Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

B. Die Berechnung durch Elimination der Schnittkräfte

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Der unbekannte Stabdrehwinkel ψ_{At} wird nach (496)

$$\psi_{At} = -\frac{\sum K_{rt}\,\vartheta_{rA}}{\sum K_{rA}\cdot\vartheta_{rA}} = -\frac{0{,}0800\cdot 1 + 2{,}3630\cdot 0{,}5 - 10{,}9677\cdot 0{,}5}{-0{,}096274} = -43{,}858\,,$$

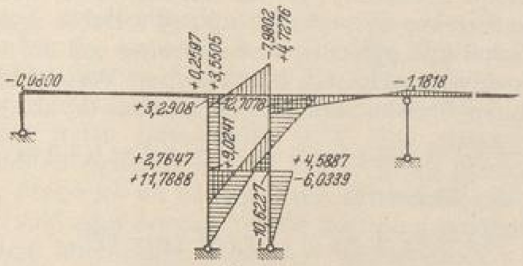


Abb. 284.

$$X_{kt} = X_{kt,0} - 43{,}858\,X_{kA}\,,$$

$$X_{1t} = +\,0{,}0800 - 43{,}858\cdot 0{,}088016 = -3{,}78\ \text{mt}\,.$$

Kammer, Statisch unbestimmte Hauptsysteme. Arm. Bet. 1914 S. 161. — Hertwig, A.: Die Berechnung der Rahmengebilde. Eisenbau 1921 S. 122. — Nakonz, W.: Die Berechnung mehrstieliger Rahmen unter Anwendung statisch unbestimmter Hauptsysteme. Berlin 1924. — Spiegel, G.: Mehrteilige Rahmen. Berlin 1920.

B. Die Berechnung durch Elimination der Schnittkräfte.

38. Die statischen Bedingungsgleichungen.

Die Theorie des statisch unbestimmten Stabwerks ist in Abschn. 23 mit einer Zerlegung in Teile (h) und (J) eingeleitet worden, um Gleichungen teils statischen, teils geometrischen Inhalts zur Beschreibung des Spannungs- und Verschiebungszustandes des Stabwerks zu bilden. Dieser allgemeine Ansatz ist bisher stets auf die geometrischen Bedingungen zurückgeführt worden, um die statisch unbestimmten Schnittkräfte anzugeben. Unter Umständen ist es aber zweckmäßig, diese zu eliminieren und zuerst die Komponenten des Verschiebungszustandes aus den Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen.

Die Knotenpunktfigur. Durch die Aufteilung eines Stabwerks allgemeiner Form entstehen Knotenscheiben (J), Gelenke (G) und Abschnitte (h) des Stabwerks. Diese sind gerade oder gekrümmt und können auch aus geschlossenen Gruppen von einzelnen Stäben zusammengesetzt sein. Über die Zerlegung des Stabwerks bestehen keine anderen Vorschriften, als daß jeder Abschnitt (h) nur zwei freie Querschnitte erhält, in denen er vorher steif oder frei drehbar angeschlossen war.

Die Konfiguration der Knotenscheiben und Gelenke in der Bildebene heißt Knotenpunktfigur (Abb. 289b). Sie ist durch die Gelenkpunkte G und durch die Schnittpunkte J, K von geraden Linien bestimmt, welche die Abschnitte (h) des Stabwerks vertreten. Die Schnittpunkte J, K ersetzen nach der Theorie des Stabwerks, abgesehen von seltenen Ausnahmen, die Knotenscheiben und erhalten aus diesem Grunde die Eigenschaft von materiellen Punkten, mit denen die Anschlußquerschnitte (h) des Stabwerks zusammenfallen.

Die Bewegung eines Gelenkes (G) ist durch zwei Komponenten u_G, v_G, die Bewegung eines Stabknotens (J) durch drei Komponenten u_J, v_J, φ_J beschrieben. φ_J wird als Knotendrehwinkel bezeichnet und im Uhrzeigersinn positiv gerechnet.

Bei einem Stabwerk mit r Stabknoten und r_1 Gelenken sind daher $(3r + 2r_1)$ Komponenten des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur unbekannt.

Die geometrischen Randwerte für den Verschiebungszustand eines Abschnitts (h). Die Endquerschnitte J, K des Abschnitts (h) bewegen sich in der Richtung x, y um die Strecken $u_J^{(h)}$, $v_J^{(h)}$ und $u_K^{(h)}$, $v_K^{(h)}$. Dabei drehen sich die Endtangenten um die Winkel $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$. Sie werden ebenso wie die Knotendrehwinkel im Uhrzeigersinn positiv gerechnet. Die relative Verschiebung $(u_K^{(h)} - u_J^{(h)})$, $(v_K^{(h)} - v_J^{(h)})$ hängt von der Formänderung des Abschnitts (h) ab. Nach Abb. 285 ist

$$(x_K - x_J) = l_h \cos\alpha_h\,, \qquad (y_K - y_J) = l_h \sin\alpha_h\,. \tag{497}$$

Durch die Belastung des Stabwerks wird aus

$$x_K \to x_K + u_K^{(h)}, \qquad y_K \to y_K + v_K^{(h)},$$
$$l_h \to l_h + \Delta l_h = l_h(1+\varepsilon_h), \qquad \alpha_h \to \alpha_h + \Delta\alpha_h = \alpha_h + \vartheta_h\,,$$

so daß durch Variation von (497) folgende Verträglichkeitsbedingungen entstehen:

$$\left.\begin{aligned} u_K^{(h)} - u_J^{(h)} &= \varepsilon_h(x_K - x_J) - \vartheta_h(y_K - y_J)\,,\\ v_K^{(h)} - v_J^{(h)} &= \varepsilon_h(y_K - y_J) + \vartheta_h(x_K - x_J)\,. \end{aligned}\right\} \tag{498}$$

Die bezogene Längenänderung ε_h der Stabzugsehne l_h wird als Verlängerung, der Stabdrehwinkel ϑ_h im Uhrzeigersinn positiv gerechnet. Da die Anzahl (s) der Abschnitte (h) stets größer oder gleich der Summe $(r + r_1)$ der Knoten ist, können die $2(r + r_1)$ Komponenten u_J, v_J des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur stets durch die $2s$ Randwerte ε_h, ϑ_h des Verschiebungszustandes der Stäbe ausgedrückt werden. Daraus ergibt sich dann auch die Möglichkeit, die Verdrehungen $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$ der Endtangenten der Stäbe (h) durch die Winkel $\tau_J^{(h)}$, $\tau_K^{(h)}$ auf die Gerade $\overline{J'K'}$ zu beziehen und unabhängig vom Stabdrehwinkel ϑ_h zu beschreiben. Sie werden ebenfalls im Uhrzeigersinn positiv gemessen. Die Randwerte sind nach Abb. 285 untereinander durch die folgenden geometrischen Beziehungen verknüpft:

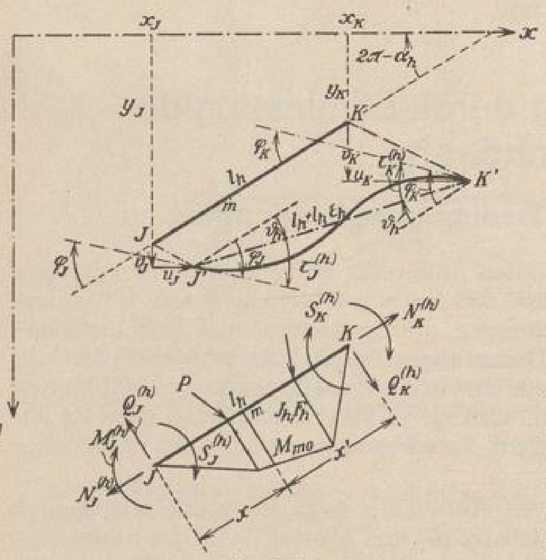


Abb. 285.

$$\varphi_J^{(h)} = \tau_J^{(h)} + \vartheta_h\,, \quad \varphi_K^{(h)} = \tau_K^{(h)} + \vartheta_h\,, \quad (u_K^{(h)} - u_J^{(h)})\cos\alpha_h + (v_K^{(h)} - v_J^{(h)})\sin\alpha_h = \varepsilon_h l_h\,. \tag{499}$$

Der Ansatz dient zur algebraischen Transformation der Verschiebungen $u_J^{(h)}$, $v_J^{(h)}$, $\varphi_J^{(h)}$ in die Komponenten ε_h, ϑ_h, $\tau_J^{(h)}$ des Verschiebungszustandes.

Die Randwerte des Spannungszustandes der Abschnitte (h) und der Knotenpunktfigur des Stabwerks. Durch die Zerlegung des Stabwerks in die Abschnitte (h) und in die Knotenpunktfigur werden die in jedem freien Querschnitt vorhandenen Schnittkräfte N, M, Q des Stabwerks paarweise zu äußeren Kräften am Abschnitt (h) und am Knotenpunkt (J). Sie werden als Anschlußkräfte bezeichnet. Bei dem Querschnitt durch ein Gelenk ist das Anschlußmoment Null. Der positive Sinn dieser äußeren Kräfte wird in einer für die Ableitung geeigneten Form vereinbart. Die Längskräfte $N_J^{(h)}$, $N_K^{(h)}$ der Abschnitte (h) sind als Zugkräfte positiv. Die Biegungsmomente $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$ werden an den freien Querschnitten des Stabes als positiv bezeichnet, wenn ihr Drehsinn mit der Richtung des Uhrzeigers übereinstimmt. Die positiven Richtungen der Querkräfte $Q_J^{(h)}, Q_K^{(h)}$ sind in Abb. 285 festgesetzt.

Jedem Gelenk G der Knotenpunktfigur ist eine resultierende Kraft $\mathfrak{P}_G$, jedem Stabknoten J außer $\mathfrak{P}_J$ noch ein resultierendes Kräftepaar M_J zugeordnet, die mit den Anschlußkräften an den freien Querschnitten im Gleichgewicht stehen. Dasselbe gilt von der Belastung $\mathfrak{P}_h$ des Abschnitts (h) und den sechs Anschlußkräften der beiden freien Querschnitte J, K. Von diesen sind drei statisch unbestimmt. Am besten eignen sich $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_K^{(h)}$ als überzählige Größen. Ist der Abschnitt (h) im Stabwerk an dem einen Ende steif, an dem anderen frei drehbar angeschlossen, so sind zwei Anschlußkräfte statisch unbestimmt. Bei zwei Gelenken ist nur eine statisch überzählige Größe $N_K^{(h)}$ vorhanden.

Der Spannungszustand eines jeden Abschnitts (h) wird, abgesehen von der Belastung $\mathfrak{P}_h$ und einer Temperaturänderung $t, \Delta t$, durch die geometrischen Randwerte $\varepsilon_h, \vartheta_h$ der relativen Verschiebung der Stabenden und durch die Drehwinkel der Stabendtangenten bestimmt. Diese sind mit $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}$ oder relativ zu $\overline{J'K'}$ (Abb. 285) mit $\tau_J^{(h)}, \tau_K^{(h)}$ vorgeschrieben, so daß die statisch unbestimmten Anschlußkräfte des Stabes nach dem Superpositionsgesetz folgendermaßen zerlegt werden:

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + M_{J1}^{(h)}\,\varphi_J^{(h)} + M_{J2}^{(h)}\,\varphi_K^{(h)} + M_{J3}^{(h)}\,\vartheta_h + M_{J4}^{(h)}\,\varepsilon_h\,, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + M_{K1}^{(h)}\,\varphi_J^{(h)} + M_{K2}^{(h)}\,\varphi_K^{(h)} + M_{K3}^{(h)}\,\vartheta_h + M_{K4}^{(h)}\,\varepsilon_h\,, \\ N_K^{(h)} &= N_{K0}^{(h)} + N_{K1}^{(h)}\,\varphi_J^{(h)} + N_{K2}^{(h)}\,\varphi_K^{(h)} + N_{K3}^{(h)}\,\vartheta_h + N_{K4}^{(h)}\,\varepsilon_h\,. \end{aligned}\right\} \tag{500}$$

Sind die geometrischen Randwerte $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \varepsilon_h, \vartheta_h$ Null, so entstehen mit $M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)}$ usw. die statisch unbestimmten Anschlußkräfte des beiderseits starr eingespannten Stabes oder Stabzugs aus Belastung $\mathfrak{P}$ und Temperaturänderung Δt. Die Anschlußkräfte $M_{J1}^{(h)}, M_{J2}^{(h)}, M_{J3}^{(h)}, M_{J4}^{(h)}$ sind die Anschlußkräfte des beiderseits starr eingespannten, unbelasteten Stabes mit vorgeschriebenen Randbedingungen $\varphi_J^{(h)} = 1, \varphi_K^{(h)} = 1, \vartheta_h = 1, \varepsilon_h = 1$. Die Stäbe mit biegungssteifem Anschluß in J und einem Gelenk G am anderen Ende werden durch die Bezeichnung l_g unterschieden. Bei ihnen ist $M_G^{(g)} = 0$ und

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(g)} &= M_{J0}^{(g)} + M_{J1}^{(g)}\,\varphi_J^{(g)} + M_{J3}^{(g)}\,\vartheta_g + M_{J4}^{(g)}\,\varepsilon_g\,, \\ N_G^{(g)} &= N_{G0}^{(g)} + N_{G1}^{(g)}\,\varphi_J^{(g)} + N_{G3}^{(g)}\,\vartheta_g + N_{G4}^{(g)}\,\varepsilon_g\,. \end{aligned}\right\} \tag{501}$$

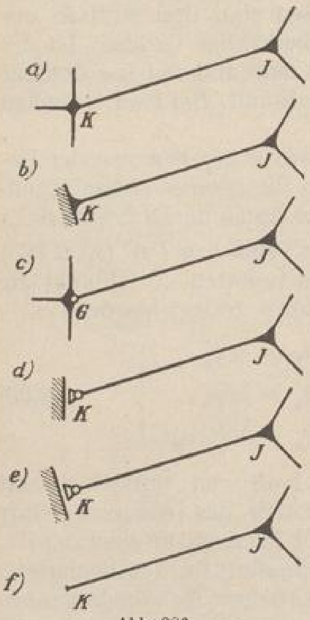
Die Vorzahlen sind die Anschlußkräfte des einseitig starr eingespannten, in G gelenkig angeschlossenen Stabes aus den Randbedingungen $\varphi_J^{(g)} = 1, \vartheta_g = 1, \varepsilon_g = 1$. Das Ergebnis kann unmittelbar angeschrieben oder aus der Lösung für den beiderseits eingespannten Stab mit der Bedingung $M_K^{(h)} \equiv M_G^{(g)} = 0$ abgeleitet werden. Diese liefert $\varphi_G^{(g)}$ und damit die Anschlußkräfte $M_J^{(g)}, N_G^{(g)}$.

Gerade Stäbe. a) Der Stab (h) ist an beiden Enden J und K biegungssteif angeschlossen. Die Schnittkräfte $M_{J4}^{(h)}, N_{K1}^{(h)}, N_{K2}^{(h)}, N_{K3}^{(h)}$ sind in (500) Null, $N_{K4}^{(h)} = EF_h$ und daher

$$N_K^{(h)} = N_{K0}^{(h)} + EF_h\varepsilon_h\,. \tag{502}$$

Die beiden anderen statisch unbestimmten Anschlußkräfte $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$ werden unter Beachtung der Vorzeichen am einfachsten nach Abschn. 26 berechnet. Um dabei die bekannten Bezeichnungen beizubehalten, tritt hier zunächst für den Buchstaben J die Ziffer 1, für den Buchstaben K die Ziffer 2. Die Vorzahlen und Belastungszahlen δ sind hier jedoch ebenso wie φ und ϑ wirkliche Winkel, sie bezeichnen also nicht wie in Abschn. 26 den EJ_c fachen Betrag. Die Endquerschnitte 1, 2 des statisch bestimmten Stabes drehen sich infolge Belastung $\mathfrak{P}_h$ und Temperaturänderung Δt um δ_{10} und δ_{20}, infolge der Stützenverschiebungen um $\delta_{1s} = \varphi_J^{(h)} - \vartheta_h$, $\delta_{2s} = \varphi_K^{(h)} - \vartheta_h$, so daß bei veränderlichem Trägheitsmoment

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= \frac{\delta_{10} - \delta_{20}\,\delta_{12}/\delta_{22}}{\delta_{11} - \delta_{12}\,\delta_{12}/\delta_{22}} + \frac{\delta_{1s} - \delta_{2s}\,\delta_{12}/\delta_{22}}{\delta_{11} - \delta_{12}\,\delta_{12}/\delta_{22}} \\ &= M_{J0}^{(h)} + \beta_{11}\,\varphi_J^{(h)} + \beta_{12}\,\varphi_K^{(h)} - (\beta_{11} + \beta_{12})\,\vartheta_h\,, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \beta_{12}\,\varphi_J^{(h)} + \beta_{22}\,\varphi_K^{(h)} - (\beta_{22} + \beta_{12})\,\vartheta_h\,. \end{aligned}\right\} \tag{503}$$



Beiderseits elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$.

Starr und elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)} = 0, \vartheta_h, \varepsilon_h$.

Gelenkig gelagerter und elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $M_G = 0, \varphi_J^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$.

Schräg geführter und elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $\vartheta_h = f(\varepsilon_h), M_K = 0, \varphi_J^{(h)}, \dfrac{Q_K}{N_K} = \operatorname{tg}\alpha$.

Senkrecht geführter und elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $Q_K = 0, M_K = 0, \varphi_J^{(h)}, \varepsilon_h$.

Elastisch eingespannter Stab mit freiem Ende.
Randbedingungen: $M_K = 0, Q_K = 0, N_K = 0, \varphi_J^{(h)}$.

Abb. 286.

Bei symmetrischen Stäben ist $\delta_{11} = \delta_{22}$, also auch $\beta_{11} = \beta_{22}$. Die Vorzahlen können bei einer stetigen Veränderung des Querschnitts angenähert nach Tabelle 13a, b berechnet werden.

Ist J_h im Bereich von l_h konstant, so ist

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l_h}{3EJ_h}, \quad \delta_{12} = -\frac{l_h}{6EJ_h}, \quad \beta_{11} = \beta_{22} = \frac{4EJ_h}{l_h}, \quad \beta_{12} = \frac{2EJ_h}{l_h}. \tag{504}$$

Die statisch unbestimmten Anschlußkräfte können daher bei vorgeschriebenen Randbedingungen $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$ unmittelbar angegeben werden. Damit sind alle Anschlußkräfte des Stabes (h) bekannt.

1. Die Stabenden J und K sind elastisch drehbar (Abb. 286a):

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + 2\,\frac{EJ_h}{l_h}\,(2\,\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)} - 3\,\vartheta_h)\,, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + 2\,\frac{EJ_h}{l_h}\,(\varphi_J^{(h)} + 2\,\varphi_K^{(h)} - 3\,\vartheta_h)\,, \\ N_K^{(h)} &= N_{K0}^{(h)} + EF_h\,\varepsilon_h\,, \qquad N_J^{(h)} = N_{J0}^{(h)} + EF_h\,\varepsilon_h\,, \\ Q_J^{(h)} &= Q_{J0}^{(h)} - 6\,\frac{EJ_h}{l_h^2}\,(\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)} - 2\,\vartheta_h)\,, \\ Q_K^{(h)} &= Q_{K0}^{(h)} - 6\,\frac{EJ_h}{l_h^2}\,(\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)} - 2\,\vartheta_h)\,. \end{aligned}\right\} \tag{505}$$

2. Das Stabende J ist elastisch drehbar, das Ende K ist starr eingespannt (Abb. 286b), $\varphi_K^{(h)} = 0$:

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + 2\,\frac{E\,J_h}{l_h}\,(2\,\varphi_J^{(h)} - 3\,\vartheta_h), & M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + 2\,\frac{E\,J_h}{l_h}\,(\varphi_J^{(h)} - 3\,\vartheta_h),\\ N_J^{(h)} &= N_{J0}^{(h)} + \varepsilon_h\,E\,F_h, & N_K^{(h)} &= N_{K0}^{(h)} + \varepsilon_h\,E\,F_h,\\ Q_J^{(h)} &= Q_{J0}^{(h)} - 6\,\frac{E\,J_h}{l_h^2}\,(\varphi_J^{(h)} - 2\,\vartheta_h), & Q_K^{(h)} &= Q_{K0}^{(h)} - 6\,\frac{E\,J_h}{l_h^2}\,(\varphi_J^{(h)} - 2\,\vartheta_h). \end{aligned}\right\} \quad (506)$$

Die Anschlußkräfte $M_{J0}^{(h)}$, $M_{K0}^{(h)}$ des beiderseits starr eingespannten Stabes aus $\mathfrak{P}_h$ und $\Delta t = t_u - t_o$ können bei unveränderlichem Stabquerschnitt folgendermaßen berechnet werden (Abb. 287):

$$\left.\begin{aligned} M_{J0}^{(h)} &= \frac{2}{l_h^2}\,(2\,S_K^{(h)} + S_J^{(h)}),\\ M_{K0}^{(h)} &= \frac{2}{l_h^2}\,(2\,S_J^{(h)} + S_K^{(h)}),\\ S_J^{(h)} &= \int_0^{l_h} M_{m0}^{(0)}\,x\,d\,x + \frac{E\,J_h\,l_h^2}{2}\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h};\\ S_K^{(h)} &= -\int_0^{l_h} M_{m0}^{(0)}\,x'\,d\,x' - \frac{E\,J_h\,l_h^2}{2}\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}. \end{aligned}\right\} \quad (507)$$

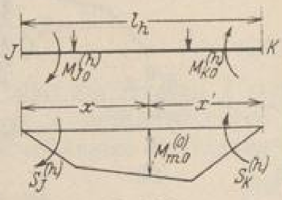


Abb. 287.

$M_{m0}^{(0)}$ sind die Biegungsmomente aus der Belastung und $M_{J0}^{(h)} = M_{K0}^{(h)} = 0$.

b) Der Stab (g) ist in J steif, in G gelenkig angeschlossen (Abb. 286c). Die Schnittkräfte $M_{J4}^{(g)}$, $N_{G1}^{(g)}$, $N_{G3}^{(g)}$ sind in (501) Null. $N_{G4}^{(g)} = EF_g$ und daher

$$N_G^{(g)} = N_{G0}^{(g)} + E\,F_g\,\varepsilon_g\,. \quad (508)$$

Das Anschlußmoment $M_J^{(g)}$ wird unter Beachtung der Vorzeichen nach Abschn. 26, jedoch unter Verwendung der wirklichen Vorzahlen und Belastungszahlen δ, berechnet. Mit der Bezeichnung $J \equiv$ Ziffer 1 ist die Verdrehung dieses Endquerschnitts durch die Belastung $\mathfrak{P}_g$ und eine ungleichförmige Temperaturänderung Δt des Stabes δ_{10} und $\delta_{1s} = \varphi_J^{(g)} - \vartheta_g$.

$$M_J^{(g)} = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} + \frac{\delta_{1s}}{\delta_{11}} = M_{J0}^{(g)} + \frac{1}{\delta_{11}}\,(\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g)\,. \quad (509)$$

Bei konstantem Querschnitt F_g, J_g im Bereich von l_g ist

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(g)} &= M_{J0}^{(g)} + \frac{3\,E\,J_g}{l_g}\,(\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g),\\ N_G^{(g)} &= N_{G0}^{(g)} + E\,F_g\,\varepsilon_g, & N_J^{(g)} &= N_{J0}^{(g)} + E\,F_g\,\varepsilon_g,\\ Q_J^{(g)} &= Q_{J0}^{(g)} - \frac{3\,E\,J_g}{l_g^2}\,(\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g), & Q_G^{(g)} &= Q_{G0}^{(g)} - \frac{3\,E\,J_g}{l_g^2}\,(\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g). \end{aligned}\right\} \quad (510)$$

Das Anschlußmoment $M_{J0}^{(g)}$ aus $\mathfrak{P}_g$, Δt kann mit den Bezeichnungen der Abb. 287 folgendermaßen berechnet werden:

$$M_{J0}^{(g)} = -\frac{3}{l_g^2}\left(\int_0^{l_g} M_{m0}^{(0)}\,x'\,d\,x' + \frac{E\,J_g\,l_g^2}{2}\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\right). \quad (511)$$

c) Die Anschlüsse nach Abb. 286d, e sind selten. Die schräge Führung des Stabes in K nach Abb. 286d ist im Ansatz gleichbedeutend mit gelenkigem Anschluß.

d) Der Stab ist in J steif angeschlossen, am anderen Ende frei (Abb. 286f). Die Belastung des Stabes wird als Belastung des Stabknotens J behandelt.

Gekrümmte Stäbe und Stabzüge. Die Anschlußkräfte des Stabes (h) können für dreierlei Randbedingungen angegeben werden. Der Stab ist entweder an beiden

Enden J, K eingespannt oder an einem Ende J eingespannt, am anderen gelenkig angeschlossen oder an beiden Enden durch Gelenke mit den Stabknoten J, K verbunden. Die Rechnung für symmetrische oder unsymmetrische Stabformen wird unter Beachtung der positiven Definition von Drehwinkel und Anschlußmoment für die Belastung $\mathfrak{P}_h$, die Temperaturänderung t, Δt und für vorgeschriebene Randwerte $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$, ε_h, ϑ_h nach Abschn. 26 behandelt. Die Lösung kann auf ein statisch bestimmtes oder unbestimmtes Hauptsystem bezogen und durch Superposition der einzelnen Ursachen nach (500) angeschrieben werden. Sie wird hier auf den beiderseits eingespannten symmetrischen Stab beschränkt. Die anderen Aufgaben sind zum Teil umständlich, bieten aber keine Schwierigkeiten. Neben den beiden Anschlußmomenten $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$ spielt hier auch die Längskraft N_h im Symmetriepunkt des Stabes eine Rolle.

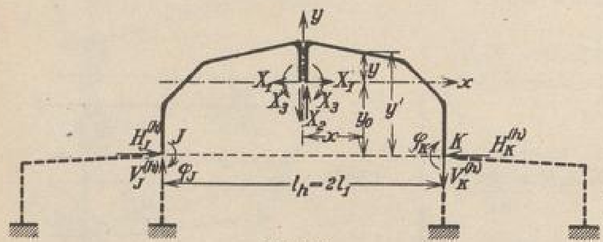


Abb. 288.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte des Bogenstabes werden nach S. 196, jedoch unter Verwendung der wirklichen Vorzahlen und Belastungszahlen δ, mit dem statisch bestimmten Hauptsystem Abb. 288 berechnet. Die Belastung $\mathfrak{P}_h$ und die ungleichförmige Temperaturänderung Δt erzeugen die gegenseitigen Verschiebungen δ_{10}, δ_{20}, δ_{30}. Die gleichförmige Temperaturänderung führt zu einer Verschiebung $\delta_{1t} = \alpha_t t l_h$, $\delta_{2t} = 0$, $\delta_{3t} = 0$. Die vorgeschriebenen Randwerte $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$, ϑ_h und $\Delta l_h = \varepsilon_h l_h$ ergeben nach (300)

$$\left.\begin{aligned} 1_1\,\delta_{1s} = y_0\,(\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h, \qquad 1_2\,\delta_{2s} = -\frac{l}{2}\,(\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)}) - l\,\vartheta_h, \\ 1_3\,\delta_{3s} = \varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}. \end{aligned}\right\} \tag{512}$$

$$\left.\begin{aligned} y_0 = \frac{\int y' \frac{1}{EJ}\,ds}{\delta_{33}}, \qquad X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} + \frac{1}{\delta_{11}}[y_0\,(\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h], \\ X_2 = \frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} - \frac{l}{\delta_{22}}\left[\frac{1}{2}(\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)}) - \vartheta_h\right], \qquad X_3 = \frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} + \frac{1}{\delta_{33}}\,(\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}). \end{aligned}\right\} \tag{513}$$

Die Anschlußkräfte des Hauptsystems (Kragträger J und K, Abb. 288) aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ werden mit $M_{J0}^{(0)}$, $M_{K0}^{(0)}$ usw. nach dem vereinbarten positiven Drehsinn bezeichnet, so daß hier für den beiderseits eingespannten Stabbogen folgende Ergebnisse angeschrieben werden können:

a) Schnittkräfte aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$

$$\left.\begin{aligned} M_{J0}^{(h)} &= M_{J0}^{(0)} + X_{10}\,y_0 - X_{20}\,l_1 + X_{30}, \\ M_{K0}^{(h)} &= M_{K0}^{(0)} - X_{10}\,y_0 - X_{20}\,l_1 - X_{30}, \qquad -N_{h0} = X_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{514}$$

b) Schnittkräfte aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$, der Temperaturänderung t und vorgeschriebenen Randbedingungen $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$, ϑ_h, $\Delta l_h = \varepsilon_h l_h$

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)} &+ \varphi_J^{(h)}\left(\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\,\delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}}\right) + \varphi_K^{(h)}\left(-\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\,\delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}}\right) \\ &- \vartheta_h\,\frac{l_h^2}{2\,\delta_{22}} - \frac{y_0}{\delta_{11}}\,(\Delta l_h - \alpha_t\,t\,l_h), \end{aligned}\right\} \tag{515}$$

$$\left.\begin{aligned} M_K^{(h)} = M_{K0}^{(h)} &+ \varphi_J^{(h)}\left(-\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\,\delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}}\right) + \varphi_K^{(h)}\left(\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\,\delta_{22}} + \frac{l}{\delta_{33}}\right) \\ &- \vartheta_h\,\frac{l_h^2}{2\,\delta_{22}} + \frac{y_0}{\delta_{11}}\,(\Delta l_h - \alpha\,t\,l_h). \end{aligned}\right\} \tag{516}$$

$$-N_h = X_1^{(h)} = X_{10}^{(h)} + \frac{1}{\delta_{11}}[y_0(\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h + \alpha_t t l_h]. \tag{517}$$

Die Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$, N_h können in derselben Weise auch für geschlossene Stabzüge oder ganze Abschnitte $\overline{JK}$ des Stabwerks als Funktion der Belastung und der vorgeschriebenen Randbedingungen $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$, ϑ_h, ε_h angegeben werden. Derartige Ansätze haben jedoch nur in Ausnahmefällen Bedeutung.

Die Bedingungen für die geometrische Verträglichkeit der Knotenpunktfigur. Die geometrische Verträglichkeit in dem vorgelegten Stabwerk oder in dem statisch und kinematisch äquivalenten Bilde der Knotenpunktfigur bedeutet an jedem Stabknoten J die gleiche Verschiebung aller angeschlossenen Stabenden

$$u_J^{(h)} = u_J, \qquad v_J^{(h)} = v_J. \tag{518}$$

Bei steif angeschlossenen Stäben ist aus demselben Grunde

$$\varphi_J^{(h)} = \varphi_J. \tag{519}$$

Daher sind auch die Drehwinkel $\varphi_J^{(h)}$ der Endtangenten aller am Knoten J steif angeschlossenen Stäbe einander gleich. Die Kontinuität von n steif am Knoten J angeschlossenen Stäbe kann daher auch durch $(n-1)$ unabhängige Bedingungen

$$\tau_J^{(h)} + \vartheta_h = \tau_J^{(h+1)} + \vartheta_{h+1} \tag{520}$$

ausgesprochen werden (vgl. Abschn. 41).

Das geometrisch bestimmte Hauptsystem. Der Spannungs- und Verschieschiebungszustand der einzelnen Abschnitte (h) des Stabwerks ist wegen der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung am Stabknoten (518), (519) durch die r Drehwinkel φ_J und durch $2(r+r_1)$ Punktverschiebungen u_J, v_J der Knotenpunktfigur bestimmt. Diese sind nach (282) die unabhängigen Unbekannten eines linearen Ansatzes, so daß die Knotenpunktfigur in Verbindung mit den Verträglichkeitsbedingungen am Stabknoten bei beliebig vorgeschriebenen Verschiebungen u_J, v_J, φ_J ($u_J = 0, v_J = 0, \varphi_J = 0$) die Eigenschaften eines geometrisch bestimmten Hauptsystems erhält, für welches ausgezeichnete Werte u_J, v_J, φ_J bestimmt werden sollen. Die Knotenpunktfigur mit $3r + 2r_1$ Freiheitsgraden wird also erst durch die Ausschaltung der kinematischen Beweglichkeit mit dem Zwang zur Kontinuität zum Hauptsystem: Hauptsystem A.

Die Komponenten u_J, v_J, φ_J des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur sind mit den Komponenten ε_h, ϑ_h des Verschiebungszustandes der Abschnitte (h) durch $2s$ Transformationen (499) verknüpft, so daß auch diese an Stelle von u_J, v_J als unbekannte Größen verwendet werden können, soweit sie unabhängig voneinander sind. Der Verschiebungszustand des Stabwerks wird dann durch r Knotendrehwinkel φ_J, durch $s - m = s^*$ (vgl. S. 312) bezogene Längenänderungen ε_h und durch $(3r + 2r_1) - (r + s^*) = 2(r + r_1) - s^* = f_1$ ausgezeichnete, voneinander unabhängige Bestimmungsstücke ψ_e beschrieben, für die sich je nach der Art des Stabwerks Verschiebungen u_J, v_J, Stabdrehwinkel ϑ_h oder die gegenseitige Verschiebung zweier Punkte und die gegenseitige Verdrehung zweier Geraden eignen (Abb. 296).

Die Verwendung dieser Komponenten des Verschiebungszustandes zu unabhängigen Unbekannten führt neben der Knotenpunktfigur noch zu einem anderen, dem Stabwerk statisch und geometrisch äquivalenten Bilde. Die Knotendrehwinkel φ_J, die bezogenen Längenänderungen ε_h und die ausgezeichneten Komponenten ψ_e bestimmen den Verschiebungszustand einer beweglichen, dem vorgeschriebenen Stabwerk statisch äquivalenten Scheibenkette, an welcher neben der Belastung $\mathfrak{P}$ die Anschlußmomente $M_J^{(h)}$ zwischen Stab und Knotenscheibe und die Längskräfte N_h ausgezeichneter Querschnitte $T^{(h)}$ der Stäbe (h) als äußere Kräfte wirken. Sie besteht daher aus den Knotenscheiben (J) und den frei drehbar angeschlossenen Stäben (h), die in den Querschnitten $T^{(h)}$ unterbrochen und nur durch eine Führung biegungssteif zusammengehalten sind (Abb. 289c). Die Scheibenkette ist mit den vorgeschriebenen Verschiebungen $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ (z. B. $\varphi_J = 0, \varepsilon_h = 0, \psi_c = 0$) geometrisch bestimmt und wird durch Wahrung der dem Stabwerk eigentümlichen Kontinuität am Stabknoten J und am Querschnitt $T^{(h)}$ ($\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$, $u_J^{(h)} = u_J$, $v_J^{(h)} = v_J$) ebenfalls zum geometrisch bestimmten Hauptsystem mit der Bezeichnung B. Es entsteht daher aus der Scheibenkette, deren kinematische Beweglichkeit durch die in den Stabknoten J und an den Querschnitten $T^{(h)}$ vorgeschriebene Kontinuität aufgehoben wird.

In der Regel sind die Abmessungen der Knotenscheiben gegenüber den Stablängen verschwindend klein. Die Knotenscheibe wird angenähert zum materiellen Punkt, in dem sich alle Anschlußquerschnitte (h) schneiden. Auf diese Weise entsteht eine Idealisierung der kinematisch beweglichen Scheibenkette, die als Knotenkette bezeichnet wird. Sie zählt ebenso wie die Knotenpunktfigur $r + 2(r + r_1)$ Freiheitsgrade und ist für vorgeschriebene Verschiebungen $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ geometrisch bestimmt. Die Knotenkette verliert ebenso wie die Scheibenkette durch die am Stabknoten J und am Querschnitt $T^{(h)}$ vorgeschriebene Kontinuität die kinematische Beweglichkeit und wird dadurch zum geometrisch bestimmten Hauptsystem C.

Der Begriff der Knotenpunktfigur, der Scheibenkette oder Knotenkette und der Begriff des geometrisch bestimmten Hauptsystems A, B oder C haben daher die beliebige Annahme der Verschiebungen u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ gemeinsam. Während jedoch Knotenpunktfigur, Scheibenkette und Knotenkette kinematisch bewegliche Gebilde darstellen, sind die kinematischen Eigenschaften der drei mit A, B, C bezeichneten geometrisch bestimmten Hauptsysteme durch die Verträglichkeitsbedingungen gebunden. Diese sind bei beliebiger Annahme der Komponenten u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ ebenso erfüllt wie die Gleichgewichtsbedingungen eines statisch bestimmten Hauptsystems bei beliebiger Annahme der statisch überzähligen Größen X_k.

Jedes geometrisch bestimmte Hauptsystem enthält neben den unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes, die hier zunächst beliebig festgesetzt werden können, auch abhängige Komponenten, im Hauptsystem C z. B. die Verschiebungen u_H, v_H, ϑ_h. Sie ergeben sich durch Superposition

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_h &= \vartheta_{h0} + \sum \vartheta_{hJ}\varphi_J + \sum \vartheta_{hc}\psi_c + \sum \vartheta_{h,\varepsilon i}\varepsilon_i, \\ u_H &= u_{H0} + \sum u_{HJ}\varphi_J + \sum u_{Hc}\psi_c + \sum u_{H,\varepsilon i}\varepsilon_i, \\ J &= A \ldots N, \qquad c = 1 \ldots f, \qquad i = 1 \ldots s. \end{aligned}\right\} \tag{521}$$

Die Vorzahlen ϑ_{hJ}, u_{HJ} sind im geometrisch bestimmten Hauptsystem C Null. Die Anteile ϑ_{h0}, u_{H0} werden aus einem Verschiebungsplan der Knotenkette des Hauptsystems C entnommen, der mit $\Delta l_{h0} = \varepsilon_{h0} l_h$ für $\psi_c = 0$ $(c = 1 \ldots f)$ gezeichnet wird. Die Stabdrehwinkel ϑ_{hc} sind in einem Verschiebungsplan der Knotenkette für $\psi_c = 1$ enthalten. Sie werden am einfachsten aus dem Polplan der Bewegung berechnet. Dieselben Betrachtungen lassen sich für die anderen beiden Hauptsysteme A und B wiederholen.

Mit dem Verschiebungszustand $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ des Hauptsystems B oder C sind nach (500) die Anschlußkräfte der Abschnitte (h) und damit auch der Spannungszustand bestimmt. Die Ansätze (505) und (506) sind mit $\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$ ebenfalls Ausdruck des Superpositionsgesetzes.

Die geometrischen Bedingungen der Knotenkette. Die dem Hauptsystem C zugeordnete Knotenkette wird durch $\varepsilon_h = 0$ und Herausnahme der Knotenscheiben zur Stabkette (Abb. 289e). Diese ist im Sinne des Abschnitts 13 statisch bestimmt oder statisch unbestimmt. Bei m überzähligen Stäben $(m \geqq 0)$ sind daher ebenso viele Längenänderungen ε_h der Stäbe oder Stabsehnen von den übrigen abhängig. Der Verschiebungszustand des Hauptsystems C ist daher durch r Knotendrehwinkel

φ_J, $(s - m)$ bezogene Dehnungen ε_h und $f_1 = 2(r + r_1) - (s - m)$ ausgezeichnete Komponenten ψ_c der Knotenkette bestimmt. f_1 bedeutet den Freiheitsgrad der Stabkette.

Die Längen der Stäbe und Stabzugsehnen ändern sich mit der Temperatur und den inneren Kräften aus Belastung und Stützensenkung. Diese bestehen aus einem statisch bestimmten Anteil und einem statisch unbestimmten Anteil, der von dem biegungssteifen Anschluß und den geometrisch überzähligen Stäben der Knotenkette herrührt. Die Längenänderung ε_h kann daher nach $\varepsilon_h = \varepsilon_{h0} + \varepsilon_{h1} + \varepsilon_{h2}$ zerlegt werden. Die Dehnung ε_{h0} aus der Belastung des Stabes, den zugeordneten statisch bestimmten Anschlußkräften und einer Temperaturänderung $t, \Delta t$ ist bekannt und führt mit den Stützenverschiebungen zu den Stabdrehwinkeln ϑ_{h0}. Die Dehnung ε_{h1} entsteht aus den statisch unbestimmten Anschlußkräften der

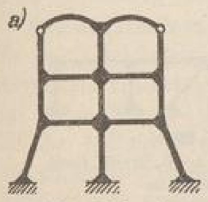


Abb. 289 a. Stabwerk.
$r = 7$, $r_1 = 2$,
$s_1 = 13$, $s_2 = 2$, $s = 15$,
$m = 0$, $f_1 = 18 - 15 = 3$,
$r + s_2 + f_1 = 12$ Unbekannte.

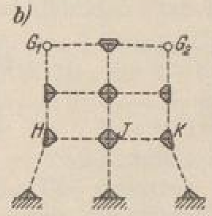


Abb. 289 b. Knotenpunktfigur.

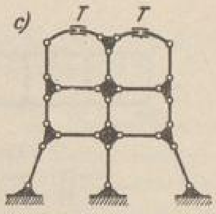


Abb. 289 c. Scheibenkette mit $\varepsilon_h = 0$ für alle geraden Stäbe.

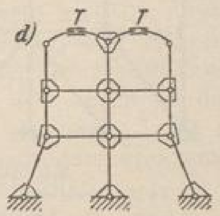


Abb. 289 d. Knotenkette mit $\varepsilon_h = 0$ für alle geraden Stäbe.

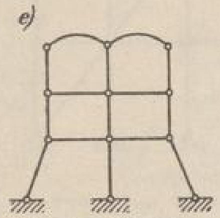


Abb. 289 e. Stabkette.

Stäbe. Sie ist in biegungssteifen, geraden Stäben nahezu Null und darf unbedenklich vernachlässigt werden. Aus demselben Grunde werden die Dehnungen ε_{h2} infolge geometrisch überzähliger Stäbe in einem System berechnet, dessen Stabknoten durch Gelenke ersetzt sind.

Daher werden in einem Stabwerk die geraden und gekrümmten Stäbe unterschieden, deren Anzahl durch s_1 und s_2 bezeichnet wird $(s = s_1 + s_2)$. Die unabhängigen Komponenten ε_h der s_1 geraden Stäbe sind dann im Ansatz Null oder der Größe nach vorgeschrieben, also bekannt. Diese Annahme trifft bei biegungssteifen Stäben nahezu vollständig zu. Sie gilt dagegen bei unbelasteten Zugstäben nur als Näherung. Die Dehnung wird für diese zur Vereinfachung der Rechnung geschätzt, im Ergebnis geprüft und unter Umständen durch Iteration verbessert. Daher ist bei der Ausbildung des Hauptsystems die auf S. 311 erwähnte Teilung der Abschnitte (h) und die Führung der Enden bei geraden Stäben unnötig.

Der Verschiebungszustand wird nunmehr durch $r + f = (r + s_2^* + f_1)$ unbekannte Komponenten bestimmt. Sie bilden die überzähligen geometrischen Größen des Hauptsystems C. s_2^* ist die Anzahl der gekrümmten Stäbe mit geometrisch unabhängigen Längen. (Bei $m = 0$ ist $s_2^* = s_2$.)

Diese Bemerkungen werden durch die folgende, für die theoretische Behandlung wichtige Einteilung der Stabwerke erläutert.

