83848}{3 \cdot 0,66667} \cdot 0,36111 [0,25 \cdot 8,31154 (3 - 4 \cdot 0,36111^2) + 6 \cdot 0,63889];$

aus W:  $H''_{b0}^{(3)} = -2 \cdot \frac{-1,631}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 0,83848}{3 \cdot 5,92016} \cdot 0,27778^2 [0,25 \cdot 8,31154 (3 - 0,27778) + 3];$

$H_a = H''_{a0}^{(3)} + H''_{b0}^{(3)} - X_1 H''_{d1}^{(3)} = 2,29717 + 0,02571 - 9,5675 \cdot 0,16892 = 0,70674 \text{ t};$

aus P:  $M''_{d0}^{(3)} = -2 \cdot 5,0 \cdot 18,0 \cdot 0,36111 \frac{1}{3 \cdot 5,92016} [0,25 \cdot 0,83848 (3 - 4 \cdot 0,36111^2) + 6 \cdot 0,63889];$

aus W:  $M''_{d0}^{(3)} = 2 \frac{-1,631 \cdot 12,0}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 0,27778^2}{3 \cdot 5,92016} [0,25 \cdot 0,83848 (3 - 0,27778) + 3];$

$M_d = M''_{d0}^{(3)} + M''_{d0}^{(3)} - X_1 M''_{d1}^{(3)} = -15,93064 - 0,15181 + 9,5675 \cdot 1,15512 = -5,03084 \text{ mt};$

$M_a = M_d + H_a \cdot h = +3,45004 \text{ mt (Abb. 273).}$

b) Einseitige Belastung des Daches:  $p_2 = 3,0 \text{ t/m (Abb. 274a).}$

$Q = 3,0 \cdot 6,5 = 19,5 \text{ t}; \quad \xi = 0,36111; \quad \xi' = 0,63889.$

Aufspaltung der Belastung in einen symmetrischen und einen antimetrischen Lastanteil.  
Symmetrischer Anteil: (Abb. 274b).

${}^{(1)}\delta_{10}^{(3)} = 2 \left[ \frac{5,159}{2} \cdot 31,687 (1,33812 + 0,64555) + 13,414 \frac{1}{12} \cdot 31,687 (5 \cdot 0,64555 - 3 \cdot 1,15512) \right] = 307,4443.$

Antimetrischer Anteil:  ${}^{(2)}\delta_{10}^{(3)} = 0;$

$\delta_{10}^{(3)} = {}^{(1)}\delta_{10}^{(3)}; \quad X_1 = \frac{307,4443}{37,6411} = 8,16779 \text{ t};$

$H_b = \frac{3,0 \cdot 18,0}{6} \frac{0,83848 \cdot 1,5}{5,92016} \cdot 0,36111^2 [0,25 \cdot 8,31154 (3 - 2 \cdot 0,36111^2) + 2 (3 - 2 \cdot 0,36111)] - 8,1677 \cdot 0,16892 = 1,17529 \text{ t};$

$M_d = -\frac{3,0 \cdot 18,0^2}{6} \cdot 0,36111^2 \left[ \frac{1}{5,92016} \left\{ 0,25 \cdot 0,83848 (3 - 2 \cdot 0,36111^2) + 2 (3 - 2 \cdot 0,36111) \right\} \pm \frac{3}{5,87660} \cdot 0,63889^2 \right] + 8,16779 \cdot 1,15512;$

$M_e = -13,27163 \text{ mt}; \quad M_d = -4,46766 \text{ mt}; \quad M_a = +0,83185 \text{ mt}; \quad M_b = +9,63582 \text{ mt}; \quad M_e = -5,21143 \text{ mt}; \quad M_i = +10,15379 \text{ mt. (Abb. 275.)}$

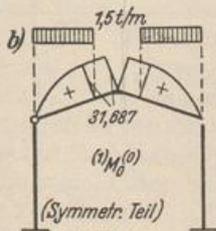
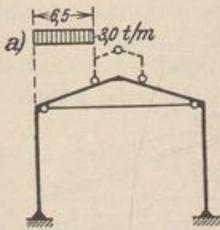


Abb. 274.

