



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die geometrischen Bedingungen (488) für den Verschiebungszustand des statisch unbestimmten Hauptsystems stimmen nach dieser Ableitung mit denjenigen des statisch bestimmten Hauptsystems überein.

Diese algebraischen Beziehungen werden bei der Berechnung eines Ansatzes mit n Unbekannten in zwei Stufen verwendet. Die Zerlegung richtet sich nach der Struktur der Matrix. Werden die überzähligen Größen $X_1 = Y_1, \dots, X_{n-h} = Y_R$ in der ersten Stufe zusammengefaßt, so gehören die übrigen Schnittkräfte $X_i (1 \dots h)$ der Gleichungen 1 bis r zunächst zu den Belastungsgliedern. Damit ist

$$X_c = Y_c = Y_{c\otimes}^{(r)} - \sum_{k=1}^h Y_{c\otimes k}^{(r)} X_k \quad (492)$$

und die Normalgleichung i^k der zweiten Stufe

$$\left. \begin{aligned} \sum_{c=1}^h (Y_{c\otimes}^{(r)} - \sum_{k=1}^h Y_{c\otimes k}^{(r)} X_k) \delta_{ic}^{(0)} + \sum_{k=1}^h X_k \delta_{ik}^{(0)} &= \delta_{i\otimes}^{(0)}, \\ \sum_{k=1}^h (\delta_{ik}^{(0)} - \sum_{c=1}^r \delta_{ic}^{(0)} Y_{c\otimes}^{(r)}) X_k &= \delta_{i\otimes}^{(0)} - \sum_{c=1}^r \delta_{ic}^{(0)} Y_{c\otimes}^{(r)}, \\ \sum_{k=1}^h \delta_{ik}^{(n-h)} X_k &= \delta_{i\otimes}^{(n-h)}. \end{aligned} \right\} \quad (493)$$

Die Auflösung des Ansatzes in zwei Stufen ist daher gleichbedeutend mit der Verwendung eines statisch unbestimmten Hauptsystems. Sie bringt stets Vorteile für die Rechnung, wenn die statisch unbestimmten Schnittkräfte der ersten Stufe durch Tabellen bekannt sind oder aus drei- und fünfgliedrigen Gleichungen berechnet werden können. Entscheidend sind Abkürzung und geringe Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Am meisten werden Rahmen, eingespannte Träger und durchgehende Träger mit starren, oder elastisch drehbaren Stützen als statisch unbestimmte Hauptsysteme verwendet.

Berechnung eines Hallenrahmens.

1. Geometrische Grundlagen: ($n = E_d/E_s = 10$) Abb. 269.

$$\begin{aligned} J_1 &= 0,0213 \text{ m}^4; & J_2 &= 0,0417 \text{ m}^4 = J_c; & F_z &= 0,008 \text{ m}^2, \\ J_c/J_1 &= J_2/J_1 = 1,95775; & J_c/n F_c &= J_2/n F_z = 0,52125, \\ l &= 18,00 \text{ m}, & l_1 &= 5,00 \text{ m}, & f &= 3,00 \text{ m}, \\ h &= 12,00 \text{ m} = h', & h_1 &= 3,00 \text{ m}, & h_2 &= 9,00 \text{ m} = h_2', \\ s &= 9,487 \text{ m}, & s_1 &= 2,635 \text{ m}, & s_2 &= 6,852 \text{ m}, \\ s' &= 18,573 \text{ m}, & s_1' &= 5,159 \text{ m}, & s_2' &= 13,414 \text{ m}. \end{aligned}$$

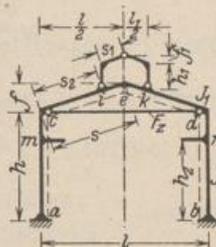


Abb. 269.