A. Stabwerke ohne geometrisch überzählige Stäbe: $m = 0$.

a) Stabwerke mit s_2 Stabzügen und s_1 geraden Stäben, deren Dehnungen ε_h vernachlässigt oder geschätzt werden. Anzahl der Unbekannten: r Knotendrehwinkel, s_2 bezogene Längenänderungen von Stabzugsehnen, $f_1 = 2\,(r + r_1) - s$ unabhängige Komponenten ψ_c der Stabkette, $f = f_1 + s_2$ (Abb. 289a).

b) Stabwerke mit $s = s_1 < 2\,(r + r_1) = s + f$ geraden Stäben, deren Dehnungen ε_h vernachlässigt oder geschätzt werden. Anzahl der Unbekannten: r Knotendrehwinkel, $f = f_1 = 2\,(r + r_1) - s$ unabhängige Komponenten ψ_c der Stabkette (Abb. 290a).

c) Stabwerke mit $s = s_1 = 2\,(r + r_1)$ geraden Stäben, welche die Knotenkette mit $\varepsilon_h = 0$ oder $\varepsilon_h = \varepsilon_{h0}$ geometrisch bestimmen. Anzahl der Unbekannten: r Knotendrehwinkel (Abb. 290b).

a)

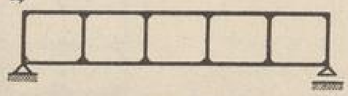


Abb. 290a.
$r=12$, $s=s_1=19$, $m=0$,
$f_1=24-19=5=f$.
$r+f=17$ Unbekannte.

b)

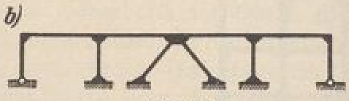


Abb. 290b.
$r=5$, $s=s_1=10$, $s_2=0$, $m=0$. $f_1=0$.
$r+s_2+f_1=5$ Unbekannte.

c)

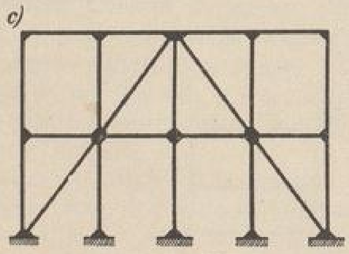


Abb. 290c.
$r=10$, $s=s_1=22$, $s_2=0$, $m=2$,
$f_1=0$, $r+s_2+f_1=10$ Unbekannte.

d)

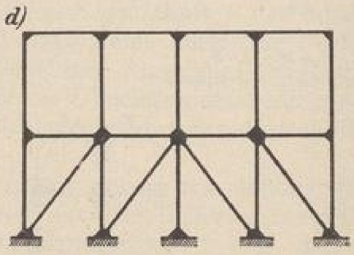


Abb. 290d.
$r=10$, $s=s_1=22$, $s_2=0$, $m=3$,
$f_1=1$, $r+s_2+f_1=11$ Unbekannte.

B. Stabwerke mit m geometrisch überzähligen Stäben.

Die Stablängenänderungen ε_h und ε_{h0} sind geometrisch voneinander abhängig und werden geschätzt oder unter Umständen nach S. 313 berechnet. Für ein Stabwerk mit s_1 geraden und s_2 gekrümmten Stäben ist $f_1 = 2\,(r + r_1) - (s - m)$, so daß r Knotendrehwinkel und $f = s_2^* + f_1$ Komponenten ψ_c der Knotenkette mit $\varphi_J = 0$ berechnet werden müssen (Abb. 290c, d).

Die Aufgabe. Das geometrisch bestimmte Hauptsystem (S. 311) ist mit dem vorgeschriebenen Stabwerk geometrisch und statisch äquivalent, wenn beide im Verschiebungszustand und im Spannungszustand übereinstimmen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich aus der Verträglichkeit des Verschiebungszustandes ($u_J^{(h)} = u_J$, $v_J^{(h)} = v_J$, $\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$) und aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte des Hauptsystems (Lasten und Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, N_h). Die Verträglichkeitsbedingungen sind durch die Definition des Hauptsystems nach S. 311 für jede Annahme der Komponenten u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ erfüllt. Dasselbe gilt für die Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte der Stäbe. Daher ist zur Äquivalenz von Hauptsystem und Stabwerk nur noch das Gleichgewicht der äußeren Kräfte des Hauptsystems notwendig. Die notwendige und hinreichende Anzahl der Bedingungen wird mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an den in der Knotenkette enthaltenen $(3\,r + 2\,r_1)$

unabhängigen zwangläufigen Gebilden angeschrieben. Sie dienen zur eindeutigen Berechnung der unabhängigen Komponenten u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ des Verschiebungszustandes, aus denen die Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, N_h des Hauptsystems nach (521) und (500) hervorgehen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist nach Abschn. 8 ein Minimalprinzip der Elastizitätstheorie. Die gesamte potentielle Energie Π des Stabwerks wird für den wirklich vorhandenen Verschiebungszustand u_J, v_J, φ_J zum Minimum. Die partiellen Ableitungen der Funktion Π nach den $(3r + 2r_1)$ unabhängigen Verschiebungskomponenten sind daher Null. Die Minimalbedingungen sind Gleichgewichtsbedingungen, so daß eine vollständige Analogie zu den theoretischen Grundlagen des Abschn. 24 (S. 163) vorhanden ist. Sie werden jedoch hier ebenso wie dort in integrierter Form als Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte eines beweglichen Gebildes angeschrieben.

Die statischen Bedingungen zur Lösung. Die statischen Bedingungen gelten für das Gleichgewicht der Schnittkräfte des Stabwerks an einem geometrisch bestimmten Hauptsystem A mit $u_J = 0$, $v_J = 0$, $\varphi_J = 0$ $(J = A \ldots N)$ oder B, C mit $\varphi_J = 0$, $\varepsilon_h = 0$, $\psi_c = 0$ $(J = A \ldots N,\ c = 1 \ldots f,\ h = 1 \ldots s)$. Sie enthalten die $(3r + 2r_1) = (r + s + f_1 - m)$ unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes als unbekannte Größen des Ansatzes. Die $(3r + 2r_1)$ Gleichgewichtsbedingungen werden nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten (83) für die äußeren Kräfte an ebenso vielen voneinander unabhängigen, beweglichen Gebilden mit einem Freiheitsgrad angeschrieben. Diese entstehen aus der Knotenpunktfigur, wenn der Reihe nach jede der $(3r + 2r_1)$ Bindungen einzeln gelöst und durch eine ausgezeichnete virtuelle Verschiebung $u_J \neq 0$ oder $v_J \neq 0$ oder $\varphi_J \neq 0$ ersetzt wird. Die Einführung virtueller Geschwindigkeiten $\dot{u}_J \neq 0$ oder $\dot{v}_J \neq 0$ oder $\dot{\varphi}_J \neq 0$ an Stelle der virtuellen Verrückungen besitzt nach S. 40 nur formale Bedeutung. Die Bedingungsgleichungen erhalten folgende Form (Abb. 291):

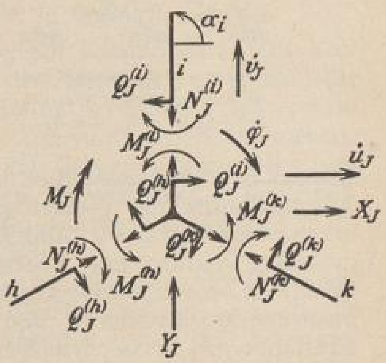


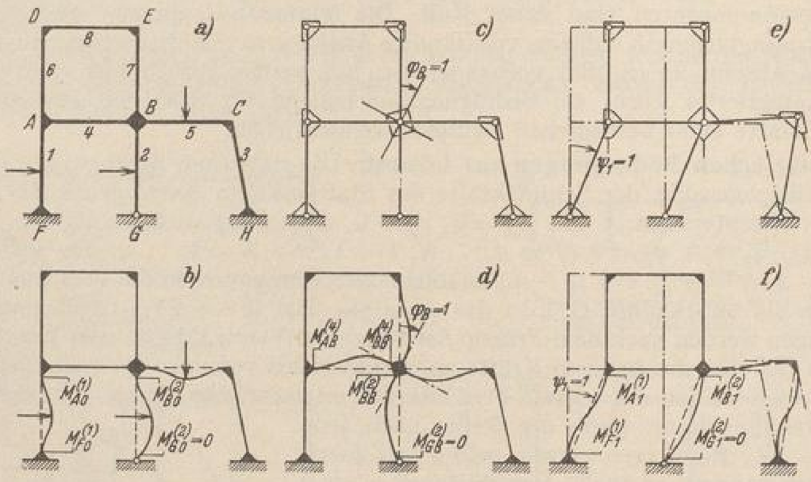
Abb. 291.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_J N_J^{(h)} \cos\alpha_h + \sum_J Q_J^{(h)} \sin\alpha_h + X_J = 0\,, \\ &\sum_J N_J^{(h)} \sin\alpha_h - \sum_J Q_J^{(h)} \cos\alpha_h + Y_J = 0\,, \\ &\qquad \mathsf{M}_J - \sum_J M_J^{(h)} = 0\,. \end{aligned}\right| \qquad (522)$$

Der Ansatz ist für diejenigen Stabwerke ungeeignet, deren bezogene Längenänderungen ε_h für gerade Stäbe Null oder bekannt sind. Die $(3r + 2r_1) = (r + s + f_1 - m)$ notwendigen, voneinander unabhängigen, zwangläufigen Gebilde werden daher besser aus dem geometrisch bestimmten Hauptsystem C abgeleitet. Dabei wird jede unabhängige Komponente $\varphi_J, \psi_c, \varepsilon_h$ des Verschiebungszustandes des Hauptsystems der Reihe nach mit $\varphi_J \neq 0$ oder $\psi_c \neq 0$ oder $\varepsilon_h \neq 0$ einzeln zum Freiwert der virtuellen Verrückung. Ohne die s_1 bezogenen Längenänderungen ε_h der geraden Stäbe ($\varepsilon_h = 0$ nach S. 313) lassen sich r unabhängige Bewegungen an ebenso vielen zwangläufigen Gebilden Γ_J mit $\varphi_J \neq 0$ und $f = f_1 + s_2$ unabhängige Bewegungen $\psi_c \neq 0$ an ebenso vielen zwangläufigen Gebilden Γ_c unterscheiden. Sie werden nach S. 47 wiederum durch den Geschwindigkeitszustand $\dot{\varphi}_J = 1$ oder $\dot{\psi}_c = 1$ beschrieben, so daß die $r + f = r + f_1 + s_2$ Gleichgewichtsbedingungen für die an jeder der $r + f$ zwangläufigen Ketten angreifenden äußeren Kräfte (Belastung $\mathfrak{P}$, Anschlußkräfte $M_J^{(h)}, N_h$) aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nach (83) hervorgehen. Sie werden nach dem Superpositionsgesetz als Funktionen der unbekannten Komponenten des Verschiebungszustandes des geometrisch bestimmten Hauptsystems entwickelt.

$$\left.\begin{aligned} \delta A_J &= a_{JJ}\varphi_J + \sum a_{JK}\varphi_K + \sum a_{Jc}\psi_c + a_{J0} = 0, \\ \delta A_c &= a_{cc}\psi_c + \sum a_{cb}\psi_b + \sum a_{cJ}\varphi_J + a_{c0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{523}$$

Die Vorzahlen a_{JJ}, a_{JK}, a_{Jc} sind virtuelle Arbeiten der Anschlußkräfte des geometrisch bestimmten Hauptsystems infolge von $\varphi_J = 1$, $\varphi_K = 1$, $\psi_c = 1$ (Abb. 292 c bis f) bei einer Bewegung der kinematischen Kette Γ_J mit $\dot{\varphi}_J = \dot{1}_J$.



System und Hauptsystem mit $\varphi_J = 0$, $\psi_c = 0$, $r = 5$, $m = 0$, $f = 2$, $\psi_1 = \vartheta_1$, $\psi_2 = \vartheta_4$.

Knotenkette und Hauptsystem mit $\varphi_B = 1$.

Knotenkette und Hauptsystem mit $\psi_1 = 1$.

Abb. 292.

Ebenso ist das Absolutglied a_{J0} die virtuelle Arbeit der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Anschlußkräfte des geometrisch bestimmten Hauptsystems mit $\varphi_J = 0$, $\psi_c = 0$ infolge der Belastung $\mathfrak{P}$ (Abb. 292 b) bei einer Bewegung der Kette Γ_J. Diese besteht in einer Drehung des Knotens J (Abb. 293), so daß nur die Anschlußmomente am Knoten J und das Kräftepaar M_J in die virtuellen Arbeiten a_{JJ}, a_{JK}, a_{Jc} und a_{J0} ein-

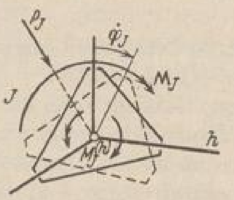


Abb. 293.

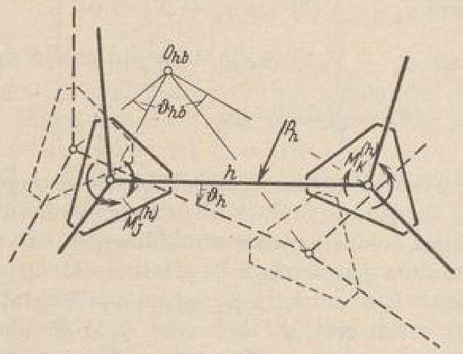


Abb. 294.

gehen. Der erste Index bezeichnet also Kette und Geschwindigkeitszustand, der zweite die Ursache der in dem Arbeitsausdruck enthaltenen Kräfte.

Die Vorzahlen a_{cc}, a_{cb}, a_{cJ} sind die virtuellen Arbeiten der Anschlußkräfte des Hauptsystems aus $\psi_c = 1$, $\psi_b = 1$, $\varphi_J = 1$ (Abb. 292 c bis f) bei der Bewegung der Kette Γ_c mit $\dot{\psi}_c = \dot{1}_c$. Das Absolutglied a_{c0} ist die virtuelle Arbeit der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Anschlußkräfte des Hauptsystems mit $\varphi_J = 0$, $\psi_c = 0$ infolge der Belastung $\mathfrak{P}$ (Abb. 292b) bei einer Bewegung der Kette Γ_c. Diese erfaßt meist nur einzelne Stäbe oder Stabgruppen. Jeder Stab (h) beschreibt dabei in der Regel eine Drehung ϑ_{hc} um einen der Momentanbewegung $\dot{\psi}_c = 1_c$ zugeordneten Pol O_{hc}, der nach Abschn. 13 aufgezeichnet wird (Abb. 294). Mit diesem sind auch die Winkelgeschwindigkeiten ν_{hc} der Stäbe (h) bestimmt. Die unabhängigen Komponenten $\dot{\varphi}_{Jc}, \dot{\psi}_{bc}$ der Bewegung sind dabei nach Vorschrift Null.

Die virtuelle Arbeit entsteht bei der Drehung eines Stabes $h = \overline{JK}$ mit $\varepsilon_h = 0$ aus den Anschlußmomenten $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$ und aus dem Moment $\mathsf{M}_{h,c}$ der Belastung $\mathfrak{P}_h$ in bezug auf den Pol O_{hc} der Momentanbewegung $\dot{\psi}_c = 1_c$. Mit $M_J^{(h)} + M_K^{(h)} = M^{(h)}$ ist daher

$$\delta A_c = \sum_c (\mathsf{M}_{h,c} + M^{(h)})\,\nu_{hc} = 0\,. \tag{524}$$

Ist der Stab (h) nach S. 311 im Querschnitt $T^{(h)}$ durch eine Führung unterbrochen $(\varepsilon_h \neq 0)$, so besitzen die beiden Teile zwar die gleiche Winkelgeschwindigkeit ν_{hc}, drehen sich jedoch um verschiedene Pole $O_{h'c}, O_{h''c}$. Die Momente $\mathsf{M}_{h',c}, \mathsf{M}_{h'',c}$ der Belastung $\mathfrak{P}_h$ und $\mathsf{M}^*_{h',c}, \mathsf{M}^*_{h'',c}$ der Längskräfte N_h in $T^{(h)}$ werden daher für die beiden Pole $O_{h'c}, O_{h''c}$ angeschrieben und folgendermaßen verwendet:

$$\delta A_c = \sum_c [(\mathsf{M}_{h',c} + \mathsf{M}_{h'',c}) + (\mathsf{M}^*_{h',c} + \mathsf{M}^*_{h'',c}) + M^{(h)}]\,\nu_{hc} = 0\,. \tag{525}$$

Die statischen Bedingungen zur Lösung lassen sich ebenso für das Hauptsystem B anschreiben. Dies wird an einem Beispiel im Abschn. 41 gezeigt. Im übrigen wird jedoch nur das Hauptsystem C und die zugeordnete Knotenkette als Berechnungsgrundlage verwendet, so daß die Bezeichnung C in Zukunft wegfällt.

Anwendung der Lösung. Die $(r + f)$ unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes, die Knotendrehwinkel φ_J und die Komponenten ψ_c sind die Wurzeln eines linearen Ansatzes. Sie werden durch Elimination oder durch Iteration der Lösung bestimmt. Mit ihnen können dann alle übrigen Komponenten $u_J, v_J, \vartheta_h, \varepsilon_h$ des Verschiebungszustandes nach (521) durch Superposition angegeben werden. Dasselbe gilt von den statisch unbestimmten Anschlußkräften $M_J^{(h)}$, die mit $M_{J0}^{(h)}$, φ_J, φ_K, ϑ_h und den Kontinuitätsbedingungen (518) oder (519) ebenfalls durch Superposition bestimmt sind.

Die statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$, $(J = A \ldots N)$ hängen in der Regel nur von wenigen Unbekannten φ_J, ψ_c ab, während die Gleichungen $\delta A_c = 0$ oft alle unabhängigen Komponenten φ_J, ψ_c enthalten. Der Ansatz B eignet sich daher nur für Stabwerke mit wenigen gekrümmten Stäben und einem kleinen Freiheitsgrad f_1 der Stabkette $\varepsilon_h = 0$. Er gewinnt damit aber gerade für diejenigen Stabwerke Bedeutung, deren statische Untersuchung mit den geometrischen Bedingungsgleichungen des Abschnitts 24 Schwierigkeiten bereitet. Die Lösung wird hier ebenso wie in den Abschnitten 27, 28 oft noch durch Symmetrie nach einer oder zwei Achsen in Verbindung mit Belastungsumordnung vereinfacht.

Der geometrische Charakter der Unbekannten erleichtert Schätzungen und Näherungslösungen. Die Vernachlässigung der Längenänderungen der geraden biegungssteifen Stäbe, welche von den statisch unbestimmten Anschlußkräften $N_K^{(h)}$ usw. herrühren, ist hierfür ein Beispiel. Dasselbe gilt für die Stabdrehwinkel ϑ_h statisch bestimmter oder unbestimmter Fachwerke mit $s \geq 2\,(r + r_1)$. Sie können zur Berechnung der Nebenspannungen durch steife Anschlüsse der Fachwerkstäbe aus einem Verschiebungsplan abgeleitet werden, der für die Stabkräfte N_{h0} und die Längenänderungen Δl_{h0} bei gelenkigen Stabknoten aufgezeichnet wird $(\vartheta_h = \vartheta_{h0})$.

Mohr, O.: Ziviling. Bd. 38 (1892) und Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1906. — Müller-Breslau, H.: Graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2 2. Abt. Leipzig 1908. — Bendixsen, A.: Die Methode der Alphagleichungen. Berlin 1914. — Marcus, H.: Die Einflußlinien mehrfach gestützter Rahmenträger. Berlin 1915. —

Ostenfeld, A.: Die Deformationsmethode. Berlin 1926. Außerdem Aufsätze über das gleiche Thema: Eisenbau 1921 S. 275; Bauing. 1923 S. 34. — Mann, L.: Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. Berlin 1927. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.

39. Das Stabwerk mit geraden Stäben.

Die Untersuchung eines Stabwerks mit geraden oder mit geraden und gekrümmten Stäben zeigt keine grundsätzlichen Unterschiede. Sie ist nur für gerade Stäbe einfacher und wird daher vorweggenommen. Das Stabwerk besteht in diesem Falle aus $s = s_1$ geraden Stäben, r Stabknoten mit steifen oder gelenkigen Anschlüssen und aus r_1 Gelenken. Die mit dem Knoten J steif verbundenen Stäbe sind entweder mit dem benachbarten Stabknoten K ebenfalls starr verbunden (Bezeichnung h) oder am benachbarten Stabknoten G durch ein Gelenk angeschlossen (Bezeichnung g). Andere Verbindungen sind selten. Stäbe mit freiem Ende werden als Teile des Stabknotens behandelt.

Hauptsystem und geometrische Superposition. Der Spannungszustand des Stabwerks ist äquivalent demjenigen einer Knotenkette, wenn die Anschlußmomente des Stabwerks zu den Lasten als äußere Kräfte hinzutreten. Der Verschiebungszustand ist durch r Knotendrehwinkel φ_J und $f = f_1$ voneinander unabhängige Komponenten ψ_c bestimmt. Sie werden in einem geometrisch bestimmten, der Knotenkette zugeordneten Hauptsystem mit $\varphi_J = 0$ $(J = A \ldots N)$, $\psi_c = 0$ $(c = 1 \ldots f)$ berechnet. f bezeichnet den Freiheitsgrad der Knotenkette mit $\varphi_J = 0$, $\varepsilon_h = 0$. In Übereinstimmung mit anderen Ansätzen der Baustatik werden stets die EJ_cfachen Komponenten des Verschiebungszustandes verwendet und diese in Zukunft durch φ_J, ϑ_h, ε_h, u_J bezeichnet. Das Vergleichsträgheitsmoment J_c wird nach S. 92 ausgewählt.

Die abhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes sind nach (521) lineare Funktionen der unbekannten Größen ψ_c $(c = 1 \ldots f)$

$$\vartheta_h = \vartheta_{h0} + \sum \vartheta_{hc}\psi_c, \qquad u_J = u_{J0} + \sum u_{Jc}\psi_c. \tag{526}$$

Die Stabdrehwinkel ϑ_{h0} und die Punktverschiebungen u_{J0} des geometrisch bestimmten Hauptsystems entstehen aus den Stützenverschiebungen $EJ_c\Delta_e$, den Längenänderungen $EJ_c\Delta l_{h0}$ infolge der Längskräfte N_{h0} und der Temperaturänderung t bei $\psi_c = 0$.

$$EJ_c\,\Delta l_{h0} = N_{h0}\frac{J_h}{F_h}l'_h + EJ_c\alpha_t t l_h. \tag{527}$$

Die Stabdrehwinkel ϑ_{h0} werden hieraus nach Abschn. 13 für jeden Stab numerisch berechnet oder durch einen Williotschen Verschiebungsplan für die Knotenkette zeichnerisch bestimmt. Die Vorzahlen ϑ_{hc} sind die Stabdrehwinkel des Hauptsystems für $\psi_c = 1$. Auch diese werden aus einem Verschiebungsplan oder durch Rechnung aus dem Polplan der $\psi_c \neq 0$ zugeordneten zwangläufigen Kette Γ_c des Hauptsystems erhalten.

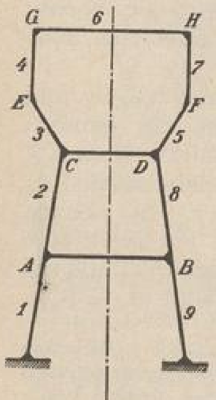
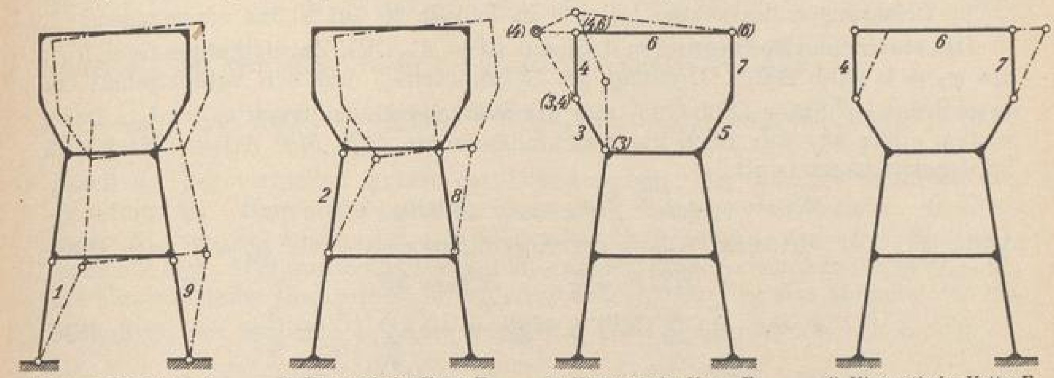


Abb. 295.

Der Rahmenbinder Abb. 295 enthält eine Stabkette mit fünf Freiheitsgraden. Die folgenden Komponenten des Verschiebungszustandes sind unabhängig voneinander.

ψ_1 absoluter Drehwinkel des Stabes 1,
ψ_2 Änderung des Stabzugwinkels $\sphericalangle BAC$,
ψ_3 Änderung des Stabzugwinkels $\sphericalangle DCE$,
ψ_4 parallele Verschiebung des Stabes 6 relativ zum Stab CD,
ψ_5 Änderung des Stabzugwinkels $\sphericalangle CDF$.

Um die für das Superpositionsgesetz (526) notwendigen Stabdrehwinkel ϑ_{hc} angeben zu können, sind die Verschiebungspläne der zwangläufigen Ketten $\Gamma_1 \ldots \Gamma_4$ für $\psi_1 = 1 \ldots \psi_4 = 1$ gezeichnet worden (Abb. 296). Sie stimmen mit den Ge-



a) Kinematische Kette Γ_1, b) Kinematische Kette Γ_2, c) Kinematische Kette Γ_3, d) Kinematische Kette Γ_4.
Abb. 296.

schwindigkeitsplänen für $\dot{\psi}_1 = 1 \ldots \dot{\psi}_4 = 1$ überein. Der Verschiebungszustand der zwangläufigen Kette Γ_5 ist zu demjenigen der Kette Γ_3 symmetrisch.

Die Anschlußkräfte am Stabknoten. Die $(r+f)$ unbekannten unabhängigen Komponenten φ_J, ψ_c werden aus ebenso vielen statischen Bedingungen

$$\delta A_J = 0, \quad (J = A \ldots N), \qquad \delta A_c = 0, \quad (c = 1 \ldots f) \tag{528}$$

berechnet, die für die äußeren Kräfte an $(r+f)$ zwangläufigen, voneinander unabhängigen Gebilden angeschrieben werden. Hierbei wirken neben der Belastung $(\mathfrak{P}_J, \mathfrak{P}_h)$ der Stabknoten und Stäbe die Anschlußmomente des Stabwerks als äußere Kräfte der Knotenkette mit. Diese sind Funktionen der Belastung, der Temperaturänderung t, Δt und der geometrischen Randwerte $\varphi_J, \varphi_K, \vartheta_h$ nach (505), (510). Die Superposition der Anteile liefert bei geraden Stäben mit konstantem Trägheitsmoment J_h, J_g und den auf ein Vergleichsträgheitsmoment J_c bezogenen reduzierten Längen $l'_h = l_h J_c / J_h$, $l'_g = l_g J_c / J_g$ folgende Ansätze:

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + \varphi_J M_{JJ}^{(h)} + \varphi_K M_{JK}^{(h)} + \vartheta_h M_{J\vartheta}^{(h)}, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \varphi_J M_{KJ}^{(h)} + \varphi_K M_{KK}^{(h)} + \vartheta_h M_{K\vartheta}^{(h)}. \end{aligned}\right\} \tag{529}$$

a) Steife Verbindung des Stabes (h) mit den Knoten J und K nach (505):

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + \varphi_J \frac{4}{l'_h} + \varphi_K \frac{2}{l'_h} - \vartheta_h \frac{6}{l'_h}, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \varphi_J \frac{2}{l'_h} + \varphi_K \frac{4}{l'_h} - \vartheta_h \frac{6}{l'_h}. \end{aligned}\right\} \tag{530}$$

b) Steife Verbindung des Stabes (h) mit dem elastisch drehbaren Knoten J und der starren Einspannung K nach (506):

$$M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)} + \varphi_J \frac{4}{l'_h} - \vartheta_h \frac{6}{l'_h}, \qquad M_K^{(h)} = M_{K0}^{(h)} + \varphi_J \frac{2}{l'_h} - \vartheta_h \frac{6}{l'_h}. \tag{531}$$

Die Anteile $M_{J0}^{(h)}, M_{K0}^{(h)}$ sind als Anschlußmomente des Hauptsystems $(\varphi_J = 0, \psi_c = 0)$ Einspannungsmomente des beiderseits eingespannten Stabes (h) infolge von $\mathfrak{P}_h$, Δt. Ihr Drehsinn ist nach S. 307 im Uhrzeigersinn positiv.

Die Tabelle 25 S. 323 enthält die Angaben für alle wichtigen Belastungen.

c) Steife Verbindung des Stabes (g) mit dem Knoten J und gelenkige Verbindung mit dem Knoten G nach (510):

$$M_J^{(g)} = M_{J0}^{(g)} + \varphi_J M_{JJ}^{(g)} + \vartheta_h M_{J\vartheta}^{(h)} = M_{J0}^{(g)} + \varphi_J \frac{3}{l'_g} - \vartheta_g \frac{3}{l'_g}. \tag{532}$$

Der Anteil $M_{J0}^{(g)}$ bedeutet hier als Anschlußmoment des Hauptsystems ($\varphi_J = 0$, $\psi_c = 0$) das Einspannungsmoment des einseitig eingespannten Stabes (g) infolge von $\mathfrak{P}_h$, Δt. Der Drehsinn ist ebenfalls im Uhrzeigersinn positiv. Die Ergebnisse $M_{J0}^{(g)}$ für zahlreiche Belastungen des Stabes (g) sind in Tabelle 26 auf S. 324 eingetragen.

Die statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$ $(J = A \ldots N)$. Zwangläufiges Gebilde Γ_J mit $\varphi_J \neq 0$ (Abb. 292c). Drehung des Stabknotens J um den Schnittpunkt der anschließenden Stäbe (Abb. 293) mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_J = \mathrm{i}_J$. Dabei leisten außer M_J nur noch die Anschlußmomente $M_J^{(h)}$, $M_J^{(g)}$ Arbeit. Nach dem Superpositionsgesetz ist

$$\delta A_J = \varphi_J a_{JJ} + \sum \varphi_K a_{JK} + \sum \psi_c a_{Jc} + a_{J0} = 0\,.$$

Anteil a_{JJ} der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\varphi_J = 1$ nach (530):

$$M_{JJ}^{(h)} = 4/l_h', \qquad M_{JJ}^{(g)} = 3/l_g',$$

$$a_{JJ} = -\mathrm{i}_J \sum_J (M_{JJ}^{(h)} + M_{JJ}^{(g)}) = -\mathrm{i}_J \sum_J \left(\frac{4}{l_h'} + \frac{3}{l_g'}\right). \tag{533}$$

Anteil a_{JK} der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\varphi_K = 1$:

$$M_{JK}^{(h)} = 2/l_h', \qquad a_{JK} = -\mathrm{i}_J M_{JK}^{(h)} = -\mathrm{i}_J \frac{2}{l_h'}. \tag{534}$$

Anteil a_{Jc} der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus den Stabdrehwinkeln ϑ_{hc}, ϑ_{gc} infolge von $\psi_c = 1$:

$$M_{Jc}^{(h)} = -\vartheta_{hc} \cdot 6/l_h', \qquad M_{Jc}^{(g)} = -\vartheta_{gc} \cdot 3/l_g',$$

$$a_{Jc} = -\mathrm{i}_J \sum_J (M_{Jc}^{(h)} + M_{Jc}^{(g)}) = +\mathrm{i}_J \sum_J \left(\frac{6\vartheta_{hc}}{l_h'} + \frac{3\vartheta_{gc}}{l_g'}\right). \tag{535}$$

Anteil a_{J0} der virtuellen Arbeit aus der Belastung M_J, $\mathfrak{P}_h$, Temperaturänderung $t, \Delta t$ und Stützenverschiebung: Die Anschlußmomente $M_{J0}^{(h)}$, $M_{J0}^{(g)}$ aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ der Stäbe und aus ungleichförmiger Temperaturänderung Δt sind in den Tabellen 25 und 26 enthalten. Die Anschlußmomente aus gleichförmiger Temperaturänderung und Stützenverschiebung werden nach (530) aus den Stabdrehwinkeln $\vartheta_{h0} \equiv \vartheta_{ht}, \vartheta_{hs}$ des Hauptsystems berechnet.

$$a_{J0} = -\mathrm{i}_J \left[\sum_J (M_{J0}^{(h)} + M_{J0}^{(g)}) - \sum_J \left(\frac{6\vartheta_{h0}}{l_h'} + \frac{3\vartheta_{g0}}{l_g'}\right) - \mathsf{M}_J\right]. \tag{536}$$

Die statischen Bedingungen $\delta A_c = 0$ $(c = 1 \ldots f)$. Das zwangläufige Gebilde Γ_c mit $\psi_c \neq 0$ (Abb. 292e) ist eine Knotenkette. Sie besteht aus den Knotenscheiben und einzelnen Stäben oder Stabgruppen, da die Bewegung in der Regel auf einen Abschnitt der Knotenkette beschränkt bleibt. Dabei können sich die abhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems (S. 311) ändern, dagegen sind alle unabhängigen Komponenten φ_J, ψ_b außer ψ_c Null. Der Geschwindigkeitszustand der Kette ist durch $\dot{\psi}_c = \mathrm{i}_c$ bestimmt. Dabei verschieben sich die Knotenscheiben parallel, während sich die Kettenstäbe (h) um die Pole O_{hc} mit den Winkelgeschwindigkeiten ν_{hc} drehen (Abb. 294). Diese werden nach Abschn. 13 aus dem Polplan der Kette berechnet. Bei dieser Bewegung entsteht virtuelle Arbeit durch die Belastung $\mathfrak{P}_h$ und durch die Anschlußmomente an den Stäben oder Stabgruppen (h).

$$\delta A_c = \psi_c a_{cc} + \sum \psi_b a_{cb} + \sum \varphi_J a_{cJ} + a_{c0} = 0\,.$$

Anteil a_{cc} der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\psi_c = 1$ mit den Drehwinkeln ϑ_{hc} nach S. 312 und (530):

$$M_{Jc}^{(h)} = M_{Kc}^{(h)} = -6\,\vartheta_{hc}/l_h', \qquad M_{Jc}^{(g)} = -3\,\vartheta_{gc}/l_g',$$

$$a_{cc} = \mathrm{i}_c \sum_c [\nu_{hc}(M_{Jc}^{(h)} + M_{Kc}^{(h)}) + \nu_{gc} M_{Jc}^{(g)}] = -\mathrm{i}_c \sum_c \left(\frac{12\,\vartheta_{hc}}{l_h'}\nu_{hc} + \frac{3\,\vartheta_{gc}}{l_g'}\nu_{gc}\right). \tag{537}$$

Anteil a_{cb} der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\psi_b = 1$ mit den Drehwinkeln ϑ_{hb}:

$$a_{cb} = -\mathrm{i}_c \sum_c \left(\frac{12\,\vartheta_{hb}}{l'_h} \nu_{hc} + \frac{3\,\vartheta_{gb}}{l'_g} \nu_{gc} \right). \tag{538}$$

Anteil a_{cJ} der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\varphi_J = 1$:

$$a_{cJ} = \mathrm{i}_c \sum_c [(M_{JJ}^{(h)} + M_{KJ}^{(h)}) \nu_{hc} + M_{JJ}^{(g)} \nu_{gc}] = \mathrm{i}_c \sum_c \left(\frac{6}{l'_h} \nu_{hc} + \frac{3}{l'_g} \nu_{gc} \right). \tag{539}$$

Anteil a_{c0} der virtuellen Arbeit der Belastung $\mathfrak{P}_h$, der Anschlußmomente aus Belastung $\mathfrak{P}_h$, Temperaturänderung $t, \Delta t$ und Stützenverschiebungen: Knotenlasten $\mathfrak{P}_J$ werden einem der anschließenden Stäbe zugewiesen. Die Biegungsmomente $M_{J0}^{(h)}, M_{J0}^{(g)}$ aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ und den Stabdrehwinkeln $\vartheta_{h0} = \vartheta_{ht}, \vartheta_{hs}$ des Hauptsystems sind auf S. 307 erörtert worden. $\mathsf{M}_{h,c}$ ist das Moment der Belastung $\mathfrak{P}_h$ des Stabes $h = \overline{JK}$ in bezug auf den Pol O_{hc}; $M_0^{(h)} = M_{J0}^{(h)} + M_{K0}^{(h)}$

$$a_{c0} = \mathrm{i}_c \sum_c \left[\left(M_0^{(h)} - \frac{12\,\vartheta_{h0}}{l'_h} + \mathsf{M}_{h,c} \right) \nu_{hc} + \left(M_{J0}^{(g)} - \frac{3\,\vartheta_{g0}}{l'_g} + \mathsf{M}_{g,c} \right) \nu_{gc} \right]. \tag{540}$$

Die Form der Matrix. Die Winkelgeschwindigkeiten ν_{hc} stimmen bis auf die Dimension mit den Stabdrehwinkeln überein, so daß

$$a_{Ac} = a_{cA}, \qquad a_{bc} = a_{cb}.$$

Das Ergebnis kann auch allgemein aus dem Gesetz über die Gegenseitigkeit der Wirkung von A. J. Maxwell bewiesen werden. In Anlehnung an (166) ist für zwei voneinander unabhängige, geometrisch verträgliche Verschiebungszustände eines Stabwerks

$$\sum \vartheta_I \mathfrak{M}_{I\,II} = \sum \vartheta_{II} \mathfrak{M}_{II\,I}. \tag{541}$$

Die Matrix der $(r+f)$ linearen Gleichungen $\delta A_J = 0$, $\delta A_b = 0$ ist daher zur Hauptdiagonale symmetrisch.

Polpläne zweier Stabketten mit einer unabhängigen Komponente.
Zwangläufige Kette Γ_1 mit $\psi_1 = 1$.

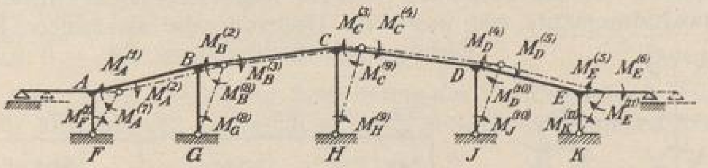


Abb. 297. (Riegelstäbe 1 bis 6, Pfosten 7 bis 11)
$\vartheta_9 = \psi_1 = 1$: $\nu_{01} \ldots \nu_{61} = 0$, $\nu_{71} = l_9/l_7$, $\nu_{81} = l_9/l_8$.

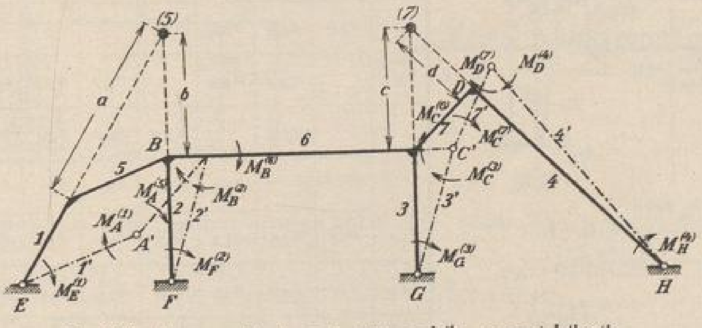


Abb. 298. $\vartheta_3 = \psi_1 = 1$: $\nu_{21} = 1$, $\nu_{51} = -l_3/b$, $\nu_{11} = +l_3/b \cdot a/l_1$,
$\nu_{71} = -l_3/c$, $\nu_{41} = +l_3/c \cdot d/l_4$.

Die Vorzahlen a_{Jc}, a_{bc} sind in der Regel von Null verschieden, dagegen sind alle Vorzahlen a_{JH} Null, wenn der Knoten H nicht mit dem Stabknoten J durch einen Stab verbunden ist. Die unabhängigen Komponenten φ_J des Verschiebungszustandes der Knotenkette sind daher nur zum Teil in den statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$ enthalten. Die Matrix besteht dann aus zwei Teilen, von denen der eine voll, der andere je nach der Struktur des Hauptsystems nur teilweise besetzt ist (s. u.).

Die formale Entwicklung der Matrix wird an einem Silorahmen Abb. 299 gezeigt. Der Verschiebungszustand der Knotenkette ist durch $r + j = 6 + 3$ unabhängige Komponenten bestimmt. Sie werden aus neun statischen Bedingungen berechnet:

$$\delta A_J = 0, \qquad J = B \ldots H; \qquad \delta A_c = 0, \qquad c = 1 \ldots 3.$$

Als Komponenten ψ_c der Knotenkette dienen

$$\psi_1 = \vartheta_5, \qquad \psi_2 = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \qquad \psi_3 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}.$$

Demnach sind die statischen Bedingungen für die zwangläufigen Gebilde $\Gamma_1 \ldots \Gamma_3$ notwendig. Die Stabdrehwinkel ϑ_{hc} und die Winkelgeschwindigkeiten v_{hc} werden

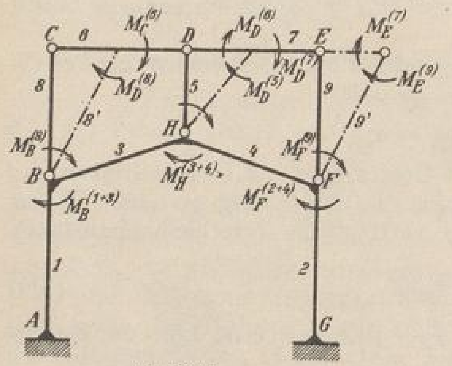


Abb. 299a.

Kette Γ_1: $\dot\psi_1 = v_{51} = 1$, $v_{81} = l_5/l_8$, $v_{91} = l_5/l_9$, $v_6 = v_7 = l_5$.

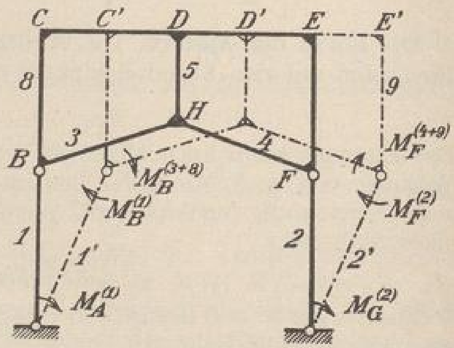


Abb. 299b.

Kette Γ_2: $\dot\psi_2 = v_{22} = 1 = v_{12}$, $v_3 = v_4 = \cdots v_9 = l_2$.

durch Rechnung aus den Polplänen Abb. 299 abgeleitet. Diese enthalten auch diejenigen Stabendmomente mit positivem Drehsinn, die als äußere Kräfte in die Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_c = 0$ usw. eingehen.

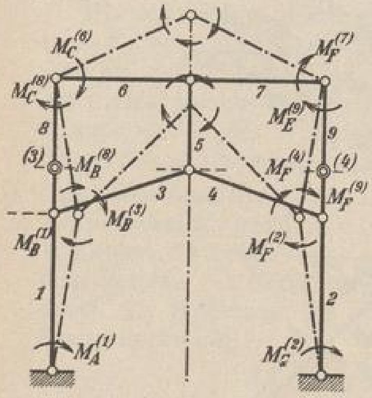


Abb. 299c.

Kette Γ_3: $\dot\psi_3 = v_{13} = -v_{23} = 1$,

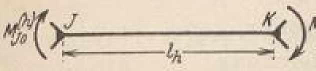
$$-v_{83} = +v_{93} = \frac{l_1}{l_8},$$

$$-v_{33} = +v_{43} = -v_{63} = +v_{73} = \frac{l_1}{l_8 - l_5},$$

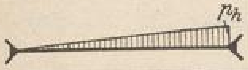
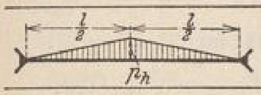
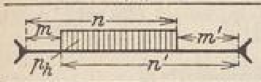
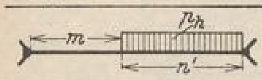
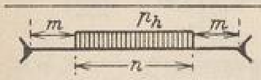
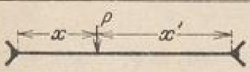
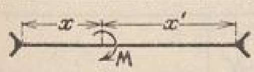
$$v_5 = \frac{l_1}{l_8 - l_5}\, l_8.$$

	φ_B	φ_C	φ_D	φ_H	φ_E	φ_F	ψ_1	ψ_2	ψ_3	
B	a_{BB}	a_{BC}		a_{BH}			a_{B1}	a_{B2}	a_{B3}	a_{B0}
C	a_{CB}	a_{CC}	a_{CD}				a_{C1}	a_{C2}	a_{C3}	a_{C0}
D		a_{DC}	a_{DD}	a_{DH}	a_{DE}		a_{D1}	a_{D2}	a_{D3}	a_{D0}
H	a_{HB}		a_{HD}	a_{HH}		a_{HF}	a_{H1}	a_{H2}	a_{H3}	a_{H0}
E			a_{ED}		a_{EE}	a_{EF}	a_{E1}	a_{E2}	a_{E3}	a_{E0}
F				a_{FH}	a_{FE}	a_{FF}	a_{F1}	a_{F2}	a_{F3}	a_{F0}
1	a_{1B}	a_{1C}	a_{1D}	a_{1H}	a_{1E}	a_{1F}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{10}
2	a_{2B}	a_{2C}	a_{2D}	a_{2H}	a_{2E}	a_{2F}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{20}
3	a_{3B}	a_{3C}	a_{3D}	a_{3H}	a_{3E}	a_{3F}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{30}

Tabelle 25. Randmomente des beiderseits eingespannten Stabes mit konstantem Trägheitsmoment.