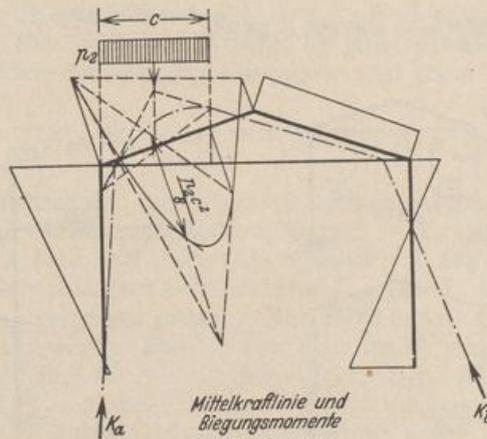


Abb. 275.

c) Gleichförmige Belastung durch Wind am Pfosten:  $w = 0,75 \text{ t/m}$  (Abb. 276a).

$$\delta_{10}^{(0)} = -\frac{12,0}{12,0} 54,00 (3 \cdot 0,87192 - 1,15512) = -78,8746;$$

$$X_1 = -\frac{78,8746}{37,6411} = -2,09544 \text{ t};$$

$$H_b = -\frac{0,75 \cdot 12,0}{2} \left[ \pm 1 + 1 - \frac{0,6461 \cdot 0,83848}{6 \cdot 5,92016} (3 \cdot 8,31154 - 4) \right] + 2,09544 \cdot 0,16892;$$

$$M_a = -\frac{0,75 \cdot 12,0^2}{12,0} 0,64610 \left( \frac{3 \cdot 0,83848 - 4}{5,92016} \mp \frac{6}{5,8766} \right) - 2,09544 \cdot 1,15512;$$

$$\begin{aligned} H_a &= -7,90548 \text{ t}; & H_b &= 1,09452 \text{ t}; & M_c &= 4,97468 \text{ mt}; \\ M_a &= -6,89935 \text{ mt}; & M_b &= -35,89108 \text{ mt}; & M_d &= 6,23489 \text{ mt}. \end{aligned} \quad (\text{Abb. 277.})$$

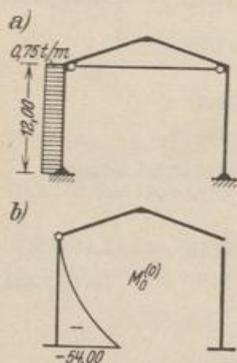


Abb. 276.

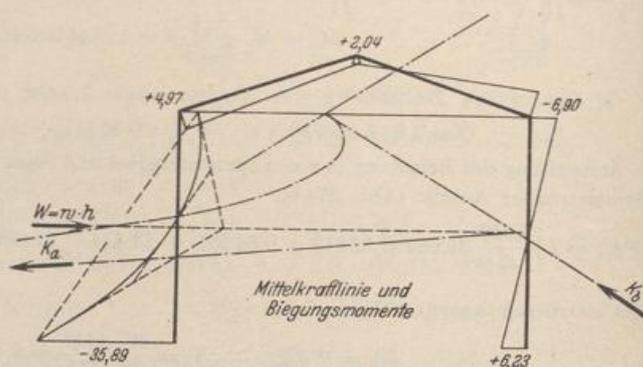


Abb. 277.

d) Belastung bei ungünstiger Stellung der Katze des Laufkrans (Abb. 278a).

$$M_i = 13,50 \text{ mt}; \quad M_r = 2,25 \text{ mt}; \quad \eta = 0,7500; \quad \eta' = 0,2500;$$

$$\delta_{10}^{(0)} = -9,00 \cdot \frac{1}{2} (13,50 + 2,25) (0,87192 - 0,64836) = -15,84482;$$

$$X_1 = -\frac{15,84482}{37,64106} = -0,42095 \text{ t};$$

$$H_b = \frac{13,50 + 2,25}{12,00} \cdot \frac{0,6461 \cdot 0,83848}{5,92016} 0,75 [8,31154 (2 - 0,75) - 2] + 0,42095 \cdot 0,16892 = 0,82679 \text{ t};$$

$$M_a^{(0)} = -\kappa \eta \left[ (M_i + M_r) \frac{q(2-\eta)-2}{\mu} \mp (M_i - M_r) \frac{3}{\nu} \right];$$

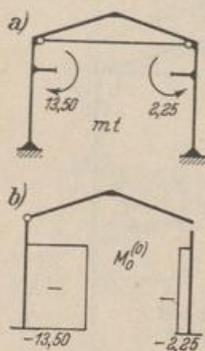


Abb. 278.