2. Hauptsystem. Das Hauptsystem Abb. 270a ist der dreifach statisch unbestimmte Rahmen. Die Längskraft des Zugbandes als überzählige Größe beträgt nach (488) und (311):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(3)}}{\delta_{11}^{(3)}} = \frac{\int M_0^{(0)} M_1^{(3)} \frac{J_c}{J} ds}{\int M_1^{(0)} M_1^{(3)} \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{n F_z} 1,0^2 l}$$

Hilfswerte zur Berechnung von $M_0^{(3)}$ aus der Belastung und von $M_1^{(3)}$ aus $-X_1 = 1$ (Abb. 271) mit den Tabellen des Abschn. 61:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1,50000, & \kappa &= 0,64610, & \mu &= 5,92016, & \psi_1 &= 8,31154, \\ \varphi &= 0,25000, & \varrho &= 0,83848, & \nu &= 5,87660, & \psi_2 &= 6,13058, \\ H_{d1}^{(3)} &= -2 \frac{-1}{2} \left[\frac{2 \cdot 0,25 \cdot 0,83848}{3 \cdot 5,87660} (2 \cdot 0,25 \cdot 8,31154 + 3) \right] = + 0,16892 \text{ t}, \\ M_{d1}^{(3)} &= 2 \frac{-1 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,25}{3 \cdot 5,92016} (2 \cdot 0,25 \cdot 0,83848 + 3) = -1,15512 \text{ mt}, \\ M_{c1}^{(3)} &= -1,15512 + 0,16892 \cdot 12,0 = + 0,87192 \text{ mt}, \\ M_{c1}^{(3)} &= -1,15512 - (0,16892 - 1,0) 3,0 = + 1,33812 \text{ mt}. \end{aligned}$$

Zugeordnetes statisch bestimmtes Hauptsystem: Balken auf 2 Stützen. $M_1^{(0)}$ aus $-X_1 = 1$ (Abb. 270 b).

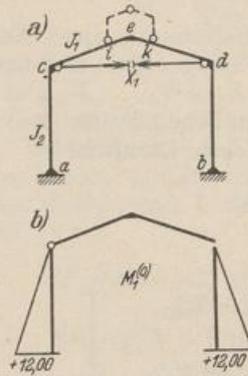


Abb. 270.

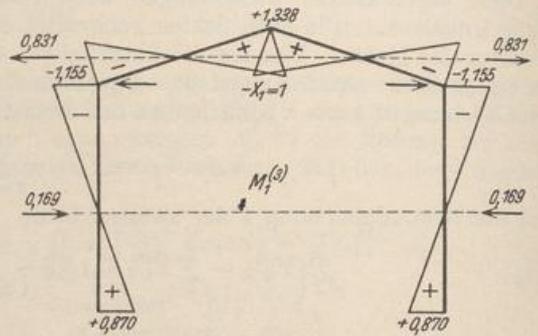


Abb. 271.

$$3. \delta_{11}^{(3)} = 2 \cdot 12,00 \cdot \frac{1}{8} 12,00 (2 \cdot 0,87192 - 1,15512) + 0,52125 \cdot 1,0^2 \cdot 18,0 = 37,641.$$

4. Schnittkräfte im vorgelegten Tragwerk

$$C = C_0^{(3)} - X_1 C_1^{(3)}; \quad M = M_0^{(3)} - X_1 M_1^{(3)}.$$

a) Belastung aus Eigengewicht der Laterne: $p_1 = 2,0 \text{ t/m}$ (Abb. 272 a).

$$P = 2,0 \cdot 5,0/2 = 5,0 \text{ t}; \quad \xi = 0,36111; \quad \xi' = 0,63889;$$

$$W = \frac{2,0 \cdot 5,0^2}{8 \cdot 3,833} = 1,631 \text{ t}; \quad \zeta = 0,7222; \quad \zeta' = 0,27787;$$

$$M_{11}^{(3)} = \left(1,33812 - \frac{1,33812 + 1,15512}{18,00} \cdot 5,00 \right) = 0,64555;$$

$$\delta_{10}^{(3)} = 2 \left[\frac{18,573}{6} \cdot 45,00 (2 \cdot 1,33812 - 1,15512) - \frac{5,159}{6} 11,1417 (2 \cdot 1,33812 + 0,64555) \right] = 360,131;$$