$\frac{m}{l_h}=\mu;\quad \frac{n}{l_h}=\nu;\quad \frac{m'}{l_h}=\mu';\quad \frac{n'}{l_h}=\nu';\quad x/l_h=\xi;\quad x'/l_h=\xi'$

Belastung	$M_{J0}^{(h)}$	$M_{K0}^{(h)}$
	$-\frac{p_h l_h^2}{12}$	$+\frac{p_h l_h^2}{12}$
	$-\frac{p_h l_h^2}{30}$	$+\frac{p_h l_h^2}{20}$
	$-\frac{5}{96}p_h l_h^2$	$+\frac{5}{96}p_h l_h^2$
	$-\frac{p_h l_h^2}{12}[6(\nu^2-\mu^2)-8(\nu^3-\mu^3)+3(\nu^4-\mu^4)]$	$+\frac{p_h l_h^2}{12}[6(\nu'^2-\mu'^2)-8(\nu'^3-\mu'^3)+3(\nu'^4-\mu'^4)]$
	$-\frac{p_h l_h^2}{12}\nu'^3(1+3\mu)$	$+\frac{p_h l_h^2}{12}\nu'^2[1+\mu(2+3\mu)]$
	$-\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[\nu^2+6\mu(1-\mu)]$	$+\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[\nu^2+6\mu(1-\mu)]$
	$-\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[5\nu^2+6\mu(1-\mu)]$	$+\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[5\nu^2+6\mu(1-\mu)]$
	$-P l_h \omega'_\tau$	$+P l_h \omega_\tau$
	$+M\xi'(2-3\xi')$	$+M\xi(2-3\xi)$
Ungleichförmige Temperaturänderung um $t_u - t_o = \Delta t$	$-EJ_h\frac{\alpha_t \Delta t}{h_h}$	$+EJ_h\frac{\alpha_t \Delta t}{h_h}$

Die Anwendung der Theorie zur Berechnung der Verschiebungen und Schnittkräfte wird für alle äußeren Ursachen an zwei einfachen Beispielen gezeigt.

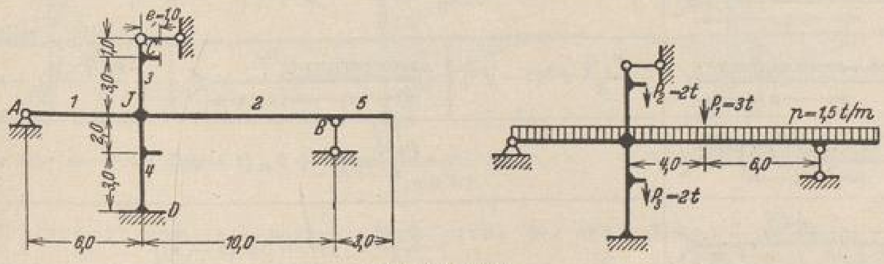


Abb. 300a und b.

Beispiel 1.

1. Bezeichnungen und Abmessungen (Abb. 300). (Allen Zahlen liegen die Einheiten t und m zugrunde).

$J_1 = 0{,}006$, $\quad J_2 = 0{,}020$, $\quad J_3 = 0{,}004$, $\quad J_4 = 0{,}005\ \text{m}^4$,
$J_c = 0{,}004$, $\quad E\,J_c = 2\,100\,000 \cdot 0{,}004 = 8\,400\ \text{tm}^2$;
$l_1' = 4{,}00$, $\quad l_2' = 2{,}00$, $\quad l_3' = 4{,}00$, $\quad l_4' = 4{,}00\ \text{m}$,
Trägerhöhe: $h_1 = 0{,}6$, $\quad h_2 = 0{,}85\ \text{m}$.

Die Verschiebungen v, u werden positiv bezeichnet, wenn sie nach unten oder nach rechts gerichtet sind.

Abszissen ξ sind nach rechts und abwärts,
Abszissen ξ' nach links und aufwärts positiv.

2. **Überzählige Größe und statische Bedingungsgleichung.**
Überzählige Größe: φ_J; Statische Bedingung: $a_{JJ}\,\varphi_J + a_{J0} = 0$.

$$\varphi_J = -\frac{a_{J0}}{a_{JJ}}; \qquad a_{JJ} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{l'_1} + \frac{3}{l'_2} + \frac{3}{l'_3} + \frac{4}{l'_4}\right) = -4{,}000\,.$$

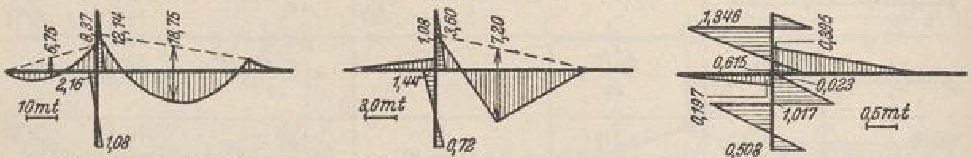
3. **Belastung der Stäbe 1, 2, 5 durch** $p = 1{,}5$ t/m (Abb. 301a).

$$M_{J0}^{(1)} = +\frac{p\,l_1^2}{8} = +6{,}750\,; \qquad M_{J0}^{(2)} = -\frac{p\,l_2^2}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{p\,l_5^2}{2} = -15{,}375 \text{ mt}\,.$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i}\,(M_{J0}^{(1)} + M_{J0}^{(2)}) = +8{,}625\,, \qquad \varphi_J = +2{,}156\,.$$

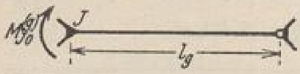
$$M_J^{(1)} = M_{J0}^{(1)} + \frac{3}{l'_1}\,\varphi_J = +8{,}367\,, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l'_2}\,\varphi_J = -12{,}141 \text{ mt}$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l'_3}\,\varphi_J = +1{,}617\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{4}{l'_4}\,\varphi_J = +2{,}156\,, \qquad M_D^{(4)} = \frac{2}{l'_4}\,\varphi_J = +1{,}078 \text{ mt}\,.$$

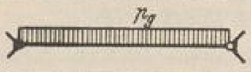
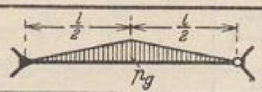
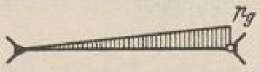
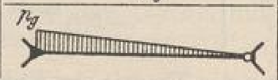
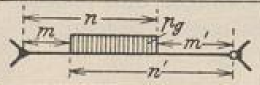
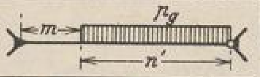
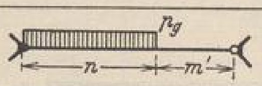
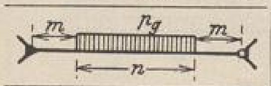
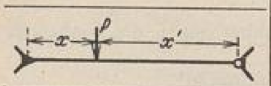
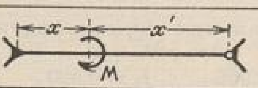


a) Biegungsmomente infolge p. b) Biegungsmomente infolge P_1. c) Biegungsmomente infolge $P_2 = P_3$.
Abb. 301.

Tabelle 26. **Randmoment des einseitig eingespannten Stabes mit konstantem Trägheitsmoment.**



$\frac{m}{l_g} = \mu;\quad \frac{n}{l_g} = \nu;\quad \frac{m'}{l_g} = \mu';\quad \frac{n'}{l_g} = \nu';\quad x/l_g = \xi;\quad x'/l_g = \xi'$

	$-\frac{p_g\,l_g^2}{8}$		$-\frac{5}{64}\,p_g\,l_g^2$
	$-\frac{7}{120}\,p_g\,l_g^2$		$-\frac{p_g\,l_g^2}{15}$
	$-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,[2\,(\nu'^2 - \mu'^2) - (\nu'^4 - \mu'^4)]$		
	$-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu'^2\,(2 - \nu'^2)$		$-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu^2\,(1 + \mu')^2$
	$-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu\,[\nu^2 + 6\,\mu\,(1 - \mu)]$		
	$-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu\,[5\,\nu^2 + 6\,\mu\,(1 - \mu)]$		
	$-\frac{P\,l_g}{2}\,\omega'_D$		$-\frac{\mathsf{M}}{2}\,\omega'_M$
Ungleichförmige Temperaturänderung um $t_u - t_o = \Delta t$	$-\frac{3}{2}\,E J_g\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h_g}$		

4. Belastung des Stabes 2 durch $P_1 = 3$ t (Abb. 301 b).

$$M_{J0}^{(2)} = -\frac{P_1 l_2}{2}\,\omega_D' = -\frac{3{,}0 \cdot 10{,}0}{2} \cdot 0{,}384 = -5{,}760 \text{ mt}.$$

$$a_{J0} = -\mathfrak{i} \cdot M_{J0}^{(2)} = +5{,}760\,; \qquad \varphi_J = +1{,}440\,.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\varphi_J = +1{,}080\,, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\varphi_J = -3{,}600 \text{ mt}.$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\varphi_J = +1{,}080\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{4}{l_4'}\varphi_J = +1{,}440\,, \qquad M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\varphi_J = +0{,}720 \text{ mt}.$$

5. Belastung der Stäbe 3 und 4 durch $P_2 = P_3 = 2$ t (Abb. 301 c).

$$M_{J0}^{(3)} = -\frac{P_2 e}{2}(3\,\xi^2 - 1) = -\frac{2{,}0 \cdot 1{,}0}{2}(3 \cdot 0{,}25^2 - 1) = +0{,}812 \text{ mt}.$$

$$M_{J0}^{(4)} = P_3 e\,\xi'(2 - 3\,\xi') = 2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}6\,(2 - 3 \cdot 0{,}6) = +0{,}240\,,$$

$$M_{D0}^{(4)} = P_3 e\,\xi(2 - 3\,\xi) = +0{,}640\,.$$

$$a_{J0} = -\mathfrak{i}\,(M_{J0}^{(3)} + M_{J0}^{(4)}) = -1{,}052\,; \qquad \varphi_J = -0{,}263\,.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\varphi_J = -0{,}197\,, \quad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\varphi_J = -0{,}395 \text{ mt}\,, \quad M_J^{(3)} = M_{J0}^{(3)} + \frac{3}{l_3'}\varphi_J = +0{,}615\,,$$

$$M_J^{(4)} = M_{J0}^{(4)} + \frac{4}{l_4'}\varphi_J = -0{,}023 \text{ mt}\,, \qquad M_D^{(4)} = M_{D0}^{(4)} + \frac{2}{l_4'}\varphi_J = +0{,}508\,.$$

6. Temperaturerhöhung aller Stäbe um $t = 15^0$ (Abb. 302a).

$$\alpha_t t = 0{,}00015\,, \qquad \alpha_t t\,E\,J_c = 1{,}26\,,$$

$$\vartheta_{1t} = -E\,J_c\,\frac{\alpha_t t\,l_4}{l_1} = -1{,}050\,, \qquad \vartheta_{2t} = +E\,J_c\,\frac{\alpha_t t\,l_4}{l_2} = +0{,}630\,,$$

$$\vartheta_{3t} = -E\,J_c\,\frac{\alpha_t t\,l_1}{l_3} = -1{,}890\,, \qquad \vartheta_{4t} = +E\,J_c\,\frac{\alpha_t t\,l_1}{l_4} = +1{,}512\,,$$

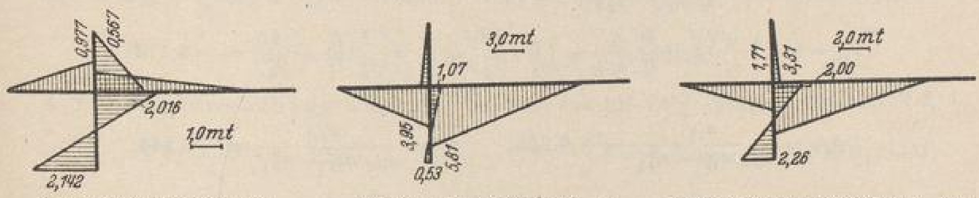
$$a_J = -\mathfrak{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\vartheta_{1t} - \frac{3}{l_2'}\vartheta_{2t} - \frac{3}{l_3'}\vartheta_{3t} - \frac{6}{l_4'}\vartheta_{4t}\right) = +1{,}008\,.$$

$$\varphi_J = +0{,}252\,,$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}(\varphi_J - \vartheta_{1t}) = +0{,}977\,, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}(\varphi_J - \vartheta_{2t}) = -0{,}567 \text{ mt}\,,$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}(\varphi_J - \vartheta_{3t}) = +1{,}606\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_{4t}) = -2{,}016\,,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(\varphi_J - 3\,\vartheta_{4t}) = -2{,}142\,.$$



a) Biegungsmomente infolge t. b) Biegungsmomente infolge $\Delta\,t$. c) Biegungsmomente infolge $\Delta\,x_d$, $\Delta\,y_d$.

Abb. 302.

7. Ungleichförmige Temperatur-Änderung der Stäbe 1 und 2 um $\Delta\,t = -10^0$.

$$M_{J\Delta t}^{(1)} = \frac{3}{2}E\,J_1\,\frac{\alpha_t\,\Delta\,t}{h_1} = -3{,}150\,, \qquad M_{J\Delta t}^{(2)} = -\frac{3}{2}E\,J_2\,\frac{\alpha_t\,\Delta\,t}{h_2} = +7{,}413 \text{ mt}\,,$$

$$a_{J\Delta t} = -\mathfrak{i}\,(M_{J\Delta t}^{(1)} + M_{J\Delta t}^{(2)}) = -4{,}263\,; \qquad \varphi_J = -1{,}066\,.$$

$$M_J^{(1)} = M_{J\Delta t}^{(1)} + \frac{3}{l_1'}\varphi_J = -3{,}949\,, \qquad M_J^{(2)} = M_{J\Delta t}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\varphi_J = +5{,}814 \text{ mt}\,,$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\varphi_J = -0{,}799\,, \quad M_J^{(4)} = \frac{4}{l_4'}\varphi_J = -1{,}066\,, \quad M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\varphi_J = -0{,}533 \quad \text{(Abb. 302b)}.$$

8. Verschiebung des Stützpunktes D um $\Delta x_d = -0{,}001$ m und $\Delta y_d = +0{,}002$ m.

$$\vartheta_{1s} = +E\,J_c\,\frac{\Delta y_d}{l_1} = +2{,}800\,, \qquad \vartheta_{2s} = -E\,J_c\,\frac{\Delta y_d}{l_2} = -1{,}680\,,$$

$$\vartheta_{4s} = -E\,J_c\,\frac{\Delta x_d}{l_4} = +1{,}680\,.$$

$$a_{Js} = -\mathrm{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\,\vartheta_{1s} - \frac{3}{l_2'}\,\vartheta_{2s} - \frac{6}{l_4'}\,\vartheta_{4s}\right) = +2{,}100\,; \qquad \varphi_J = +0{,}525\,.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,(\varphi_J - \vartheta_{1s}) = -1{,}706\,, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,(\varphi_J - \vartheta_{2s}) = +3{,}308 \text{ mt}\,,$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,\varphi_J = +0{,}394\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_{4s}) = -1{,}995\,,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(\varphi_J - 3\,\vartheta_{4s}) = -2{,}258 \quad \text{(Abb. 302c).}$$

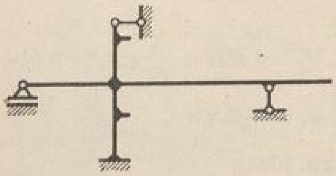


Abb. 303.

Beispiel 2.

1. Bezeichnungen und Abmessungen: Das System (Abb. 303) unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur durch ein bewegliches Lager A. Die Abmessungen und Belastungen sind unverändert.

2. Überzählige Größen: φ_J, $\psi_1 = \vartheta_4$.

Statische Bedingungen: $a_{JJ}\,\varphi_J + a_{J1}\,\psi_1 + a_{J0} = 0$,
$a_{1J}\,\varphi_J + a_{11}\,\psi_1 + a_{10} = 0$.

Zustand $\varphi_J = 1$:

$$M_{JJ}^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,, \qquad M_{JJ}^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,, \qquad M_{JJ}^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,, \qquad M_{JJ}^{(4)} = \frac{4}{l_4'}\,, \qquad M_{DJ}^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,.$$

Zustand $\psi_1 = 1$:

$$\vartheta_{11} = 0\,, \qquad \vartheta_{21} = 0\,, \qquad \vartheta_{31} = -\frac{l_4}{l_3}\,, \qquad \vartheta_{41} = 1\,;$$

$$M_{J1}^{(1)} = M_{J1}^{(2)} = 0\,, \qquad M_{J1}^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,\frac{l_4}{l_3}\,, \qquad M_{J1}^{(4)} = M_{D1}^{(4)} = -\frac{6}{l_4'}\,.$$

Vorzahlen der Bedingungsgleichungen:

$$a_{JJ} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{l_1'} + \frac{3}{l_2'} + \frac{3}{l_3'} + \frac{4}{l_4'}\right) = -4{,}000\,,$$

$$a_{J1} = -\mathrm{i}\left(+\frac{3}{l_3'}\,\frac{l_4}{l_3} - \frac{6}{l_4'}\right) = +0{,}562\,,$$

$$a_{11} = \left(-\mathrm{i}\,\frac{l_4}{l_3}\right)\left(+\frac{3}{l_3'}\,\frac{l_4}{l_3}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{12}{l_4'}\right) = -3\left(\frac{1}{l_3'}\,\frac{l_4^2}{l_3^2} + \frac{4}{l_4'}\right) = -4{,}172\,.$$

β-Vorzahlen:

$$\beta_{JJ} = \frac{a_{11}}{a_{JJ}\,a_{11} - a_{J1}^2} = -0{,}255\,, \qquad \beta_{11} = \frac{a_{JJ}}{a_{JJ}\,a_{11} - a_{J1}^2} = -0{,}244$$

$$\beta_{J1} = -\frac{a_{J1}}{a_{JJ}\,a_{11} - a_{J1}^2} = -0{,}034\,;$$

$$-\varphi_J = a_{J0}\,\beta_{JJ} + a_{10}\,\beta_{J1}\,, \qquad -\psi_1 = a_{J0}\,\beta_{1J} + a_{10}\,\beta_{11}\,.$$

3. Belastung der Stäbe 1, 2, 5 durch $p = 1{,}5$ t/m (Abb. 304a).

$$M_{J0}^{(1)} = +6{,}750\,, \qquad M_{J0}^{(2)} = -15{,}375 \text{ mt}\,.$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i}\,(M_{J0}^{(1)} + M_{J0}^{(2)}) = +8{,}625\,, \qquad a_{10} = 0\,.$$

$$-\varphi_J = a_{J0}\,\beta_{JJ} = -2{,}199\,, \qquad -\psi_1 = a_{J0}\,\beta_{1J} = -0{,}297\,.$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0\,, \qquad \vartheta_3 = -\frac{l_4}{l_3}\,\psi_1 = -0{,}371\,, \qquad \vartheta_4 = +0{,}297\,.$$

$$M_J^{(1)} = M_{J0}^{(1)} + \frac{3}{l_1'}\varphi_J = +8{,}399, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\varphi_J = -12{,}076,$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}(\varphi_J - \vartheta_3) = +1{,}928, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +1{,}754,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}654 \text{ mt}.$$

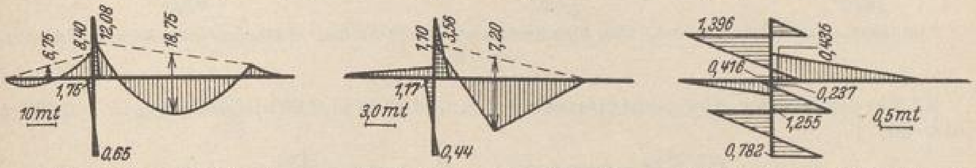
4. Belastung des Stabes 2 durch $P_1 = 3$ t (Abb. 304b).

$$M_{J0}^{(2)} = -5{,}760, \qquad a_{J0} = -\mathrm{i}\,M_{J0}^{(2)} = +5{,}76, \qquad a_{10} = 0,$$

$$\varphi_J = +1{,}469, \qquad \psi_1 = +0{,}198, \qquad \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \qquad \vartheta_3 = -0{,}247, \qquad \vartheta_4 = +0{,}198.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}(\varphi_J - \vartheta_1) = +1{,}102, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\varphi_J = -3{,}557 \text{ mt},$$

$$M_J^{(3)} = +1{,}287, \qquad M_J^{(4)} = +1{,}172, \qquad M_D^{(4)} = +0{,}438.$$



a) Biegungsmomente infolge p. b) Biegungsmomente infolge P_1. c) Biegungsmomente infolge $P_2 = P_3$.

Abb. 304.

5. Belastung der Stäbe 3 und 4 durch $P_2 = P_3 = 2$ t (Abb. 304c).

$$M_{J0}^{(3)} = +0{,}812, \qquad M_{J0}^{(4)} = +0{,}240, \qquad M_{D0}^{(4)} = +0{,}640 \text{ mt},$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i}\,(M_{J0}^{(3)} + M_{J0}^{(4)}) = -1{,}052,$$

$$a_{10} = -\mathrm{i}\,\frac{l_4}{l_3}(M_{J0}^{(3)} + \mathsf{M}_{3,1}) + \mathrm{i}\,(M_{J0}^{(4)} + M_{D0}^{(4)} + \mathsf{M}_{4,1})$$

$$= -\mathrm{i}\,\frac{4{,}00}{5{,}00}(0{,}812 + 2{,}0 \cdot 1{,}0) + \mathrm{i}\,(0{,}240 + 0{,}640 + 2{,}0 \cdot 1{,}0) = -0{,}636.$$

$$-\varphi_J = a_{J0}\,\beta_{JJ} + a_{10}\,\beta_{J1} = +0{,}290, \qquad -\psi_1 = a_{J0}\,\beta_{1J} + a_{10}\,\beta_{11} = +0{,}191,$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \qquad \vartheta_3 = -\frac{l_4}{l_3}\psi_1 = +0{,}239, \qquad \vartheta_4 = -0{,}191,$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\varphi_J = -0{,}218, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\varphi_J = -0{,}435,$$

$$M_J^{(3)} = M_{J0}^{(3)} + \frac{3}{l_3'}(\varphi_J - \vartheta_3) = +0{,}416, \qquad M_J^{(4)} = M_{J0}^{(4)} + \frac{2}{l_4'}(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}237,$$

$$M_D^{(4)} = M_{D0}^{(4)} + \frac{2}{l_4'}(\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}782 \text{ mt}.$$

6. Temperaturerhöhung aller Stäbe um $t = 15^0$ (Abb. 305a).

$$\vartheta_{1t} = -E\,J_c\,\frac{\alpha_t\,t\,l_4}{l_1} = -1{,}050, \qquad \vartheta_{2t} = +E\,J_c\,\frac{\alpha_t\,t\,l_4}{l_2} = +0{,}630, \qquad \vartheta_{3t} = \vartheta_{4t} = 0,$$

$$a_{Jt} = -\mathrm{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\vartheta_{1t} - \frac{3}{l_2'}\vartheta_{2t}\right) = +0{,}158, \qquad a_{1t} = 0,$$

$$\varphi_J = 0{,}040, \qquad \psi_1 = 0{,}005.$$

$$\vartheta_1 = -1{,}050, \qquad \vartheta_2 = +0{,}630, \qquad \vartheta_3 = -\frac{l_4}{l_3}\psi_1 = -0{,}007, \qquad \vartheta_4 = +0{,}005.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}(\varphi_J - \vartheta_1) = +0{,}818, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}(\varphi_J - \vartheta_2) = -0{,}885 \text{ mt},$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}(\varphi_J - \vartheta_3) = +0{,}035, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}032,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}012 \text{ mt}.$$

7. Ungleichförmige Temperaturänderung der Stäbe 1 und 2 um $\Delta t = -10^0$.

$$M_{J\Delta t}^{(1)} = -3{,}150, \qquad M_{J\Delta t}^{(2)} = +7{,}413 \text{ mt}.$$

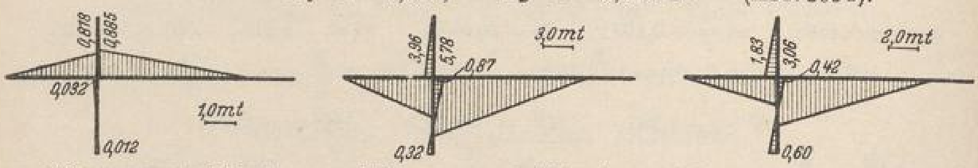
$$a_{J\Delta t} = -1\left(M_{J\Delta t}^{(1)} + M_{J\Delta t}^{(2)}\right) = -4{,}263, \qquad a_{1\Delta t} = 0;$$

$$\varphi_J = -1{,}086, \qquad \psi_1 = -0{,}146.$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \qquad \vartheta_3 = +0{,}183, \qquad \vartheta_4 = -0{,}146,$$

$$M_J^{(1)} = -3{,}965, \qquad M_J^{(2)} = +5{,}784, \qquad M_J^{(3)} = -0{,}952,$$

$$M_J^{(4)} = -0{,}867, \qquad M_D^{(4)} = -0{,}324 \text{ mt} \qquad \text{(Abb. 305b)}.$$



a) Biegungsmomente infolge t. b) Biegungsmomente infolge Δt. c) Biegungsmomente infolge Δx_d, Δy_d.

Abb. 305.

8. Verschiebung des Stützpunktes d um $\Delta x_d = -0{,}001$ m und $\Delta y_d = +0{,}002$ m (Abb. 305c).

$$\vartheta_{1s} = +E J_c \frac{\Delta y_d}{l_1} = +2{,}800, \qquad \vartheta_{2s} = -E J_c \frac{\Delta y_d}{l_2} = -1{,}680,$$

$$\vartheta_{4s} = -E J_c \frac{\Delta x_d}{l_4} = +1{,}680,$$

$$a_{Js} = -\mathrm{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\vartheta_{1s} - \frac{3}{l_2'}\vartheta_{2s} - \frac{6}{l_4'}\vartheta_{4s}\right) = +2{,}100, \qquad a_{1s} = \mathrm{i}\left(-\frac{12}{l_4'}\vartheta_{4s}\right) = -5{,}040,$$

$$\varphi_J = +0{,}362, \qquad \psi_1 = -1{,}160.$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1s} = +2{,}800, \qquad \vartheta_2 = \vartheta_{2s} = -1{,}680, \qquad \vartheta_3 = \vartheta_{31}\psi_1 = +1{,}450,$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_{4s} + \vartheta_{41}\psi_1 = +0{,}520,$$

$$M_J^{(1)} = -1{,}828, \qquad M_J^{(2)} = +3{,}063, \qquad M_J^{(3)} = -0{,}816 \text{ mt},$$

$$M_J^{(4)} = -0{,}418, \qquad M_D^{(4)} = -0{,}599.$$

Durchgehender Träger mit elastisch drehbaren Stützen. $\psi_c = 0$.

1. Geometrische Größen (alle Zahlen mit den Einheiten m und t), Abb. 306:
Trägheitsmoment der Riegel: $J_r = 0{,}120 \text{ m}^4$; Trägheitsmoment der Pfosten: $J_s = 0{,}240 \text{ m}^4$; $J_c = J_r = 0{,}120$; $l_1' = 14{,}0$; $l_3' = l_5' = l_7' = 12{,}5$; $l_9' = 8{,}325$; $l_2' = l_4' = l_6' = l_8' = 5{,}5$.

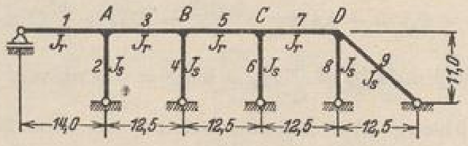


Abb. 306.

2. Überzählige Größen und statische Bedingungsgleichungen. Überzählige: φ_A, φ_B, φ_C, φ_D.
Matrix der statischen Bedingungen:

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	
A	a_{AA}	a_{AB}	·	·	a_{A0}
B	a_{BA}	a_{BB}	a_{BC}	·	a_{B0}
C	·	a_{BC}	a_{CC}	a_{CD}	a_{C0}
D	·	·	a_{CD}	a_{DD}	a_{D0}

$$a_{AA} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{l_1'} + \frac{3}{l_2'} + \frac{4}{l_3'}\right) = -1{,}079712,$$

$$a_{AB} = a_{BC} = a_{CD} = -\mathrm{i}\,\frac{2}{l_3'} = -0{,}160000,$$

$$a_{BB} = a_{CC} = -\mathrm{i}\left(\frac{4}{l_3'} + \frac{3}{l_4'} + \frac{4}{l_5'}\right) = -1{,}185454,$$

$$a_{DD} = -\mathrm{i}\left(\frac{4}{l_7'} + \frac{3}{l_8'} + \frac{3}{l_9'}\right) = -1{,}225814.$$

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D
A	− 1,079712	− 0,160000		
B	− 0,160000	− 1,185454	− 0,160000	
C		− 0,160000	− 1,185454	− 0,160000
D			− 0,160000	− 1,225814

3. Auflösung durch Entwicklung von β_{44} und β_{11} nach einem Kettenbruch:

$$\varkappa_{AB} = \frac{a_{BA}}{a_{AA}} = +0{,}148188; \qquad a_{BB}^{(1)} = a_{BB} - a_{AB}\varkappa_{AB} = -1{,}161744,$$

$$\varkappa_{BC} = \frac{a_{CB}}{a_{BB}^{(1)}} = +0{,}137724; \qquad a_{CC}^{(2)} = a_{CC} - a_{BC}\varkappa_{BC} = -1{,}163418,$$

$$\varkappa_{CD} = \frac{a_{DC}}{a_{CC}^{(2)}} = +0{,}137526; \qquad a_{DD}^{(3)} = a_{DD} - a_{CD}\varkappa_{CD} = -1{,}203810,$$

$$\beta_{DD} = \frac{1}{a_{DD}^{(3)}} = -0{,}830696,$$

$$\varkappa_{DC} = \frac{a_{CD}}{a_{DD}} = +0{,}130526; \qquad a_{CC}^{(1)} = a_{CC} - a_{DC}\varkappa_{DC} = -1{,}164570,$$

$$\varkappa_{CB} = \frac{a_{BC}}{a_{CC}^{(1)}} = +0{,}137390; \qquad a_{BB}^{(2)} = a_{BB} - a_{CB}\varkappa_{CB} = -1{,}163472,$$

$$\varkappa_{BA} = \frac{a_{AB}}{a_{BB}^{(2)}} = +0{,}137519; \qquad a_{AA}^{(3)} = a_{AA} - a_{BA}\varkappa_{BA} = -1{,}057709,$$

$$\beta_{AA} = \frac{1}{a_{AA}^{(3)}} = -0{,}945440.$$

Vorzahlen β_{JK}

− 0,137519 − 0,137390 − 0,130526

	a_{A0}	a_{B0}	a_{C0}	a_{D0}	
φ_A	− 0,945440	+ 0,130016	− 0,017863	+ 0,002332	− 0,148188
φ_B	+ 0,130016	− 0,877371	+ 0,120542	− 0,015734	− 0,137724
φ_C	− 0,017863	+ 0,120542	− 0,875243	+ 0,114242	− 0,137526
φ_D	+ 0,002332	− 0,015734	+ 0,114242	− 0,830696	

$$\varphi_J = -\sum \beta_{Jk}\, a_{k0}$$

4. Belastung durch Eigengewicht $g = 2{,}0$ t/m (Abb. 307a).

$$M_{A0}^{(1)} = +\frac{g\,l_1^2}{8} = +49{,}0000, \qquad M_{A0}^{(3)} = -\frac{g\,l_3^2}{12} = -26{,}0417 \text{ mt},$$

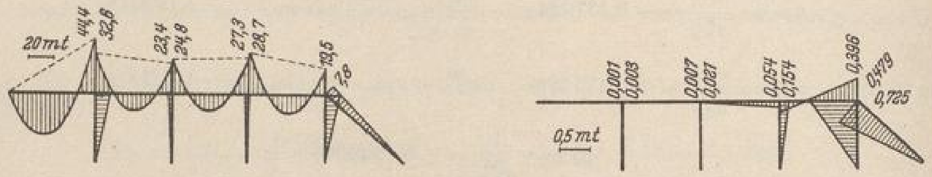
$$M_{B0}^{(3)} = -M_{B0}^{(5)} = M_{C0}^{(5)} = -M_{C0}^{(7)} = M_{D0}^{(7)} = +26{,}0417.$$

$$a_{A0} = -\mathrm{i}\,(M_{A0}^{(1)} + M_{A0}^{(3)}) = -22{,}9583; \qquad a_{B0} = -\mathrm{i}\,(M_{B0}^{(3)} + M_{B0}^{(5)}) = 0,$$

$$a_{C0} = 0; \qquad a_{D0} = -26{,}0417.$$

$$\varphi_A = -21{,}645, \quad \varphi_B = +2{,}575, \quad \varphi_C = +2{,}565, \quad \varphi_D = -21{,}579$$

$$M_A^{(1)} = M_{A0}^{(1)} + \frac{3}{l_1'}\varphi_A = +44{,}362\,; \qquad M_A^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\varphi_A = -11{,}806\,.$$
$$M_A^{(3)} = M_{A0}^{(3)} + \frac{2}{l_3'}(2\varphi_A + \varphi_B) = -32{,}556\,; \qquad M_B^{(4)} = \frac{3}{l_4'}\varphi_B = +1{,}405\,.$$
$$M_B^{(3)} = M_{B0}^{(3)} + \frac{2}{l_3'}(2\varphi_B + \varphi_A) = +23{,}403\,; \qquad M_C^{(6)} = \frac{3}{l_6'}\varphi_C = +1{,}399\,.$$
$$M_B^{(5)} = M_{B0}^{(5)} + \frac{2}{l_5'}(2\varphi_B + \varphi_C) = -24{,}808\,; \qquad M_D^{(8)} = \frac{3}{l_8'}\varphi_D = -11{,}770\,.$$
$$M_C^{(5)} = M_{C0}^{(5)} + \frac{2}{l_5'}(2\varphi_C + \varphi_B) = +27{,}275\,; \qquad M_D^{(9)} = \frac{3}{l_9'}\varphi_D = -\ 7{,}776\,.$$
$$M_C^{(7)} = M_{C0}^{(7)} + \frac{2}{l_7'}(2\varphi_C + \varphi_D) = -28{,}674\,.$$
$$M_D^{(7)} = M_{D0}^{(7)} + \frac{2}{l_7'}(2\varphi_D + \varphi_C) = +19{,}547\ \text{mt}\,.$$



a) Biegungsmomente infolge $g = 2$ t/m. Abb. 307. b) Biegungsmomente infolge $W = 1$ t.

5. Belastung durch eine waagerechte Kraft W in 1,6 m Höhe über dem Knoten D (Abb. 307b).

$$\mathsf{M}_D = 1{,}6\,W \qquad a_{D0} = 1{,}6\,W$$
$$\varphi_A = -0{,}003\,731\,W \qquad \varphi_C = -0{,}182\,787\,W$$
$$\varphi_B = +0{,}025\,174\,W \qquad \varphi_D = +1{,}329\,114\,W$$
$$M_A^{(1)} = -0{,}000\,799\,W \qquad M_C^{(5)} = -0{,}054\,464\,W$$
$$M_A^{(2)} = -0{,}002\,035\,W \qquad M_C^{(6)} = -0{,}099\,702\,W$$
$$M_A^{(3)} = +0{,}002\,833\,W \qquad M_C^{(7)} = +0{,}154\,166\,W$$
$$M_B^{(3)} = +0{,}007\,459\,W \qquad M_D^{(7)} = +0{,}396\,071\,W$$
$$M_B^{(4)} = +0{,}013\,731\,W \qquad M_D^{(8)} = +0{,}724\,971\,W$$
$$M_B^{(5)} = -0{,}021\,190\,W \qquad M_D^{(9)} = +0{,}478\,960\,W\ \text{mt}\,.$$

40. Die Auflösung des Ansatzes.

Geometrisch bestimmtes Hauptsystem. Die $(r + f)$ linearen Gleichungen des Ansatzes $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ werden mit dem Gaußschen Algorithmus (Abschnitt 29) aufgelöst. Die Rechnung ist formal einfach, aber bei einer größeren Anzahl von Unbekannten zeitraubend und durch ungünstige Fehlerfortpflanzung unter Umständen schwierig. Die Wurzeln des Ansatzes werden daher bei einzelnen Belastungsfällen oft schneller und zuverlässiger durch Iteration bestimmt (Abschnitt 30).

Um die Unbekannten auch bei zahlreichen Belastungsfällen in einfacher Weise anzugeben oder Einflußlinien der unbekannten Verschiebungen und Anschlußkräfte aufzuzeichnen, werden die Vorzahlen β_{JH}, β_{cb} der zu a_{JH}, a_{cb} konjugierten Matrix berechnet (Abschn. 25). Damit ist

$$\left.\begin{aligned} -\varphi_J &= \sum\beta_{JH}\,a_{H0} + \sum\beta_{Jb}\,a_{b0}, \qquad (H = 1\ldots N,\ \ b = 1\ldots f),\\ -\psi_c &= \sum\beta_{cH}\,a_{H0} + \sum\beta_{cb}\,a_{b0}, \qquad (H = 1\ldots N,\ \ b = 1\ldots f).\end{aligned}\right\} \quad (542)$$

Die Belastungsglieder a_{H0}, a_{b0} bedeuten nach S. 320 die virtuellen Arbeiten der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Anschlußkräfte $M_{J0}^{(h)}$ des geometrisch bestimmten Hauptsystems. Die Vorzahlen β_{JH}, β_{Jb} usw. sind durch die elastischen und kinematischen Eigenschaften des Systems bestimmt und unabhängig von der Belastung.

Berechnung und Nachprüfung der Schnittkräfte. Die Komponenten u_J, ϑ_h des Verschiebungszustandes des Stabwerks werden nach (521) aus den $(r + f)$ unabhängigen Unbekannten φ_J, ψ_c des Ansatzes durch Superposition berechnet. φ_J und ϑ_h bilden nach (500) die Grundlage zur Berechnung der statisch unbestimmten Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$, $N_K^{(h)}$ der Stäbe (h). Mit diesen sind die übrigen Schnittkräfte des Stabwerks statisch bestimmt.

Die statisch unbestimmten Anschlußkräfte sind nach S. 311 für einen geometrisch verträglichen Verschiebungszustand berechnet worden. Die Ergebnisse lassen sich daher nur durch statische Bedingungen nachprüfen. Jede beliebige Gruppe von inneren Kräften, welche durch die Abtrennung irgend eines Teiles des Stabwerks die Eigenschaft von äußeren Kräften erhalten, ist mit den Lasten und Schnittkräften des Abschnitts im Gleichgewicht und damit den Bedingungen (81) unterworfen. Ebenso ist die virtuelle Arbeit der Belastung und einer beliebigen Gruppe von Schnittkräften des Stabwerks, die als äußere Kräfte an der zugeordneten zwangläufigen Kette angreifen, gleich Null. Diese kann zur Nachprüfung des Spannungszustandes aus dem Stabwerk (S. 315) in beliebiger Weise abgeleitet werden. Die statischen Bedingungen $\delta A_c = 0$ enthalten dann neben der Belastung als äußere Kräfte nur Biegungsmomente des Stabwerks und können leicht angeschrieben werden. In der Regel begnügt man sich, das Gleichgewicht der Anschlußmomente an jedem Stabknoten nachzuweisen und damit die Lösung des Ansatzes numerisch zu prüfen.

Einflußlinien. Die Ordinaten der Einflußlinien der Komponenten φ_J, ψ_c können für ausgezeichnete Stellungen einer Einzellast $P_m = 1$ ebenso wie für eine ruhende Belastung angeschrieben werden. Jede Stellung liefert eine Gruppe von Belastungsgliedern a_{Jm}, a_{cm} und mit den Vorzahlen β_{JH}, β_{cH} der konjugierten Matrix die zugeordneten Komponenten φ_{Jm}, ψ_{cm}. Die Entwicklung der Belastungsglieder a_{Jm}, a_{cm} als stetige Funktion der Abszissen der Laststellung P_m ist ebenfalls denkbar, so daß die Einflußlinien φ_{Jm}, ψ_{cm} nach (542) durch Superposition einzelner mit Beiwerten erweiterter Funktionen angegeben werden können.

Die Lösung der Aufgabe wird durch das Maxwellsche Gesetz über die Gegenseitigkeit der Formänderung wesentlich vereinfacht. Nach diesem ist die virtuelle Arbeit eines Kräftepaares $\mathsf{M}_J = 1$ mt am Stabknoten J bei der Winkeldrehung φ_J infolge der wandernden Einzellast $P_m = 1$ t gleich der virtuellen Arbeit dieser Einzellast bei der Verschiebung w_{mJ} des Punktes m des Lastgurtes infolge des Kräftepaares 1 mt in J:

$$1_J\,\varphi_{Jm} = 1_m\,w_{mJ}\,. \tag{543}$$

Die Einflußlinie φ_{Jm} wird daher als Biegelinie w_{mJ} des Lastgurtes des Stabwerks für $\mathsf{M}_J = 1$ mt aufgezeichnet. Die Belastung $\mathsf{M}_J = 1$ mt liefert außer $a_{J0} = 1$ keine Belastungsglieder, so daß die zugeordneten Komponenten des Verschiebungszustandes φ_{HJ}, ψ_{cJ} mit den negativen Vorzahlen der konjugierten Matrix übereinstimmen $(\varphi_{HJ} = -\beta_{HJ}, \psi_{cJ} = -\beta_{cJ})$.

Dasselbe gilt für die Einflußlinie ψ_{cm}, da die virtuelle Arbeit der Belastungseinheit des Punktes, der Geraden, des Punkte- oder Geradenpaares 1_c in t oder mt bei der Verschiebung der Knotenkette ψ_{cm} durch die wandernde Last $P_m = 1$ t gleich der virtuellen Arbeit dieser Last bei den Verschiebungen w_{mc} der Punkte m des Lastgurtes durch die Belastungseinheit 1_c ist:

$$1_c\,\psi_{cm} = 1_m\,w_{mc}\,. \tag{544}$$

Die Einflußlinie ψ_{cm} wird demnach als Biegelinie w_{mc} des Lastgurtes für den Belastungszustand $\mathbf{1}_c$, der Einheit des Punktes, der Geraden usw. mit dem Belastungsglied $a_{c0} = 1$ gefunden. Die Komponenten φ_{Jc}, ψ_{bc} sind demnach die negativen Vorzahlen β_{Jc}, β_{bc} usw. der konjugierten Matrix.

In derselben Weise wird auch die Einflußlinie eines Stabdrehwinkels ϑ_h erhalten, denn

$$\mathbf{1}_h \vartheta_{hm} = \mathbf{1}_m w_{mh}. \tag{545}$$

Die Einflußlinie ϑ_{hm} wird demnach als Biegelinie w_{mh} des Lastgurtes gefunden, die für die Belastungseinheit $\mathbf{1}_h$, also für das Kräftepaar $1/l_h$ an den Stabenden (h) berechnet wird. In diesem Falle sind alle Belastungsglieder a_{c0} von Null verschieden, welche aus Stabketten mit $\vartheta_{hc} \neq 0$ hervorgegangen sind.