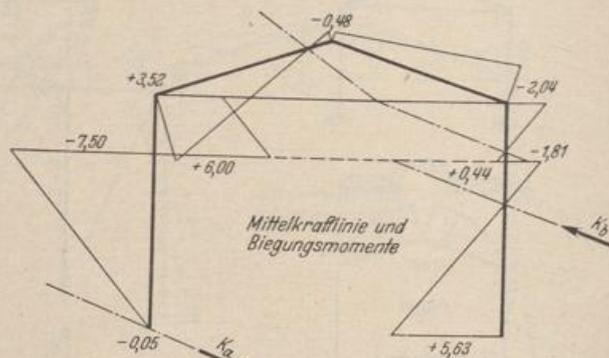


Abb. 279.

$$M_c = -0,64610 \cdot 0,75 \left[ (13,50 + 2,25) \frac{0,83848(2 - 0,75) - 2}{5,92016} \mp (13,50 - 2,25) \frac{3}{5,87660} \right] - 0,42095 \cdot 1,15512;$$

$$M_e = + 3,52393 \text{ mt}; \quad M_d = - 2,04209 \text{ mt};$$

$$M_a = - 0,05459 \text{ mt}; \quad M_b = + 5,62939 \text{ mt}. \quad (\text{Abb. 279.})$$

5. Nachprüfung der Ergebnisse. Die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung eines Querschnitts  $k$  mit  $N_k, M_k$  oder  $Q_k$  als äußere Kraft ist für den berechneten Spannungszustand gleich Null:

Beispiel: Belastung (4b) (Abb. 274a).

α) Gegenseitige Verdrehung des Querschnitts  $e$  (Abb. 280a):

$$\tau = \int M \bar{M}_M \frac{J_c}{J} ds = \frac{1}{2} 12,0 (-13,2716 + 0,8319)$$

$$+ 13,414 \left[ \frac{1}{2} (-13,2716 + 10,1538) + \frac{2}{3} 15,8438 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} 5,159 (10,1538 - 5,2117) + \frac{1}{2} 18,573 (-5,2117 - 4,4677)$$

$$+ \frac{1}{2} 12,0 (-4,4677 + 9,6358) = 133,522 - 133,517 \approx 0,0.$$

β) Gegenseitige vertikale Verschiebung des Querschnitts  $e$  (Abb. 280b):

$$\tau = \int M \bar{M}_V \frac{J_c}{J} ds = 12,0 \cdot 9,0 \cdot \frac{1}{2} (-13,2716 + 0,8319)$$

$$+ 13,414 \left\{ \frac{1}{6} [9,0 (-2 \cdot 13,2716 + 10,1538) \right.$$

$$+ 2,5 (-13,2716 + 2 \cdot 10,1538)] + \frac{1}{3} 15,8438 (9,0 + 2,5) \left. \right\}$$

$$+ 5,159 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2,5 (2 \cdot 10,1538 - 5,2117) + 18,573 \cdot \frac{1}{6} \cdot 9,0 (2 \cdot 4,4677 + 5,2117)$$

$$- 12,0 \cdot \frac{1}{2} 9,0 (9,6358 - 4,4677) = 1241,274 - 1241,267 \approx 0,0.$$

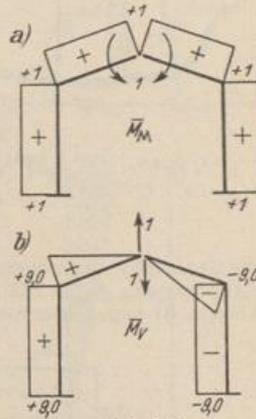


Abb. 280.