$$X_1 = \frac{360,131}{37,6411} = 9,5675 \text{ t}.$$

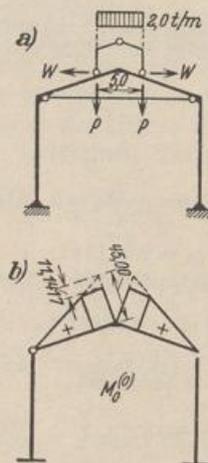


Abb. 272.

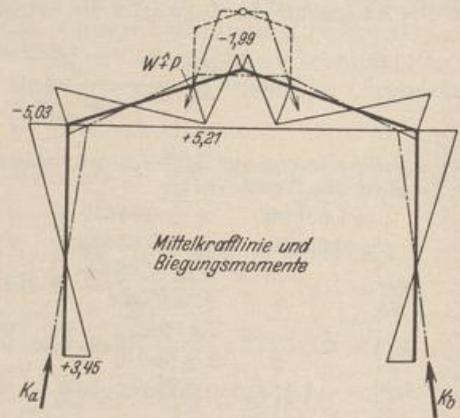


Abb. 273.

Nach Abschn. 61 wird:

aus P: $H''_{a0}^{(3)} = 2 \cdot 5,0 \cdot \frac{1,5 \cdot 0,83848}{3 \cdot 0,66667} \cdot 0,36111 [0,25 \cdot 8,31154 (3 - 4 \cdot 0,36111^2) + 6 \cdot 0,63889];$

aus W: $H''_{a0}^{(3)} = -2 \cdot \frac{-1,631}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 0,83848}{3 \cdot 5,92016} \cdot 0,27778^2 [0,25 \cdot 8,31154 (3 - 0,27778) + 3];$

$H_a = H''_{a0}^{(3)} + H''_{a0}^{(3)} - X_1 H''_{a1}^{(3)} = 2,29717 + 0,02571 - 9,5675 \cdot 0,16892 = 0,70674 \text{ t};$

aus P: $M''_{d0}^{(3)} = -2 \cdot 5,0 \cdot 18,0 \cdot 0,36111 \cdot \frac{1}{3 \cdot 5,92016} [0,25 \cdot 0,83848 (3 - 4 \cdot 0,36111^2) + 6 \cdot 0,63889];$

aus W: $M''_{d0}^{(3)} = 2 \cdot \frac{-1,631 \cdot 12,0}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 0,27778^2}{3 \cdot 5,92016} [0,25 \cdot 0,83848 (3 - 0,27778) + 3];$

$M_d = M''_{d0}^{(3)} + M''_{d0}^{(3)} - X_1 M''_{d1}^{(3)} = -15,93064 - 0,15181 + 9,5675 \cdot 1,15512 = -5,03084 \text{ mt};$

$M_a = M_d + H_a \cdot h = +3,45004 \text{ mt (Abb. 273).}$

b) Einseitige Belastung des Daches: $p_2 = 3,0 \text{ t/m (Abb. 274a).}$

$Q = 3,0 \cdot 6,5 = 19,5 \text{ t}; \quad \xi = 0,36111; \quad \xi' = 0,63889.$

Aufspaltung der Belastung in einen symmetrischen und einen antimetrischen Lastanteil.
Symmetrischer Anteil: (Abb. 274b).