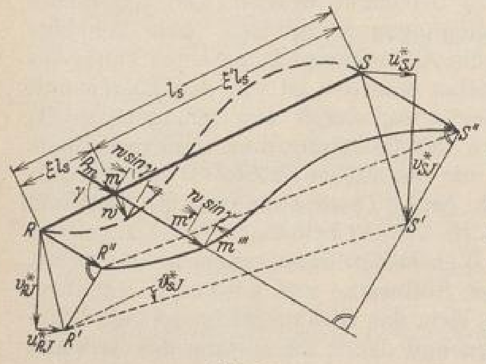


Abb. 308.

Die Biegelinie des Lastgurtes in Richtung der wandernden Einzellast ist bei einem Belastungszustand $\mathbf{1}_J$, $\mathbf{1}_c$ durch die geometrischen Randbedingungen φ^*_{RJ}, ϑ^*_{sJ} und φ^*_{Rc}, ϑ^*_{sc} eines jeden Stabes $\overline{RS} = l_s$ bestimmt. Die Stabdrehwinkel ϑ^*_{sJ}, ϑ^*_{sc} liefern den Geradenzug $R'S'$ (Abb. 308) mit den Verschiebungen u^*_{RJ}, v^*_{RJ} und u^*_{Rc}, v^*_{Rc} und damit den Verschiebungsplan der Knotenkette, aus dem die Verschiebungen RR'', SS'', mm'' durch Projektion auf die Kraftrichtung entstehen. Sie ergeben den Geradenzug $R''S''$, von welchem die Komponenten $w \sin\gamma$ der Stabverbiegung aufgetragen werden. Die Ordinaten w, senkrecht zu RS gemessen, erhalten folgende Größe:

a) Der Stab (s) ist mit den Knoten R und S steif verbunden:

$$w = \frac{l_s l'_s}{6} (M^{(s)}_{RJ} \omega'_D - M^{(s)}_{SJ} \omega_D)$$

oder mit

$$M^{(s)}_{RJ} = \frac{2}{l'_s} (2\varphi^*_{RJ} + \varphi^*_{SJ} - 3\vartheta^*_{sJ}), \quad M^{(s)}_{SJ} = \frac{2}{l'_s} (\varphi^*_{RJ} + 2\varphi^*_{SJ} - 3\vartheta^*_{sJ}),$$

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{l_s}{3} [(2\varphi^*_{RJ} + \varphi^*_{SJ} - 3\vartheta^*_{sJ}) \omega'_D - (\varphi^*_{RJ} + 2\varphi^*_{SJ} - 3\vartheta^*_{sJ}) \omega_D] \\ &= l_s (\varphi^*_{RJ} \omega'_\tau - \varphi^*_{SJ} \omega_\tau + \vartheta^*_{sJ} \omega''_D). \end{aligned}\right\} \tag{546}$$

Der erste Ansatz wird für Stäbe (s) mit $\vartheta^*_{sJ} \neq 0$, der zweite für Stäbe (s) mit $\vartheta^*_{sJ} = 0$ verwendet. Beide gelten ebenso für die Ursache c wie für J.

b) Der Stab (s) ist mit dem Knoten R steif, mit dem Knoten S frei drehbar verbunden:

$$w = \frac{l_s l'_s}{6} M^{(s)}_{RJ} \omega'_D \quad \text{oder mit} \quad M^{(s)}_{RJ} = \frac{3}{l'_s} (\varphi^*_{RJ} - \vartheta^*_{sJ}),$$

$$w = \frac{l_s}{2} (\varphi^*_{RJ} - \vartheta^*_{sJ}) \omega'_D. \tag{547}$$

Die gesuchte Verschiebung $\overrightarrow{mm'''}$ des Punktes m in Richtung der wandernden Kraft P entsteht durch Addition der gerichteten Strecken $\overrightarrow{mm''}$ und $\overrightarrow{w \sin\gamma}$. Die Lösung ist bei senkrechter Belastung eines waagerechten Stabes einfacher und durch Abb. 309 beschrieben.

Einflußlinien der Anschlußmomente $M_J^{(h)}$.

a) Der Stab $l_h = \overline{JK}$ ist mit den Stabknoten J und K steif verbunden (Abb. 310a). Anschlußmomente nach (530)

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + \frac{2}{l_h'}(2\varphi_J + \varphi_K - 3\vartheta_h) = M_{J0}^{(h)} + M_{J*}^{(h)}, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \frac{2}{l_h'}(\varphi_J + 2\varphi_K - 3\vartheta_h) = M_{K0}^{(h)} + M_{K*}^{(h)}. \end{aligned}\right\} \qquad (548)$$

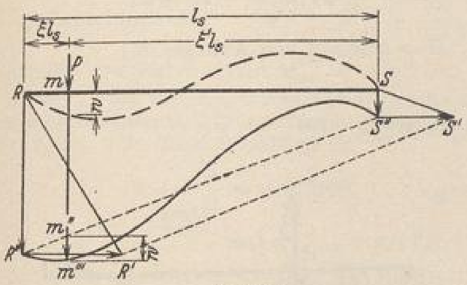


Abb. 309.

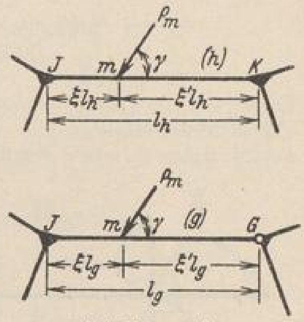


Abb. 310a und b.

Die Einflußlinien bestehen daher im Bereich des Stabes (h) aus den Ordinaten $M_{J0}^{(h)}$, $M_{K0}^{(h)}$ des beiderseits starr eingespannten Stabes (h) und aus den Einflußgrößen $M_{J*}^{(h)}$, $M_{K*}^{(h)}$, die sich aus den Einflußlinien φ_J, φ_K, ϑ_h zusammensetzen. Dieser Anteil ist außerhalb des Abschnitts (h) des Lastgurtes allein vorhanden.

$$M_{J0}^{(h)} = -1 \sin\gamma \cdot l_h \omega_R \xi' = -l_h \sin\gamma\, \omega_r', \qquad M_{K0}^{(h)} = + l_h \sin\gamma\, \omega_r. \qquad (549)$$

Die Einflußlinien $M_{J*}^{(h)}$, $M_{K*}^{(h)}$ werden nach S. 331 als Biegelinien des Lastgurtes für die äußeren Kräfte

$$\mathsf{M}_J = 4/l_h', \quad \mathsf{M}_K = 2/l_h', \quad \mathsf{M}_h = -6/l_h'$$

und für

$$\mathsf{M}_J = 2/l_h', \quad \mathsf{M}_K = 4/l_h', \quad \mathsf{M}_h = -6/l_h'$$

gewonnen. Die erste liefert die Belastungsglieder $a_{J0} = 4/l_h'$, $a_{K0} = 2/l_h'$ und die Belastungsglieder $a_{c0} = -\vartheta_{hc} \cdot 6/l_h'$ nach den Angaben auf S. 321. Ähnliches gilt für die Biegelinie $M_{K*}^{(h)}$.

Die Knoten- und Stabdrehwinkel $\varphi_{R,Jh}^*$, $\varphi_{S,Jh}^*$, $\vartheta_{s,Jh}^*$ des Anteils $M_{J*}^{(h)}$ und $\varphi_{R,Kh}^*$, $\varphi_{S,Kh}^*$, $\vartheta_{s,Kh}^*$ des Anteils $M_{K*}^{(h)}$ eines Stabes (s) werden aus der konjugierten Matrix der statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ berechnet. Die Stabdrehwinkel $\vartheta_{s,Jh}^*$, $\vartheta_{s,Kh}^*$ bestimmen den Geradenzug $R'S'$ und die Ordinaten mm'', welche durch die Ordinaten $w \sin\gamma$ nach S. 332 zu mm''' ergänzt werden (Abb. 308).

b) Der Stab (g) ist am Stabknoten J steif, am Stabknoten G frei drehbar angeschlossen (Abb. 310b). Anschlußmoment nach (532):

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(g)} &= M_{J0}^{(g)} + \frac{3}{l_g'}(\varphi_J - \vartheta_g) = M_{J0}^{(g)} + M_{J*}^{(g)}, \\ M_{J0}^{(g)} &= -\frac{l_g}{2}\omega_D'. \end{aligned}\right\} \qquad (550)$$

Die Einflußlinien $M_{J*}^{(g)}$ werden nach S. 331 als die Biegelinien des Lastabzuges für die äußeren Kräfte $\mathsf{M}_J = 3/l_g'$, $\mathsf{M}_h = -3/l_g'$ angegeben. Dabei entstehen das Belastungsglied $a_{J0} = 3/l_g'$ und die Belastungsglieder $a_{c0} = -\vartheta_{gc} \cdot 3/l_g'$, die in Verbindung mit der konjugierten Matrix der Bedingungsgleichungen $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ wiederum Komponenten $\varphi_{R,Jg}^*$, $\varphi_{S,Jg}^*$, $\vartheta_{s,Jg}^*$ liefern. Damit ist der Verschiebungsplan $R'S'$ bestimmt, aus dem sich wieder die Ordinaten mm''' der Funktion $M_{J*}^{(g)}$ nach S. 332 ergeben (Abb. 308).

Die **Einflußlinien** an den Stabwerken Abb. 300 und 303 für senkrechte Lasten im Bereich der Stäbe (*1*), (*2*), (*5*) und für waagerechte Lasten im Bereich der Stäbe (*3*), (*4*).

1. System a (Abb. 300a).

a) Einflußlinie φ_J. Die Einflußlinie φ_{Jm} wird als Biegelinie w_{mJ} der Stäbe (*1*) bis (*5*) infolge der Belastung $\mathsf{M}_J = 1$ mt aufgezeichnet (Abb. 311a).

$$a_{J0} = +\dot{\mathrm{l}}_J M_J = +1\,; \qquad \varphi^*_{JJ} = -a_{J0}/a_{JJ} = +0{,}250\,,$$

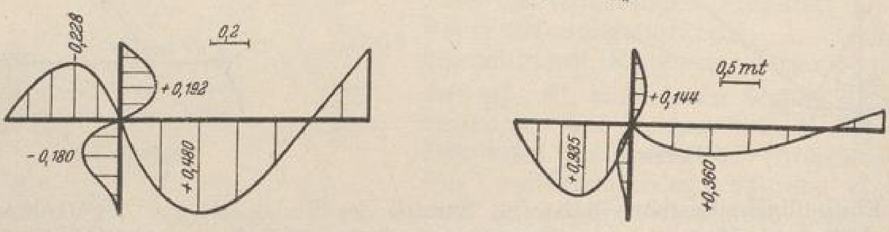
$$w_1 = \frac{l_1}{2}\varphi^*_{JJ}\,\omega_D = -0{,}750\,\omega_D\,, \qquad w_2 = +\frac{l_2}{2}\varphi^*_{JJ}\,\omega'_D = +1{,}250\,\omega'_D\,,$$

$$w_3 = +\frac{l_3}{2}\varphi^*_{JJ}\,\omega_D = +0{,}500\,\omega_D\,, \qquad w_4 = -l_4\,\varphi^*_{JJ}\,\omega'_\tau = -1{,}250\,\omega'_\tau\,,$$

$$w_5 = +\varphi^*_{BJ}\,z \quad -\frac{\varphi^*_{JJ}}{2}\,z = -0{,}125\,z\,, \ (z = \text{Abstand von Auflager } B.)$$

b) Einflußlinie $M_J^{(1)}$.

$$M_J^{(1)} = M_{J0}^{(1)} + 3/l'_1\cdot\varphi_J = M_{J0}^{(1)} + M_{J*}^{(1)}\,.$$



a) Einflußlinie φ_J. b) Einflußlinie $M_J^{(1)}$.

Abb. 311.

Im Bereich des Stabes (*1*) ist $M_{J0}^{(1)} = l_1/2\cdot\omega_D$, im Bereich der übrigen Stäbe jedoch nicht vorhanden. Der zweite Anteil $M_{J*}^{(1)}$, die mit $3/l'_1$ erweiterte Einflußlinie φ_J, wird als Biegelinie infolge $\mathsf{M}_J = 3/l'_1$ dargestellt (Abb. 311b).

$$\text{Stab } 1\colon\ M_J^{(1)} = \frac{l_1}{2}\,\omega_D + \frac{3}{l'_1}\,\varphi_J = +2{,}4375\,\omega_D\,, \qquad \text{Stab } 2\colon\ M_J^{(1)} = \frac{3}{l'_1}\,\varphi_J = +0{,}9375\,\omega'_D\,,$$

$$\text{Stab } 3\colon\ M_J^{(1)} = \frac{3}{l'_1}\,\varphi_J = +0{,}375\ \omega_D\,, \qquad \text{Stab } 4\colon\ M_J^{(1)} = \frac{3}{l'_1}\,\varphi_J = -0{,}9375\,\omega'_\tau\,,$$

$$\text{Stab } 5\colon\ M_J^{(1)} = \frac{3}{l'_1}\,\varphi_J = -0{,}094\,z\,.$$

2. System b (Abb. 303).

a) Die Einflußlinie φ_J wird als Biegelinie infolge $\mathsf{M}_J = 1$ mt aufgezeichnet (Abb. 312a).

$$a_{J0} = +\dot{\mathrm{l}}_J\cdot 1 = 1\,. \qquad a_{10} = 0\,.$$

$$\varphi^*_{JJ} = -\beta_{JJ} = 0{,}2550\,, \qquad \psi^*_{1J} = -\beta_{1J} = 0{,}0344\,,$$

$$\vartheta^*_{1J} = \vartheta^*_{2J} = 0\,, \qquad \vartheta^*_{3J} = \vartheta_{31}\,\psi^*_{1J} = -0{,}0430\,, \qquad \vartheta^*_{4J} = \vartheta_{41}\,\psi^*_{1J} = +0{,}0344\,.$$

Randbedingungen der Biegelinien: die lotrechten Verschiebungen der Knoten A, J, B und die waagerechten Verschiebungen u^*_{CJ}, u^*_{DJ} sind Null; $u^*_{JJ} = l_4\,\vartheta^*_{4J} = +0{,}1720$.

$$w_1 = -\frac{l_1}{2}\,\varphi^*_{JJ}\,\omega_D = -0{,}7644\,\omega_D\,, \qquad w_2 = +\frac{l_2}{2}\,\varphi^*_{JJ}\,\omega'_D = +1{,}2743\,\omega'_D\,,$$

$$w_3 = +0{,}1720\,\xi + \frac{l_3}{2}\,(\varphi^*_{JJ} - \vartheta^*_{3J})\,\omega_D = 0{,}1720\,\xi + 0{,}5957\,\omega_D\,,$$

$$w_4 = +0{,}1720\,\xi' - l_4(\varphi^*_{JJ}\,\omega'_\tau + \vartheta^*_{4J}\,\omega''_D) = 0{,}1720\,\xi' - 1{,}2750\,\omega'_\tau - 0{,}1720\,\omega''_D\,,$$

$$w_5 = +\varphi^*_{BJ}\,z = -\frac{\varphi^*_{JJ}}{2}\,z = -0{,}1275\,z\,.$$

b) Die Einflußlinie ψ_1 wird als Biegelinie der Stäbe (*1*) bis (*5*) infolge eines Kräftepaares $\mathsf{M}_4 = 1$ mt am Stab (*4*) aufgezeichnet (Abb. 312b).

$$a_{J0} = 0\,, \qquad a_{10} = 1\,,$$

$$\varphi^*_{J1} = -\beta_{J1} = +0{,}0344\,, \qquad \psi^*_{11} = -\beta_{11} = +0{,}2445\,,$$

$$\vartheta^*_{11} = \vartheta^*_{21} = 0\,, \qquad \vartheta^*_{31} = \vartheta_{31}\,\psi^*_{11} = -0{,}3056\,, \qquad \vartheta^*_{41} = +0{,}2445\,.$$

Waagerechte Verschiebung des Knotens J: $u^*_{J1} = l_4\,\vartheta^*_{41} = 1{,}2225$

$$w_1 = -\frac{l_1}{2}\,\varphi^*_{J1}\,\omega_D = -0{,}1032\,\omega_D\,, \qquad w_2 = +\frac{l_2}{2}\,\varphi^*_{J1}\,\omega'_D = +0{,}1720\,\omega'_D\,,$$

$$w_3 = +1{,}2225\,\xi + \frac{l_3}{2}\,(\varphi^*_{J1} - \vartheta^*_{31})\,\omega_D = 1{,}2225\,\xi + 0{,}6800\,\omega_D\,,$$

$$w_4 = +1{,}2225\,\xi' - l_4\,(\varphi^*_{J1}\,\omega'_\tau + \vartheta^*_{41}\,\omega''_D) = 1{,}2225\,\xi' - 0{,}1720\,\omega'_\tau - 1{,}2225\,\omega''_D\,,$$

$$w_5 = \varphi^*_{B1}\,z = -\frac{\varphi^*_{J1}}{2}\,z = -0{,}0172\,z\,.$$

c) Einflußlinie $M_J^{(3)}$. $\quad M_J^{(3)} = M_{J0}^{(3)} + \frac{3}{l'_3}\,(\varphi_J - \vartheta_3) = M_{J0}^{(3)} + M_{J*}^{(3)}$.

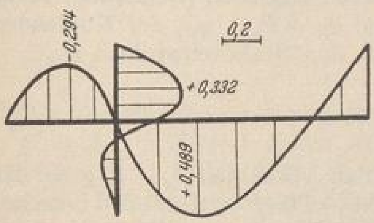
Im Bereich des Stabes (*3*) ist $M_{J0}^{(3)} = -\,l_3/2\cdot\omega_D$, im Bereich der übrigen Stäbe Null. Der zweite Anteil $M_{J*}^{(3)}$, die mit $3/l'_3$ erweiterte Differenz der Einflußlinien φ_J und ϑ_3, wird als Biegelinie infolge des Momentes $3/l'_3$ am Knoten J und des Kräftepaares $-\,3/l'_3$ am Stabe (*3*) aufgezeichnet (Abb. 312c). Für diese Belastung ist

$$a_{J0} = \frac{3}{l'_3} = +0{,}7500\,, \qquad a_{10} = \left(-1\,\frac{l_4}{l_3}\right)\left(-\frac{3}{l'_3}\right) = +0{,}9375\,,$$

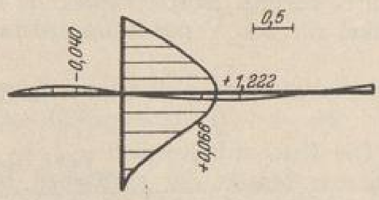
$$-\,\varphi^*_{J,J3} = a_{J0}\,\beta_{JJ} + a_{10}\,\beta_{J1} = -0{,}2235\,,$$

$$-\,\psi^*_{1,J3} = a_{J0}\,\beta_{1J} + a_{10}\,\beta_{11} = -0{,}2550\,,$$

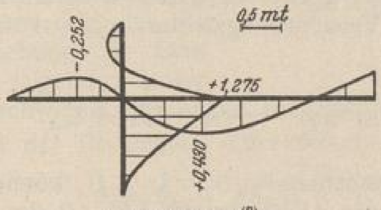
$$\vartheta^*_{1,J3} = \vartheta^*_{2,J3} = 0\,, \qquad \vartheta^*_{3,J3} = \vartheta_{31}\,\psi^*_{1,J3} = -0{,}3188\,, \qquad \vartheta^*_{4,J3} = +0{,}2550\,.$$



a) Einflußlinie φ_J.



b) Einflußlinie ψ_1.



c) Einflußlinie $M_J^{(3)}$.

Abb. 312.

Waagerechte Verschiebung des Knotens J: $u^*_{J,J3} = l_4\,\vartheta^*_{4,J3} = +1{,}2750$,

Stab *1*: $\quad M_J^{(3)} = -\frac{l_1}{2}\,\varphi^*_{J,J3}\,\omega_D = -0{,}6708\,\omega_D\,,$

Stab *2*: $\quad M_J^{(3)} = +\frac{l_2}{2}\,\varphi^*_{J,J3}\,\omega'_D = +1{,}1175\,\omega'_D\,,$

Stab *3*: $\quad M_J^{(3)} = -\frac{l_3}{2}\,\omega_D + u^*_{J,J3}\,\xi + \frac{l_3}{2}\,(\varphi^*_{J,J3} - \vartheta^*_{3,J3})\,\omega_D = 1{,}2750\,\xi - 2{,}0630\,\omega_D\,,$

Stab *4*: $\quad M_J^{(3)} = +\,u^*_{J,J3}\,\xi' - l_4\,(\omega^*_{J,J3}\,\omega'_\tau + \vartheta^*_{4,J3}\,\omega''_D) = 1{,}2750\,\xi' - 1{,}1175\,\omega'_\tau - 1{,}2750\,\omega''_D\,,$

Stab *5*: $\quad M_J^{(3)} = +\,\varphi^*_{B,J3}\,z = -\frac{\varphi^*_{J,J3}}{2}\,z = -0{,}1117\,z\,.$

Teilung der Matrix und geometrisch unbestimmtes Hauptsystem. Die unabhängigen Komponenten ψ_c des Ansatzes sind bei ausgezeichneten Belastungen oft klein, so daß die r Knotendrehwinkel φ_J zur Beschreibung des Verschiebungs- und Spannungszustandes ausreichen. Der Ansatz besteht dann nur aus den r statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$ mit $\psi_c = 0$, deren Wurzeln an Stelle von φ_J mit φ_{J0} bezeichnet werden. Diese lassen sich, falls die nachträgliche Auflösung der $(r+f)$ Gleichungen des vollständigen Ansatzes notwendig oder erwünscht erscheint, mit $\psi_c = 0$ nach Abschn. 30 als Anfangswerte einer Iteration der Lösung des allgemeinen Ansatzes $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ verwenden. Das Ergebnis φ_J, ψ_c ist dann in zwei Stufen gewonnen.

Die Lösung in zwei Stufen kann auch zur vollständigen algebraischen Rechenvorschrift ausgebildet werden. Dabei treten die f Summanden mit den unbekannten Komponenten ψ_c der vollständigen Gleichungen $\delta A_J = 0$ zunächst zu den Belastungsgliedern des Ansatzes,

$$\varphi_J a_{JJ} + \sum_J \varphi_K a_{JK} = -a_{J0} - \sum_1^f \psi_c a_{Jc}, \tag{551}$$

so daß die Wurzeln φ_J nach dem Superpositionsgesetz als linearer Ansatz angeschrieben werden können.

$$\varphi_J = \varphi_{J0} + \sum_1^f \varphi_{Jc} \psi_c. \tag{552}$$

Dabei ist φ_{J0} der Knotendrehwinkel aus den äußeren Ursachen (Belastung, Temperaturbewegung, Stützenbewegung mit $\psi_c = 0$ und $\vartheta_h = \vartheta_{h0}$), φ_{Jc} der Knotendrehwinkel für den Verschiebungszustand $\psi_c = 1$ mit den Stabdrehwinkeln ϑ_{hc}.

$$\vartheta_h = \vartheta_{h0} + \sum_1^f \vartheta_{hc} \psi_c. \tag{553}$$

Die Knotendrehwinkel φ_{J0}, φ_{Jc} werden aus den Vorzahlen β_{JJ}, β_{JK} der konjugierten Matrix der statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$ $(J = A \ldots N)$ berechnet, die oft in regelmäßiger Gliederung drei und fünf Unbekannte enthalten und nach Abschn. 29 gelöst werden. Die äußeren Ursachen liefern Belastungsglieder a_{J0}, der geometrisch bestimmte Verschiebungszustand $\psi_c = 1$ der Knotenkette die Belastungsglieder a_{Jc}.

$$-\varphi_{J0} = \sum_A^N \beta_{JH} a_{H0}, \quad -\varphi_{Jc} = \sum_A^N \beta_{JH} a_{Hc}; \qquad c = 1 \ldots f. \tag{554}$$

Die unbekannten Komponenten ψ_c $(c = 1 \ldots f)$ können unabhängig von den Knotendrehwinkeln aus den f Gleichungen $\delta A_c = 0$ der zweiten Stufe berechnet werden. Die statische Bedingung für die zwangläufige Kette Γ_b erhält dabei nach Einführung von (552) folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{J=A}^N \varphi_J a_{bJ} + \sum_{c=1}^f \psi_c a_{bc} + a_{b0} = 0; \qquad b = 1 \ldots f. \\
&\sum_1^f \psi_c \Big(a_{bc} + \sum_A^N \varphi_{Jc} a_{bJ}\Big) + \Big(a_{b0} + \sum_A^N a_{bJ} \varphi_{J0}\Big) = 0, \\
&\sum \psi_c a_{bc}^{(r)} + a_{b0}^{(r)} = \delta A_b^{(r)} = 0, \\
&r = \text{Anzahl der Knoten } A \ldots N.
\end{aligned}\right\} \tag{555}$$

Die algebraische Auflösung des Ansatzes $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ in zwei Stufen bedeutet mechanisch die Berechnung der Komponenten ψ_c in einem geometrisch $r$fach unbestimmten Hauptsystem, dessen Komponenten φ_{J0}, φ_{Jc} mit den zugeordneten Anschlußkräften $M_{J0}^{(h, r)}$, $M_{Jc}^{(h, r)}$ bekannt sind. Die Belastungszahlen $a_{b0}^{(r)}$

sind der Ausdruck für die virtuelle Arbeit der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Anschlußkräfte $M_{J0}^{(h,r)}$ des geometrisch unbestimmten Hauptsystems aus allen äußeren Ursachen $(\mathfrak{P}, t, \Delta t)$ an einer mit $\dot{\psi}_b = 1$ angetriebenen Kette Γ_b. Die Vorzahlen $a_{bc}^{(r)}$ sind der Ausdruck für die virtuelle Arbeit der Anschlußkräfte $M_{Jc}^{(h,r)}$ des geometrisch unbestimmten Hauptsystems aus $\dot{\psi}_c = 1$ an einer mit $\dot{\psi}_b = 1$ angetriebenen Kette Γ_b. Die Knoten- und Stabdrehwinkel φ_J, ϑ_h ergeben sich aus ψ_c durch Superposition nach (552), (553).

Rahmenstellung mit waagerechtem Riegel und senkrechten Pfosten. Die Pfosten des Riegels zweigen je nach der Verwendung des Tragwerks nach einer oder auch nach beiden Seiten ab. Die Enden sind frei drehbar gelagert oder starr eingespannt. Die Rahmenstellung mit horizontaler Abstützung des Riegels wird als durchgehender Träger mit elastisch drehbaren Pfosten bezeichnet.

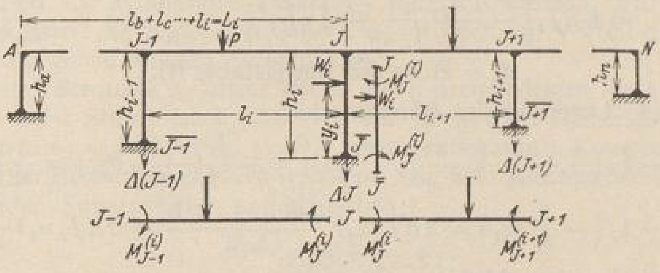


Abb. 313.

Der Verschiebungszustand der Rahmenstellung ist durch r Knotendrehwinkel φ_J $(J = A \ldots N)$ und durch eine unabhängige Komponente $\psi_c = \psi_1$ der Stabkette bestimmt (Abb. 313). Hierfür kann einer der Pfostendrehwinkel oder die horizontale Verschiebung des Riegels gewählt werden. Bei Symmetrie des Tragwerks ist ψ_1 der Drehwinkel des mittleren Pfostens oder die waagerechte Verschiebung des Symmetriepunktes. In der folgenden Untersuchung wird der Stabdrehwinkel des linken Endpfostens h_a als ψ_1 angenommen (Abb. 314). Demnach ist der Drehwinkel einer Zwischenstütze $(\bar{i})$

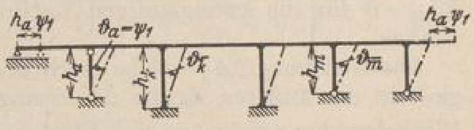


Abb. 314.

$$\vartheta_{\bar{i}} = \vartheta_{\bar{i}0} + \psi_1 \frac{h_a}{h_i}.$$

Die Stabdrehwinkel ϑ_{h1} der Riegelstäbe sind bei senkrechten Pfosten Null.

Zur Berechnung der $(r + 1)$ unbekannten Komponenten φ_J, ψ_1 werden r statische Bedingungen $\delta A_J = 0$ $(J = A \ldots N)$ und eine statische Bedingung $\delta A_1 = 0$ nach S. 320 verwendet. Jede mittlere Bedingungsgleichung $\delta A_J = 0$ verknüpft drei Knotendrehwinkel $\varphi_{J-1}, \varphi_J, \varphi_{J+1}$ mit ψ_1. Sie ist der Ausdruck für die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte eines mit $\dot{\varphi}_J = 1$ angetriebenen zwangläufigen Gebildes Γ_J.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{J-1} a_{J(J-1)} + \varphi_J a_{JJ} + \varphi_{J+1} a_{J(J+1)} + a_{J1} \psi_1 + a_{J\otimes} &= 0, \\ a_{J\otimes} = a_{J0} + a_{Jt} + a_{J\Delta t} + a_{Js}&. \end{aligned}\right\} \qquad (556)$$

Das absolute Glied $a_{J\otimes}$ des Ansatzes ist die virtuelle Arbeit der Anschlußkräfte des geometrisch bestimmten Systems aus dessen Belastung $\mathfrak{P}$, der gleichförmigen und ungleichförmigen Temperaturänderung $t, \Delta t$ der Stäbe und aus den Stützenverschiebungen Δ_J. Die Vorzahlen und Belastungszahlen werden nach (533) ff. entwickelt und für konstanten Querschnitt im Bereiche jedes Stabes angegeben.

a) Starre Einspannung der Pfostenenden (Abb. 313).

$$\left.\begin{aligned}
a_{J(J-1)} &= -\dot{\mathrm{i}}_J \frac{2}{l'_i}, \quad a_{JJ} = -\dot{\mathrm{i}}_J\left(\frac{4}{l'_i} + \frac{4}{h'_i} + \frac{4}{l'_{i+1}}\right), \quad a_{J(J+1)} = -\dot{\mathrm{i}}_J \frac{2}{l'_{i+1}},\\
a_J &= -\dot{\mathrm{i}}_J\left(-\frac{6}{h'_i}\vartheta_{\bar{i}1}\right) = \frac{6}{h'_i}\frac{h_a}{h_i},\\
a_{J0} &= -\dot{\mathrm{i}}_J(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(\bar{i})} + M_{J0}^{(i+1)}), \quad a_{J\Delta t} = E\alpha_t\,\Delta t\left(\frac{1}{d_i}J_i - \frac{1}{d_{i+1}}J_{i+1}\right),\\
a_{Jt} &= -\dot{\mathrm{i}}_J\left(-\frac{6}{h'_i}\vartheta_{\bar{i}t}\right) = 6EJ_c\alpha_t t\,\frac{l_b + l_c \cdots + l_i}{h_i h'_i} = 6EJ_c\alpha_t t\,\frac{L_i}{h_i h'_i},\\
a_{Js} &= -\dot{\mathrm{i}}_J\left(-\frac{6}{l'_i}\vartheta_{is} - \frac{6}{l'_{i+1}}\vartheta_{(i+1)s}\right)\\
&= 6EJ_c\left[-\frac{\Delta_{J-1}}{l_i l'_i} + \Delta_J\left(\frac{1}{l_i l'_i} - \frac{1}{l_{i+1} l'_{i+1}}\right) + \frac{\Delta_{J+1}}{l_{i+1} l'_{i+1}}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (557\,\mathrm{a})$$

d_i = Höhe des Riegelstabes (i).

b) Gelenkige Lagerung der Pfostenenden.

$$\left.\begin{aligned}
a_{JJ} &= -\dot{\mathrm{i}}_J\left(\frac{4}{l'_i} + \frac{3}{h'_i} + \frac{4}{l'_{i+1}}\right), \quad a_{J1} = -\dot{\mathrm{i}}_J\left(-\frac{3}{h'_i}\vartheta_{\bar{i}1}\right) = \frac{3}{h'_i}\frac{h_a}{h_i},\\
a_{Jt} &= -\dot{\mathrm{i}}_J\left(-\frac{3}{h'_i}\vartheta_{\bar{i}t}\right) = 3EJ_c\alpha_t t\,\frac{l_b + l_c \cdots + l_i}{h_i h'_i} = 3EJ_c\alpha_t t\,\frac{L_i}{h_i h'_i}.
\end{aligned}\right\} \quad (557\,\mathrm{b})$$

Die übrigen Angaben bleiben unverändert.

Die Anschlußkräfte $M_{J0}^{(i)}, M_{J0}^{(\bar{i})}, M_{J0}^{(i+1)}$ des beiderseits eingespannten Stabes werden aus der Tabelle 25, die Schnittkraft $M_{J0}^{(\bar{i})}$ des Pfostens $(\bar{i})$ bei frei drehbarer Lagerung des Fußes aus Tabelle 26 entnommen. Die Bedingungsgleichungen $\delta A_A = 0$, $\delta A_N = 0$ für die zwangläufigen Gebilde Γ_A, Γ_N enthalten nur zwei Knotendrehwinkel.

Die Gleichung $\delta A_1 = 0$ ist nach S. 320 die statische Bedingung für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte der zwangläufigen Kette Γ_1 mit $\dot{\varphi}_J = 0, \dot{\psi}_1 \neq 0$. Die Winkelgeschwindigkeiten der Pfosten sind $\dot{\psi}_1 = 1, v_{\bar{i}1} = \dot{\mathrm{i}}\, h_a/h_i$, diejenigen der Riegelstäbe Null. Diese bewegen sich parallel mit der waagerechten Geschwindigkeit $\dot{\mathrm{i}}\, h_a$. Die Bedingungsgleichung $\delta A_1 = 0$ enthält alle unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes.

$$\delta A_1 = \sum_A^N \varphi_J a_{1J} + \psi_1 a_{11} + a_{1\otimes} = 0. \quad (558)$$

Die virtuellen Arbeiten $a_{1J}, a_{11}, a_{1\otimes}$ entstehen bei der Bewegung der zwangläufigen Kette $\dot{\psi}_1 = 1$ durch die Anschlußkräfte des Stabwerks infolge von $\varphi_J = 1, \psi_1 = 1$ oder der äußeren Ursachen (Belastung, Temperaturänderung, Stützenverschiebungen).

$$a_{1\otimes} = a_{10} + a_{1t} + a_{1\Delta t} + a_{1s}. \quad (559)$$

Die Summe der Anschlußmomente eines Pfostens $\bar{i}$ aus $\psi_e = 1$ ist bei starrer Einspannung $M_1^{(\bar{i})} = -12\, h_a/h_i h'_i$, bei frei drehbarer Lagerung $M_1^{(\bar{i})} = -3\, h_a/h_i h'_i$, so daß bei konstantem Querschnitt des einzelnen Stabes folgende Angaben verwendet werden:

a) Starre Einspannung der Pfostenenden:

$$\left.\begin{aligned}
a_{1J} = a_{J1} = \frac{6\,h_a}{h_i h'_i}, \quad a_{11} = -12\sum_a^n \frac{h_a^2}{h_i^2 h'_i},\\
a_{1\otimes} = \sum (W_i y_i + M_0^{(\bar{i})} + M_{\Delta t}^{(\bar{i})})\frac{h_a}{h_i} - \sum EJ_c \frac{12}{h'_i}\frac{\alpha_t t L_i}{h_i}\frac{h_a}{h_i}.
\end{aligned}\right\} \quad (560\,\mathrm{a})$$

b) Frei drehbare Auflagerung der Pfostenenden:

$$\left.\begin{aligned} a_{1J} &= a_{J1} = \frac{3\,h_a}{h_i\,h_i'}, \qquad a_{11} = -3\sum_a^n \frac{h_a^2}{h_i^2\,h_i'}, \\ a_{1\otimes} &= \sum (W_i\,y_i + M_{J0}^{(\bar{i})} + M_{J\Delta t}^{(\bar{i})})\frac{h_a}{h_i} - \sum E J_c \frac{3}{h_i'}\,\frac{\alpha_t\,t\,L_i}{h_i}\,\frac{h_a}{h_i}. \end{aligned}\right\} \tag{560b}$$

Die $(r+1)$ Gleichungen (556) und (558) mit drei, vier und allen $(r+1)$ unbekannten Komponenten werden nach dem Gaußschen Algorithmus aufgelöst. Dabei wird zunächst die konjugierte Matrix β_{JK} gebildet und jede Unbekannte φ_J, ψ_1 nach (542) durch Superposition der Belastungszahlen $a_{J\otimes}$, $a_{1\otimes}$ erhalten. Die Vorwärtselimination des Ansatzes liefert unter Einbeziehung der Belastungszahlen ψ_1 aus $a_{1\otimes}^{(r)}$ und die Knotendrehwinkel φ_J durch Rekursion. Für einzelne Belastungsfälle können die Komponenten φ_J, ψ_1 oft auch mit Vorteil durch Iteration der Lösung angegeben werden (Abschn. 30).

Die Knotendrehwinkel φ_J allein bilden einen dreigliedrigen Ansatz, so daß die Auflösung in zwei Stufen nach (552) Vorteile verspricht. Die erste Stufe enthält r Gleichungen $\delta A_J = 0$ $(J = A \ldots N)$, deren unbekannte Komponente ψ_1 nach S. 336 unter den Belastungsgliedern erscheint. Die Knotendrehwinkel werden daher in der folgenden Superposition angeschrieben:

$$\varphi_J = \varphi_{J\otimes} + \varphi_{J1}\,\psi_1\,. \tag{561}$$

$\varphi_{J\otimes}$ ist der Anteil aus den äußeren Ursachen bei $\psi_1 = 0$, φ_{J1} der Anteil aus dem vorgeschriebenen Betrag $\psi_1 = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{(J-1)\otimes}\,a_{J(J-1)} + \varphi_{J\otimes}\,a_{JJ} + \varphi_{(J+1)\otimes}\,a_{J(J+1)} + a_{J\otimes} &= 0, \\ \varphi_{(J-1)1}\,a_{J(J-1)} + \varphi_{J1}\,a_{JJ} + \varphi_{(J+1)1}\,a_{J(J+1)} + a_{J1} &= 0, \\ J = A \ldots N. \end{aligned}\right\} \tag{562}$$

Die zweite Stufe der Lösung besteht aus der Gleichung

$$\delta A_1 = \sum_A^N \varphi_J\,a_{1J} + \psi_1\,a_{11} + a_{1\otimes} = 0$$

oder mit (561)

$$\left.\begin{aligned} \psi_1\Bigl(a_{11} + \sum_A^N \varphi_{J1}\,a_{1J}\Bigr) + \Bigl(a_{1\otimes} + \sum_A^N \varphi_{J\otimes}\,a_{1J}\Bigr) &= 0, \\ \psi_1\,a_{11}^{(r)} + a_{1\otimes}^{(r)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{563}$$

Die Vorzahlen bedeuten die virtuellen Arbeiten der Belastung des Stabwerks und der Anschlußmomente

$$[M_{J\otimes}^{(\bar{i})} + 4/h_i' \cdot \varphi_{J\otimes}], \qquad [M_{J\otimes}^{(\bar{i})} + 2/h_i' \cdot \varphi_{J\otimes}], \qquad [M_{J\otimes}^{(i)} + 2/l_i' \cdot (\varphi_{(J-1)\otimes} + 2\,\varphi_{J\otimes})]$$

eines r fach geometrisch unbestimmten Hauptsystems beim Antrieb der zwangläufigen Kette Γ_1 mit $\dot{\psi}_1 = 1$.

a) Starre Einspannung der Pfostenenden.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{(r)} &= -6\sum_a^n \frac{h_a}{h_i\,h_i'}\Bigl(2\,\frac{h_a}{h_i} - \varphi_{J1}\Bigr), \qquad \vartheta_{\bar{i}t} = \frac{E J_c}{h_i}\,\alpha_t\,t\,L_i, \\ a_{1\otimes}^{(r)} &= \sum_a^n W_i\,y_i\,\frac{h_a}{h_i} + \sum_a^n \Bigl(M_0^{(\bar{i})} + M_{\Delta t}^{(\bar{i})} + \frac{6}{h_i'}\,\varphi_{J\otimes} - \frac{12}{h_i'}\,\vartheta_{\bar{i}t}\Bigr)\frac{h_a}{h_i}. \end{aligned}\right\} \tag{564}$$

b) Frei drehbare Lagerung der Pfostenenden.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{(r)} &= -3\sum_a^n \frac{h_a}{h_i h_i'}\left(\frac{h_a}{h_i} - \varphi_{J1}\right), \qquad \vartheta_{\bar{i}t} = \frac{EJ_c}{h_i}\alpha_t t L_i, \\ a_{1\otimes}^{(r)} &= \sum_a^n W_i y_i \frac{h_a}{h_i} + \sum_a^n \left(M_{J0}^{(\bar{i})} + M_{J\Delta t}^{(\bar{i})} + \frac{3}{h_i'}\varphi_{J\otimes} - \frac{3}{h_i'}\vartheta_{\bar{i}t}\right)\frac{h_a}{h_i}, \end{aligned}\right| \tag{565}$$

$$\psi_1 = -\frac{a_{10}^{(r)}}{a_{11}^{(r)}}, \tag{566}$$

$$\varphi_J = \varphi_{J\otimes} + \psi_1 \varphi_{J1}, \qquad \vartheta_h = \vartheta_{h\otimes} + \psi_1 \vartheta_{h1}. \tag{567}$$

Anschlußmomente des Riegelstabes (i):

$$M_{(J-1)}^{(i)} = M_{(J-1)0}^{(i)} + \frac{2}{l_i'}(2\varphi_{J-1} + \varphi_J), \qquad M_J^{(i)} = M_{J0}^{(i)} + \frac{2}{l_i'}(\varphi_{J-1} + 2\varphi_J). \tag{568}$$

Anschlußmomente des Pfostens $(\bar{i})$ bei starrer Einspannung in $\bar{J}$:

$$M_J^{(\bar{i})} = M_{J0}^{(\bar{i})} + \frac{2}{h_i'}(2\varphi_J - 3\vartheta_{\bar{i}}), \qquad M_{\bar{J}}^{(\bar{i})} = M_{\bar{J}0}^{(\bar{i})} + \frac{2}{h_i'}(\varphi_J - 3\vartheta_{\bar{i}}). \tag{569}$$

Anschlußmoment des Pfostens bei frei drehbarer Lagerung von $\bar{J}$:

$$M_J^{(\bar{i})} = M_{J0}^{(\bar{i})} + \frac{3}{h_i'}(\varphi_J - \vartheta_{\bar{i}}), \qquad M_{\bar{J}0}^{(\bar{i})} = 0. \tag{570}$$

Einflußlinien. Die Einflußlinie von φ_J ist nach S. 331 die Biegelinie $w_{m,J}^*$ des Riegels aus einem Kräftepaar $\mathsf{M}_J = 1_J$ mt am Knoten J. Sie hat für die statische Untersuchung des Tragwerks keine wesentliche Bedeutung.