**Ansätze mit statisch unbestimmten Schnittkräften und unbekanntem Verschiebungen.** Die Auflösung der  $n$  linearen Gleichungen in Stufen liegt insbesondere bei Stabwerken nahe, deren Schnittkräfte abgesehen von der Belastung  $\mathfrak{P}$  als Funktion von  $r = (n - f)$  statisch unbestimmten Schnittkräften und den  $EJ_c$ -fachen Beträgen  $f$  ausgezeichneter Komponenten  $\psi_c$  ( $c = 1 \dots f$ ) des Verschiebungszustandes berechnet werden. Dies sind nach Abschn. 38 Knotenpunktverschiebungen oder Stabdrehwinkel. Nach dem Superpositionsgesetz ist dann

$$M = M_0^{(0)} - \sum_{h=1}^r M_h^{(0)} X_h + \sum_{H=1}^f \psi_H (M_H^{(0)} - \sum_{h=1}^r X_{hH} M_h) = M_0^{(n-f)} + \sum M_H^{(n-f)} \psi_H. \quad (494)$$

$M_0^{(0)}, M_h^{(0)}$  sind die Schnittkräfte eines statisch und durch  $\psi_H = 0$  auch geometrisch bestimmten Hauptsystems für die vorgeschriebene Belastung  $\mathfrak{P}$  und  $-X_h = 1$ . Die Schnittkraft  $M_H^{(0)}$  infolge  $\psi_H = 1$  ist Null und daher die Schnittkraft  $M_H^{(n-f)}$  infolge von  $\psi_H = 1$  durch die statisch unbestimmten Schnittkräfte  $X_{hH}$  ( $h = 1 \dots r$ ) eines  $r$ -fach statisch unbestimmten Hauptsystems bestimmt. Zur Berechnung der  $n$  Unbekannten stehen die  $(n - f) = r$  geometrischen Bedingungen über den Verschiebungszustand des Hauptsystems ( $\delta_i = 0$ ) und die  $f$  statischen Bedingungen über das Gleichgewicht der Schnittkräfte ( $\delta A_H = 0$ ) nach Abschn. 38 zur Verfügung. Nach der Zerlegung des Ansatzes werden die statisch unbestimmten Schnittkräfte  $X_h$  in der Regel in der ersten, die ausgezeichneten Komponenten  $\psi_c$  in der zweiten

Stufe berechnet. Darnach ist

$$X_h = X_{h0} + \sum_{H=1}^I X_{hH} \psi_H. \tag{495}$$

Zur statischen Untersuchung des durchgehenden Brückenträgers Abb. 281a wird neben den statisch unbestimmten Schnittkräften der  $EJ_c$ -fache Betrag des Drehwinkels  $\psi_A$  der linken Endstütze als Unbekannte verwendet und in einer zweiten Stufe der Lösung bestimmt. Die Schnittkräfte der ersten Stufe beziehen sich dann mit  $\psi_A = 0$  auf ein neunfach statisch unbestimmtes System (Abb. 281 b). In diesem werden die Stützenkopfmomente  $X_{k0}$  ( $k = 1 \dots 6$ )

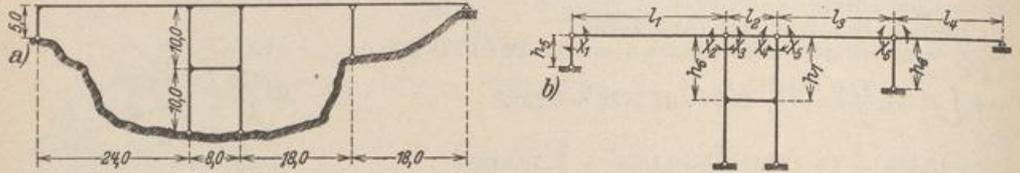


Abb. 281.  
 $l_1 = l'_1 = 24,0,$      $l_3 = l'_3 = 18,0,$      $h'_6 = 5,0,$      $h'_5 = 15,$      $h_7 = 10,0,$      $h'_7 = 30,$   
 $l_2 = 8,0,$      $l'_2 = 12,$      $l_4 = l'_4 = 18,0,$      $h'_6 = 10,0,$      $h'_6 = 30,$      $EJ_c = 1050000 \text{ tm}^2,$   
 Längen in m.