${}^{(1)}\delta_{10}^{(3)} = 2 \left[\frac{5,159}{2} \cdot 31,687 (1,33812 + 0,64555) + 13,414 \cdot \frac{1}{12} \cdot 31,687 (5 \cdot 0,64555 - 3 \cdot 1,15512) \right] = 307,4443.$

Antimetrischer Anteil: ${}^{(2)}\delta_{10}^{(3)} = 0;$

$\delta_{10}^{(3)} = {}^{(1)}\delta_{10}^{(3)}; \quad X_1 = \frac{307,4443}{37,6411} = 8,16779 \text{ t};$

$H_b = \frac{3,0 \cdot 18,0}{6} \cdot \frac{0,83848 \cdot 1,5}{5,92016} \cdot 0,36111^2 [0,25 \cdot 8,31154 (3 - 2 \cdot 0,36111^2) + 2 (3 - 2 \cdot 0,36111)] - 8,1677 \cdot 0,16892 = 1,17529 \text{ t};$

$M_d = -\frac{3,0 \cdot 18,0^2}{6} \cdot 0,36111^2 \left[\frac{1}{5,92016} \left\{ 0,25 \cdot 0,83848 (3 - 2 \cdot 0,36111^2) + 2 (3 - 2 \cdot 0,36111) \right\} \pm \frac{3}{5,87660} \cdot 0,63889^2 \right] + 8,16779 \cdot 1,15512;$

$M_e = -13,27163 \text{ mt}; \quad M_d = -4,46766 \text{ mt}; \quad M_a = +0,83185 \text{ mt}; \quad M_b = +9,63582 \text{ mt}; \quad M_e = -5,21143 \text{ mt}; \quad M_i = +10,15379 \text{ mt. (Abb. 275.)}$

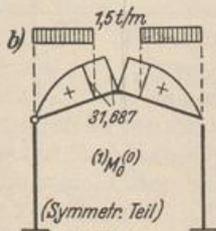
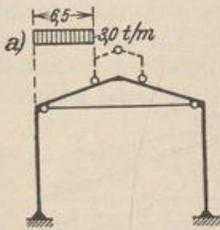


Abb. 274.

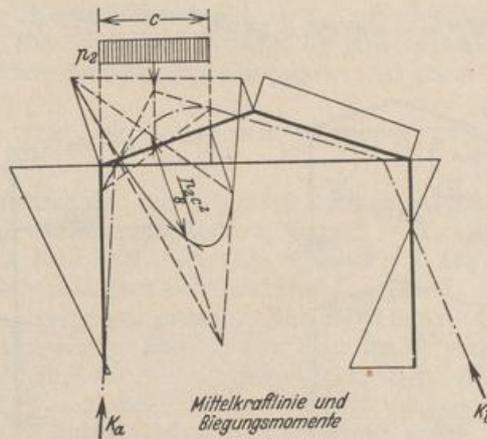


Abb. 275.

c) Gleichförmige Belastung durch Wind am Pfosten: $w = 0,75 \text{ t/m}$ (Abb. 276a).

$$\delta_{10}^{(0)} = -\frac{12,0}{12,0} 54,00 (3 \cdot 0,87192 - 1,15512) = -78,8746;$$

$$X_1 = -\frac{78,8746}{37,6411} = -2,09544 \text{ t};$$

$$H_b = -\frac{0,75 \cdot 12,0}{2} \left[\pm 1 + 1 - \frac{0,6461 \cdot 0,83848}{6 \cdot 5,92016} (3 \cdot 8,31154 - 4) \right] + 2,09544 \cdot 0,16892;$$

$$M_a = -\frac{0,75 \cdot 12,0^2}{12,0} 0,64610 \left(\frac{3 \cdot 0,83848 - 4}{5,92016} \mp \frac{6}{5,8766} \right) - 2,09544 \cdot 1,15512;$$

$$\begin{aligned} H_a &= -7,90548 \text{ t}; & H_b &= 1,09452 \text{ t}; & M_c &= 4,97468 \text{ mt}; \\ M_a &= -6,89935 \text{ mt}; & M_b &= -35,89108 \text{ mt}; & M_b &= 6,23489 \text{ mt}. \end{aligned} \quad (\text{Abb. 277.})$$

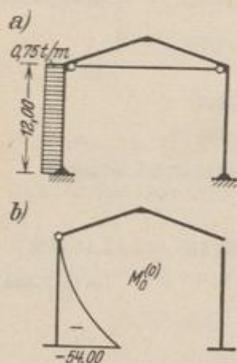


Abb. 276.