Die Einflußlinie ψ_1 ist nach S. 331 die Biegelinie $w_{m,a}^*$ des Riegels aus dem Kräftepaar $\mathsf{M}_a = 1_a$ mt am Pfosten h_a. Sie wird mit $\psi_{1,a}^*$ und den Knotendrehwinkeln $\varphi_{J,a}^*$ aufgezeichnet. Dies sind die Wurzeln des Ansatzes (556), (558) mit $a_{J0} = 0$ $(J = A \ldots N)$, $a_{10} = 1$. Sie werden in zwei Stufen berechnet. Die erste enthält allein die r Gleichungen $\delta A_J = 0$ mit den Wurzeln $\varphi_{J0,a}^*$ oder φ_{J1}. Mit $a_{J0,a} = 0$ sind alle Wurzeln $\varphi_{J0,a}^*$ ebenfalls Null. Die Wurzeln φ_{J1} werden ebenso wie auf S. 339 für $\psi_1 = 1$ berechnet. Die zweite Stufe besteht allein aus der Gleichung $\delta A_1 = 0$ mit

$$\psi_{1,a}^* a_{11}^{(r)} + a_{10,a}^{(r)} = 0, \qquad a_{10,a}^{(r)} = a_{10,a} = 1_a \quad \text{und} \quad \psi_{1,a}^* = -1/a_{11}^{(r)}, \tag{571}$$

$$\varphi_{J,a}^* = \psi_{1,a}^* \varphi_{J1}, \qquad \vartheta_{h,a}^* = \vartheta_{h0} + \psi_{1,a}^* \vartheta_{h1}.$$

Die Stabdrehwinkel der Riegel sind Null. Die Gleichung der Biegelinie des Abschnitts $l_h \equiv \overline{(H-1), H}$ kann daher für die Belastung $\mathsf{M}_a = 1_a$ am Pfosten h_a folgendermaßen nach (546) angeschrieben werden:

$$w_{m,a}^* = l_h(\varphi_{(H-1),a}^* \omega_r' - \varphi_{H,a}^* \omega_r) = \psi_{1m}. \tag{572}$$

Die Einflußlinien der Anschlußmomente $M_J^{(i)}$ der Träger l_i werden aus (568) entwickelt.

$$M_J^{(i)} = M_{J0}^{(i)} + \frac{2}{l_i'}(2\varphi_J + \varphi_{J-1}) = M_{J0}^{(i)} + M_{J*}^{(i)}. \tag{573}$$

Der Anteil $M_{J0}^{(i)}$ des beiderseits starr eingespannten Stabes ist nur im Bereich des Abschnitts $\overline{(J-1), J} \equiv l_i$ des Riegels vorhanden und durch Tabelle 25 bestimmt. Der Anteil $M_{J*}^{(i)}$ wird als Biegelinie des Riegels für die Belastung (Ji) mit $\mathsf{M}_J = 4/l_i'$, $\mathsf{M}_{J-1} = 2/l_i'$ aufgezeichnet. Er ist in jedem Abschnitt $\overline{(H-1), H} \equiv l_h$ des Riegels vorhanden und durch die Knotendrehwinkel $\varphi_{(H-1),Ji}^*$, $\varphi_{H,Ji}^*$ des Stabwerks bestimmt. Sie werden bei einstufiger Lösung des Ansatzes (556), (558) mit den Gliedern der konjugierten Matrix angeschrieben und bei zweistufiger Lösung nach S. 336 berechnet.

Die Einflußlinien der Anschlußmomente $M_J^{(i)}$ lassen sich auf Grund einer Zerlegung des Anteils $M_{J*}^{(i)}$ nach (552) oft noch einfacher angeben.

$$M_J^{(i)} = M_{J0}^{(i)} + \frac{2}{l_i'}\,(2\varphi_{J0} + \varphi_{(J-1)0}) + \frac{2}{l_i'}\,(2\varphi_{J1} + \varphi_{(J-1)1})\,\psi_1\,. \tag{574}$$

Für $\psi_1 = 0$ ist

$$M_{J0,*}^{(i)} = M_{J0}^{(i)} + \frac{2}{l_i'}\,(2\varphi_{J0} + \varphi_{(J-1)0}) \tag{575}$$

das Anschlußmoment des durchgehenden Trägers mit elastisch drehbaren Stützen, dessen Einflußlinien auch in anderer Weise bestimmt werden können (S. 240). Die Ordinaten der Einflußlinie des zweiten Anteils von $M_J^{(i)}$ sind ein Vielfaches der Ordinaten der Einflußlinie von ψ_1, die Vorzahl von ψ_1 ist das Anschlußmoment $M_{J1}^{(i)}$ für $\psi_1 = 1$. Es ist nach (568) mit $\varphi_{J1}, \varphi_{(J-1)1}$, oft aber auch durch andere Rechnungen bekannt.

Die Einflußlinie $M_{J0,*}^{(i)}$ kann selbstverständlich aber ebenso wie die Einflußlinie von $M_J^{(i)}$ auf S. 333 als Biegelinie einer ausgezeichneten Belastung (Ji) mit $\mathsf{M}_J = 4/l_i'$, $\mathsf{M}_{J-1} = 2/l_i'$ aufgetragen werden. Sie betrifft hier jedoch die Riegel $\overline{(H-1), H} \equiv l_h$ des geometrisch unbestimmten Hauptsystems ($\psi_1 = 0$). Die Belastung (Ji) erzeugt die Knotendrehwinkel $\varphi_{(H-1),Ji}^{**}, \varphi_{H,Ji}^{**}$, die unmittelbar mit den Vorzahlen der konjugierten Matrix der ersten Stufe des Ansatzes $\delta A_J = 0$, $\psi_1 = 0$ angeschrieben werden können.

$$\left.\begin{aligned} -\varphi_{(H-1),Ji}^{**} &= \frac{2}{l_i'}\,(\beta_{(H-1)(J-1)} + 2\beta_{(H-1)J})\,,\\ -\varphi_{H,Ji}^{**} &= \frac{2}{l_i'}\,(\beta_{H(J-1)} + 2\beta_{HJ})\,. \end{aligned}\right\} \tag{576}$$

Die Gleichung der Einflußlinie $M_{J0,*}^{(i)}$ lautet darnach im Bereich l_h folgendermaßen:

$$M_{J0,*}^{(i)} = l_h\,(\varphi_{(H-1),Ji}^{**}\,\omega_\tau' - \varphi_{H,Ji}^{**}\,\omega_\tau)\,. \tag{577}$$

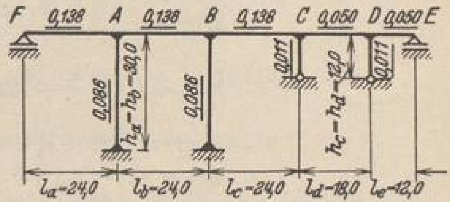


Abb. 315. Die unterstrichenen Zahlen geben die Trägheitsmomente an.

Durchgehender Rahmen mit verschiedener Lagerung der Pfosten.

1. Geometrische Grundlagen.

Stablängen und Trägheitsmomente siehe Abb. 315. Alle Größen beziehen sich auf die Einheiten t und m.

Reduzierte Stablängen ($J_c = 0{,}138\ \mathrm{m}^4$):

$l_a' = 24{,}0\,,\quad l_b' = 24{,}0\,,\quad l_c' = 24{,}0\,,\quad l_d' = 49{,}68\,,\quad l_e' = 33{,}12\,,$

$h_a' = 48{,}14\,,\quad h_b' = 48{,}14\,,\quad h_c' = 150{,}54\,,\quad h_d' = 150{,}54\,.$

2. Überzählige Größen und statische Bedingungen.

$$a_{AA} = -\left(\frac{3}{l_a'} + \frac{4}{h_a'} + \frac{4}{l_b'}\right) = -0{,}374758\,,\qquad a_{AB} = -\frac{2}{l_b'} = -0{,}083333\,,$$

$$a_{A1} = \frac{6}{h_a'} = +0{,}124636\,,\qquad a_{BB} = -\left(\frac{4}{l_b'} + \frac{4}{h_b'} + \frac{4}{l_c'}\right) = -0{,}416424\,,$$

$$a_{BC} = -\frac{2}{l_c'} = -0{,}083333\,,\qquad a_{B1} = \frac{6}{h_b'}\,\frac{h_a}{h_b} = +0{,}124636\,,$$

$$a_{CC} = -\left(\frac{4}{l_c'} + \frac{3}{h_c'} + \frac{4}{l_d'}\right) = -0{,}267110\,,\qquad a_{CD} = -\frac{2}{l_d'} = -0{,}040258\,,$$

$$a_{C1} = \frac{3}{h_c'}\,\frac{h_a}{h_c} = +0{,}049821\,,\qquad a_{DD} = -\left(\frac{4}{l_d'} + \frac{3}{h_d'} + \frac{3}{l_e'}\right) = -0{,}191023\,,$$

$$a_{D1} = \frac{3}{h_d'}\,\frac{h_a}{h_d} = +0{,}049821\,,$$

$$a_{11} = -12\left(\frac{1}{h_a'} + \frac{h_a^2}{h_b^2\,h_b'}\right) - 3\left(\frac{h_a^2}{h_c^2\,h_c'} + \frac{h_a^2}{h_d^2\,h_d'}\right) = -0{,}747649\,.$$

Matrix der statischen Bedingungen.

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	ψ_1
A	$-0{,}374758$	$-0{,}083333$			$+0{,}124636$
B	$-0{,}083333$	$-0{,}416424$	$-0{,}083333$		$+0{,}124636$
C		$-0{,}083333$	$-0{,}267110$	$-0{,}040258$	$+0{,}049821$
D			$-0{,}040258$	$-0{,}191023$	$+0{,}049821$
I	$+0{,}124636$	$+0{,}124636$	$+0{,}049821$	$+0{,}049821$	$-0{,}747649$

A. Berechnung mit dem Gaußschen Algorithmus (Abschn. 29).

3. Vorzahlen β_{JK}

	a_{A0}	a_{B0}	a_{C0}	a_{D0}	a_{10}
φ_A	$-2{,}920756$	$+0{,}503428$	$-0{,}226407$	$-0{,}062405$	$-0{,}422223$
φ_B	$+0{,}503428$	$-2{,}772280$	$+0{,}841600$	$-0{,}266009$	$-0{,}339870$
φ_C	$-0{,}226407$	$+0{,}841600$	$-4{,}155719$	$+0{,}845025$	$-0{,}118059$
φ_D	$-0{,}062405$	$-0{,}266009$	$+0{,}845025$	$-5{,}508394$	$-0{,}365497$
ψ_1	$-0{,}422223$	$-0{,}339870$	$-0{,}118059$	$-0{,}365497$	$-1{,}496793$

4. Belastung der Felder (a) und (b) durch $p = 4$ t/m. (Abb. 316a).

$$M_{A0}^{(a)} = +\frac{p\,l_a^2}{8} = \frac{4\cdot 24^2}{8} = 288\,, \qquad M_{A0}^{(b)} = -\frac{p\,l_b^2}{12} = -\frac{4\cdot 24^2}{12} = -192\,,$$

$$M_{B0}^{(b)} = +\frac{p\,l_b^2}{12} = +192 \text{ mt}.$$

$$a_{A0} = -(288 - 192) = -96\,, \qquad a_{B0} = -(+192) = -192\,,$$

$$a_{C0} = a_{D0} = a_{10} = 0\,.$$

Berechnung der überzähligen Größen nach (542):

$$\varphi_A = -183{,}734\,, \qquad \varphi_C = +139{,}852\,, \qquad \psi_1 = -105{,}788\,,$$

$$\varphi_B = -483{,}949\,, \qquad \varphi_D = -57{,}065\,,$$

$$\vartheta_{\bar a} = \vartheta_{\bar b} = \psi_1 = -105{,}788\,, \qquad \vartheta_{\bar c} = \vartheta_{\bar d} = \frac{h_a}{h_c}\,\psi_1 = -264{,}470\,.$$

$$M_A^{(\bar a)} = \frac{2}{h'_a}(\varphi_A - 3\,\vartheta_{\bar a}) = +\ 5{,}552 \text{ mt}\,,$$

$$M_A^{(a)} = M_{A0}^{(a)} + \frac{3}{l'_a}\,\varphi_A = +265{,}033 \text{ mt}\,,$$

$$M_A^{(\bar a)} = \frac{2}{h'_a}(2\,\varphi_A - 3\,\vartheta_{\bar a}) = -\ 2{,}082 \text{ mt}\,,$$

$$M_A^{(b)} = M_{A0}^{(b)} + \frac{2}{l'_b}(2\,\varphi_A + \varphi_B) = -262{,}951 \text{ mt}\,,$$

$$M_B^{(b)} = M_{B0}^{(b)} + \frac{2}{l'_b}(2\,\varphi_B + \varphi_A) = +\ 96{,}031 \text{ mt}\,,$$

$$M_B^{(\bar b)} = \frac{2}{h'_b}(2\,\varphi_B - 3\,\vartheta_{\bar b}) = -\ 27{,}027 \text{ mt}\,,$$

$$M_B^{(c)} = \frac{2}{l'_c}(2\,\varphi_B + \varphi_C) = -\ 69{,}004 \text{ mt}\,,$$

$$M_B^{(\bar b)} = \frac{2}{h'_b}(\varphi_B - 3\,\vartheta_{\bar b}) = -\ 6{,}921 \text{ mt}.$$

$$M_C^{(c)} = \frac{2}{l'_c}(2\,\varphi_C + \varphi_B) = -17{,}020 \text{ mt}\,,$$

$$M_C^{(\bar c)} = \frac{3}{h'_c}(\varphi_C - \vartheta_{\bar c}) = +\ 8{,}057 \text{ mt}\,,$$

$$M_C^{(d)} = \frac{2}{l'_d}(2\,\varphi_C + \varphi_D) = +\ 8{,}963 \text{ mt}\,,$$

$$M_D^{(d)} = \frac{2}{l'_d}(2\,\varphi_D + \varphi_C) = +\ 1{,}036 \text{ mt}\,,$$

$$M_D^{(\bar d)} = \frac{3}{h'_d}(\varphi_D - \vartheta_{\bar d}) = +\ 4{,}133 \text{ mt}\,,$$

$$M_D^{(e)} = \frac{3}{l'_e}\,\varphi_D = -\ 5{,}169 \text{ mt}.$$

5. Temperaturerhöhung des Riegels um $t = 15^0$ (Abb. 316 b).

$$E J_c \alpha_t t = 2100000 \cdot 0,138 \cdot 10^{-5} \cdot 15 = 43,4700,$$

$$\vartheta_{\bar a t} = 0, \qquad \vartheta_{\bar b t} = E J_c \alpha_t t \frac{L_b}{h_b} = 43,47 \frac{24,0}{30,0} = 34,776,$$

$$\vartheta_{\bar c t} = E J_c \alpha_t t \frac{L_c}{h_c} = 43,47 \frac{48,0}{12,0} = 173,880, \qquad \vartheta_{\bar d t} = E J_c \alpha_t t \frac{L_d}{h_d} = 43,47 \frac{66,0}{12,0} = 239,085,$$

$$a_{At} = 0; \qquad a_{Bt} = 6 E J_c \alpha_t t \frac{L_b}{h_b h_b'} = +4,33436,$$

$$a_{Ct} = 3 E J_c \alpha_t t \frac{L_c}{h_c h_c'} = +3,46513, \qquad a_{Dt} = 3 E J_c \alpha_t t \frac{L_d}{h_d h_d'} = +4,76455,$$

$$a_{1t} = -E J_c \alpha_t t \left(\frac{12}{h_b'} \frac{L_b h_a}{h_b^2} + \frac{3}{h_c'} \frac{L_c h_a}{h_c^2} + \frac{3}{h_d'} \frac{L_d h_a}{h_d^2}\right) = -29,2429.$$

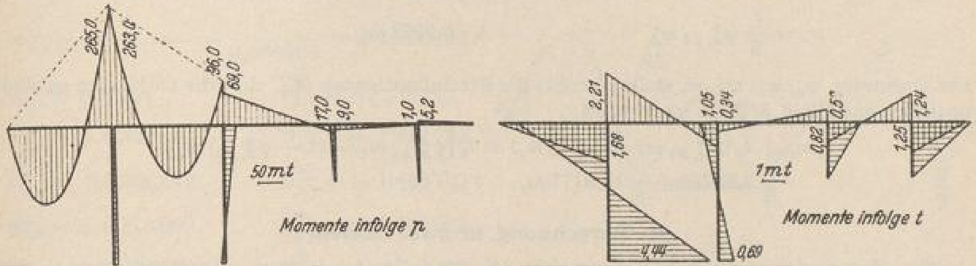


Abb. 316 a und b.

Berechnung der überzähligen Größen nach (542):

$$\varphi_A = -13,4472, \qquad \varphi_C = +3,2738, \qquad \psi_1 = -40,1469,$$
$$\varphi_B = +0,4284, \qquad \varphi_D = +13,7817.$$

$$\vartheta_{\bar a} = \vartheta_{\bar a t} + \psi_1 = -40,147, \qquad \vartheta_{\bar c} = \vartheta_{\bar c t} + \psi_1 \frac{h_a}{h_c} = +\ 73,513,$$

$$\vartheta_{\bar b} = \vartheta_{\bar b t} + \psi_1 = -\ 5,371, \qquad \vartheta_{\bar d} = \vartheta_{\bar d t} + \psi_1 \frac{h_a}{h_d} = +138,718.$$

$M_A^{(a)} = -1,681,$	$M_B^{(b)} = -1,049,$	$M_C^{(c)} = +0,581,$	$M_D^{(d)} = +1,241$ mt,
$M_A^{(\bar a)} = +3,886,$	$M_B^{(\bar b)} = +0,705,$	$M_C^{(\bar c)} = -1,400,$	$M_D^{(\bar d)} = -2,490$ mt,
$M_A^{(b)} = -2,206,$	$M_B^{(c)} = +0,344,$	$M_C^{(d)} = +0,818,$	$M_D^{(e)} = +1,248$ mt,

$$M_A^{(\bar{\bar a})} = +4,445 \text{ mt}, \qquad M_B^{(\bar{\bar b})} = +0,687 \text{ mt}.$$

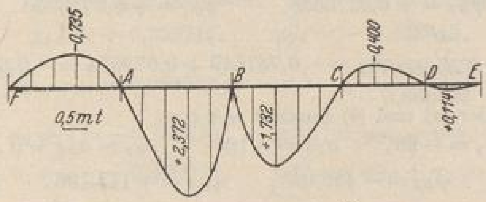


Abb. 317. Einflußlinie $M_B^{(b)}$.

6. Einflußlinie $M_B^{(b)}$ (Abb. 317).

$$M_B^{(b)} = M_{B0}^{(b)} + \frac{2}{l_b'} (2 \varphi_B + \varphi_A) = M_{B0}^{(b)} + M_{B*}^{(b)},$$

$$M_{B0}^{(b)} = l_b \omega_r \text{ im Bereich } (b), \text{ sonst ist } M_{B0}^{(b)} = 0.$$

$M_{B*}^{(b)}$ wird als Biegelinie zu der Belastung $\mathsf{M}_B = 4/l_b'$, $\mathsf{M}_A = 2/l_b'$ aufgezeichnet.

Belastungsglieder:

$$a_{A0} = \frac{2}{l_b'} = +0{,}083\,333, \qquad a_{B0} = \frac{4}{l_b'} = +0{,}166\,667.$$

Berechnung der überzähligen Größen nach (542):

$$\varphi^*_{A,Bb} = +0{,}159491, \qquad \varphi^*_{B,Bb} = +0{,}420095, \qquad \varphi^*_{C,Bb} = -0{,}121400,$$
$$\varphi^*_{D,Bb} = +0{,}049535, \qquad \psi^*_{1,Bb} = +0{,}091830.$$

$$w_a = -\frac{l_a}{2}\varphi^*_{A,Bb}\,\omega_D \qquad = -\ 1{,}9139\,\omega_D,$$
$$w_b = l_b(\varphi^*_{A,Bb}\,\omega_\tau' - \varphi^*_{B,Bb}\,\omega_\tau) = +\ 3{,}8278\,\omega_\tau' - 10{,}0823\,\omega_\tau,$$
$$w_c = l_c(\varphi^*_{B,Bb}\,\omega_\tau' - \varphi^*_{C,Bb}\,\omega_\tau) = +10{,}0823\,\omega_\tau' + \ 2{,}9136\,\omega_\tau,$$
$$w_d = l_d(\varphi^*_{C,Bb}\,\omega_\tau' - \varphi^*_{D,Bb}\,\omega_\tau) = -\ 2{,}1852\,\omega_\tau' - \ 0{,}8916\,\omega_\tau,$$
$$w_e = \frac{l_e}{2}\varphi^*_{D,Bb}\,\omega_D' \qquad = +\ 0{,}2972\,\omega_D'.$$

Die Ordinaten w_a, w_c, w_d, w_e stellen bereits die Einflußordinaten $M_B^{(b)}$ dar, die Ordinaten w_b sind noch um das Glied $M_{B0}^{(b)}$ zu vermehren:

$$l_b\,\omega_\tau + l_b(\varphi^*_{A,Bb}\,\omega_\tau' - \varphi^*_{B,Bb}\,\omega_\tau) = l_b[\varphi^*_{A,Bb}\,\omega_\tau' + (1-\varphi^*_{B,Bb})\,\omega_\tau]$$
$$= 3{,}8278\,\omega_\tau' + 13{,}9177\,\omega_\tau.$$

B. Berechnung in zwei Stufen.

Die Matrix der statischen Bedingungen für $\varphi_A \ldots \varphi_D$ ist in dem allgemeinen Ansatz auf S. 342 enthalten.

3. Vorzahlen β_{JK} des dreigliedrigen Ansatzes für $\psi_1 = 0$ nach S. 230 ff.

	a_{A0}	a_{B0}	a_{C0}	a_{D0}
φ_A	$-2{,}801651$	$+0{,}599297$	$-0{,}193102$	$+0{,}040696$
φ_B	$+0{,}599297$	$-2{,}695109$	$+0{,}868404$	$-0{,}183016$
φ_C	$-0{,}193102$	$+0{,}868404$	$-4{,}146405$	$+0{,}873853$
φ_D	$+0{,}040696$	$-0{,}183016$	$+0{,}873853$	$-5{,}419136$

4. Knotendrehwinkel φ_{J1}.

Belastungsglieder: $a_{A1} = +0{,}124636$, $a_{C1} = +0{,}049821$,

$a_{B1} = +0{,}124636$, $a_{D1} = +0{,}049821$,

$$\varphi_{A1} = +0{,}2820856, \qquad \varphi_{B1} = +0{,}2270668, \qquad \varphi_{C1} = +0{,}0788750, \qquad \varphi_{D1} = +0{,}2441887,$$

$$a_{11}^{(r)} = a_{11} + \sum_A^D \varphi_{J1}\,a_{1J} = -0{,}747649 + 0{,}079554 = -0{,}668095.$$

5. Belastung der Felder (a) und (b) durch $p = 4$ t/m.

$$a_{A0} = -96, \qquad a_{B0} = -192, \qquad a_{C0} = a_{D0} = 0,$$
$$\varphi_{A0} = -153{,}893, \qquad \varphi_{B0} = -459{,}928, \qquad \varphi_{C0} = +148{,}196, \qquad \varphi_{D0} = -31{,}232,$$

$$a_{10}^{(r)} = a_{10} + \sum_A^D \varphi_{J0}\,a_{1J} = 0 - 70{,}6769,$$

$$\psi_1 = -\frac{a_{10}^{(r)}}{a_{11}^{(r)}} = -\frac{-70{,}6769}{-0{,}668095} = -105{,}789,$$

$$\varphi_A = \varphi_{A0} + \psi_1\,\varphi_{A1} = -183{,}735, \qquad \varphi_C = \varphi_{C0} + \psi_1\,\varphi_{C1} = +139{,}851,$$
$$\varphi_B = \varphi_{B0} + \psi_1\,\varphi_{B1} = -483{,}947, \qquad \varphi_D = \varphi_{D0} + \psi_1\,\varphi_{D1} = -57{,}064.$$

Die Superposition verläuft wie bei A und unterbleibt daher.

6. Temperaturerhöhung des Riegels um 15°.

$$a_{At} = 0, \quad a_{Bt} = +4{,}33436, \quad a_{Ct} = +3{,}46513, \quad a_{Dt} = +\ 4{,}76455,$$

$$\varphi_{At} = -2{,}122345, \quad \varphi_{Bt} = +9{,}544428, \quad \varphi_{Ct} = +6{,}440343, \quad \varphi_{Dt} = +23{,}584985.$$

$$a_{1t}^{(r)} = a_{1t} + \sum_A^D \varphi_{Jt}\, a_{1J} = -29{,}2429 + 2{,}420951 = -26{,}8219,$$

$$\psi_1 = -\frac{a_{1t}^{(r)}}{a_{11}^{(r)}} = -\frac{-26{,}8219}{-0{,}668095} = -40{,}1468,$$

$$\varphi_A = \varphi_{At} + \psi_1 \varphi_{A1} = -13{,}4472, \qquad \varphi_C = \varphi_{Ct} + \psi_1 \varphi_{C1} = +3{,}2737,$$

$$\varphi_B = \varphi_{Bt} + \psi_1 \varphi_{B1} = +0{,}4284, \qquad \varphi_D = \varphi_{Dt} + \psi_1 \varphi_{D1} = +13{,}7816.$$

7. Einflußlinie ψ_1 (Abb. 318).

Die Belastung $\mathsf{M}_a = 1$ mt am Pfosten h_a (Abb. 314) führt zu

$$\psi_{1,a}^* = -\frac{1}{a_{11}^{(r)}} = -\frac{1}{-0{,}668095} = +1{,}496793.$$

$$\varphi_{J,a}^* = \psi_{1,a}^* \varphi_{J1}, \qquad \vartheta_{h,a}^* = \psi_{1,a}^* \vartheta_{h1},$$

$$\varphi_{A,a}^* = +\ 0{,}422224, \qquad \vartheta_{a,a}^* = +\ 1{,}496793,$$

$$\varphi_{B,a}^* = +\ 0{,}339872, \qquad \vartheta_{b,a}^* = +\ 1{,}496793,$$

$$\varphi_{C,a}^* = +\ 0{,}118060, \qquad \vartheta_{c,a}^* = +\ 3{,}741983,$$

$$\varphi_{D,a}^* = +\ 0{,}365500, \qquad \vartheta_{d,a}^* = +\ 3{,}741983.$$

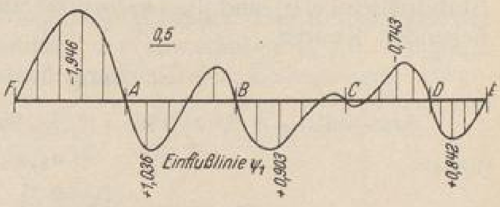


Abb. 318.

$$\text{Feld } a\text{:} \quad \psi_1 = -\frac{l_a}{2}\varphi_{A,a}^*\omega_D \qquad = -\ 5{,}0667\,\omega_D,$$

$$\text{Feld } b\text{:} \quad \psi_1 = l_b(\varphi_{A,a}^*\omega_\tau' - \varphi_{B,a}^*\omega_\tau) = +\ 10{,}1334\,\omega_\tau' - 8{,}1569\,\omega_\tau,$$

$$\text{Feld } c\text{:} \quad \psi_1 = l_c(\varphi_{B,a}^*\omega_\tau' - \varphi_{C,a}^*\omega_\tau) = +\ 8{,}1569\,\omega_\tau' - 2{,}8334\,\omega_\tau,$$

$$\text{Feld } d\text{:} \quad \psi_1 = l_d(\varphi_{C,a}^*\omega_\tau' - \varphi_{D,a}^*\omega_\tau) = +\ 2{,}1251\,\omega_\tau' - 6{,}5790\,\omega_\tau,$$

$$\text{Feld } e\text{:} \quad \psi_1 = \frac{l_e}{2}\varphi_{D,a}^*\omega_D' \qquad = +\ 2{,}1930\,\omega_D'.$$

8. Einflußlinie $M_B^{(b)}$.

$$M_B^{(b)} = M_{B0}^{(b)} + \frac{2}{l_b'}(2\varphi_B + \varphi_A) = M_{B0}^{(b)} + M_{B*}^{(b)},$$

$$M_{B*}^{(b)} = \text{Biegelinie infolge } \mathsf{M}_A = 2/l_b', \qquad \mathsf{M}_B = 4/l_b'.$$

Belastungsglieder: $a_{A0} = 2/l_b' = 0{,}083333$, $a_{B0} = 4/l_b' = 0{,}166667$,

$$\varphi_{A0} = +\ 0{,}133587, \quad \varphi_{B0} = +\ 0{,}399245, \quad \varphi_{C0} = -\ 0{,}128643, \quad \varphi_{D0} = +\ 0{,}027111,$$

$$a_{10}^{(r)} = a_{10} + \sum \varphi_{J0}\, a_{1J} = 0{,}061352, \qquad \psi_1 = -\frac{+0{,}061352}{-0{,}668095} = +0{,}091831,$$

$$\varphi_{A,Bb}^* = \varphi_{A0} + \psi_1 \varphi_{A1} = +0{,}159490, \qquad \varphi_{C,Bb}^* = \varphi_{C0} + \psi_1 \varphi_{C1} = -0{,}121400,$$

$$\varphi_{B,Bb}^* = \varphi_{B0} + \psi_1 \varphi_{B1} = +0{,}420097, \qquad \varphi_{D,Bb}^* = \varphi_{D0} + \psi_1 \varphi_{D1} = +0{,}049535.$$

Allgemeiner Ansatz zur Untersuchung des Stockwerkrahmens. Der Verschiebungszustand eines Stockwerkrahmens mit n Pfosten und v durchgehenden Riegelstäben (Abb. 319) wird durch $v \cdot n$ Knotendrehwinkel φ_J und $f = v$ unabhängige Komponenten ψ_c beschrieben. Hierfür eignen sich die waagerechten Verschiebungen $u_1 \ldots u_v$ der Riegel und die Drehwinkel $\vartheta_1 \ldots \vartheta_v$ der Abschnitte eines aufgehenden Pfostens. Die Pfostendrehwinkel eines Stockwerks sind bei waagerechten Riegelzügen mit $\varepsilon_{h0} = 0$ und senkrechten Pfosten gleich groß, die Drehwinkel der Riegel Null.

Um Unbekannte gleicher Dimension und Größenordnung zu erhalten, werden neben den Knotendrehwinkeln φ_J die Drehwinkel ϑ_s $(s = 1 \ldots v)$ der Abschnitte s eines ausgezeichneten Pfostens als Unbekannte ψ_c bestimmt. Für die übrigen ist bei Riegelstäben mit $\varepsilon_h \neq 0$ nach dem Superpositionsgesetz

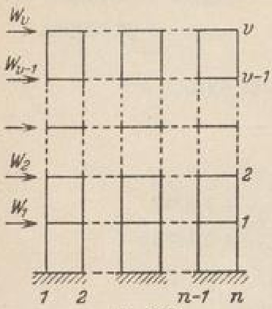


Abb. 319.

$$\vartheta_s = \vartheta_{s0} + \psi_1 .$$

Die Komponenten φ_J, ψ_c sind die Wurzeln von $n \cdot v$ statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$ und von v statischen Bedingungen $\delta A_c = 0$. Die Gleichungen $\delta A_J = 0$ enthalten als Unbekannte außer dem Drehwinkel φ_J des Knotens J die Drehwinkel der zwei, drei oder vier angeschlossenen Knoten K und die Stabdrehwinkel ψ der beiden anschließenden Geschosse, die Gleichungen $\delta A_c = 0$ den Stabdrehwinkel ψ_c und die Drehwinkel aller oberhalb und unterhalb vom Geschoß c liegenden Knoten.

Gleichung $\delta A_J = 0$ (Abb. 320):

$$a_{J(J-n)}\varphi_{J-n} + a_{J(J-1)}\varphi_{J-1} + a_{JJ}\varphi_J + a_{J(J+1)}\varphi_{J+1} + a_{J(J+n)}\varphi_{J+n} + a_{Jc}\psi_c + a_{J(c+1)}\psi_{c+1} + a_{J\otimes} = 0 .$$

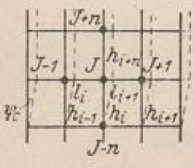


Abb. 320.

$$a_{J(J-n)} = -\dot{\mathrm{i}}_J \frac{2}{h_i'}, \qquad a_{J(J-1)} = -\dot{\mathrm{i}}_J \frac{2}{l_i'},$$

$$a_{JJ} = -\dot{\mathrm{i}}_J \left(\frac{4}{h_i'} + \frac{4}{l_i'} + \frac{4}{l_{i+1}'} + \frac{4}{h_{i+n}'}\right),$$

$$a_{J(J+1)} = -\dot{\mathrm{i}}_J \frac{2}{l_{i+1}'}, \qquad a_{J(J+n)} = -\dot{\mathrm{i}}_J \frac{2}{h_{i+n}'}, \tag{578}$$

$$a_{Jc} = -\dot{\mathrm{i}}_J \left(-\frac{6}{h_i'}\right) = \frac{6}{h_i'}, \qquad a_{J(c+1)} = \frac{6}{h_{i+n}'},$$

$$a_{J\otimes} = a_{J0} + a_{Jt} + a_{J\Delta t}, \qquad a_{J0} = -\dot{\mathrm{i}}_J \sum_J M_{J0}^{(h)},$$

$$a_{Jt} = -\dot{\mathrm{i}}_J \sum_J \left(-\frac{6}{l_h'}\vartheta_{ht}\right), \qquad a_{J\Delta t} = -\dot{\mathrm{i}}_J \sum_J M_{J\Delta t}^{(h)} .$$

Gleichung $\delta A_c = 0$ (Abb. 321):

$$a_{cc}\psi_c + \sum \varphi_J a_{cJ} + a_{c\otimes} = 0 .$$

Die folgenden $\sum\limits_c$ erstrecken sich über alle Pfosten im Geschoß c.

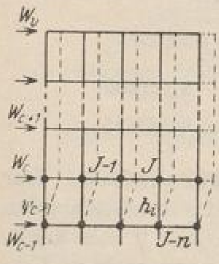


Abb. 321

$$a_{cc} = \dot{\mathrm{i}}_c \sum_c \left(-\frac{12}{h_i'}\right), \qquad a_{c(J-1)} = \dot{\mathrm{i}}_c \frac{6}{h_{i-1}'},$$

$$a_{cJ} = \dot{\mathrm{i}}_c \frac{6}{h_i'} \quad \text{usw.},$$

$$a_{c\otimes} = a_{c0} + a_{ct} + a_{c\Delta t}, \tag{579}$$

$$a_{c0} = \dot{\mathrm{i}}_c h_c \sum_{s=c}^{v} W_s, \qquad a_{ct} = \dot{\mathrm{i}}_c h_c \sum_c \left(-\frac{12}{h_i'}\vartheta_{it}\right),$$

$$a_{c\Delta t} = \dot{\mathrm{i}}_c \sum_c M_{\Delta t}^{(i)} .$$

Die Wurzeln ψ_c, φ_J des Ansatzes werden am einfachsten nach einer Umformung der Gleichungen durch Iteration bestimmt.

$$\psi_c a_{cc} + \sum \varphi_J a_{cJ} + a_{c0} = 0,$$

$$\psi_c = -\frac{a_{c0}}{a_{cc}} - \frac{\sum \varphi_J a_{cJ}}{a_{cc}} = \psi_{c,0} + \psi'_c, \tag{580}$$

$$\varphi_J a_{JJ} + \sum \varphi_K a_{JK} + \sum \psi_c a_{Jc} + a_{J0} = 0,$$

$$\varphi_J a_{JJ} + \sum \varphi_K a_{JK} + \sum \psi_{c,0} a_{Jc} + \sum \psi'_c a_{Jc} + a_{J0} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_J &= -\frac{a_{J0} + \sum \psi_{c,0} a_{Jc}}{a_{JJ}} - \frac{\sum \varphi_K a_{JK}}{a_{JJ}} - \frac{\sum \psi'_c a_{Jc}}{a_{JJ}} \\ &= \varphi_{J,0} + \varphi'_J + \varphi''_J. \end{aligned}\right\} \tag{581}$$

Die Stabdrehwinkel ψ_c setzen sich aus zwei, die Knotendrehwinkel φ_J aus drei Anteilen zusammen. Die Anteile $\psi_{c,0}$ sind unabhängig voneinander und durch bekannte Größen bestimmt. Dasselbe gilt von den Anteilen $\varphi_{J,0}$. Sie bilden einen Teil der ersten Näherung ψ_c, φ_J, welche aus $\psi_{c,0}$, $\varphi_{J,0}$ und geschätzten oder angenommenen Werten φ_J entsteht und zu neuen Werten ψ_c, φ_J führt. Die Reihenfolge der einzelnen Schritte ist nach der Bestimmung der Konstanten $\psi_{c,0} = -a_{c0}/a_{cc}$, $\varphi_{J,0} = -(a_{J0} + \sum \psi_{c,0} a_{Jc})/a_{JJ}$ durch die folgenden vier Bedingungen vorgeschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \psi'_c = -\frac{\sum \varphi_J a_{cJ}}{a_{cc}}, \qquad \varphi'_J = -\frac{\sum \varphi_K a_{JK}}{a_{JJ}}, \qquad \varphi''_J = -\frac{\sum \psi'_c a_{Jc}}{a_{JJ}}, \\ \varphi_J = \varphi_{J,0} + \varphi'_J + \varphi''_J. \end{aligned}\right\} \tag{582}$$

Bei der Iteration ist der Abschnitt 30 zu beachten. Die Ergebnisse für die unabhängigen Komponenten ψ_c, φ_J aus der letzten Näherungsfolge müssen die statischen Bedingungen (578), (579) oder gleichwertige Ansätze für das Gleichgewicht von Schnittkräften erfüllen.

Bei symmetrischer Belastung sind die Stabdrehwinkel ψ_c und daher auch die Anteile φ''_J der Knotendrehwinkel Null. Sie sind aber auch bei unsymmetrischer senkrechter Belastung so klein, daß sie vernachlässigt werden können.

Die Belastung durch Wind darf bei der Unsicherheit der Druckverteilung stets durch Einzellasten ersetzt werden, die an den Stabknoten des luvseitigen Pfostens oder der luv- und leeseitigen Pfosten angreifen. Die Momente $M^{(\varphi)}_{J0}$ sind in diesem Falle Null. Bei symmetrischer Temperaturänderung eines symmetrischen Tragwerks ist die waagerechte Verschiebung der Querschnitte der Symmetrieachse Null. Die Berechnung bleibt daher auf die Knotendrehwinkel beschränkt. Ähnliche Vereinfachungen verkürzen auch die umfangreiche Berechnung der waagerecht liegenden, mehrreihigen Silorahmen, da die Stabdrehwinkel hier durch die Belastung entweder Null sind oder mit großer Annäherung zu Null angenommen werden können (Abschn. 53).

Mann, L.: Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. Berlin 1927. — Takabeya, F.: Rahmentafeln. Berlin 1930. — Engesser, F.: Der Stockwerkrahmen. Eisenbau 1920, S. 81.

41. Stabwerke mit geraden und gekrümmten Stabachsen.

Der Ansatz wird auf symmetrische, beiderseits eingespannte Stabbogen beschränkt, um das Wesentliche der Rechnung hervorheben zu können. Die Erweiterung auf andere Stabformen bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

Die bezogenen Längenänderungen ε_k der geraden Stäbe l_k sind wie in Abschn. 39 Null oder geometrisch bestimmt (ε_{k0}), dagegen ändern die Stabzugsehnen l_h durch Belastung und andere Ursachen ihre Länge um den Betrag $\varepsilon_h l_h = \Delta l^*_h$. Er besteht aus einem geometrisch bestimmten Teil Δl_{h0} und einem geometrisch unbestimmten, von den Anschlußkräften abhängigen Teile Δl_h $(\Delta l^*_h = \Delta l_{h0} + \Delta l_h)$. Der Verschiebungszustand des Stabwerks enthält daher $(3r + 2r_1 - s_1)$ voneinander unabhängige unbekannte Komponenten. Dasselbe gilt von der kinematisch äquivalenten Knotenpunktfigur. Diese zählt $(3\,r + 2\,r_1 - s_1)$ Freiheitsgrade und wird zur Untersuchung wiederum durch eine kinematisch äquivalente Knotenkette ersetzt, deren Stablängen $l_h(1 + \varepsilon_h)$ ebenso wie deren Knoten- und Stabdrehwinkel φ_J, ϑ_h beliebige Größen annehmen können. Um der Knotenkette diese kinematischen Eigenschaften beizulegen, werden nicht nur die Anschlußmomente $M_J^{(h)}$, sondern auch die Längskräfte N_h der s_2 gekrümmten Stäbe im Symmetriepunkt T_h als äußere Kräfte betrachtet, so daß nicht nur der Stabanschluß am Knoten unabhängig vom Gleichgewicht der äußeren Kräfte frei drehbar sein, sondern auch der stetige Zusammenhang des Stabes im Scheitel nach Abb. 322 durch eine Führung ersetzt werden kann. Die Knotenkette besitzt dann $r + f_1 + s_2^* = r + f$ Freiheitsgrade. Der Verschiebungszustand ist durch r Knotendrehwinkel φ_J und f voneinander unabhängige Komponenten ψ_c bestimmt. Hierfür lassen sich einzelne Stabdrehwinkel ϑ_i, die Längenänderungen Δl_h einzelner Stabzugsehnen (h) und Punktverschiebungen u_J verwenden. Sie werden aus $(r + f)$ statischen Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte M_J, $\mathfrak{P}_h$, $M_J^{(h)}$, N_h der Knotenkette berechnet.

Die Knotenkette vermag $(r + f)$ voneinander unabhängige Bewegungen Γ_J, Γ_c auszuführen. Sie wird dabei mit den Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_J = 1$ oder $\dot{\psi}_c = 1$ usw. angetrieben. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten gelten dann r Gleichungen von der Form

$$\delta A_J = 0 = \sum a_{JK}\,\varphi_K + \sum a_{Jc}\,\psi_c + a_{J0}, \qquad (J = A \ldots N) \tag{583}$$

und f Gleichungen von der Form

$$\delta A_c = 0 = \sum a_{cJ}\,\varphi_J + \sum a_{cb}\,\psi_b + a_{c0}, \qquad (c = 1 \ldots f). \tag{584}$$

Die Vorzahlen a_{JK}, a_{Jc}, a_{cb} der unbekannten Komponenten φ_J, ψ_c und die Belastungszahlen a_{J0}, a_{c0} bedeuten virtuelle Arbeiten. Der erste Index bezeichnet die Art des zwangläufigen Gebildes und dessen Geschwindigkeitszustand $\dot{\varphi}_J = 1$, $\dot{\psi}_c = 1$, der zweite die Ursache der Anschlußkräfte, welche in jedem Summanden virtuelle Arbeit leisten. Demnach sind a_{J0}, a_{c0} die virtuellen Arbeiten bei der Bewegung $\dot{\varphi}_J = 1$ oder $\dot{\psi}_c = 1$ der Knotenkette aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und den Anschlußkräften $M_{J0}^{(h)}$, N_{h0} des geometrisch bestimmten Hauptsystems $(\varphi_J = 0,\ \psi_c = 0)$ aus den äußeren Ursachen. Diese bestehen aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ der Stäbe, den Stabdrehwinkeln ϑ_{h0} und den Längenänderungen Δl_{h0} der Stabzugsehnen durch Temperaturwechsel $(\alpha_t t l_h)$ und vorgeschriebene Stützenverschiebungen Δ_E. Die virtuellen Arbeiten a_{JK}, a_{Jc} entstehen bei der Bewegung $\dot{\varphi}_J = 1$ aus den Anschlußkräften des Hauptsystems $M_{HK}^{(h)}$, N_{hK} durch $\varphi_K = 1$ oder $M_{Hc}^{(h)}$, N_{hc} durch $\psi_c = 1$. Ebenso werden a_{cJ}, a_{cb} aus dem Bewegungszustand $\dot{\psi}_c = 1$ und den Anschlußkräften des Hauptsystems $M_{HJ}^{(h)}$, N_{hJ} aus $\varphi_J = 1$ oder $M_{Hc}^{(h)}$, N_{hc} aus $\psi_c = 1$ gebildet. Die Anschlußkräfte aus den verschiedenen Ursachen $\mathfrak{P}_h$, φ_J, ψ_c sind auf S. 310 entwickelt und für l_h in der folgenden Superposition zusammengefaßt worden:

$$\left.\begin{aligned}
M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + \varphi_J\,M_{JJ}^{(h)} + \varphi_K\,M_{JK}^{(h)} + \vartheta_h\,M_{J\vartheta}^{(h)} + \Delta l_h\,M_{J\Delta}^{(h)},\\
M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} - \Delta l_{h0}\frac{y_0}{\delta_{11}} - \vartheta_{h0}\frac{l_h^2}{2\,\delta_{22}} + \varphi_J\left(\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\,\delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}}\right)\\
&\quad + \varphi_K\left(-\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\,\delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}}\right) - \sum\psi_c\left(\vartheta_{hc}\frac{l_h^2}{2\,\delta_{22}} + \Delta l_{hc}\frac{y_0}{\delta_{11}}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{585}$$

$$\left.\begin{aligned}
M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \varphi_J\,M_{KJ}^{(h)} + \varphi_K\,M_{KK}^{(h)} + \vartheta_h\,M_{K\vartheta}^{(h)} + \Delta l_h\,M_{K\Delta}^{(h)},\\
M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \Delta l_{h0}\frac{y_0}{\delta_{11}} - \vartheta_{h0}\frac{l_h^2}{2\,\delta_{22}} + \varphi_J\left(-\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\,\delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}}\right)\\
&\quad + \varphi_K\left(\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\,\delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}}\right) - \sum\psi_c\left(\vartheta_{hc}\frac{l_h^2}{2\,\delta_{22}} - \Delta l_{hc}\frac{y_0}{\delta_{11}}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{586}$$

$$\left.\begin{aligned} N_h &= N_{h0} + \varphi_J N_{hJ} + \varphi_K N_{hK} + \Delta l_h N_{h\Delta}, \\ N_{h'} &= -X_1 = N_{h0} + \frac{\Delta l_{h0}}{\delta_{11}} - \varphi_J \frac{y_0}{\delta_{11}} + \varphi_K \frac{y_0}{\delta_{11}} + \sum \psi_c \Delta l_{hc} \frac{1}{\delta_{11}}, \\ \Delta l_{h0} &= \overline{\Delta l}_{h0} - E J_c \alpha_t t l_h . \end{aligned}\right\} \qquad (587)$$

Unsymmetrische Bogenstellung. Die Stabendmomente $M_J^{(h)}$ und die Längskräfte N_h im Scheitel der gekrümmten Stäbe (Abb. 322) werden als äußere Kräfte angesehen, so daß eine Knotenkette mit 11 Stabelementen entsteht. Dieser wird das geometrisch bestimmte Hauptsystem zugeordnet.