als überzählig angesehen und aus der Formänderung eines dreifach statisch unbestimmten Hauptsystems (Abb. 282) berechnet, dessen Schnittkräfte für  $\beta, -X_2 = 1, -X_3 = 1$  nach Abschn. 61 angegeben werden. Die geometrischen Bedingungen ergeben dann folgende Matrix:

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
+ 13,000	+ 4,000				
+ 4,000	+ 22,114	- 14,114	+ 5,519	- 5,519	
	- 14,114	+ 18,114	- 3,519	+ 5,519	
	+ 5,519	- 3,519	+ 18,114	- 14,114	
	- 5,519	+ 5,519	- 14,114	+ 20,114	+ 3,000
				+ 3,000	+ 12,000

Die konjugierte Matrix der Vorzahlen  $\beta_{ik}$  wird nach Abschn. 29 berechnet. Das Ergebnis lautet folgendermaßen:

	$\delta_{10}$	$\delta_{20}$	$\delta_{30}$	$\delta_{40}$	$\delta_{50}$	$\delta_{60}$
$X_{10}$	+ 0,087048	- 0,032907	- 0,025190	+ 0,007913	+ 0,003568	- 0,000892
$X_{20}$	- 0,032907	+ 0,106948	+ 0,081868	- 0,025715	- 0,011595	+ 0,002899
$X_{30}$	- 0,025190	+ 0,081868	+ 0,123245	- 0,023583	- 0,028982	+ 0,007246
$X_{40}$	+ 0,007913	- 0,025715	- 0,023583	+ 0,134203	+ 0,097210	- 0,024303
$X_{50}$	+ 0,003568	- 0,011595	- 0,028982	+ 0,097210	+ 0,127452	- 0,031863
$X_{60}$	- 0,000892	+ 0,002899	+ 0,007246	- 0,024303	- 0,031863	+ 0,091299

Im übrigen soll die Untersuchung auf die Entwicklung der Einflußlinie  $X_2$  und auf den Nachweis der Temperaturwirkung beschränkt bleiben. Nach (495) und (328) ist

$$X_2 = X_{20} + X_{2A} \psi_A, \quad X_{20} = \sum_{h=1}^6 \beta_{2h} \delta_{hm}.$$

Der Laststabzug besteht aus einer Reihe einfacher Träger, deren Biegelinien  $\delta_{mh}$  für  $-X_h = 1$ , nach S. 112 durch

$$\delta_{mh} = \frac{l'}{6} \omega_D \quad \text{oder} \quad \delta_{mh} = \frac{l'}{6} \omega'_D = \frac{l'}{6} (3\omega_R - \omega_D)$$

beschrieben werden. Die Gleichung der Einflußlinie  $X_{20}$  ist daher mit den Vorzahlen  $\beta_{2h}$  in jedem Felde durch 2 Beiträge bestimmt.

$$\begin{aligned} \text{Feld 1 } X_{20} &= 0,106948 \frac{l_1 l'_1}{6} \left[ 3\omega_R - \left( 1 + \frac{32907}{106948} \right) \omega'_D \right], \\ \text{,, 2 } X_{20} &= 0,086868 \frac{l_2 l'_2}{6} \left[ 3\omega_R - \left( 1 + \frac{25715}{81868} \right) \omega_D \right], \\ \text{,, 3 } X_{20} &= -0,011595 \frac{l_3 l'_3}{6} \left[ 3\omega_R - \left( 1 + \frac{2899}{11595} \right) \omega_D \right], \\ \text{,, 4 } X_{20} &= 0,002899 \frac{l_4 l'_4}{6} \omega'_D. \end{aligned}$$

Diese Funktionen werden mit Tabelle 22 berechnet und in Abb. 283 b aufgetragen.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte  $X_{hA}$  aus  $\psi_A = 1$  sind den Belastungsgliedern  $\delta_{hA} = -\sum C_{eA} \cdot (EJ_e \Delta_e)$  mit  $EJ_e \Delta_e = \psi_A \cdot 5,0 = 5,0$  m zugeordnet. Diese sind

$$\begin{aligned} \delta_{1A} &= -\frac{1}{5,0} \cdot 5,0 = -1,00; \\ \delta_{2A} &= (+0,0927 - 0,0353) 5,0 = +0,287, \\ \delta_{3A} &= -0,287, \quad \delta_{4A} = +0,287, \\ \delta_{5A} &= -0,287, \quad \delta_{6A} = 0 \end{aligned}$$

und daher  $X_{hA} = \sum \beta_{hk} \delta_{kA}$ ;

h	1	2	3	4	5	6
$X_{hA}$	-0,088016	+0,036052	+0,014864	+0,002091	-0,007256	+0,001814 mt