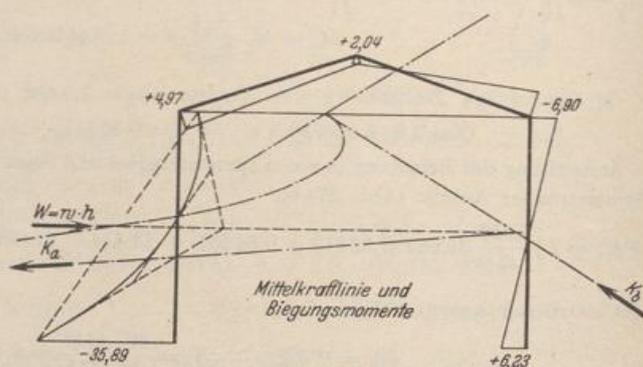


Abb. 277.

d) Belastung bei ungünstiger Stellung der Katze des Laufkrans (Abb. 278a).

$$M_i = 13,50 \text{ mt}; \quad M_r = 2,25 \text{ mt}; \quad \eta = 0,7500; \quad \eta' = 0,2500;$$

$$\delta_{10}^{(0)} = -9,00 \cdot \frac{1}{2} (13,50 + 2,25) (0,87192 - 0,64836) = -15,84482;$$

$$X_1 = -\frac{15,84482}{37,64106} = -0,42095 \text{ t};$$

$$H_b = \frac{13,50 + 2,25}{12,00} \cdot \frac{0,6461 \cdot 0,83848}{5,92016} 0,75 [8,31154 (2 - 0,75) - 2] + 0,42095 \cdot 0,16892 = 0,82679 \text{ t};$$

$$M_a^{(0)} = -\kappa \eta \left[(M_i + M_r) \frac{q(2-\eta)-2}{\mu} \mp (M_i - M_r) \frac{3}{\nu} \right];$$

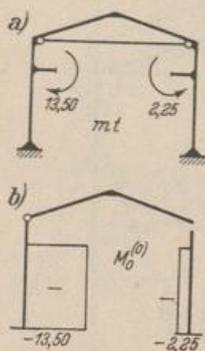


Abb. 278.

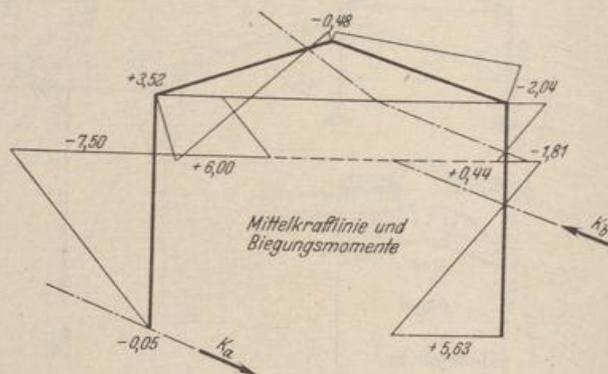


Abb. 279.

$$M_c = -0,64610 \cdot 0,75 \left[(13,50 + 2,25) \frac{0,83848 (2 - 0,75) - 2}{5,92016} \mp (13,50 - 2,25) \frac{3}{5,87660} \right] - 0,42095 \cdot 1,15512;$$

$$M_e = + 3,52393 \text{ mt}; \quad M_d = - 2,04209 \text{ mt};$$

$$M_a = - 0,05459 \text{ mt}; \quad M_b = + 5,62939 \text{ mt}. \quad (\text{Abb. 279.})$$

5. Nachprüfung der Ergebnisse. Die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung eines Querschnitts k mit N_k, M_k oder Q_k als äußere Kraft ist für den berechneten Spannungszustand gleich Null:

Beispiel: Belastung (4b) (Abb. 274a).