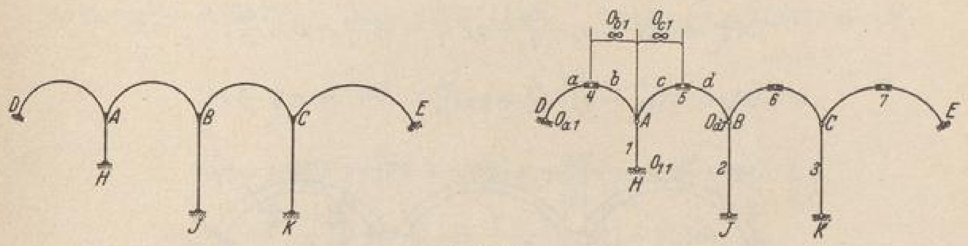


Abb. 322.

Anzahl der Knoten und Stäbe $r = 3$, $r_1 = 0$, $s = 7$, $s_1 = 3$, $s_2 = 4$. Geometrisch überzählige Stäbe $m = 1$, daher $f_1 = 2 \cdot 3 - (7 - 1) = 0$, $s_2^* = 4 - 1 = 3$ (vgl. S. 314).
Anzahl der Unbekannten $r = 3$, $f = s_2^* + f_1 = 3$.

Als unabhängige Komponenten des Verschiebungszustandes werden neben den Knotendrehwinkeln $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ die Stabdrehwinkel der drei Pfosten $\psi_1 = \vartheta_1$, $\psi_2 = \vartheta_2$, $\psi_3 = \vartheta_3$ ausgewählt. Die sechs statischen Bedingungen, welche diese erfüllen müssen, ergeben sich mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen aus $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ für $\dot\varphi_A = 1$, $\dot\varphi_B = 1$, $\dot\varphi_C = 1$, $\dot\psi_1 = 1$, $\dot\psi_2 = 1$, $\dot\psi_3 = 1$. Die Kette Γ_1 besteht aus den Stäben $1, a, b, c, d$, deren Hauptpole (b), (c) im Unendlichen liegen und deren Hauptpole (a), (1), (d) mit den Punkten D, H und B zusammenfallen. Dabei verschieben sich die Stabelemente b, c waagerecht mit der Geschwindigkeit $\dot 1 h_1$. Die Stäbe a und d bleiben in Ruhe. Der Bewegungszustand der Ketten Γ_2 mit $\dot\psi_2 = 1$ und Γ_3 mit $\dot\psi_3 = 1$ ist ähnlich. Die Gleichgewichtsbedingungen bilden die folgende Matrix:

	φ_A	φ_B	φ_C	ψ_1	ψ_2	ψ_3	a_0
$\dot\varphi_A$	a_{AA}	a_{AB}		a_{A1}	a_{A2}		a_{A0}
$\dot\varphi_B$	a_{BA}	a_{BB}	a_{BC}	a_{B1}	a_{B2}	a_{B3}	a_{B0}
$\dot\varphi_C$		a_{CB}	a_{CC}		a_{C2}	a_{C3}	a_{C0}
$\dot\psi_1$	a_{1A}	a_{1B}		a_{11}	a_{12}		a_{10}
$\dot\psi_2$	a_{2A}	a_{2B}	a_{2C}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{20}
$\dot\psi_3$		a_{3B}	a_{3C}		a_{32}	a_{33}	a_{30}

Bogenstellung mit drei Öffnungen nach Abb. 323.

1. Überzählige Größen. Der den Pfeilerköpfen benachbarte Bereich der Gewölbe wird wegen seiner großen Steifigkeit als starr angenommen, so daß die Scheibenkette (Abb. 324) mit den Parametern φ_A, φ_B, $\psi_1 = \vartheta_s$, $\psi_2 = \vartheta_h$ und das ihr zugeordnete Hauptsystem B nach S. 311 der Berechnung zugrunde gelegt wird.

2. Anschlußkräfte der Bogen. Mit den Abkürzungen

$$c_1 = l\left(\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l^2}{4\,\delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}}\right), \qquad c_2 = l\left(-\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l^2}{4\,\delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}}\right),$$

$$c_3 = l^2\,\frac{y_0}{\delta_{11}}, \qquad c_4 = l\,\frac{l^2}{2\,\delta_{22}}, \qquad c_5 = l^3\,\frac{1}{\delta_{11}}$$

gehen die Beziehungen (585) bis (587) über in

$$M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)} + \varphi_J\cdot\frac{c_1}{l} + \varphi_K\,\frac{c_2}{l} - \vartheta_h\,\frac{c_4}{l} - \Delta l_h\,\frac{c_3}{l^2},$$

$$M_K^{(h)} = M_{K0}^{(h)} + \varphi_J\cdot\frac{c_2}{l} + \varphi_K\,\frac{c_1}{l} - \vartheta_h\,\frac{c_4}{l} + \Delta l_h\,\frac{c_3}{l^2},$$

$$N_h = N_{h0} - \varphi_J\cdot\frac{c_3}{l^2} + \varphi_K\,\frac{c_3}{l^2} \qquad + \Delta l_h\,\frac{c_5}{l^3}.$$

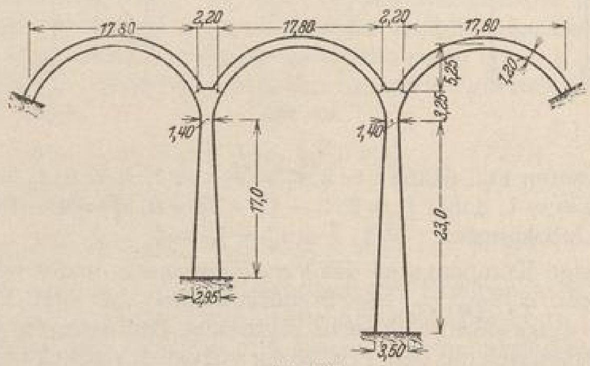


Abb. 323.

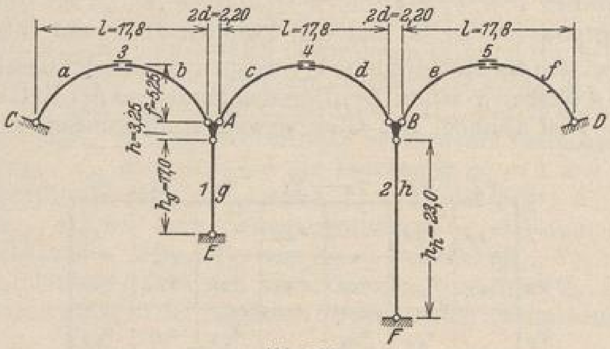


Abb. 324.

Die Entwicklung von ϑ_h und Δl_h lautet hier im Gegensatz zu S. 318 wegen der endlichen Ausdehnung der Knotenscheiben

$$\vartheta_h = \vartheta_{h0} + \vartheta_{hJ}\cdot\varphi_J + \vartheta_{hK}\cdot\varphi_K + \sum\psi_c\cdot\vartheta_{hc},$$
$$\Delta l_h = \Delta l_{h0} + \Delta l_{hJ}\cdot\varphi_J + \Delta l_{hK}\cdot\varphi_K + \sum\psi_c\cdot\Delta l_{hc}.$$

Die Anschlußkräfte ergeben sich daher aus den folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)} - \vartheta_{h0}\frac{c_4}{l} - \Delta l_{h0}\frac{c_3}{l^2} + \varphi_J\left(\frac{c_1}{l} - \vartheta_{hJ}\frac{c_4}{l} - \Delta l_{hJ}\frac{c_3}{l^2}\right) \\ + \varphi_K\left(\frac{c_2}{l} - \vartheta_{hK}\frac{c_4}{l} - \Delta l_{hK}\frac{c_3}{l^2}\right) + \sum\psi_c\left(-\vartheta_{hc}\frac{c_4}{l} - \Delta l_{hc}\frac{c_3}{l^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

$$\left.\begin{aligned} M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} - \vartheta_{h0}\frac{c_4}{l} + \Delta l_{h0}\frac{c_3}{l^2} + \varphi_J\left(\frac{c_2}{l} - \vartheta_{hJ}\frac{c_4}{l} + \Delta l_{hJ}\frac{c_3}{l^2}\right) \\ &\quad + \varphi_K\left(\frac{c_1}{l} - \vartheta_{hK}\frac{c_4}{l} + \Delta l_{hK}\frac{c_3}{l^2}\right) + \Sigma\,\psi_e\left(-\vartheta_{he}\frac{c_4}{l} + \Delta l_{he}\frac{c_3}{l^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

$$N_h = N_{h0} + \Delta l_{h0}\frac{c_5}{l^3} + \varphi_J\left(-\frac{c_3}{l^2} + \Delta l_{hJ}\frac{c_5}{l^3}\right) + \varphi_K\left(\frac{c_3}{l^2} + \Delta l_{hK}\frac{c_5}{l^3}\right) + \Sigma\,\psi_e\cdot\Delta l_{he}\frac{c_5}{l^3}. \quad \text{(c)}$$

Berechnung der Koeffizienten c mit Hilfe der Tabelle 16

$$l = 17{,}8\ \text{m}, \qquad f = 5{,}25\ \text{m}, \qquad r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = 10{,}168810\ \text{m}, \qquad e = r - f = 4{,}918810\ \text{m},$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{l}{2r} = 0{,}875225, \qquad \varphi_0 = 61^0\,04'\,17{,}8'', \qquad b = 2\,\varphi_0\cdot r = 21{,}6777\ \text{m} = b',$$

$$y_0 = \int_0^b y\,\frac{J_c}{J}\,ds : \int_0^b \frac{J_c}{J}\,ds = r\left(\frac{l}{b} - \frac{e}{r}\right) = 3{,}43101\ \text{m},$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= y_0^2\,b' - 2\,y_0\,r\left(\frac{l}{b} - \frac{e}{r}\right)b' + \frac{r^2}{2}\left(1 + 2\frac{e^2}{r^2} - 3\,\frac{e}{r}\,\frac{l}{b}\right) \\ &= b'\left[\frac{r^2}{2}\left(1 + 2\frac{e^2}{r^2} - 3\,\frac{e}{r}\,\frac{l}{b}\right) - y_0^2\right] = 54{,}584, \\ \delta_{22} &= \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\left(1 + 2\,\frac{r^2}{l^2} - 2\,\frac{e\,r}{b\,l}\right)b' - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\left(1 - 2\,\frac{r^2}{l^2} + 2\,\frac{e\,r}{b\,l}\right)b' \\ &= \frac{r\,l}{2}\left(\frac{r}{l} - \frac{e}{b}\right)b' = 675{,}62, \\ \delta_{33} &= b' = 21{,}678, \end{aligned}$$

$$c_1 = +6{,}7471, \qquad c_2 = -2{,}5733, \qquad c_3 = +19{,}916, \qquad c_4 = +4{,}1738, \qquad c_5 = 103{,}32.$$

3. Anschlußkräfte der Pfeiler (Abb. 325.) Nach S. 308 ist

$$M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)} + \beta_{11}\,\varphi_J + \beta_{12}\,\varphi_K - (\beta_{11} + \beta_{12})\,\vartheta_h,$$
$$M_K^{(h)} = M_{K0}^{(h)} + \beta_{21}\,\varphi_J + \beta_{22}\,\varphi_K - (\beta_{22} + \beta_{12})\,\vartheta_h.$$

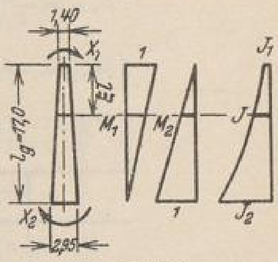


Abb. 325.

Die Vorzahlen β_{ik} werden durch numerische Integration nach Simpson berechnet.

$$\beta_{11} = \frac{\delta_{22}}{D}, \qquad \beta_{12} = -\frac{\delta_{12}}{D}, \qquad \beta_{22} = \frac{\delta_{11}}{D}, \qquad D = \delta_{11}\,\delta_{22} - \delta_{12}^2.$$

a) Linker Pfeiler

$$\delta_{11} = l_g\int_0^1 \xi'^2\,\frac{J_c}{J}\,d\xi, \qquad \delta_{12} = -\,l_g\int_0^1 \xi\,\xi'\,\frac{J_c}{J}\,d\xi. \qquad \delta_{22} = l_g\int_0^1 \xi^2\,\frac{J_c}{J}\,d\xi, \qquad J_c = 0{,}144\ \text{m}^4.$$

$$J = J_1\left[1 + \left(\sqrt[3]{J_2/J_1} - 1\right)\xi\right]^3 = 0{,}2287\,(1 + 1{,}104\,\xi)^3.$$

ξ	J	J_c/J	k	$\xi\,\xi'\,J_c/J$	$k\,\xi\,\xi'\,J_c/J$	$\xi^2\,J_c/J$	$k\cdot\xi^2\,J_c/J$	$\xi'^2\,J_c/J$	$k\cdot\xi'^2\,J_c/J$
0,0	0,2287	0,6296	1	0	0	0	0	0,6296	0,6296
1	0,3131	0,4599	4	0,04139	0,1656	0,00460	0,0184	0,3725	1,4900
2	0,4161	0,3461	2	0,05538	0,1107	0,01384	0,0277	0,2215	0,4430
3	0,5395	0,2691	4	0,05651	0,2260	0,02422	0,0969	0,1319	0,5276
4	0,6852	0,2101	2	0,05042	0,1008	0,03362	0,0672	0,0756	0,1512
5	0,8550	0,1684	4	0,04210	0,1684	0,04210	0,1684	0,0421	0,1684
6	1,0507	0,1371	2	0,03290	0,0658	0,04936	0,0987	0,0219	0,0438
7	1,2742	0,1130	4	0,02373	0,0949	0,05537	0,2215	0,0102	0,0408
8	1,5274	0,0943	2	0,01509	0,0302	0,06035	0,1207	0,0038	0,0076
0,9	1,8121	0,0795	4	0,00716	0,0286	0,06440	0,2576	0,0008	0,0032
1,0	2,1301	0,0676	1	0	0	0,06760	0,0676	0	0
					0,9910		1,1447		3,5052

$$\delta_{11} = +\frac{l_g/10}{3}\,3{,}5052 = +1{,}986\,, \qquad \delta_{22} = +\frac{l_g/10}{3}\,1{,}1447 = +0{,}649\,,$$

$$\delta_{12} = -\frac{l_g/10}{3}\,0{,}9910 = -0{,}561\,,$$

$$\beta_{11} = +0{,}666\,, \qquad \beta_{12} = +0{,}576\,, \qquad \beta_{22} = +2{,}039\,,$$

$$\beta_{11} + \beta_{12} = +1{,}242\,, \qquad \beta_{22} + \beta_{12} = +2{,}615\,.$$

Damit wird

$$M_A^{(g)} = M_{A0}^{(g)} + 0{,}666\,\varphi_A + 0{,}576\,\varphi_E - 1{,}242\,\vartheta_g\,,$$

$$M_E^{(g)} = M_{E0}^{(g)} + 2{,}039\,\varphi_E + 0{,}576\,\varphi_A - 2{,}615\,\vartheta_g\,.$$

b) Rechter Pfeiler. Auf gleiche Weise ergibt sich für den rechten Pfeiler

$$M_B^{(h)} = M_{B0}^{(h)} + 0{,}567\,\varphi_B + 0{,}555\,\varphi_F - 1{,}122\,\vartheta_h\,,$$

$$M_F^{(h)} = M_{F0}^{(h)} + 2{,}253\,\varphi_F + 0{,}555\,\varphi_B - 2{,}808\,\vartheta_h\,.$$

4. Anschlußkräfte infolge der Überzähligen. In der folgenden Tabelle sind die Werte ϑ und $\Delta l/l$, ferner die Anschlußkräfte infolge $\varphi_A = 1$, $\varphi_B = 1$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 1$ zusammengestellt. Sie ergeben sich unmittelbar aus den Formeln (a) bis (c). Z. B. ist

$$\vartheta_{3A} = -1_A\frac{d}{l} = -0{,}061798\,, \qquad \frac{\Delta l_{4A}}{l} = -1_A\frac{h}{l} = -0{,}182584\,,$$

$$\frac{\Delta l_{31}}{l} = 1_1\frac{h_g}{l} = +0{,}955056\,.$$

$$l\,M_{AA}^{(b)} = c_1 - \vartheta_{3A}\,c_4 + \frac{\Delta l_{3A}}{l}\,c_3 = c_1 + \frac{d}{l}\,c_4 + \frac{h}{l}\,c_3 = +10{,}6413\,,$$

$$l\,N_{5B} = \frac{1}{l}\left(\dot{-}c_3 + \frac{\Delta l_{5B}}{l}\,c_5\right) = \frac{1}{l}\left(-c_3 - \frac{h}{l}\,c_5\right) = -\;2{,}1787\,,$$

$$l\,M_{A1}^{(c)} = -\vartheta_{41}\,c_4 - \frac{\Delta l_{41}}{l}\,c_3 \qquad = +\frac{h_g}{l}\,c_3 \qquad = +19{,}0209\,,$$

$$l\,M_{A1}^{(g)} = -1{,}242\,l \qquad = -22{,}1076\,.$$

	$\varphi_A = 1$	$\varphi_B = 1$	$\psi_1 = 1$	$\psi_2 = 1$
ϑ_g	0	0	1	0
ϑ_h	0	0	0	1
ϑ_3	− 0,061798	0	0	0
ϑ_4	− 0,061798	− 0,061798	0	0
ϑ_5	0	− 0.061798	0	0
$\Delta l_3/l$	+ 0 182584	0	+ 0,955056	0
$\Delta l_4/l$	− 0,182584	+ 0,182584	− 0,955056	+ 1,292135
$\Delta l_5/l$	0	− 0,182584	0	− 1,292135
$l\,M_C^{(a)}$	5,9517	0	− 19,0209	0
$l\,N_3$	+ 2,1787	0	+ 5,5436	0
$l\,M_A^{(b)}$	+ 10,6413	0	+ 19,0209	0
$l\,M_A^{(g)}$	+ 11,8548	0	− 22,1076	0
$l\,M_E^{(g)}$	+ 10,2528	0	− 46,5470	0
$l\,M_A^{(c)}$	+ 10,6413	− 5,9517	+ 19,0209	− 25,7342
$l\,N_4$	− 2,1787	+ 2,1787	− 5,5436	+ 7,5002
$l\,M_B^{(d)}$	− 5,9517	+ 10,6413	− 19,0209	+ 25,7342
$l\,M_B^{(h)}$	0	+ 10,0926	0	− 19,9716
$l\,M_F^{(h)}$	0	+ 9,8790	0	− 49,9824
$l\,M_B^{(e)}$	0	+ 10,6413	0	+ 25,7342
$l\,N_5$	0	− 2,1787	0	− 7,5000
$l\,M_D^{(f)}$	0	− 5,9517	0	− 25,7342

5. Vorzahlen der Bedingungsgleichungen und β-Vorzahlen

$$l\,a_{AA} = -\mathrm{i}_A\,(l\,M_{AA}^{(b)} + l\,M_{AA}^{(g)} + l\,M_{AA}^{(c)}) - 0{,}061798\,(l\,M_{0A}^{(a)} + l\,M_{AA}^{(b)} + l\,M_{AA}^{(c)} + l\,M_{E}^{(d)})$$
$$+ 0{,}182584 \cdot 17{,}8\,(-l\,N_{3A} + l\,N_{4A})$$
$$= -33{,}137 - 0{,}580 - 14{,}161 = -47{,}88\,,$$

$$l\,a_{AB} = +12{,}74\,, \qquad l\,a_{A1} = -51{,}97\,, \qquad l\,a_{A2} = +50{,}11\,,$$

$$l\,a_{BB} = -\mathrm{i}_B\,(l\,M_{BB}^{(d)} + l\,M_{BB}^{(h)} + l\,M_{BB}^{(e)}) - 0{,}061798\,(l\,M_{AB}^{(c)} + l\,M_{BB}^{(d)} + l\,M_{BB}^{(e)} + l\,M_{DB}^{(f)})$$
$$+ 0{,}182584 \cdot 17{,}8\,(-l\,N_{4B} + l\,N_{5B})$$
$$= -31{,}375 - 0{,}580 - 14{,}161 = -46{,}12\,,$$

$$l\,a_{B1} = +37{,}04\,, \qquad l\,a_{B2} = -80{,}25\,,$$

$$l\,a_{11} = \mathrm{i}_1\,(l\,M_{A1}^{(g)} + l\,M_{B1}^{(g)}) + 0{,}955056 \cdot 17{,}8\,(-l\,N_{31} + l\,N_{41})$$
$$= -68{,}655 - 188{,}482 = -257{,}14\,,$$
$$l\,a_{12} = +127{,}50\,, \qquad l\,a_{22} = -414{,}97\,.$$

l fache Vorzahlen der Bedingungsgleichungen

	φ_A	φ_B	ψ_1	ψ_2
A	− 47,88	+ 12,74	− 51,97	+ 50,11
B	+ 12,74	− 46,12	+ 37,04	− 80,25
1	− 51,97	+ 37,04	− 257,14	+ 127,50
2	+ 50,11	− 80,25	+ 127,50	− 414,97

Vorzahlen $\beta' = \dfrac{1000}{l}\,\beta$

	A	B	1	2
φ_A	− 28,04226	− 0,91125	+ 4,65360	− 1,78022
φ_B	− 0,91125	− 33,47763	− 1,74904	+ 5,82672
ψ_1	+ 4,65360	− 1,74904	− 5,46810	− 0,77989
ψ_2	− 1,78022	+ 5,82672	− 0,77989	− 3,99122

Eine beliebige Belastung führt mit den Absolutgliedern a_{K0} zu den Überzähligen φ_A, φ_B, ψ_1, ψ_2 z. B.

$$\varphi_A = -\frac{l}{1000}\,(\beta'_{AA} \cdot a_{A0} + \beta'_{AB} \cdot a_{B0} + \beta'_{A1} \cdot a_{10} + \beta'_{A2} \cdot a_{20})\,.$$

Die Stabendmomente und die Längskräfte in den Bogenscheiteln werden mit den Angaben der Tabelle auf S. 352 aus

$$M_J^{(k)} = M_{J0}^{(k)} + \varphi_A\,M_{JA}^{(k)} + \varphi_B\,M_{JB}^{(k)} + \psi_1\,M_{J1}^{(k)} + \psi_2\,M_{J2}^{(k)}$$

erhalten.

6. Einflußlinie des Momentes $M_A^{(e)}$

$$M_A^{(e)} = M_{A0}^{(e)} + \varphi_A \cdot M_{AA}^{(e)} + \varphi_B \cdot M_{AB}^{(e)} + \psi_1 \cdot M_{A1}^{(e)} + \psi_2 \cdot M_{A2}^{(e)} = M_{A0}^{(e)} + M_{A*}^{(e)}\,.$$

Abgesehen von dem ersten Glied, der Einflußlinie im geometrisch bestimmten Hauptsystem, stellen die einzelnen Glieder die mit konstanten Zahlenwerten erweiterten Einflußlinien der Überzähligen dar. Die Einflußlinie φ_A ist die Biegelinie infolge $\mathsf{M}_A = 1$, die Einflußlinie ψ_1 ist die Biegelinie infolge zweier Kräfte $1/l_g$ an den Knoten A und E. Der Anteil $M_{A*}^{(e)}$ ergibt sich also als die Biegelinie des Lastgurtes infolge der Lasten $\mathsf{M}_A = M^{(c)}_{AA}$, $\mathsf{M}_B = M^{(c)}_{AB}$, $\mathsf{M}_g = M^{(c)}_{A1}$, $\mathsf{M}_h = M^{(c)}_{A2}$. Belastungsglieder hierfür:

$$l\,a_{A0} = l\,\mathsf{M}_A = +10{,}6413, \qquad l\,a_{B0} = l\,\mathsf{M}_B = -5{,}9517,$$
$$l\,a_{10} = l\,\mathsf{M}_g = +19{,}0209, \qquad l\,a_{20} = l\,\mathsf{M}_h = -25{,}7342.$$

Überzählige:

$$\varphi^*_{A,Ac} = -\frac{1}{1000}\,(-28{,}04226 \cdot 10{,}6413 + 0{,}91125 \cdot 5{,}9517 + 4{,}65360 \cdot 19{,}0209$$
$$+ 1{,}78022 \cdot 25{,}7342) = +0{,}158654,$$

$$\varphi^*_{B,Ac} = -0{,}006338, \qquad \psi^*_{1,Ac} = +0{,}024008, \qquad \psi^*_{2,Ac} = -0{,}034253$$

Anschlußkräfte

$M^{(a)}_{C,Ac}$	− 0,0787031	$M^{(c)}_{A,Ac}$	+ 0,1721424	$M^{(e)}_{B,Ac}$	− 0,0533119
$N_{3,Ac}$	+ 0,0268961	$N_{4,Ac}$	− 0,0421047	$N_{5,Ac}$	+ 0,0152086
$M^{(b)}_{A,Ac}$	+ 0,1205022	$M^{(d)}_{B,Ac}$	− 0,1320131	$M^{(f)}_{D,Ac}$	+ 0,0516402

Die Biegelinie $M^{(c)}_{A*}$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Verschiebung der Bogensehnen und Verschiebungen relativ zu den Bogensehnen. Diese werden durch Verwendung der Biegelinien η_1, η_2', η_2 infolge der in Abb. 326 angegebenen Belastungen erhalten. Die Biegelinien sind mit den Formeln der Tabelle 16 berechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

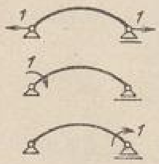


Abb. 326.

x	η_1	η_2'	η_2
0	0	0	0
1,78	+ 64,340	+ 10,7037	− 5,6918
3,56	+ 117,744	+ 17,3690	− 11,0942
5,34	+ 157,898	+ 20,9931	− 15,6826
7,12	+ 182,540	+ 22,2356	− 19,2557
8,90	+ 190,834	+ 21,5398	− 21,5398
10,68	+ 182,540	+ 19,2557	− 22,2356
12,46	+ 157,898	+ 15,6826	− 20,9931
14,24	+ 117,744	+ 11,0942	− 17,3690
16,02	+ 64,340	+ 5,6918	− 10,7037
17,80	0	0	0

Bereich 3:

$$M^{(c)}_{A*} = -d\varphi^*_{A,Ac} \cdot \xi + M^{(a)}_{C,Ac} \cdot \eta_2' + M^{(b)}_{A,Ac} \cdot \eta_2 + N_{3,Ac} \cdot \eta_1$$
$$= -0{,}174519\,\xi - 0{,}078703\,\eta_2' + 0{,}120502\,\eta_2 + 0{,}026896\,\eta_1.$$

Bereich 4:

$$M^{(c)}_{A*} = +d\varphi^*_{A,Ac} \cdot \xi' - d\varphi^*_{B,Ac} \cdot \xi + M^{(c)}_{A,Ac} \cdot \eta_2' + M^{(d)}_{B,Ac} \cdot \eta_2 + N_{4,Ac} \cdot \eta_1$$
$$= +0{,}174519\,\xi' + 0{,}006972\,\xi + 0{,}172142\,\eta_2' - 0{,}130013\,\eta_2 - 0{,}042105\,\eta_1.$$

Bereich 5:

$$M^{(c)}_{A*} = +d\varphi^*_{B,Ac} \cdot \xi' + M^{(e)}_{B,Ac} \cdot \eta_2' + M^{(f)}_{D,Ac} \cdot \eta_2 + N_{5,Ac} \cdot \eta_1$$
$$= -0{,}006972\,\xi' - 0{,}053312\,\eta_2' + 0{,}051640\,\eta_2 + 0{,}015209\,\eta_1.$$

Die Einflußlinie $M^{(c)}_{A0}$ ist die Einflußlinie für das starr eingespannte Gewölbe, erstreckt sich also nur über den Bereich 4. Für das Hauptsystem Abb. 288 ($J \equiv A$) ist

$$M^{(c)}_{A0} = X_1 \cdot y_0 - X_2 \cdot l/2 + X_3$$
$$= \frac{\delta_{1m}}{\delta_{11}}\,y_0 - \frac{\delta_{2m}}{\delta_{22}}\,\frac{l}{2} + \frac{\delta_{3m}}{\delta_{33}}.$$

Die Verwendung der Funktionen η_1, η_2, η_2' führt zu

$$\delta_{1m} = \eta_1 - y_0\,(\eta_2' - \eta_2), \qquad \delta_{2m} = \frac{l}{2}\,(\eta_2' + \eta_2), \qquad \delta_{3m} = -(\eta_2' - \eta_2),$$

und mit einer einfachen Umrechnung zu

$$M_{A0}^{(c)} = \frac{c_3}{l^2}\,\eta_1 - \frac{c_1}{l}\,\eta_2' - \frac{c_2}{l}\,\eta_2$$
$$= 0{,}062858\,\eta_1 - 0\;379051\,\eta_2' + 0{,}144567\,\eta_2\,.$$

Die Ordinaten der Einflußlinie $M_A^{(c)}$ sind in Abb. 327 aufgetragen.

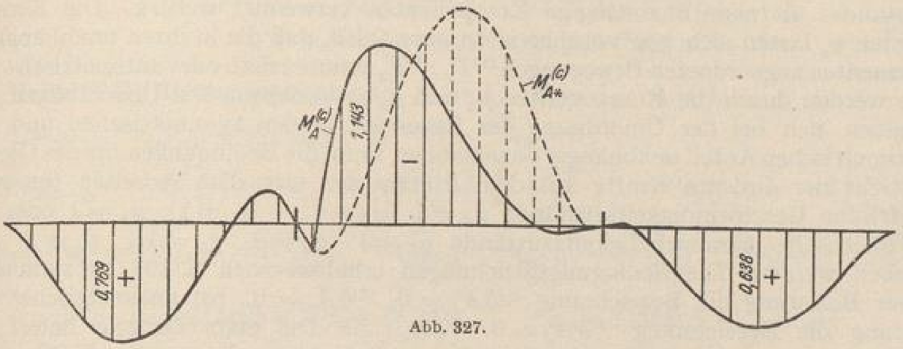


Abb. 327.

42. Symmetrie des Tragwerks.

Die geometrischen und elastischen Eigenschaften zahlreicher Tragwerke können auf Symmetrieachsen bezogen werden, so daß symmetrische Kraftwirkungen auch symmetrische Verschiebungszustände, antimetrische Kraftwirkungen antimetrische Verschiebungszustände erzeugen. Die Anzahl der unbekannten unabhängigen Komponenten ist dann wesentlich kleiner, so daß die Rechnung vereinfacht und abgekürzt wird (Abschn. 27).

Die symmetrisch zugeordneten Knoten- und Stabdrehwinkel sind bei Antimetrie der Belastung gleich groß, bei Symmetrie entgegengesetzt gleich. Die Symmetriepunkte des Tragwerks erfahren bei Antimetrie der Belastung keine Verschiebung in Richtung der Symmetrieachse, während bei Symmetrie der Belastung nicht nur die Knotendrehwinkel und die waagerechten Verschiebungen der Querschnitte der Symmetrieachse Null sind, sondern auch die Drehwinkel derjenigen Stäbe, welche die Symmetrieachse unter 90° schneiden oder mit ihr zusammenfallen. Sind die Längenänderungen der Stäbe Null, so gilt das gleiche oft auch von allen anderen Stabdrehwinkeln. Das geometrische Bild ist daher bei Symmetrie der Belastung durch eine kleinere Anzahl von unbekannten Komponenten bestimmt als bei Antimetrie. Für den Spannungszustand gilt das Gegenteil, so daß die Untersuchung je nach der Belastungsform mit der Berechnung der unabhängigen Verschiebungen φ_J, ψ_c oder der statisch unbestimmten Schnittkräfte eingeleitet werden kann.

Eine beliebige Belastung darf nach dem Superpositionsgesetz in zwei oder vier Anteile zerlegt werden, wenn eine oder mehrere Symmetrieachsen vorhanden sind. Jeder Anteil ist zu den Achsen symmetrisch oder antimetrisch, so daß die Verschiebungszustände aus der Spiegelung eines Teilbildes entwickelt werden können. In diesem Falle genügt die Berechnung der unabhängigen Komponenten dieses Abschnittes. Damit ist ein Weg zur vereinfachten Anwendung der Ansätze $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ gezeigt worden.

Die Symmetrie des Tragwerks zu einer oder mehreren Achsen kann bei Umordnung der vorgeschriebenen Belastung zur Bildung von Gruppen unabhängiger, geometrisch zugeordneter Komponenten des Verschiebungszustandes ebenso verwendet werden, wie dies in Abschnitt 28 für statisch unbestimmte Schnittkräfte angegeben worden ist. Der Ansatz entsteht auch hier durch Addition und Subtraktion symmetrisch zugeordneter Bedingungsgleichungen unter Einführung neuer Unbekannter.

Sind in einem Tragwerk mit einer Symmetrieachse die Knotendrehwinkel φ_J, χ_J symmetrisch zugeordnet, so lassen sich diese zu Gruppenbewegungen

$$\mu_J = \frac{\varphi_J - \chi_J}{2}, \qquad \varrho_J = \frac{\varphi_J + \chi_J}{2} \tag{588}$$

zusammenfassen, die bei der Entwicklung des Spannungs- und Verschiebungszustandes als neue unabhängige Komponenten verwendet werden. Die Komponenten ψ_c lassen sich von vornherein so auswählen, daß die in ihren unabhängigen Elementen zugeordneten Bewegungen ${}^{(1)}\Gamma_c$, ${}^{(2)}\Gamma_c$ symmetrisch oder antimetrisch sind. Sie werden durch die Komponenten μ_c und ϱ_c beschrieben. Die Überzähligen μ, ϱ ergeben sich bei der Umordnung der Belastung in den symmetrischen und den antimetrischen Anteil unabhängig voneinander, wenn die Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten für symmetrische Geschwindigkeitszustände $\dot{\mu}_J = 1$ $(\dot{\varphi}_J = 1,\ -\dot{\chi}_J = 1)$, $\dot{\mu}_c = 1$ oder für antimetrische Geschwindigkeitszustände $\dot{\varrho}_J = 1$ $(\dot{\varphi}_J = 1,\ \dot{\chi}_J = 1)$, $\dot{\varrho}_c = 1$ entwickelt werden. Die Bedingungsgleichungen erhalten nach S. 194 bei symmetrischer Belastung die Bezeichnung ${}^{(1)}\delta A_J = 0$, ${}^{(1)}\delta A_c = 0$, bei antimetrischer Belastung die Bezeichnung ${}^{(2)}\delta A_J = 0$, ${}^{(2)}\delta A_c = 0$. Die erste Gruppe liefert die Überzähligen μ_J, μ_c infolge symmetrischer Belastung, die zweite Gruppe die Überzähligen ϱ_J, ϱ_c infolge antimetrischer Belastung. Die Lösung zerfällt daher in zwei voneinander unabhängige Teile. Bei Symmetrie der Belastung ist

$$\mu_J = {}^{(1)}\varphi_J = -{}^{(1)}\chi_J, \tag{589}$$

bei Antimetrie der Belastung

$$\varrho_J = {}^{(2)}\varphi_J = {}^{(2)}\chi_J. \tag{590}$$

Schließlich wird ebenso wie auf S. 195

$$\varphi_J = {}^{(1)}\varphi_J + {}^{(2)}\varphi_J = \mu_J + \varrho_J, \qquad \chi_J = {}^{(1)}\chi_J + {}^{(2)}\chi_J = -\mu_J + \varrho_J. \tag{591}$$

Die Rechenvorschrift stimmt nach Ansatz und Lösung mit Abschnitt 28 überein und kann bei Symmetrie des Tragwerks nach zwei Achsen ebenso wie dort erweitert werden. Selbstverständlich besteht auch die Möglichkeit, durch eine algebraische Transformation der unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes allgemeine Gruppenbewegungen nach Abschnitt 36 zu bilden, die unabhängig voneinander berechnet werden. Die Transformation wird dabei derart festgesetzt, daß die virtuellen Arbeiten a_{JK}, a_{Jc}, a_{bc} Null sind.

Symmetrischer Stockwerkrahmen mit zwei Pfosten. Symmetrisch zugeordnete Knotendrehwinkel φ_J, χ_J; symmetrisch zugeordnete Stabdrehwinkel ϑ_i, ν_i (Abb. 328).

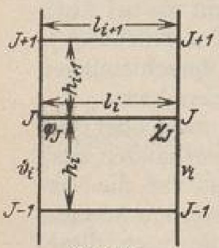


Abb. 328.

Belastung von Pfosten und Riegel; Umordnung der Belastung in den symmetrischen und den antimetrischen Anteil:

$$\left.\begin{aligned} \mu_J &= \frac{\varphi_J - \chi_J}{2}, & \mu_i &= \frac{\vartheta_i - \nu_i}{2} = 0, \\ \varrho_J &= \frac{\varphi_J + \chi_J}{2}, & \varrho_i &= \frac{\vartheta_i + \nu_i}{2} = \psi_i. \end{aligned}\right\} \tag{592}$$

Symmetrischer Anteil:

$$\varrho_J = 0; \qquad \mu_J = {}^{(1)}\varphi_J = -{}^{(1)}\chi_J \neq 0, \qquad \psi_i = {}^{(1)}\vartheta_i = {}^{(1)}\nu_i = 0.$$

Statische Bedingung: Kette ${}^{(1)}\Gamma_J$, Bewegungszustand $\dot{\mu}_J = 1$: $\dot{\varphi}_J = 1$, $-\dot{\chi}_J = 1$.

$${}^{(1)}\delta A_J = \mu_{J-1}\,{}^{(1)}a_{J(J-1)} + \mu_J\,{}^{(1)}a_{JJ} + \mu_{J+1}\,{}^{(1)}a_{J(J+1)} + {}^{(1)}a_{J0} = 0, \tag{593}$$

$${}^{(1)}a_{J(J-1)} = -2\left(\frac{2}{h_i'}\right), \quad {}^{(1)}a_{JJ} = -2\left(\frac{2}{l_i'} + \frac{4}{h_i'} + \frac{4}{h_{i+1}'}\right), \quad {}^{(1)}a_{J(J+1)} = -2\left(\frac{2}{h_{i+1}'}\right),$$

$${}^{(1)}a_{J0} = -2\,(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(\bar{i})} + M_{J0}^{(i+1)}).$$

Antimetrischer Anteil:

$$\mu_J = 0\,, \qquad \varrho_J = {}^{(2)}\varphi_J = {}^{(2)}\chi_J \neq 0\,, \qquad \psi_i = {}^{(2)}\vartheta_i = {}^{(2)}\nu_i \neq 0\,.$$

Statische Bedingungen: Kette ${}^{(2)}\Gamma_J$, Bewegungszustand $\varrho_J = 1$: $\dot\varphi_J = 1$, $\dot\chi_J = 1$.

$$\left.\begin{aligned} {}^{(2)}\delta A_J &= \varrho_{J-1}\,{}^{(2)}a_{J(J-1)} + \varrho_J\,{}^{(2)}a_{JJ} + \varrho_{J+1}\,{}^{(2)}a_{J(J+1)} \\ &\quad + \psi_i\,{}^{(2)}a_{Ji} + \psi_{i+1}\,{}^{(2)}a_{J(i+1)} + {}^{(2)}a_{J0} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{594}$$

Kette ${}^{(2)}\Gamma_i$, Bewegungszustand: $\dot\psi_i = 1$, $\dot\vartheta_i = 1$, $\dot\nu_i = 1$.

$${}^{(2)}\delta A_i = \varrho_{J-1}\,{}^{(2)}a_{i(J-1)} + \varrho_J\,{}^{(2)}a_{iJ} + \psi_i\,{}^{(2)}a_{ii} + {}^{(2)}a_{i0} = 0\,, \tag{595}$$

$${}^{(2)}a_{J(J-1)} = -2\left(\frac{2}{h_i'}\right), \quad {}^{(2)}a_{JJ} = -2\left(\frac{6}{l_i'} + \frac{4}{h_i'} + \frac{4}{h_{i+1}'}\right), \quad {}^{(2)}a_{J(J+1)} = -2\left(\frac{2}{h_{i+1}'}\right),$$

$${}^{(2)}a_{Ji} = {}^{(2)}a_{iJ} = {}^{(2)}a_{i(J-1)} = 2\left(\frac{6}{h_i'}\right), \quad {}^{(2)}a_{J(i+1)} = {}^{(2)}a_{(i+1)J} = 2\left(\frac{6}{h_{i+1}'}\right), \quad {}^{(2)}a_{ii} = -2\left(\frac{12}{h_i'}\right),$$

$${}^{(2)}a_{J0} = -2\left(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(i+1)}\right), \qquad {}^{(2)}a_{i0} = 2\left(M_0^{(i)} + h_i \sum_J^N W_K\right).$$

(Die Indizes $(\bar i)$, $(\overline{i+1})$ bezeichnen die Pfosten, der Index N den obersten Riegel.)

Die Gl. (593) zur Berechnung der Gruppenverschiebungen μ_J sind dreigliedrig. Die Gl. (594) mit den Unbekannten ϱ_J erhalten nach Substitution der unbekannten Komponenten ψ_i aus den Ansätzen (595) für ${}^{(2)}\delta A_i = 0$ dieselbe Form. Sie werden nach Abschnitt 29 aufgelöst. Die Ergebnisse dienen zunächst zur Berechnung von ψ_i, so daß sich die Anschlußmomente für den symmetrischen und für den antimetrischen Belastungsanteil und daraus diejenigen für die vorgeschriebene Belastung angeben lassen.

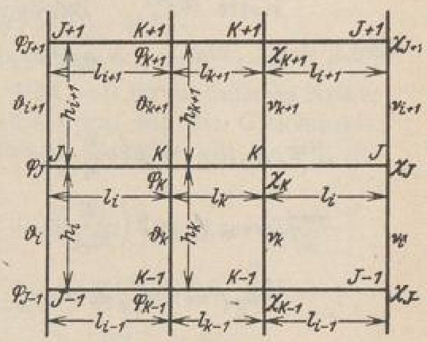


Abb. 329.

Symmetrischer Stockwerkrahmen mit vier Pfosten. Symmetrisch zugeordnete Knotendrehwinkel φ_J, χ_J und φ_K, χ_K, symmetrisch zugeordnete Stabdrehwinkel $\vartheta_i = \vartheta_k$ und $\nu_i = \nu_k$ (Abb. 329).