Das Ergebnis ist in Abb. 283 a eingetragen und durch die Biegemomente der Stäbe des Zwischenpfelers ergänzt worden. Sie ergeben sich durch Superposition nach Abb. 282.

Wird die Summe der Endmomente eines Stabes  $r$ , deren Drehsinn hier in Übereinstimmung mit S. 307 im Uhrzeigersinn als positiv gilt, mit  $K_r$  bezeichnet, so ist nach S. 317 die Bedingung für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einer aus dem Stabwerk abgeleiteten zwangläufigen Kette mit den virtuellen Geschwindigkeiten  $\psi_A = 1$ ,  $\dot{\nu}_{rA} = \dot{\psi}_A \vartheta_{rA}$

$$\delta A = 0 = \sum K_r \dot{\nu}_{rA} = \sum (K_{r0} + \psi_A K_{rA}) \vartheta_{rA}; \quad \psi_A = -\frac{\sum K_{r0} \vartheta_{rA}}{\sum K_{rA} \vartheta_{rA}}. \quad (496)$$

Die Pfosten der Kette sind von links nach rechts  $h_5, h_6, h_7, h_8$ , ihre Drehwinkel für  $\psi_A = \vartheta_5 = 1$  daher  $\vartheta_{5A} = 1$ ,  $\vartheta_{6A} = h_5/h_6 = 0,5$ ,  $\vartheta_{7A} = h_6/h_7 = 0,5$ . Nach dem Prinzip der virtuellen Ver-rückungen ist für die wandernde Einzellast  $P_m = 1_m$

$$\sum K_{r0} \vartheta_{rA} = 1_m \eta_{mA}.$$

Dabei ist  $K_{r0}$  die Summe der Endmomente des Stabes  $r$  infolge der Einzellast  $P_m = 1$  in  $m$  und  $\eta_{mA}$  die Verschiebung des Punktes  $m$  des Laststabzuges infolge von  $\psi_A = 1$ . Sie wird aus den statisch unbestimmten Schnittkräften  $X_{hA}$  entwickelt. Damit ist die Einflußlinie  $\psi_{Am}$  gefunden.

$$\psi_{Am} = -\frac{1_m \eta_{mA}}{\sum K_{rA} \vartheta_{rA}},$$

$$\begin{aligned} \sum K_{rA} \vartheta_{rA} &= -0,088016 \cdot 1 - (0,021188 - 0,004853) \cdot 0,5 \\ &\quad - (0,009347 - 0,008165) \cdot 0,5 = -0,096274. \end{aligned}$$

Die Biegelinie  $\eta_{mA}$  des Laststabzuges wird mit den Momenten Abb. 283 a nach Abschn. 19 berechnet. Sie ist, mit  $-1/0,096274$  multipliziert, die Einflußlinie  $\psi_{Am}$ , die nach (495) mit

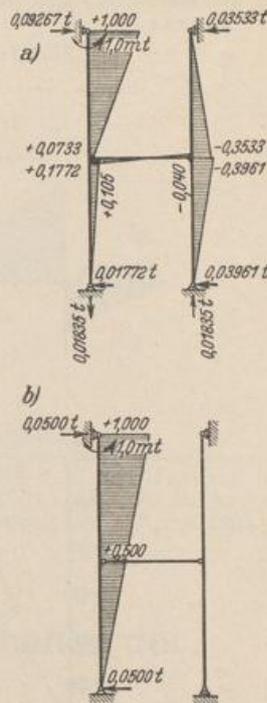


Abb. 282.