α) Gegenseitige Verdrehung des Querschnitts e (Abb. 280a):

$$\tau = \int M \bar{M}_M \frac{J_c}{J} ds = \frac{1}{2} 12,0 (-13,2716 + 0,8319)$$

$$+ 13,414 \left[\frac{1}{2} (-13,2716 + 10,1538) + \frac{2}{3} 15,8438 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} 5,159 (10,1538 - 5,2117) + \frac{1}{2} 18,573 (-5,2117 - 4,4677)$$

$$+ \frac{1}{2} 12,0 (-4,4677 + 9,6358) = 133,522 - 133,517 \approx 0,0.$$

β) Gegenseitige vertikale Verschiebung des Querschnitts e (Abb. 280b):

$$\tau = \int M \bar{M}_V \frac{J_c}{J} ds = 12,0 \cdot 9,0 \cdot \frac{1}{2} (-13,2716 + 0,8319)$$

$$+ 13,414 \left\{ \frac{1}{6} [9,0 (-2 \cdot 13,2716 + 10,1538) \right.$$

$$+ 2,5 (-13,2716 + 2 \cdot 10,1538)] + \frac{1}{3} 15,8438 (9,0 + 2,5) \left. \right\}$$

$$+ 5,159 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2,5 (2 \cdot 10,1538 - 5,2117) + 18,573 \cdot \frac{1}{6} \cdot 9,0 (2 \cdot 4,4677 + 5,2117)$$

$$- 12,0 \cdot \frac{1}{2} 9,0 (9,6358 - 4,4677) = 1241,274 - 1241,267 \approx 0,0.$$

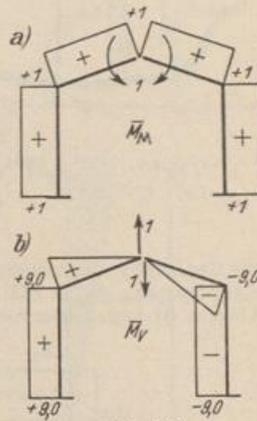


Abb. 280.

Ansätze mit statisch unbestimmten Schnittkräften und unbekanntem Verschiebungen. Die Auflösung der n linearen Gleichungen in Stufen liegt insbesondere bei Stabwerken nahe, deren Schnittkräfte abgesehen von der Belastung \mathfrak{P} als Funktion von $r = (n - f)$ statisch unbestimmten Schnittkräften und den EJ_c -fachen Beträgen f ausgezeichneter Komponenten ψ_c ($c = 1 \dots f$) des Verschiebungszustandes berechnet werden. Dies sind nach Abschn. 38 Knotenpunktverschiebungen oder Stabdrehwinkel. Nach dem Superpositionsgesetz ist dann

$$M = M_0^{(0)} - \sum_{h=1}^r M_h^{(0)} X_h + \sum_{H=1}^f \psi_H (M_H^{(0)} - \sum_{h=1}^r X_{hH} M_h) = M_0^{(n-f)} + \sum M_H^{(n-f)} \psi_H. \quad (494)$$

$M_0^{(0)}, M_h^{(0)}$ sind die Schnittkräfte eines statisch und durch $\psi_H = 0$ auch geometrisch bestimmten Hauptsystems für die vorgeschriebene Belastung \mathfrak{P} und $-X_h = 1$. Die Schnittkraft $M_H^{(0)}$ infolge $\psi_H = 1$ ist Null und daher die Schnittkraft $M_H^{(n-f)}$ infolge von $\psi_H = 1$ durch die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_{hH} ($h = 1 \dots r$) eines r -fach statisch unbestimmten Hauptsystems bestimmt. Zur Berechnung der n Unbekannten stehen die $(n - f) = r$ geometrischen Bedingungen über den Verschiebungszustand des Hauptsystems ($\delta_i = 0$) und die f statischen Bedingungen über das Gleichgewicht der Schnittkräfte ($\delta A_H = 0$) nach Abschn. 38 zur Verfügung. Nach der Zerlegung des Ansatzes werden die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_h in der Regel in der ersten, die ausgezeichneten Komponenten ψ_c in der zweiten