Belastung der äußeren Pfosten und der Riegel; Umordnung der Belastung in den symmetrischen und den antimetrischen Anteil.

$$\left.\begin{aligned} \mu_J &= \frac{\varphi_J - \chi_J}{2}\,, \qquad \mu_K = \frac{\varphi_K - \chi_K}{2}\,, \qquad \mu_i = \frac{\vartheta_i - \nu_i}{2} = 0\,, \\ \varrho_J &= \frac{\varphi_J + \chi_J}{2}\,, \qquad \varrho_K = \frac{\varphi_K + \chi_K}{2}\,, \qquad \varrho_i = \frac{\vartheta_i + \nu_i}{2} = \psi_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{596}$$

Symmetrischer Anteil: $\varrho_J = 0$, $\quad \mu_J = {}^{(1)}\varphi_J = -{}^{(1)}\chi_J \neq 0$;

$$\varrho_K = 0\,, \qquad \mu_K = {}^{(1)}\varphi_K = -{}^{(1)}\chi_K \neq 0\,; \qquad \psi_i = {}^{(1)}\vartheta_i = {}^{(1)}\nu_i = 0\,.$$

Statische Bedingungen: Kette ${}^{(1)}\Gamma_J$, Bewegungszustand $\dot\mu_J = 1$: $\dot\varphi_J = 1$, $-\dot\chi_J = 1$.

$$\left.\begin{aligned} {}^{(1)}\delta A_J &= \mu_{J-1}\,{}^{(1)}a_{J(J-1)} + \mu_J\,{}^{(1)}a_{JJ} + \mu_{J+1}\,{}^{(1)}a_{J(J+1)} \\ &\quad + \mu_K\,{}^{(1)}a_{JK} + {}^{(1)}a_{J0} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{597}$$

Kette ${}^{(1)}\Gamma_K$, Bewegungszustand $\dot\mu_K = 1$: $\dot\varphi_K = 1$, $-\dot\chi_K = 1$,

$$\left.\begin{aligned} {}^{(1)}\delta A_K &= \mu_J\,{}^{(1)}a_{KJ} + \mu_{K-1}\,{}^{(1)}a_{K(K-1)} + \mu_K\,{}^{(1)}a_{KK} \\ &\quad + \mu_{K+1}\,{}^{(1)}a_{K(K+1)} + {}^{(1)}a_{K0} = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{598}$$

$$^{(1)}a_{JJ} = -2\left(\frac{4}{l'_i} + \frac{4}{h'_i} + \frac{4}{h'_{i+1}}\right), \qquad ^{(1)}a_{KK} = -2\left(\frac{2}{l'_k} + \frac{4}{l'_i} + \frac{4}{h'_k} + \frac{4}{h'_{k+1}}\right),$$

$$^{(1)}a_{JK} = -2\left(\frac{2}{l'_i}\right), \qquad ^{(1)}a_{J0} = -2\,(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(\bar{i})} + M_{J0}^{(\overline{i+1})}),$$

$$a_{K0}^{(1)} = -2\,(M_{K0}^{(i)} + M_{K0}^{(k)} + M_{K0}^{(\bar{k})} + M_{K0}^{(\overline{k+1})}).$$

Die übrigen Vorzahlen erhalten denselben Betrag wie beim Stockwerkrahmen mit zwei Pfosten.

Antimetrischer Anteil: $\mu_J = 0, \quad \varrho_J = {}^{(2)}\varphi_J = {}^{(2)}\chi_J \neq 0;$

$\mu_K = 0, \quad \varrho_K = {}^{(2)}\varphi_K = {}^{(2)}\chi_K \neq 0; \quad \psi_i = {}^{(2)}\vartheta_i = {}^{(2)}\nu_i \neq 0.$

Statische Bedingungen: Kette ${}^{(2)}\Gamma_J$, Bewegungszustand $\dot{\varrho}_J = 1$: $\dot{\varphi}_J = 1$, $\dot{\chi}_J = 1$.

$$\left.\begin{aligned} {}^{(2)}\delta A_J = \varrho_{J-1}\,{}^{(2)}a_{J(J-1)} + \varrho_J\,{}^{(2)}a_{JJ} + \varrho_{J+1}\,{}^{(2)}a_{J(J+1)} + \varrho_K\,{}^{(2)}a_{JK} \\ + \psi_i\,{}^{(2)}a_{Ji} + \psi_{i+1}\,{}^{(2)}a_{J(i+1)} + {}^{(2)}a_{J0} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{599}$$

Kette ${}^{(2)}\Gamma_K$, Bewegungszustand $\dot{\varrho}_K = 1$, $\dot{\varphi}_K = 1$, $\dot{\chi}_K = 1$,

$$\left.\begin{aligned} {}^{(2)}\delta A_K = \varrho_J\,{}^{(2)}a_{KJ} + \varrho_{K-1}\,{}^{(2)}a_{K(K-1)} + \varrho_K\,{}^{(2)}a_{KK} + \varrho_{K+1}\,{}^{(2)}a_{K(K+1)} \\ + \psi_i\,{}^{(2)}a_{Ki} + \psi_{i+1}\,{}^{(2)}a_{K(i+1)} + {}^{(2)}a_{K0} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{600}$$

Kette ${}^{(2)}\Gamma_i$, Bewegungszustand $\dot{\psi}_i = 1$: $\vartheta_i = 1$, $\nu_i = 1$.

$$\left.\begin{aligned} {}^{(2)}\delta A_i = \varrho_{J-1}\,{}^{(2)}a_{i(J-1)} + \varrho_J\,{}^{(2)}a_{iJ} + \varrho_{K-1}\,{}^{(2)}a_{i(K-1)} + \varrho_K\,{}^{(2)}a_{iK} \\ + \psi_i\,{}^{(2)}a_{ii} + {}^{(2)}a_{i0} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{601}$$

$$^{(2)}a_{J(J-1)} = -2\left(\frac{2}{h'_i}\right), \qquad ^{(2)}a_{JJ} = -2\left(\frac{4}{l'_i} + \frac{4}{h'_i} + \frac{4}{h'_{i+1}}\right),$$

$$^{(2)}a_{J(J+1)} = -2\left(\frac{2}{h'_{i+1}}\right), \qquad ^{(2)}a_{JK} = {}^{(2)}a_{KJ} = -2\left(\frac{2}{l'_i}\right),$$

$$^{(2)}a_{Ji} = {}^{(2)}a_{iJ} = {}^{(2)}a_{i(J-1)} = 2\left(\frac{6}{h'_i}\right), \qquad ^{(2)}a_{J(i+1)} = \cdot 2\left(\frac{6}{h'_{i+1}}\right),$$

$$^{(2)}a_{J0} = -2\,(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(\bar{i})} + M_{J0}^{(\overline{i+1})}), \qquad ^{(2)}a_{K(K-1)} = -2\left(\frac{2}{h'_k}\right),$$

$$^{(2)}a_{KK} = -2\left(\frac{4}{l'_i} + \frac{4}{h'_k} + \frac{4}{h'_{k+1}} + \frac{6}{l'_k}\right), \qquad ^{(2)}a_{K(K+1)} = -2\left(\frac{2}{h'_{k+1}}\right),$$

$$^{(2)}a_{Ki} = {}^{(2)}a_{iK} = {}^{(2)}a_{i(K-1)} = 2\left(\frac{6}{h'_k}\right), \qquad ^{(2)}a_{K(i+1)} = 2\left(\frac{6}{h'_{k+1}}\right),$$

$$^{(2)}a_{K0} = -2\,(M_{K0}^{(i)} + M_{K0}^{(k)}), \qquad ^{(2)}a_{ii} = -2\left(\frac{12}{h'_i} + \frac{12}{h'_k}\right),$$

$$^{(2)}a_{i0} = 2\,(M_0^{(\bar{i})} + h_i \sum_J^N W_K).$$

(Die Indizes $(\bar{i})$ $(\overline{i+1})$ bezeichnen die Pfosten, der Index N den obersten Riegel.)

Die Gleichungen (601) werden zur Substitution der unabhängigen Komponenten ψ_i, ψ_{i+1} in den Gleichungen (599) und (600) verwendet. Diese enthalten dann dieselben sechs Gruppenverschiebungen $\varrho_{J-1} \cdots \varrho_{K+1}$. Der antimetrische Teil des Ansatzes besteht also aus sechsgliedrigen Bedingungsgleichungen. Die Gleichungen (597), (598) des symmetrischen Teils verknüpfen vier unbekannte Gruppenverschiebungen μ.

Symmetrischer Stockwerkrahmen mit drei Pfosten. Symmetrisch zugeordnete Knotendrehwinkel φ_J, χ_J, symmetrisch zugeordnete Stabdrehwinkel ϑ_i, ν_i (Abb. 330).

Belastung der äußeren Pfosten und der Riegel. Umordnung der Belastung in den symmetrischen und den antimetrischen Anteil.

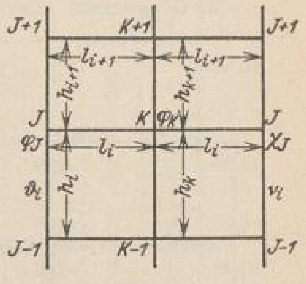


Abb. 330.

$$\left.\begin{aligned} \mu_J &= \frac{\varphi_J - \chi_J}{2}, & \mu_K &= 0, \\ \varrho_J &= \frac{\varphi_J + \chi_J}{2}, & \varrho_K &= 2\,\frac{\varphi_K}{2}, \\ \mu_i &= \frac{\vartheta_i - \nu_i}{2} = 0, & \varrho_i &= \frac{\vartheta_i + \nu_i}{2} = \psi_i. \end{aligned}\right\} \qquad (602)$$

Symmetrischer Anteil: $\varrho_J = 0$, $\mu_J = {}^{(1)}\varphi_J = -{}^{(1)}\chi_J \neq 0$;
$\varrho_K = {}^{(1)}\varphi_K = 0$, $\psi_i = {}^{(1)}\vartheta_i = {}^{(1)}\nu_i = 0$.

Die statischen Bedingungen für die äußeren Kräfte an der Kette ${}^{(1)}\Gamma_J$ und den Bewegungszustand $\dot\mu_J = 1$ mit $\dot\varphi_J = 1$, $-\dot\chi_J = 1$ werden nach (597) auf S. 357 angeschrieben.

$${}^{(1)}a_{J(J-1)} = -2\left(\frac{2}{h_i'}\right), \quad {}^{(1)}a_{JJ} = -2\left(\frac{4}{l_i'} + \frac{4}{h_i'} + \frac{4}{h_{i+1}'}\right), \quad {}^{(1)}a_{J(J+1)} = -2\left(\frac{2}{h_{i+1}'}\right),$$

$${}^{(1)}a_{J0} = -2\,(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(\bar i)} + M_{J0}^{(\overline{i+1})}).$$

Antimetrischer Anteil: $\mu_J = 0$, $\varrho_J = {}^{(2)}\varphi_J = {}^{(2)}\chi_J \neq 0$;
$\varrho_K = {}^{(2)}\varphi_K \neq 0$, $\psi_i = {}^{(2)}\vartheta_i = {}^{(2)}\nu_i \neq 0$.

Die statischen Bedingungen ${}^{(2)}\delta A_J = 0$, ${}^{(2)}\delta A_K = 0$, ${}^{(2)}\delta A_i = 0$ für die äußeren Kräfte an den Stabketten ${}^{(2)}\Gamma_J$, ${}^{(2)}\Gamma_K$, ${}^{(2)}\Gamma_i$ erhalten dieselbe Form wie die Gleichungen (599) bis (601) beim Stockwerkrahmen mit vier Pfosten. Dasselbe gilt bis auf die folgenden Angaben auch von deren Vorzahlen:

$${}^{(2)}a_{KK} = -2\left(\frac{4}{l_i'} + \frac{2}{h_k'} + \frac{2}{h_{k+1}'}\right), \quad {}^{(2)}a_{Ki} = {}^{(2)}a_{(K-1)i} = 2\left(\frac{3}{h_k'}\right), \quad a_{K(i+1)} = 2\left(\frac{3}{h_{k+1}'}\right),$$

$${}^{(2)}a_{ii} = -2\left(\frac{12}{h_i'} + \frac{6}{h_k'}\right), \quad {}^{(2)}a_{K0} = -2\,M_{K0}^{(i)}, \quad {}^{(2)}a_{i0} = 2\,(M_0^{(i)} + h_i \sum_J^N W_K).$$

Der Ansatz für den symmetrischen Anteil ist wiederum dreigliedrig, der Ansatz für den antimetrischen Anteil wird nach S. 357 aufgelöst.

Statische Untersuchung eines symmetrischen Stockwerkrahmens mit vier Pfosten (Abb. 331); Binderabstand: 5,20 m.

1. Geometrische Grundlagen. Die Stablängen und die Trägheitsmomente der Querschnitte sind in Abb. 331 eingetragen. $J_c = 38{,}2$ dm⁴. Die auf drei Stellen abgerundeten reziproken Werte der reduzierten Stablängen gelten als fehlerfreie geometrische Grundlage der Untersuchung.

Index	1/red. Länge		Index	1/red. Länge	
	Riegel	Pfosten		Riegel	Pfosten
a	0,167	0,562	h	0,314	0,787
b	0,167	0,340	i	0,314	0,455
c	0,167	0,254	k	0,314	0,341
d	0,167	0,254	l	0,314	0,341
e	0,167	0,198	m	0,314	0,254
f	0,167	0,085	n	0,314	0,106
g	0,105	0,059	r	0,211	0,059

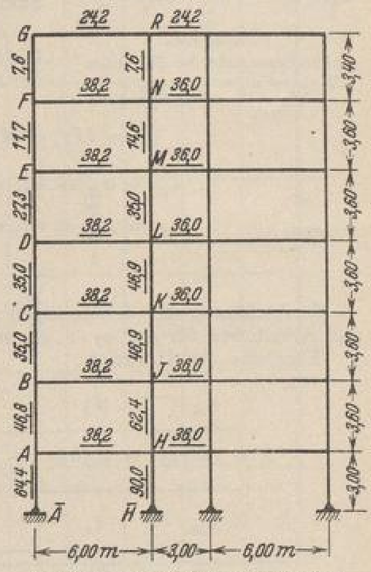


Abb. 331. Die unterstrichenen Zahlen bedeuten die Trägheitsmomente in dm⁴.

A. Symmetrie der Belastung.

Lösung nach S. 357 mit $\varphi_J = -\chi_J$, $\varphi_K = -\chi_K$, $\vartheta_i = 0$, $\nu_i = 0$ (Abb. 329).

2. Geometrisch überzählige Größen des Ansatzes.

$$\mu_J = \tfrac{1}{2}(\varphi_J - \chi_J), \qquad \mu_K = \tfrac{1}{2}(\varphi_K - \chi_K),$$

so daß

$$\varphi_J = -\chi_J = \mu_J, \qquad \varphi_K = -\chi_K = \mu_K.$$

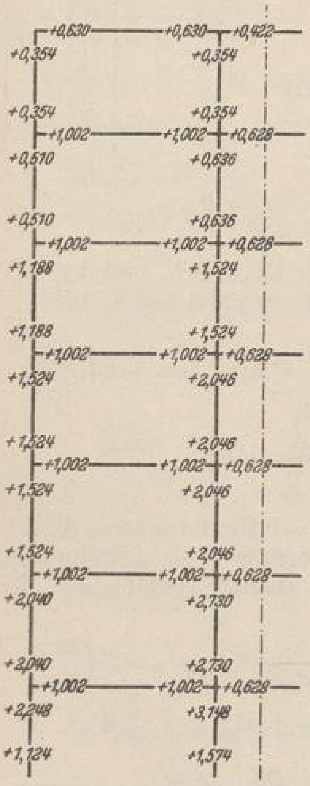


Abb. 332.
Anschlußmomente des Zustandes Σ_1 ($\mu_A = \mu_B = \cdots = \mu_R = 1$).

3. Matrix der statischen Bedingungen (597) u. (598). Entwicklung der Vorzahlen der Gleichungen:

$$a_{AA} = -2\left(\frac{4}{h'_a} + \frac{4}{l'_a} + \frac{4}{h'_b}\right) = -8{,}552\,;$$

$$a_{AB} = -2\left(\frac{2}{h'_b}\right) = -1{,}360\,; \qquad a_{AH} = -2\left(\frac{2}{l'_a}\right) = -0{,}668\,;$$

$$a_{KC} = -2\left(\frac{2}{l'_c}\right) = -0{,}668\,; \qquad a_{KJ} = -2\left(\frac{2}{h'_k}\right) = -1{,}364\,;$$

$$a_{KL} = -2\left(\frac{2}{h'_l}\right) = -1{,}364\,;$$

$$a_{KK} = -2\left(\frac{2}{l'_k} + \frac{4}{h'_k} + \frac{4}{h'_l} + \frac{4}{l'_c}\right) = -8{,}048\,.$$

Ergebnis der vollständigen Rechnung auf S. 361.

4. Nachprüfung der Vorzahlen der Matrix. Die Summe der Vorzahlen einer Gleichung $\delta A_J = 0$

$$a_{J\Sigma} = \sum_{K=A}^{K=R} a_{JK}$$

kann als virtuelle Arbeit der Anschlußmomente aus $\mu_A = \mu_B = \cdots = \mu_R = 1$ (Zustand Σ_1, vgl. Abb. 332) an der mit $\dot{\mu}_J = 1$ angetriebenen kinematischen Kette Γ_J nachgeprüft werden, z. B.

$$a_{L\Sigma} = -2\,(M_L^{(\bar{l})} + M_L^{(d)} + M_L^{(l)} + M_{L'}^{(\bar{m})}) = -10{,}400\,.$$

Die Summe $a_{\Sigma\Sigma}$ aller Vorzahlen der Matrix kann ebenfalls als virtuelle Arbeit der Stabendmomente des Zustandes Σ_1 an der mit $\dot{\mu}_A = \dot{\mu}_B = \cdots = \dot{\mu}_R = 1$ angetriebenen kinematischen Kette geprüft werden. Sie ist demnach gleich der negativen Summe der Stabendmomente an den Knoten.

5. Belastungsglieder a_{J0} für senkrechte Belastung der Seitenfelder mit $q = 2{,}08$ t/m. Der geometrisch bestimmte Anteil $M_{J0}^{(h)}$ der Anschlußmomente ist bei allen belasteten Riegelstäben gleich.

$$-M_{A0}^{(a)} = M_{H0}^{(a)} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{2{,}08 \cdot 6{,}0^2}{12} = 6{,}24 \text{ mt}\,,$$

$$a_{A0} = a_{B0} = a_{C0} = a_{D0} = a_{E0} = a_{F0} = +2 \cdot 6{,}24 = +12{,}48\,,$$

$$a_{H0} = a_{J0} = a_{K0} = a_{L0} = a_{M0} = a_{N0} = -2 \cdot 6{,}24 = -12{,}48\,,$$

$$a_{G0} = a_{R0} = 0\,.$$

6. Auflösung der Gleichungen durch Iteration nach Abschn. 30. Die Iteration stützt sich auf Annahmen für $\mu_B, \mu_C \ldots \mu_R$ in $\delta A_A = 0$, z. B. $\mu_B = 0, \mu_C = 0 \ldots \mu_R = 0$.

Ergebnis der Iteration:

μ_A	μ_B	μ_C	μ_D	μ_E	μ_F	μ_G
+ 1,2775	+ 1,5850	+ 1,8206	+ 1,8652	+ 2,8981	+ 5,8147	− 1,2650

μ_H	μ_J	μ_K	μ_L	μ_M	μ_N	μ_R
− 0,8997	− 1,1331	− 1,2823	− 1,3424	− 2,0746	− 3,9995	+ 0,6842

	μ_A	μ_B	μ_C	μ_D	μ_E	μ_F	μ_G	μ_H	μ_J	μ_K	μ_L	μ_M	μ_N	μ_R	a_{J0}	$\sum a_{JK}$
A	− 8,552	− 1,360						− 0,668							+ 12,48	− 10,580
B	− 1,360	− 6,088	− 1,016						− 0,668						+ 12,48	− 9,132
C		− 1,016	− 5,400	− 1,016						− 0,668					+ 12,48	− 8,100
D			− 1,016	− 4,952	− 0,792						− 0,668				+ 12,48	− 7,428
E				− 0,792	− 3,600	− 0,340						− 0,668			+ 12,48	− 5,400
F					− 0,340	− 2,488	− 0,236						− 0,668		+ 12,48	− 3,732
G						− 0,236	− 1,312							− 0,420	0	− 1,968
H	− 0,668							− 12,528	− 1,820						− 12,48	− 15,016
J		− 0,668						− 1,820	− 8,960	− 1,364					− 12,48	− 12,812
K			− 0,668						− 1,364	− 8,048	− 1,364				− 12,48	− 11,444
L				− 0,668						− 1,364	− 7,352	− 1,016			− 12,48	− 10,400
M					− 0,668						− 1,016	− 5,472	− 0,424		− 12,48	− 7,580
N						− 0,668						− 0,424	− 3,912	− 0,236	− 12,48	− 5,240
R							− 0,420						− 0,236	− 2,156	0	− 2,812

	ϱ_A	ϱ_B	ϱ_C	ϱ_D	ϱ_E	ϱ_F	ϱ_G	ϱ_H	ϱ_J	ϱ_K	ϱ_L	ϱ_M
A	− 8,552	− 1,360						− 0,668				
B	− 1,360	− 6,088	− 1,016						− 0,668			
C		− 1,016	− 5,400	− 1,016						− 0,668		
D			− 1,016	− 4,952	− 0,792						− 0,66	
E				− 0,792	− 3,600	− 0,340						− 0,66
F					− 0,340	− 2,488	− 0,236					
G						− 0,236	− 1,312					
H	− 0,668							− 15,040	− 1,820			
J		− 0,668						− 1,820	− 11,472	− 1,364		
K			− 0,668						− 1,364	− 10,560	− 1,36	
L				− 0,668						− 1,364	− 9,86	− 1,01
M					− 0,668						− 1,01	− 7,9
N						− 0,668						− 0,42
R							− 0,420					
a	+ 6,744							+ 9,444				
b	+ 4,080	+ 4,080						+ 5,460	+ 5,460			
c		+ 3,048	+ 3,048						+ 4,092	+ 4,092		
d			+ 3,048	+ 3,048						+ 4,092	+ 4,09	
e				+ 2,376	+ 2,376						+ 3,04	+ 3,0
f					+ 1,020	+ 1,020						+ 1,2
g						+ 0,708	+ 0,708					

7. Superposition der Anteile der Stabendmomente aus Belastung und Formänderung nach (530)

$$M_C^{(\bar{c})} = \qquad 1/h'_c \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_B) = \qquad 0{,}254 \cdot 10{,}4524 \quad = +\,2{,}655 \text{ mt},$$
$$M_C^{(c)} = M_{C0}^{(c)} + 1/l'_c \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_K) = -\,6{,}24 + 0{,}167 \cdot \;4{,}7178 \quad = -\,5{,}452 \text{ mt},$$
$$M_C^{(\bar{d})} = \qquad 1/h'_d \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_D) = \qquad 0{,}254 \cdot 11{,}0128 \quad = +\,2{,}797 \text{ mt},$$
$$M_N^{(\bar{n})} = \qquad 1/h'_n \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_M) = \qquad 0{,}106\;(-\,20{,}1472) = -\,2{,}136 \text{ mt},$$
$$M_N^{(f)} = M_{N0}^{(f)} + 1/l'_f \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_F) = +\,6{,}24 + 0{,}167\;(-\;4{,}3686) = +\,5{,}510 \text{ mt},$$
$$M_N^{(n)} = \qquad 1/l'_n \cdot 2\,\varphi_N \qquad = \qquad 0{,}314\;(-\;7{,}9990) = -\,2{,}512 \text{ mt},$$
$$M_N^{(\bar{r})} = \qquad 1/h'_r \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_R) = \qquad 0{,}059\;(-\,14{,}6296) = -\,0{,}863 \text{ mt}.$$

Die Rechnung wird für alle Stabknoten durchgeführt und das Ergebnis in der linken Hälfte der Abb. 333 eingetragen. Der Betrag für $pl^2/8 = 9{,}36$ mt und $pl^2/12 = 6{,}24$ mt dient als Vergleich.

ϱ_M	ϱ_N	ϱ_R	ψ_a	ψ_b	ψ_c	ψ_d	ψ_e	ψ_f	ψ_g	a_{J0}	Σa_{JK}
			+ 6,744	+ 4,080							+ 0,244
				+ 4,080	+ 3,048						− 2,004
					+ 3,048	+ 3,048					− 2,004
						+ 3,048	+ 2,376				− 2,004
−0,668							+ 2,376	+1,020			− 2,004
	−0,668							+1,020	+0,708		− 2,004
		−0,420							+0,708		− 1,260
			+ 9,444	+ 5,460							− 2,624
				+ 5,460	+ 4,092						− 5,772
					+ 4,092	+ 4,092					− 5,772
−1,016						+ 4,092	+ 3,048				− 5,772
−7,984	−0,424						+ 3,048	+1,272			− 5,772
−0,424	−6,424	−0,236						+1,272	+0,708		− 5,772
	−0,236	−3,844							+0,708		− 3,792
			−32,376							+68,70	−16,188
				−19,080						+70,56	0
					−14,280					+57,60	0
						−14,280				+44,64	0
+3,048							−10,848			+31,68	0
+1,272	+1,272							−4,584		+18,72	0
	+0,708	+0,708							−2,832	+ 5,78	0

Die Anschlußmomente, bei belasteten Stäben unter Berücksichtigung der äußeren Kräfte, führen durch die Momentengleichungen der Stäbe zu den Querkräften. Diese liefern die Längskräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten. In Abb. 333 sind auf der rechten Seite die Längs- und Querkräfte angegeben.

8. Nachprüfung der Rechnung nach S. 331. Die Summe der Stabendmomente ist an jedem Knotenpunkt Null, z. B. am Knotenpunkt N

$$\Sigma M_N = -2{,}136 + 5{,}510 - 2{,}512 - 0{,}863 = -0{,}001 \approx 0\,.$$

B. Antimetrie der Belastung.

Lösung nach S. 358 mit $\varphi_J = \chi_J$, $\varphi_K = \chi_K$, $\vartheta_i = \nu_i$ (Abb. 329).

2. Geometrisch überzählige Größen.

$$\varrho_J = \tfrac{1}{2}(\varphi_J + \chi_J)\,, \qquad \varrho_K = \tfrac{1}{2}(\varphi_K + \chi_K)\,, \qquad \psi_i = \tfrac{1}{2}(\vartheta_i + \nu_i)\,,$$

so daß

$$\varphi_J = \chi_J = \varrho_J\,, \qquad \varphi_K = \chi_K = \varrho_K\,, \qquad \vartheta_i = \nu_i = \psi_i\,.$$

3. Matrix der statischen Bedingungen (599) bis (601). Entwicklung der Vorzahlen der Gleichungen $\delta A_A = 0$, $\delta A_K = 0$.

$$a_{AA} = -2\left(\frac{4}{l'_a} + \frac{4}{h'_a} + \frac{4}{h'_b}\right) = -8{,}552\,,$$

$$a_{AB} = -2\left(\frac{2}{h'_b}\right) = -1{,}360\,; \qquad a_{AH} = -2\left(\frac{2}{l'_a}\right) = -0{,}668\,,$$

$$a_{Aa} = 2\left(\frac{6}{h'_a}\right) = +6{,}744\,, \qquad a_{Ab} = 2\left(\frac{6}{h'_b}\right) = 4{,}080\,,$$

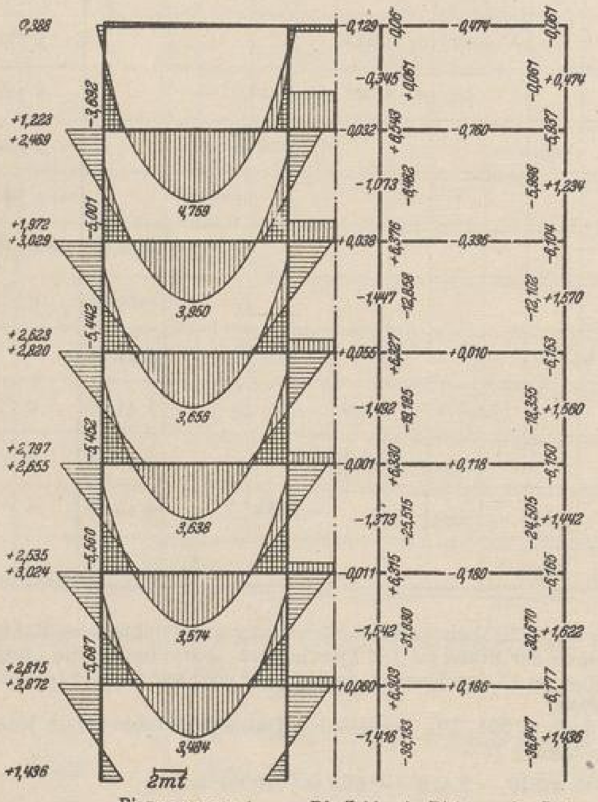
$$a_{KK} = -2\left(\frac{4}{l'_c} + \frac{4}{h'_k} + \frac{4}{h'_l} + \frac{6}{l'_k}\right) = -10{,}560\,,$$

$$a_{KC} = -2\left(\frac{2}{l'_c}\right) = -0{,}668\,, \qquad a_{KJ} = -2\left(\frac{2}{h'_k}\right) = -1{,}364\,,$$

$$a_{KL} = -2\left(\frac{2}{h'_l}\right) = -1{,}364$$

$$a_{Kc} = 2\left(\frac{6}{h'_k}\right) = +4{,}092\,, \qquad a_{Kd} = 2\left(\frac{6}{h'_l}\right) = +4{,}092\,.$$

Ergebnis der vollständigen Rechnung auf S. 362/3.



Biegungsmomente. Die Zahlen in Richtung der Stäbe bedeuten die Längskräfte, die quergestellten Zahlen die Querkräfte.

Abb. 333.

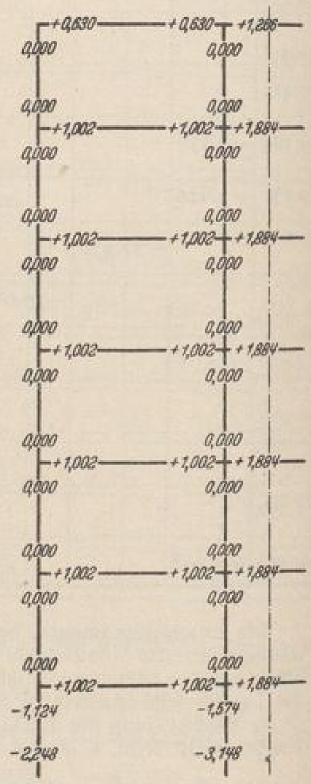


Abb. 334.
Anschlußmomente des Zustandes Σ_1
$(\varrho_A = \varrho_B = \cdots = \varrho_R = \psi_a = \psi_b = \cdots = \psi_g = 1)$.

4. Nachprüfung der Vorzahlen der Matrix. Die Summe der Vorzahlen einer Gleichung $\delta A_J = 0$ oder $\delta A_b = 0$

$$a_{J\Sigma} = \sum_{K=A}^{K=N} a_{JK} \quad \text{oder} \quad a_{b\Sigma} = \sum_{K=A}^{K=N} a_{bK}$$

kann als virtuelle Arbeit der Anschlußmomente aus $\varrho_A = \varrho_B = \cdots \varrho_R = \psi_a = \psi_b = \cdots \psi_g = 1$ (Zustand Σ_2, vgl. Abb. 334) an der mit $\dot{\varrho}_J = 1$ oder $\dot{\psi}_b = 1$ angetriebenen kinematischen Kette Γ_J oder Γ_b nachgeprüft werden, z. B.

$$a_{L\Sigma} = -2\,(M_L^{(\bar{l})} + M_L^{(d)} + M_L^{(l)} + M_L^{(\bar{m})}) = -5{,}772\,,$$

$$a_{a\Sigma} = +2\,(M_A^{(\bar{a})} + M_A^{(\bar{a})} + M_H^{(\bar{h})} + M_H^{(\bar{h})}) = -16{,}188\,.$$

Die Zeilensummen $a_{b\Sigma} \cdots a_{g\Sigma}$ sind Null, da der Zustand Σ_2 Pfostenendmomente nur an den Pfosten $\bar{a}$ und $\bar{h}$ erzeugt. Die Summe $a_{\Sigma\Sigma}$ aller Vorzahlen der Matrix besteht daher auch nur aus der negativen Summe der Riegelanschlußmomente und der positiven Summe der Pfostenendmomente bei $\bar{a}$ und $\bar{h}$.

$$a_{\Sigma\Sigma} = 62{,}500 = -2\,(-25{,}854) - 2\,(-5{,}396) = 62{,}500\,.$$

5. Belastungsglieder bei Eintragung einer waagerechten Belastung aus Wind $w = 1$ t/m in den Randknoten.

Knotenlasten in t:

W_A	W_B	W_C	W_D	W_E	W_F	W_G
3,3	3,6	3,6	3,6	3,6	3,5	1,7

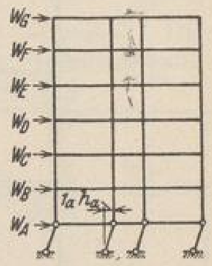


Abb. 335.
Kinematische Kette Γ_a.

$$a_{A0} = a_{B0} = \cdots = a_{R0} = 0\,.$$

$$a_{a0} = \dot{1}_a\, h_a \sum_A^G W_K = 3{,}0 \cdot 22{,}9 = 68{,}70\,; \qquad a_{b0} = \dot{1}_b \cdot h_b \sum_B^G W_K = 3{,}6 \cdot 19{,}6 = 70{,}56\,.$$

$$a_{c0} = 57{,}60\,; \qquad a_{d0} = 44{,}64\,; \qquad a_{e0} = 31{,}68\,; \qquad a_{f0} = 18{,}72\,.$$

$$a_{g0} = \dot{1}_g \cdot h_g\, W_G = 3{,}4 \cdot 1{,}7 = 5{,}78 \text{ (Abb. 335)}.$$

6. Auflösung der Gleichungen. Nach der Anweisung auf S. 357 können zunächst die unbekannten Stabdrehwinkel ψ aus den Gleichungen $\delta A_J = 0$ eliminiert werden, so daß 14 Gleichungen mit 14 Unbekannten entstehen. Diese werden durch Iteration gelöst. Die Anfangswerte ergeben sich durch Auflösung der voneinander unabhängigen dreigliedrigen Ansätze, die bei Vernachlässigung der äußeren Glieder erhalten werden.

Die Iteration kann sich aber auch auf eine erste Näherungslösung des vollständigen Ansatzes mit 21 Gleichungen stützen, um die langwierige Elimination zu umgehen. Dabei wird mit Vorteil das Ergebnis der angenäherten Berechnung der ψ_i nach Abschn. 51 verwendet.

Ergebnis der Iteration:

ϱ_A	ϱ_B	ϱ_C	ϱ_D	ϱ_E	ϱ_F	ϱ_G
7,810	9,482	8,015	6,191	4,669	2,706	1,238
ϱ_H	ϱ_J	ϱ_K	ϱ_L	ϱ_M	ϱ_N	ϱ_R
6,408	7,215	6,011	4,544	2,878	1,253	0,423
ψ_a	ψ_b	ψ_c	ψ_d	ψ_e	ψ_f	ψ_g
5,618	11,294	11,558	9,183	7,385	6,871	3,446

7. Superposition der Anteile der Stabendmomente aus Belastung und Formänderung nach (530):

$$M_C^{(\bar{c})} = 1/h'_c \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_B - 6\,\psi_c) = -4{,}654 \text{ mt}\,,$$
$$M_C^{(c)} = 1/l'_c \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_K \qquad) = +7{,}362 \text{ mt}\,,$$
$$M_C^{(\bar{d})} = 1/h'_d \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_D - 6\,\psi_d) = -2{,}707 \text{ mt}\,,$$
$$M_N^{(\bar{n})} = 1/h'_n \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_M - 6\,\psi_f) = -3{,}229 \text{ mt}\,,$$
$$M_N^{(f)} = 1/l'_f \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_F \qquad) = +1{,}741 \text{ mt}\,,$$
$$M_n^{(n)} = 1/l'_n \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_N \qquad) = +2{,}361 \text{ mt}\,,$$
$$M_n^{(\bar{r})} = 1/h'_r \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_R - 6\,\psi_e) = -0{,}874 \text{ mt}\,.$$

Bei einer Windbelastung von 0,125 t/m² und einem Binderabstand von 5,2 m ist $w = 5{,}2 \cdot 0{,}125 = 0{,}65$ t/m. Dabei entstehen die Stabendmomente der Abb. 336. Diese bestimmen die für jeden Pfosten oder Riegel konstanten Querkräfte, aus denen dann die Längskräfte in Verbindung mit den Lasten W_K durch die Bedingungen für das Gleichgewicht am Stabknoten (522) berechnet werden. Die Längskräfte der Riegel im Mittelfeld sind infolge Antimetrie der Belastung Null.

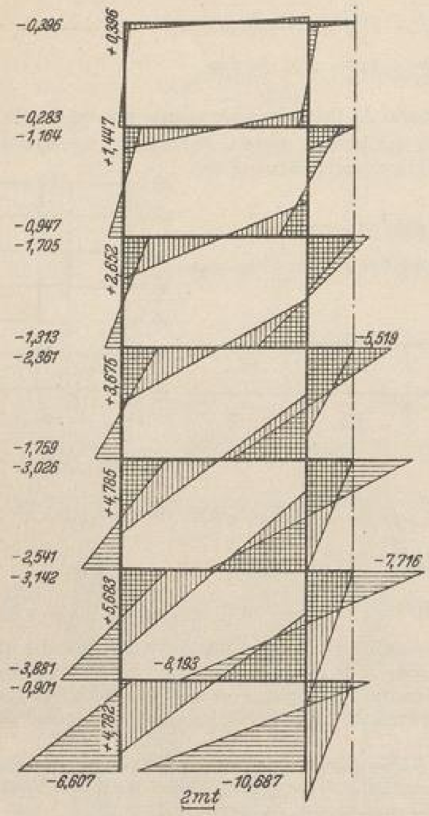


Abb. 336.

8. Nachprüfung der Rechnung. Die Richtigkeit der Ergebnisse ist bewiesen, wenn die Bedingungen $\delta A_J = 0$ und $\delta A_c = 0$ durch die Stabendmomente erfüllt sind.

$$\delta A_N = -2{,}098 + 1{,}132 + 1{,}535 - 0{,}568$$
$$= -0{,}001 \approx 0\,,$$

$$\delta A_b = \dot{1}_b \cdot 2\,(M_A^{(\bar{b})} + M_B^{(\bar{b})} + M_H^{(\bar{i})} + M_J^{(\bar{i})})$$
$$+ 1_b h_b \sum_B^G W_k\,, \quad \text{(Abb. 337)}$$
$$= 2(-3{,}881 - 3{,}142 - 8{,}193 - 7{,}716)$$
$$+ 3{,}6 \cdot 0{,}65 \cdot 19{,}6$$
$$= -45{,}864 + 45{,}864 = 0\,.$$

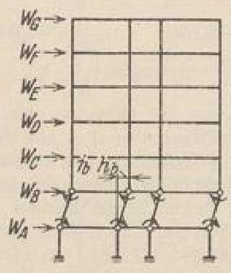


Abb. 337.

43. Die Berechnung der Anschlußkräfte aus den Drehwinkeln τ der Endtangenten.

Der Verschiebungszustand eines Stabwerks mit r freien Knoten und t abgestützten Stabenden kann nach S. 306 auch durch die Verdrehung $\tau_J^{(h)}$ der Endtangenten der Stäbe (h) am Knoten J relativ zu dem verformten Stabnetz $\overline{J'K'}$ beschrieben werden (Abb. 285). Die unbekannten Winkel $\tau_J^{(h)}$ treten im Ansatz an die Stelle der Knotendrehwinkel φ_J, so daß darin $f = f_1 + s_2$ (vgl. S. 313) unabhängige Komponenten ψ_c und $2\,s$ Drehwinkel $\tau_J^{(h)}$, zusammen also $2\,s + f$ unbekannte Komponenten auftreten. Sie sind an den r Stabknoten durch $(2\,s - r - t)$ Kontinuitätsbedingungen

$$\tau_J^{(h)} + \vartheta_h = \tau_J^{(h+1)} + \vartheta_{h+1}\,, \tag{603}$$

an den abgestützten Stabenden durch t geometrische oder statische Randbedingungen $\varphi_A = 0$ oder $M_A = 0$ verknüpft und müssen $r + f$ Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ erfüllen, welche für die Komponenten φ_J, ψ_c gelten. Zur Berechnung der $2\,s + f$ unbekannten Komponenten stehen ebenso viele Gleichungen zur Verfügung. Die Lösung ist eindeutig (Abb. 338). Dasselbe gilt auch für Stabwerke, deren Elemente (g) durch reibungslose Gelenke mit den Stabknoten G verbunden sind. An die Stelle der Kontinuitätsbedingungen (603) treten hier statische Bedingungen $M_G^{(g)} = 0$. Die

Verwendung der Drehwinkel $\tau_J^{(h)}$ kann daher auch als algebraische Transformation des Ansatzes φ_J, ψ_c auf S. 320 angesehen werden.

Die äußeren Kräfte der Abschnitte (h) sind auf S. 307 in die Belastung $\mathfrak{P}$ und in die statisch unbestimmten Anschlußkräfte $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_K^{(h)}$ zerlegt worden. Jede Gruppe steht mit den ihr zugeordneten statisch bestimmten Anschlußkräften im Gleichgewicht und ändert die Form des Stabes. Die Gruppe $\mathfrak{P}$ erzeugt die Anteile $\tau_{J0}^{(h)}, \tau_{K0}^{(h)}$, die Gruppe der statisch unbestimmten Kräfte die Anteile $\tau_{JM}^{(h)}, \tau_{KM}^{(h)}$.

$$\tau_J^{(h)} = \tau_{J0}^{(h)} + \tau_{JM}^{(h)}, \qquad \tau_K^{(h)} = \tau_{K0}^{(h)} + \tau_{KM}^{(h)}. \tag{604}$$

Die Drehwinkel $\tau_{J0}^{(h)}$ sind für jede Belastung $\mathfrak{P}_h$ des Stabes bekannt (Tabelle 17). Die Drehwinkel $\tau_{JM}^{(h)}, \tau_{KM}^{(h)}$ können nach Abschn. 18 als Funktionen der Anschlußkräfte $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_K^{(h)}$ angegeben werden. Ihr EJ_cfacher Betrag ist bei g e r a d e n Stäben (h) mit konstantem Trägheitsmoment J_h

$$\left.\begin{aligned} \tau_{JM}^{(h)} &= \frac{l_h'}{6}\,(2\,M_J^{(h)} - M_K^{(h)}), \\ \tau_{KM}^{(h)} &= \frac{l_h'}{6}\,(2\,M_K^{(h)} - M_J^{(h)}), \end{aligned}\right\} \tag{605}$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= \frac{2}{l_h'}\,(2\tau_{JM}^{(h)} + \tau_{KM}^{(h)}), \\ M_K^{(h)} &= \frac{2}{l_h'}\,(2\,\tau_{KM}^{(h)} + \tau_{JM}^{(h)}), \\ M^{(h)} &= M_J^{(h)} + M_K^{(h)} \\ &= \frac{6}{l_h'}\,(\tau_{JM}^{(h)} + \tau_{KM}^{(h)}). \end{aligned}\right| \tag{606}$$

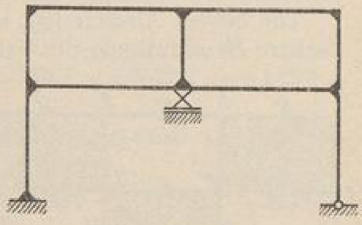


Abb. 338.
$s=9$, $r=6$, $t=2$, $f=f_1=2$, $m=0$,
$2s+f=20$ Unbekannte,
$2s-r-t-m=10$ Kontinuitätsbedingungen,
$t=2$ Randbedingungen,
$r=6$ Gleichungen $\delta A_J=0$,
$f=f_1=2$ Gleichungen $\delta A_c=0$.