$X_{2A} = +0,036052$  erweitert zur Bildung der Einflußlinie von  $X_2$  verwendet wird. Die Gleichung für den Anteil  $X_{2A} \cdot \psi_{Am}$  ( $X_{21} \psi$  in Abb. 283 b) lautet folgendermaßen:

Feld 1:  $+0,37447 \frac{l_1 l_1'}{6} 0,088016 [3 \omega_R - 1,40960 \omega_D]$ ,

„ 2:  $-0,37447 \frac{l_2 l_2'}{6} 0,014864 [3 \omega_R - 0,85840 \omega_D]$ .

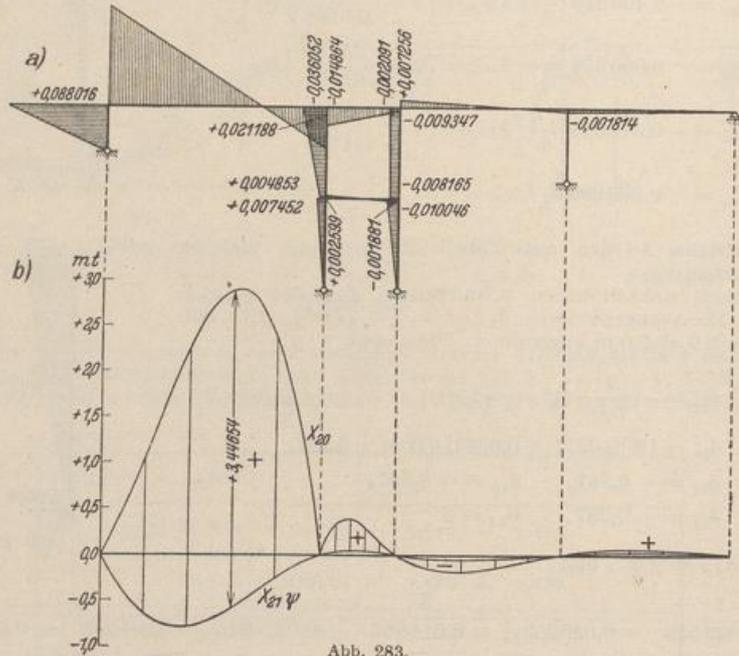


Abb. 283.

Die Schnittkräfte infolge einer Temperaturerhöhung des Riegels um  $t = 10^\circ$  werden nach dem Ansatz  $X_{kt} = X_{kt,0} + \psi_{At} X_{kA}$  berechnet. Der erste Anteil ist durch die Vorzahlen  $\beta_{k\lambda}$  und die Verschiebungen  $\delta_{h\lambda}^{(3)}$  des Hauptsystems bestimmt. Nach (311) ist

$$\delta_{h\lambda}^{(3)} = E J_c \sum N_{hk}^{(3)} \alpha t l_h.$$

$N_{hk}^{(3)}$  ist die Längskraft im Stabe  $h$  infolge von  $-X_k = 1$ ,  $\psi_A = 0$ .  $J_c = 0,5 \text{ m}^4$ ,  $E J_c \alpha t l_1 = 2520$ ,  $E J_c \alpha t l_2 = 840$ . Nach Abb. 282a wird

$h$	1	2	3	4	5	6
$N_{1k}^{(3)}$	0	+ 0,0573	- 0,0573	+ 0,0573	- 0,0573	0 t
$N_{2k}^{(3)}$	0	- 0,0353	+ 0,0353	+ 0,0927	- 0,0927	0 t

so daß

$$\delta_{2t}^{(3)} = -\delta_{3t}^{(3)} = 114,820, \quad \delta_{4t}^{(3)} = -\delta_{5t}^{(3)} = 222,340, \quad \delta_{1t}^{(3)} = \delta_{6t}^{(3)} = 0.$$

$$X_{kt,0} = \sum \beta_{k\lambda} \delta_{h\lambda}^{(3)}$$

$h$	1	2	3	4	5	6
$X_{kt,0}$	+ 0,0800	- 0,2597	- 3,5505	+ 7,9802	- 4,7276	+ 1,1818 mt

Die Temperaturänderung des Riegels erzeugt Schnittkräfte im statisch unbestimmten Hauptsystem Abb. 282a, die mit den Anteilen aus  $X_{kt,0}$  überlagert werden. Auf diese Weise werden die in Abb. 284 eingetragenen Ergebnisse erhalten. Sie stellen die Momente aus Temperatur für  $\psi_A = 0$  dar.

Der unbekannt Stabdrehwinkel  $\psi_{A_i}$  wird nach (496)

$$\psi_{A_i} = - \frac{\sum K_{r_i} \cdot \vartheta_{r_A}}{\sum K_{r_A} \cdot \vartheta_{r_A}} = - \frac{0,0800 \cdot 1 + 2,3630 \cdot 0,5 - 10,9677 \cdot 0,5}{-0,096274} = -43,858,$$

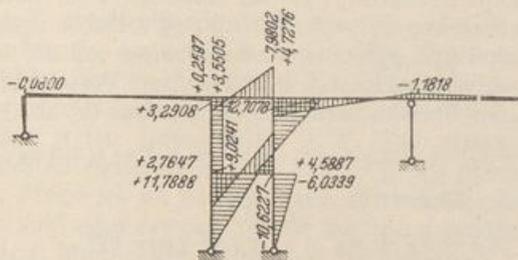


Abb. 284.

$$X_{k_i} = X_{k_i,0} - 43,858 X_{k_A},$$

$$X_{1_i} = +0,0800 - 43,858 \cdot 0,088016 = -3,78 \text{ mt.}$$

Kammer, Statisch unbestimmte Hauptssysteme. Arm. Bet. 1914 S. 161. — Hertwig, A.: Die Berechnung der Rahmengebilde. Eisenbau 1921 S. 122. — Nakonz, W.: Die Berechnung mehrstieliger Rahmen unter Anwendung statisch unbestimmter Hauptssysteme. Berlin 1924. — Spiegel, G.: Mehrteilige Rahmen. Berlin 1920.

## B. Die Berechnung durch Elimination der Schnittkräfte.

### 38. Die statischen Bedingungsgleichungen.

Die Theorie des statisch unbestimmten Stabwerks ist in Abschn. 23 mit einer Zerlegung in Teile ( $h$ ) und ( $J$ ) eingeleitet worden, um Gleichungen teils statischen, teils geometrischen Inhalts zur Beschreibung des Spannungs- und Verschiebungszustandes des Stabwerks zu bilden. Dieser allgemeine Ansatz ist bisher stets auf die geometrischen Bedingungen zurückgeführt worden, um die statisch unbestimmten Schnittkräfte anzugeben. Unter Umständen ist es aber zweckmäßig, diese zu eliminieren und zuerst die Komponenten des Verschiebungszustandes aus den Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen.

**Die Knotenpunktfigur.** Durch die Aufteilung eines Stabwerks allgemeiner Form entstehen Knotenscheiben ( $J$ ), Gelenke ( $G$ ) und Abschnitte ( $h$ ) des Stabwerks. Diese sind gerade oder gekrümmt und können auch aus geschlossenen Gruppen von einzelnen Stäben zusammengesetzt sein. Über die Zerlegung des Stabwerks bestehen keine anderen Vorschriften, als daß jeder Abschnitt ( $h$ ) nur zwei freie Querschnitte erhält, in denen er vorher steif oder frei drehbar angeschlossen war.

Die Konfiguration der Knotenscheiben und Gelenke in der Bildebene heißt Knotenpunktfigur (Abb. 289b). Sie ist durch die Gelenkpunkte  $G$  und durch die Schnittpunkte  $J, K$  von geraden Linien bestimmt, welche die Abschnitte ( $h$ ) des Stabwerks vertreten. Die Schnittpunkte  $J, K$  ersetzen nach der Theorie des Stabwerks, abgesehen von seltenen Ausnahmen, die Knotenscheiben und erhalten aus diesem Grunde die Eigenschaft von materiellen Punkten, mit denen die Anschlußquerschnitte ( $h$ ) des Stabwerks zusammenfallen.

Die Bewegung eines Gelenkes ( $G$ ) ist durch zwei Komponenten  $u_G, v_G$ , die Bewegung eines Stabknotens ( $J$ ) durch drei Komponenten  $u_J, v_J, \varphi_J$  beschrieben.  $\varphi_J$  wird als Knotendrehwinkel bezeichnet und im Uhrzeigersinn positiv gerechnet.