Der Drehsinn der Anschlußmomente und Drehwinkel ist dabei nach S. 306 in der Uhrzeigerbewegung positiv gerechnet worden.

Bei Stäben mit zwei Gelenken in J und K ist

$$\tau_{JM}^{(g)} = \tau_{KM}^{(g)} = 0 \quad \text{und} \quad \tau_J^{(g)} = \tau_{J0}^{(g)}, \qquad \tau_K^{(g)} = \tau_{K0}^{(g)},$$

bei einem steifen Anschluß J und einem gelenkigen Anschluß G ist mit $J_g = \text{const}$

$$\tau_{GM}^{(g)} = -\tfrac{1}{2}\,\tau_{JM}^{(g)}, \qquad \tau_{JM}^{(g)} = \frac{l_g'}{3}\,M_J^{(g)}, \qquad M_J^{(g)} = \frac{3}{l_g'}\,\tau_{JM}^{(g)}. \tag{607}$$

Daher sind $(2\,s + f)$ unabhängige Komponenten $\tau_{JM}^{(h)}, \psi_c$ aus $(2\,s - r - t)$ Kontinuitätsbedingungen (603), t Randbedingungen und $(r + f)$ Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$, also aus ebenso vielen Gleichungen auszurechnen.

Die Stabdrehwinkel ϑ_h zerfallen nach (526) in einen Anteil ϑ_{h0} und in eine lineare Funktion der unabhängigen Komponenten ψ_c. Der Beitrag ϑ_{h0} bezeichnet ebenso wie auf S. 318 den Stabdrehwinkel des geometrisch bestimmten Hauptsystems infolge der Änderung $\varepsilon_{h0} l_h$ der Stablängen durch Längskräfte N_{h0} und Temperaturwechsel t.

$$\vartheta_h = \vartheta_{h0} + \sum \psi_c\,\vartheta_{hc}. \tag{608}$$

Ansatz. Zur Berechnung der $2\,s + f$ unbekannten unabhängigen Komponenten $\tau_{JM}^{(h)}, \psi_c$ werden die $r + f$ statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ durch $(2\,s - r)$ Bedingungen für die winkeltreue Verformung ergänzt.

$$\tau_{JM}^{(h)} + \tau_{J0}^{(h)} + \vartheta_{h0} + \sum \psi_c \vartheta_{hc} = \tau_{JM}^{(h+1)} + \tau_{J0}^{(h+1)} + \vartheta_{(h+1)0} + \sum \psi_c\,\vartheta_{(h+1)c}. \tag{609}$$

Mit diesen werden die $2\,s$ unabhängigen Komponenten $\tau_{JM}^{(h)}$ zuerst auf r ausgezeichnete Drehwinkel $\tau_{JM}^{(r)}$ bezogen, von denen jeder einem der r Knoten J zugeordnet ist. Die statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ gelten für die Belastung $\mathfrak{P}_h$ und die

Stabendmomente $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$. Diese sind nach (606) zunächst Funktionen der unbekannten Komponenten $\tau_{JM}^{(h)}$, $\tau_{KM}^{(h)}$, ψ_c des Verschiebungszustandes und werden mit den Kontinuitätsbedingungen (603) als Funktionen der ausgezeichneten Komponenten $\tau_{JM}^{(r)}$, ψ_c des Verschiebungszustandes und der bekannten, durch $\mathfrak{P}_h, t, \Delta_e$ bestimmten Drehwinkel $\tau_{J0}^{(h)}$, ϑ_{h0} entwickelt. Die unbekannten Drehwinkel $\tau_{JM}^{(r)}$ treten in diesem Ansatz an die Stelle der Knotendrehwinkel φ_J. Die Gleichungen sind symmetrisch und werden ebenso wie auf S. 330 aufgelöst. Die übrigen Drehwinkel $\tau_{JM}^{(h)}$ und ϑ_h ergeben sich durch Rekursion aus den Kontinuitätsbedingungen. Damit sind auch die Winkel $\tau_J^{(h)} = \tau_{J0}^{(h)} + \tau_{JM}^{(h)}$, $\varphi_J = \tau_J^{(h)} + \vartheta_h$ des Verschiebungszustandes bekannt. Die Anschlußmomente werden aus dem Drehwinkel $\tau_{JM}^{(h)}$ nach (606) berechnet. Das Ergebnis läßt sich ebenso wie auf S. 331 durch geeignete statische Bedingungen nachprüfen.

Die beiden Ansätze (φ_J, ψ_c) und $(\tau_{JM}^{(h)}, \psi_c)$ führen zu dem gleichen Ziel. Die einfachere Beschreibung des Verschiebungszustandes der Knotenkette durch die Komponenten φ_J und ψ_c wird durch die längere Entwicklung der Schnittkräfte als Funktion von $M_{J0}^{(h)}$, φ_J, φ_K, ϑ_h ausgeglichen.

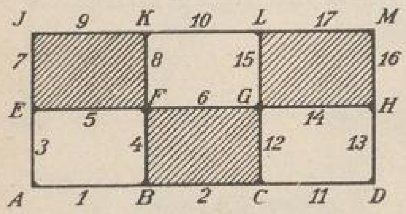


Abb. 339.

Berechnung eines Silorahmens mit der in Abb. 339 angegebenen Belastung.

$\overline{JM} = 3\,l$, $\overline{AJ} = 2\,h$, $l/h = \lambda$. Das Trägheitsmoment J der Stäbe ist konstant. System und Belastung sind zur senkrechten Mittellinie symmetrisch, die Stabdrehwinkel durch die Art der Stützung Null.

1. Bedingungen für die winkeltreue Verformung der Stäbe am Knoten:

$$\left.\begin{array}{lll}
\tau_{AM}^{(1)} = \tau_{AM}^{(3)} & \tau_{BM}^{(1)} = \tau_{B0}^{(2)} + \tau_{BM}^{(2)} & \tau_{F0}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)} = \tau_{F0}^{(8)} + \tau_{FM}^{(8)} \\
\tau_{EM}^{(3)} = \tau_{E0}^{(5)} + \tau_{EM}^{(5)} & \tau_{BM}^{(1)} = \tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} & \tau_{K0}^{(8)} + \tau_{KM}^{(8)} = \tau_{K0}^{(9)} + \tau_{KM}^{(9)} \\
\tau_{EM}^{(3)} = \tau_{E0}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)} & \tau_{F0}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)} = \tau_{F0}^{(5)} + \tau_{FM}^{(5)} & \tau_{K0}^{(8)} + \tau_{KM}^{(8)} = \tau_{KM}^{(10)} \\
\tau_{J0}^{(7)} + \tau_{JM}^{(7)} = \tau_{J0}^{(9)} + \tau_{JM}^{(9)} & \tau_{F0}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)} = \tau_{F0}^{(6)} + \tau_{FM}^{(6)} &
\end{array}\right\} \quad (a)$$

2. Bedingungen für das Gleichgewicht der Anschlußmomente an den 6 Knotenpunkten der linken Hälfte des Stabwerks:

$$\left.\begin{array}{rl}
(2\,\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{BM}^{(1)}) + (2\,\tau_{AM}^{(3)} + \tau_{EM}^{(3)})\lambda & = 0 \\
(2\,\tau_{EM}^{(3)} + \tau_{AM}^{(3)})\lambda + (2\,\tau_{EM}^{(5)} + \tau_{FM}^{(5)}) + (2\,\tau_{EM}^{(7)} + \tau_{JM}^{(7)})\lambda & = 0 \\
(2\,\tau_{JM}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)})\lambda + (2\,\tau_{JM}^{(9)} + \tau_{KM}^{(9)}) & = 0 \\
(2\,\tau_{BM}^{(1)} + \tau_{AM}^{(1)}) + (2\,\tau_{BM}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)})\lambda + \tau_{BM}^{(2)} & = 0 \\
(2\,\tau_{FM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)})\lambda + (2\,\tau_{FM}^{(8)} + \tau_{KM}^{(8)})\lambda + (2\,\tau_{FM}^{(5)} + \tau_{EM}^{(5)}) + \tau_{FM}^{(6)} & = 0 \\
(2\,\tau_{KM}^{(9)} + \tau_{JM}^{(9)}) + \tau_{KM}^{(10)} + (2\,\tau_{KM}^{(8)} + \tau_{FM}^{(8)})\lambda & = 0
\end{array}\right\} \quad (b)$$

Aus der Symmetrie der Belastung der einzelnen Zellen folgt

$$+\tau_{J0}^{(7)} = -\tau_{E0}^{(7)} = -\tau_{K0}^{(8)} = +\tau_{F0}^{(8)} = +\tau_{F0}^{(4)} = -\tau_{B0}^{(4)} = \frac{p\,h^3}{24\,EJ} = \beta\,,$$

$$-\tau_{J0}^{(9)} = +\tau_{K0}^{(9)} = +\tau_{E0}^{(5)} = -\tau_{F0}^{(5)} = -\tau_{F0}^{(6)} = +\tau_{B0}^{(2)} = \frac{p\,l^3}{24\,EJ} = \alpha\,.$$

3. Die Gleichgewichtsbedingungen (b) enthalten in Verbindung mit (a) 6 ausgezeichnete Drehwinkel, von denen jeder einem der 6 Stabknoten zugeordnet ist.

$$\begin{array}{rl}
\tau_{AM}^{(1)}(2 + 2\,\lambda) + \tau_{BM}^{(1)} + \tau_{EM}^{(5)}\lambda + \lambda\,\alpha & = 0\,, \\
\tau_{AM}^{(1)}\lambda + \tau_{EM}^{(5)}(4\,\lambda + 2) + \tau_{FM}^{(5)} + \tau_{JM}^{(9)}\lambda + 3\,\lambda\,\alpha + \lambda\,\beta & = 0\,, \\
\tau_{JM}^{(9)}(2 + 2\,\lambda) + \tau_{EM}^{(5)}\lambda + \tau_{KM}^{(10)} - \alpha\,(\lambda + 1) - \lambda\,\beta & = 0\,, \\
\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{BM}^{(1)}(3 + 2\,\lambda) + \tau_{FM}^{(5)}\lambda - \alpha\,(\lambda + 1) + \lambda\,\beta & = 0\,, \\
\tau_{FM}^{(5)}(4\,\lambda + 3) + \tau_{BM}^{(1)}\lambda + \tau_{EM}^{(5)} + \tau_{KM}^{(10)}\lambda - 4\,\lambda\,\alpha - 3\,\lambda\,\beta & = 0\,, \\
\tau_{KM}^{(10)}(2\,\lambda + 3) + \tau_{JM}^{(9)} + \tau_{FM}^{(5)}\lambda - \alpha\,(2 + \lambda) + \lambda\,\beta & = 0\,.
\end{array}$$

Ergebnis der Elimination mit $l/h = \lambda = 2$, $\alpha = 8\beta$ nach Umordnung der Gleichungen in eine symmetrische Matrix:

$$\tau_{KM}^{(10)} = +1{,}6\,\beta\,, \qquad \tau_{BM}^{(1)} = +1{,}453589\,\beta\,, \qquad \tau_{FM}^{(5)} = +6{,}204838\,\beta\,,$$
$$\tau_{EM}^{(5)} = -6{,}754972\,\beta\,, \qquad \tau_{JM}^{(9)} = +6{,}318324\,\beta\,, \qquad \tau_{AM}^{(1)} = -0{,}657274\,\beta\,.$$

Durch Rekursion ist:

$$\tau_{AM}^{(3)} = +0{,}657274\,\beta\,, \qquad \tau_{EM}^{(7)} = -6{,}754972\,\beta + 8\,\beta + 1 = +2{,}245028\,\beta\,,$$
$$\tau_{EM}^{(3)} = +1{,}245028\,\beta\,, \qquad \tau_{JM}^{(7)} = +6{,}318324\,\beta - 8\,\beta - \beta = -2{,}681676\,\beta\,,$$
$$\tau_{BM}^{(2)} = -0{,}546411\,\beta\,.$$

Die Beziehung (606) $M_A^{(1)} = \frac{2}{l'}(2\,\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{BM}^{(1)})$ liefert folgende Schnittkräfte:

Multiplikator: $p\,h^2/12$

$$M_J^{(7)} = -(2\cdot 2{,}681675 - 2{,}245028) = -3{,}1183\,, \quad M_B^{(1)} = \frac{h}{l}(2\cdot 1{,}453589 - 0{,}657274) = +1.1250\,,$$

$$M_A^{(3)} = -(2\cdot 0{,}657274 - 1{,}245028) = -0{,}0695\,, \quad M_B^{(2)} = -\frac{h}{l}(2\cdot 6{,}546411 - 6{,}546411) = -3{,}2732\,,$$

$$M_J^{(9)} = \frac{h}{l}(2\cdot 6{,}318324 - 7{,}4) = +3{,}1183\,, \quad M_B^{(4)} = (2\cdot 2{,}453589 - 2{,}759162) = +2{,}1480\,,$$

$$M_A^{(1)} = +0{,}0695\,, \quad M_E^{(3)} = +1{,}8328\,, \quad M_K^{(9)} = -3{,}2408\,, \quad M_F^{(6)} = +3{,}1204\,,$$
$$M_E^{(7)} = +1{,}8084\,, \quad M_F^{(4)} = -3{,}0647\,, \quad M_K^{(8)} = +2{,}4408\,, \quad M_F^{(8)} = -2{,}9183\,,$$
$$M_E^{(5)} = -3{,}6346\,, \quad M_F^{(5)} = +2{,}8634\,,$$
$$M_K^{(10)} = +0{,}8000\,.$$

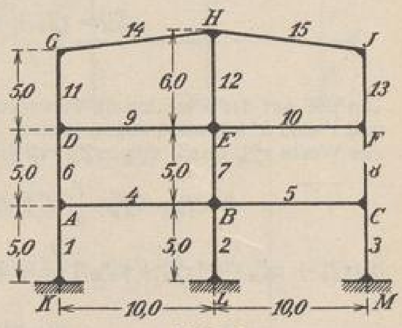


Abb. 340.

Berechnung eines zur Mittellinie symmetrischen Stockwerkrahmens (Abb. 340).

Belastung durch Nutzlast und waagerechten Winddruck. Die Anzahl der unbekannten Drehwinkel $\tau_{JM}^{(h)}$ ist $2s = 30$, die Anzahl der unbekannten Komponenten ψ_c ist $f = 3$.

$$\psi_1 = \vartheta_1\,, \qquad \psi_2 = \vartheta_6\,, \qquad \psi_3 = \vartheta_{11}\,.$$

Ansatz der $(2s - r - t) = 18$ Bedingungen (603) für die winkeltreue Verformung der Stäbe am Knoten und der $t = 3$ Bedingungen $\varphi_K = \varphi_L = \varphi_M = 0$:

$$\begin{array}{l|l|l}
\tau_{K0}^{(1)} + \tau_{KM}^{(1)} + \psi_1 = 0 & \tau_{L0}^{(2)} + \tau_{LM}^{(2)} + \psi_1 = 0 & \tau_{M0}^{(3)} + \tau_{MM}^{(3)} + \psi_1 = 0 \\
\tau_{A0}^{(1)} + \tau_{AM}^{(1)} + \psi_1 = \tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} & \tau_{B0}^{(2)} + \tau_{BM}^{(2)} + \psi_1 = \tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} & \tau_{C0}^{(3)} + \tau_{CM}^{(3)} + \psi_1 = \tau_{C0}^{(5)} + \tau_{CM}^{(5)} \\
\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} = \tau_{A0}^{(6)} + \tau_{AM}^{(6)} + \psi_2 & \tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} = \tau_{B0}^{(7)} + \tau_{BM}^{(7)} + \psi_2 & \tau_{C0}^{(5)} + \tau_{CM}^{(5)} = \tau_{C0}^{(8)} + \tau_{CM}^{(8)} + \psi_2 \\
\tau_{D0}^{(6)} + \tau_{DM}^{(6)} + \psi_2 = \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} & \tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} = \tau_{B0}^{(5)} + \tau_{BM}^{(5)} & \tau_{F0}^{(8)} + \tau_{FM}^{(8)} + \psi_2 = \tau_{F0}^{(10)} + \tau_{FM}^{(10)} \\
\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} = \tau_{D0}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)} + \psi_3 & \tau_{E0}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)} + \psi_2 = \tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} & \tau_{F0}^{(10)} + \tau_{FM}^{(10)} = \tau_{F0}^{(13)} + \tau_{FM}^{(13)} + \psi_3 \\
\tau_{G0}^{(11)} + \tau_{GM}^{(11)} + \psi_3 = \tau_{G0}^{(14)} + \tau_{GM}^{(14)} & \tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} = \tau_{E0}^{(10)} + \tau_{EM}^{(10)} & \tau_{J0}^{(13)} + \tau_{JM}^{(13)} + \psi_3 = \tau_{J0}^{(15)} + \tau_{JM}^{(15)} \\
 & \tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} = \tau_{E0}^{(12)} + \tau_{EM}^{(12)} + h_{11}/h_{12}\cdot\psi_3 & \\
 & \tau_{H0}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} = \tau_{H0}^{(12)} + \tau_{HM}^{(12)} + h_{11}/h_{12}\cdot\psi_3 & \\
 & \tau_{H0}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} = \tau_{H0}^{(15)} + \tau_{HM}^{(15)} &
\end{array}$$

Das Stabwerk ist symmetrisch. Daher wird jede Belastung in den symmetrischen und in den antimetrischen Anteil zerlegt.

a) Verschiebungszustand bei Symmetrie der Belastung. Die Stabdrehwinkel ψ_1, ψ_2, ψ_3 und die in der Symmetrieachse liegenden Drehwinkel sind Null, symmetrisch liegende Drehwinkel $\tau_{JM}^{(h)}$ sind entgegengesetzt gleich.

1. Bedingungen für die winkeltreue Verformung der Stäbe am Knoten.

$$\left.\begin{array}{ll}
\tau_{K0}^{(1)} + \tau_{KM}^{(1)} = 0 & \tau_{D0}^{(6)} + \tau_{DM}^{(6)} = \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} \\
\tau_{A0}^{(1)} + \tau_{AM}^{(1)} = \tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} & \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} = \tau_{D0}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)} \\
\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} = \tau_{A0}^{(6)} + \tau_{AM}^{(6)} & \tau_{G0}^{(11)} + \tau_{GM}^{(11)} = \tau_{G0}^{(14)} + \tau_{GM}^{(14)} \\
\multicolumn{2}{l}{\tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} = 0, \quad \tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} = 0, \quad \tau_{H0}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} = 0.}
\end{array}\right\} \quad \text{(a)}$$

2. Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte an den Knoten A, D, G:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma M_A &= 0 = 2\left(\frac{2\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{KM}^{(1)}}{h_1'} + \frac{2\tau_{AM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)}}{l_4'} + \frac{2\tau_{AM}^{(6)} + \tau_{DM}^{(6)}}{h_6'}\right) \\
\Sigma M_D &= 0 = 2\left(\frac{2\tau_{DM}^{(6)} + \tau_{AM}^{(6)}}{h_6'} + \frac{2\tau_{DM}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)}}{l_9'} + \frac{2\tau_{DM}^{(11)} + \tau_{GM}^{(11)}}{h_{11}'}\right) \\
\Sigma M_G &= 0 = 2\left(\frac{2\tau_{GM}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)}}{h_{11}'} + \frac{2\tau_{GM}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)}}{l_{14}'}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Die den Pfosten zugeordneten Werte $\tau_{K0}^{(h)}$ sind bei Belastung der Riegelzüge des Rahmens Null und damit die Bedingungen (a)

$$\left.\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\tau_{K0}^{(1)} = \tau_{A0}^{(1)} = \tau_{A0}^{(6)} = \tau_{D0}^{(6)} = \tau_{D0}^{(11)} = \tau_{G0}^{(11)} = 0} \\
\tau_{KM}^{(1)} = 0 & \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} = \tau_{DM}^{(11)} \\
\tau_{AM}^{(1)} = \tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} & \tau_{GM}^{(11)} = \tau_{GM}^{(14)} + \tau_{G0}^{(14)} \\
\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} = \tau_{AM}^{(6)} & \tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} = 0 \\
\tau_{DM}^{(6)} = \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} & \tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} = 0 \\
 & \tau_{H0}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} = 0.
\end{array}\right\} \quad \text{(c)}$$

Um die Art der Berechnung hervortreten zu lassen, werden auch die Riegel **14, 15** waagerecht und l' und h' konstant angenommen. Unter Verwendung der Gln. (c) werden in dem Ansatz (b) alle Werte $\tau_{JM}^{(h)}$ durch $\tau_{AM}^{(4)}$, $\tau_{DM}^{(9)}$, $\tau_{GM}^{(14)}$ ausgedrückt:

$$2(\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)})\frac{l'}{h'} + 2\tau_{AM}^{(4)} - \tau_{B0}^{(4)} + [2(\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)}) + (\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)})]\frac{l'}{h'} = 0,$$

$$[2(\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)}) + (\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)})]\frac{l'}{h'} + 2\tau_{DM}^{(9)} - \tau_{E0}^{(9)} + [2(\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)}) + (\tau_{G0}^{(14)} + \tau_{GM}^{(14)})] = 0,$$

$$[2(\tau_{GM}^{(14)} + \tau_{G0}^{(14)}) + (\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)})]\frac{l'}{h'} + (2\tau_{GM}^{(14)} - \tau_{H0}^{(14)}) = 0.$$

Mit $l'/h' = \lambda$ lautet der Ansatz (b) nunmehr folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\tau_{AM}^{(4)}(2\lambda+2+2\lambda) + \tau_{DM}^{(9)}\lambda &= -\tau_{A0}^{(4)}(2\lambda+2\lambda) + \tau_{B0}^{(4)} - \tau_{D0}^{(9)}\lambda, \\
\tau_{AM}^{(4)}\lambda + \tau_{DM}^{(9)}(2\lambda+2+2\lambda) + \tau_{GM}^{(14)}\lambda &= -\tau_{A0}^{(4)}\lambda - \tau_{D0}^{(9)}(2\lambda+2\lambda) + \tau_{E0}^{(9)} - \tau_{G0}^{(14)}\lambda, \\
\tau_{DM}^{(9)}\lambda + \tau_{GM}^{(14)}(2\lambda+2) &= -\tau_{D0}^{(9)}\lambda + \tau_{H0}^{(14)} - 2\tau_{G0}^{(14)}\lambda.
\end{aligned}$$

Die symmetrische Belastung der einzelnen Riegel und $\lambda = 2$ führen zu

$$\tau_{A0}^{(4)} = -\tau_{B0}^{(4)}, \qquad \tau_{D0}^{(9)} = -\tau_{E0}^{(9)}, \qquad \tau_{G0}^{(14)} = -\tau_{H0}^{(14)}.$$

$$\begin{aligned}
10\tau_{AM}^{(4)} + 2\tau_{DM}^{(9)} &= -9\tau_{A0}^{(4)} - 2\tau_{D0}^{(9)}, \\
2\tau_{AM}^{(4)} + 10\tau_{DM}^{(9)} + 2\tau_{GM}^{(14)} &= -2\tau_{A0}^{(4)} - 9\tau_{D0}^{(9)} - 2\tau_{G0}^{(14)}, \\
2\tau_{DM}^{(9)} + 6\tau_{GM}^{(14)} &= -2\tau_{D0}^{(9)} - 5\tau_{G0}^{(14)}.
\end{aligned}$$

Auflösung des Ansatzes und Rekursion nach (c) liefert bei der Belastung der Riegelstäbe (4, 5) mit p_1, der Riegelstäbe (9, 10) mit p_2 und der Riegelstäbe (14, 15) mit p_3 unter Verwendung von $\dfrac{p\, l'^2\, l'}{134 \cdot 24} = c$ als Multiplikator

	$\tau_{KM}^{(1)}$	$\tau_{AM}^{(1)}$	$\tau_{AM}^{(4)}$	$\tau_{AM}^{(6)}$	$\tau_{DM}^{(6)}$	$\tau_{DM}^{(9)}$	$\tau_{DM}^{(11)}$	$\tau_{GM}^{(11)}$	$\tau_{GM}^{(14)}$	$\tau_{BM}^{(4)}$	$\tau_{EM}^{(9)}$	$\tau_{HM}^{(14)}$	
Riegel 4, 5	0	+14	−120	+14	−3	−3	−3	+1	+1	+134	0	0	c_1
„ 9, 10	0	−3	−3	−3	+15	−119	+15	−5	−5	0	+134	0	c_2
„ 14, 15	0	+1	+1	+1	−5	−5	−5	+24	−110	0	0	+134	c_3

Die Stabendmomente werden nach $M_A^{(4)} = \frac{2}{l'}\,(2\,\tau_{AM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)})$ bestimmt. Bei $l = 2\,h$ und Belastung des unteren Riegels ist

$$M_A^{(4)} = \frac{2}{l'}\,\frac{p_1\,l^2\,l'}{134\cdot 24}\,(-240 + 134) = -\frac{106}{134}\cdot\frac{p_1\,l^2}{12},$$

$$M_A^{(1)} = \frac{2}{l'}\,\frac{p_1\,l^2\,l'}{134\cdot 24}\,(+28) = +\frac{56}{134}\,\frac{p_1\,l^2}{12}; \qquad M_A^{(6)} = +\frac{50}{134}\,\frac{p_1\,l_1^2}{12}.$$

Die Bedingung $\sum M_A = 0$ ist erfüllt.

b) Verschiebungszustand bei Antimetrie der Belastung. Die Windkräfte werden in den Stabknoten eingetragen, so daß die Drehwinkel $\tau_{K0}^{(h)}$ Null sind. Symmetrisch liegende Drehwinkel sind gleich.

1. Bedingungen für die winkeltreue Verformung am Stabknoten:

$$\left.\begin{array}{ll}
\tau_{KM}^{(1)} + \psi_1 = 0, & \tau_{LM}^{(2)} + \psi_1 = 0, \\
\tau_{AM}^{(1)} + \psi_1 = \tau_{AM}^{(4)}, & \tau_{BM}^{(2)} + \psi_1 = \tau_{BM}^{(4)}, \\
\tau_{AM}^{(4)} = \tau_{AM}^{(6)} + \psi_2, & \tau_{BM}^{(4)} = \tau_{BM}^{(7)} + \psi_2, \\
\tau_{DM}^{(6)} + \psi_2 = \tau_{DM}^{(6)}, & \tau_{EM}^{(7)} + \psi_2 = \tau_{EM}^{(9)}, \\
\tau_{DM}^{(9)} = \tau_{DM}^{(11)} + \psi_3, & \tau_{EM}^{(9)} = \tau_{EM}^{(12)} + h_{11}/h_{12}\cdot\psi_3, \\
\tau_{GM}^{(11)} + \psi_3 = \tau_{GM}^{(14)}, & \tau_{HM}^{(14)} = \tau_{HM}^{(12)} + h_{11}/h_{12}\cdot\psi_3.
\end{array}\right\} \quad \text{(d)}$$

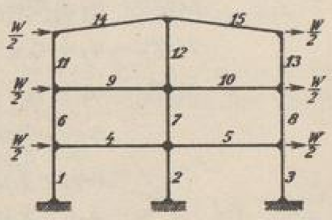


Abb. 341.

2. Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte am Knoten:

$$\left.\begin{array}{l}
(2\,\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{KM}^{(1)})\,\frac{l_4'}{h_1'} + 2\,\tau_{AM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} + (2\,\tau_{AM}^{(6)} + \tau_{DM}^{(6)})\,\frac{l_4'}{h_6'} = 0, \\
(2\,\tau_{DM}^{(6)} + \tau_{AM}^{(6)})\,\frac{l_9'}{h_6'} + 2\,\tau_{DM}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} + (2\,\tau_{DM}^{(11)} + \tau_{GM}^{(11)})\,\frac{l_9'}{h_{11}'} = 0, \\
(2\,\tau_{GM}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)})\,\frac{l_{14}'}{h_{11}'} + 2\,\tau_{GM}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} = 0, \\
2\,(2\,\tau_{HM}^{(14)} + \tau_{GM}^{(14)}) + (2\,\tau_{HM}^{(12)} + \tau_{EM}^{(12)})\,\frac{l_{14}'}{h_6'} = 0, \\
2\,(2\,\tau_{EM}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)}) + (2\,\tau_{EM}^{(12)} + \tau_{HM}^{(12)})\,\frac{l_9'}{h_{12}'} + (2\,\tau_{EM}^{(7)} + \tau_{BM}^{(7)})\,\frac{l_9'}{h_7'} = 0, \\
2\,(2\,\tau_{BM}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)}) + (2\,\tau_{BM}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)})\,\frac{l_4'}{h_7'} + (2\,\tau_{BM}^{(2)} + \tau_{LM}^{(2)})\,\frac{l_4'}{h_2'} = 0.
\end{array}\right| \quad \text{(e)}$$

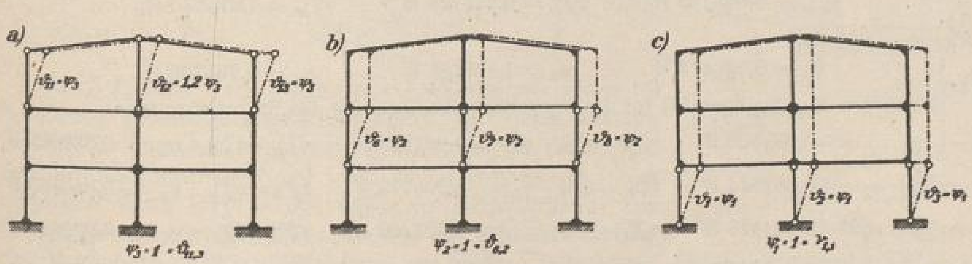


Abb. 342.

3. Bedingungen für das Gleichgewicht der Anschlußkräfte an drei Stabketten $\dot\psi_3 = 1$, $\dot\psi_2 = 1$, $\dot\psi_1 = 1$ (Abb. 342). Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ist

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{6}{h'_{11}}(\tau^{(11)}_{DM} + \tau^{(11)}_{GM})\cdot 1 + \frac{6}{h'_{12}}(\tau^{(12)}_{EM} + \tau^{(12)}_{HM})\frac{h_{11}}{h_{12}} + \frac{6}{h'_{13}}(\tau^{(13)}_{FM} + \tau^{(13)}_{JM})\cdot 1 + W\cdot h = 0\,,\\
&\frac{6}{h'_{6}}(\tau^{(6)}_{AM} + \tau^{(6)}_{DM})\cdot 1 + \frac{6}{h'_{7}}(\tau^{(7)}_{BM} + \tau^{(7)}_{EM})\cdot 1 + \frac{6}{h'_{8}}(\tau^{(8)}_{CM} + \tau^{(8)}_{FM})\cdot 1 + 2\,W\cdot h = 0\,.\\
&\frac{6}{h'_{1}}(\tau^{(1)}_{KM} + \tau^{(1)}_{AM})\cdot 1 + \frac{6}{h'_{2}}(\tau^{(2)}_{LM} + \tau^{(2)}_{BM})\cdot 1 + \frac{6}{h'_{3}}(\tau^{(3)}_{MM} + \tau^{(3)}_{CM})\cdot 1 + 3\,W\cdot h = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(f)}$$

Um die Entwicklung der Rechnung hervortreten zu lassen, wird $h_{11} = h_{12} = h_{13}$ und das Verhältnis $l' : h' = \lambda = 2$ angenommen. Der Ansatz (f) erhält dann folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{6}{h'}(\tau^{(11)}_{GM} + \tau^{(11)}_{DM}) + \frac{6}{h'}(\tau^{(12)}_{HM} + \tau^{(12)}_{EM}) + \quad Wh = 0\,,\\
&2\,\frac{6}{h'}(\tau^{(6)}_{DM} + \tau^{(6)}_{AM}) + \frac{6}{h'}(\tau^{(7)}_{EM} + \tau^{(7)}_{BM}) + 2\,Wh = 0\,,\\
&2\,\frac{6}{h'}(\tau^{(1)}_{AM} + \tau^{(1)}_{KM}) + \frac{6}{h'}(\tau^{(2)}_{BM} + \tau^{(2)}_{LM}) + 3\,Wh = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(g)}$$

Mit den Beziehungen (d) über die winkeltreue Verformung und $\overline{W} = \dfrac{W h h'}{6}$ ist

$$\begin{aligned}
&2(\tau^{(14)}_{GM} - \psi_3 + \tau^{(9)}_{DM} - \psi_3) + (\tau^{(14)}_{HM} - \psi_3 + \tau^{(9)}_{EM} - \psi_3) + \quad \overline{W} = 0\,,\\
&2(\tau^{(9)}_{DM} - \psi_2 + \tau^{(4)}_{AM} - \psi_2) + (\tau^{(9)}_{EM} - \psi_2 + \tau^{(4)}_{BM} - \psi_2) + 2\,\overline{W} = 0\,,\\
&2(\tau^{(4)}_{AM} - \psi_1 + \psi_1) \qquad\quad + (\tau^{(4)}_{BM} - \psi_1 - \psi_1) \qquad\quad + 3\,\overline{W} = 0\,.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
6\,\psi_3 &= 2\,\tau^{(14)}_{GM} + 2\,\tau^{(9)}_{DM} + \tau^{(14)}_{HM} + \tau^{(9)}_{EM} + \overline{W}\,,\\
6\,\psi_2 &= 2\,\tau^{(9)}_{DM} + 2\,\tau^{(4)}_{AM} + \tau^{(9)}_{EM} + \tau^{(4)}_{BM} + 2\,\overline{W}\,,\\
6\,\psi_1 &= 2\,\tau^{(4)}_{AM} + \tau^{(4)}_{BM} \qquad\qquad\qquad + 3\,\overline{W}\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(h)}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (e) werden mit Hilfe von (d) derart zusammengezogen, daß in ihnen außer den drei Komponenten ψ nur sechs ausgezeichnete Winkel $\tau^{(h)}_{KM}$ enthalten sind, von denen jeder einem der sechs Stabwerksknoten zugeordnet ist. Das Ergebnis lautet:

$$\left.\begin{aligned}
&\tau^{(4)}_{AM}(2\,\lambda + 2 + 2\,\lambda) + \tau^{(4)}_{BM} + \tau^{(9)}_{DM}\lambda - 3\,\psi_1\lambda - \psi_2(2\,\lambda + \lambda) &&= 0\,,\\
&\tau^{(9)}_{DM}(2\,\lambda + 2 + 2\,\lambda) + \tau^{(4)}_{AM}\lambda + \tau^{(9)}_{EM} + \tau^{(14)}_{GM}\lambda - 3\,\psi_2\lambda - 3\,\psi_3\lambda &&= 0\,,\\
&\tau^{(14)}_{GM}(2\,\lambda + 2) + \tau^{(9)}_{DM}\lambda + \tau^{(14)}_{HM} - 3\,\psi_3\lambda &&= 0\,,\\
&\tau^{(14)}_{HM}(4 + 2\,\lambda) + 2\,\tau^{(14)}_{GM} + \tau^{(9)}_{EM}\lambda - (2 + 1)\,\psi_3\lambda &&= 0\,,\\
&\tau^{(9)}_{EM}(4 + 4 + 2\,\lambda) + 2\,\tau^{(9)}_{DM} + 2\,\tau^{(14)}_{HM} + \tau^{(4)}_{BM}\lambda - (4 + 2)\,\psi_3 - 3\,\psi_2\lambda &&= 0\,,\\
&\tau^{(4)}_{BM}(4 + 2\,\lambda + 2\,\lambda) + 2\,\tau^{(4)}_{AM} + \tau^{(9)}_{EM}\lambda - 3\,\psi_1\lambda - 3\,\psi_2\lambda &&= 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

Die Elimination der Komponenten ψ mit (h) liefert den Ansatz für die sechs ausgezeichneten Winkel $\tau^{(h)}_{KM}$ mit der folgenden Lösung:

$$\tau^{(9)}_{DM} = 0{,}788452\,\overline{W}\,,\qquad \tau^{(9)}_{EM} = 0{,}646808\,\overline{W}\,,\qquad \tau^{(14)}_{GM} = 0{,}411702\,\overline{W}\,,$$

$$\tau^{(4)}_{BM} = 0{,}808175\,\overline{W}\,,\qquad \tau^{(14)}_{HM} = 0{,}275728\,\overline{W}\,,\qquad \tau^{(4)}_{AM} = 1{,}075830\,\overline{W}$$

Aus (h) folgt damit:

$$\psi_3 = 0{,}720474\,\overline{W}\,,\qquad \psi_2 = 1{,}197258\,\overline{W}\,,\qquad \psi_1 = 0{,}993306\,\overline{W}\,.$$

Nach den Bedingungen (d) für die winkeltreue Verformung des Stabwerkes ist

$\tau^{(1)}_{KM} = -\psi_1 \quad = -0{,}993306\,\overline{W}$	$\tau^{(11)}_{DM} = \tau^{(9)}_{DM} - \psi_3 = +0{,}067978\,\overline{W}$	$\tau^{(7)}_{BM} = \tau^{(4)}_{BM} - \psi_2 = -0{,}389083\,\overline{W}$
$\tau^{(1)}_{AM} = \tau^{(4)}_{AM} - \psi_1 = +0{,}082524\,\overline{W}$	$\tau^{(11)}_{GM} = \tau^{(14)}_{GM} - \psi_3 = -0{,}308772\,\overline{W}$	$\tau^{(7)}_{EM} = \tau^{(9)}_{EM} - \psi_2 = -0{,}550450\,\overline{W}$
$\tau^{(6)}_{AM} = \tau^{(4)}_{AM} - \psi_2 = -0{,}121428\,\overline{W}$	$\tau^{(2)}_{LM} = -\psi_1 \quad = -0{,}993306\,\overline{W}$	$\tau^{(12)}_{EM} = \tau^{(9)}_{EM} - \psi_3 = -0{,}079666\,\overline{W}$
$\tau^{(6)}_{DM} = \tau^{(9)}_{DM} - \psi_2 = -0{,}408806\,\overline{W}$	$\tau^{(2)}_{BM} = \tau^{(4)}_{BM} - \psi_1 = -0{,}185131\,\overline{W}$	$\tau^{(12)}_{HM} = \tau^{(14)}_{HM} - \psi_3 = -0{,}444746\,\overline{W}$

Die Stabendmomente können nunmehr nach (606) angegeben werden. Danach ist

$$M_A^{(4)} = \frac{2}{l'_4}\left(2\,\tau_{AM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)}\right) \quad \text{und mit} \quad \frac{W\,h}{3} = c$$

$$M_G^{(14)} = +\frac{2}{l'}\,(2\cdot 0{,}411702 + 0{,}275728)\,\overline{W} = +0{,}5496\,c\,,$$

$$M_G^{(11)} = -\frac{2}{h'}\,(2\cdot 0{,}308772 - 0{,}067978)\,\overline{W} = -0{,}5496\,c\,,$$

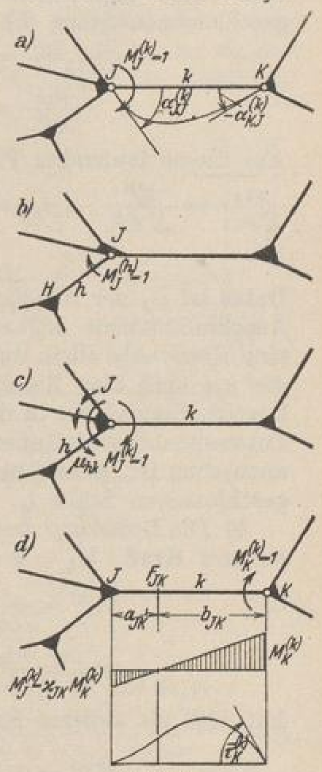
$$M_D^{(11)} = +\frac{2}{h'}\,(2\cdot 0{,}067978 - 0{,}308772)\,\overline{W} = -0{,}1728\,c\,,$$

$M_G^{(9)} = +1{,}1119\,c$, $M_A^{(1)} = -0{,}8283\,c$, $M_E^{(9)} = M_E^{(10)} = +1{,}0410\,c$, $M_B^{(4)} = M_B^{(5)} = +1{,}3461\,c$,
$M_D^{(6)} = -0{,}9390\,c$, $M_K^{(1)} = -1{,}9041\,c$, $M_E^{(12)} = -0{,}5921\,c$, $M_B^{(2)} = -1{,}3636\,c$,
$M_A^{(6)} = -0{,}6517\,c$, $M_H^{(14)} = M_H^{(15)} = +0{,}9632\,c$, $M_E^{(7)} = -1{,}4900\,c$, $M_L^{(2)} = -2{,}1717\,c$.
$M_A^{(4)} = +1{,}4799\,c$, $M_H^{(12)} = -0{,}9631\,c$, $M_B^{(7)} = -1{,}3286\,c$,

Hartmann, F.: Die statisch unbestimmten Systeme des Eisen- und Eisenbetonbaues 2. Aufl. Berlin 1922. — Bleich, F.: Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes 2. Aufl. Berlin 1925.

44. Kennbeziehungen bei unverschieblichem Knotennetz.

Die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_J = 0$ (S. 320) zur Berechnung der unbekannten Knotendrehwinkel φ_{J0} und τ_{JM} für $\psi_c = 0$ mit Hilfe der konjugierten Matrix liefert nach S. 247 Kennbeziehungen zwischen den unbekannten Drehwinkeln und daher auch Kennbeziehungen zwischen den hiervon abhängigen Anschlußmomenten. Sie können unter Umständen mit Vorteil zur unmittelbaren Berechnung des Spannungszustandes verwendet werden. Der analytische Zusammenhang wird an einem Ausschnitt des Stabwerks geklärt (Abb. **343**).



Die $E\,J_c$fachen Verdrehungen der Endtangenten eines geraden, in den Knotenpunkten J, K mit Gelenken angeschlossenen Stabes (k) durch das Anschlußmoment $M_J^{(k)} = 1$ sind $\alpha_{JJ}^{(k)}, \alpha_{KJ}^{(k)}$ (Abb. **343a**). Die $E J_c$fachen Drehwinkel aus dem Anschlußmoment $M_K^{(k)} = 1$ werden mit $\alpha_{JK}^{(k)}, \alpha_{KK}^{(k)}$, die $E J_c$fachen Drehwinkel aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ des Stabes mit $\alpha_{J0}^{(k)}, \alpha_{K0}^{(k)}$ bezeichnet. Die Bewegung im Urzeigersinn ist positiv. Bei gerader Stabachse und konstantem Querschnitt ist mit $l_k J_c / J_k = l'_k$ und (625)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{JJ}^{(k)} &= \frac{l'_k}{3} = \alpha_{KK}^{(k)}\,, & \alpha_{JK}^{(k)} &= \alpha_{KJ}^{(k)} = -\frac{l'_k}{6}\,, \\ \alpha_{J0}^{(k)} &= \frac{l'_k}{6}\,R_K^{(k)}\,, & \alpha_{K0}^{(k)} &= \frac{l'_k}{6}\,R_J^{(k)}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (610)$$

Die $E\,J_c$fache Verdrehung der Endtangente eines im Knoten J gelenkig angeschlossenen, im benachbarten Knoten H elastisch eingespannten Stabes (h) durch ein Anschlußmoment $M_J^{(h)} = 1$ ist $\overline{\tau}_J^{(h)}$ (Abb. **343b**). Der reziproke Wert $1/\overline{\tau}_J^{(h)} = \varrho_J^{(h)}$ wird als Anschlußzahl des Stabes (h) am Knoten J bezeichnet. Sie gibt den Betrag des Momentes $M_J^{(h)}$ an, welches zu einer Verdrehung der Endtangente $\overline{\tau}_J^{(h)} = 1$ notwendig ist. Das Anschlußmoment $M_J^{(h)} = 1$ erzeugt am Stabende H das

Anschlußmoment $M_{HJ}^{(h)}$, dessen Größe von der $E\,J_c$fachen elastischen Verdrehung φ_H des Knotens H durch ein Kräftepaar 1 abhängt und aus der Kontinuitätsbedingung am Anschluß H berechnet wird.

$$\left.\begin{aligned} M_{HJ}^{(h)}(\alpha_{HH}^{(h)}-\overline{\varphi}_H)+\alpha_{HJ}^{(h)}=0\,, \qquad M_{HJ}^{(h)}=-\frac{\alpha_{HJ}^{(h)}}{\alpha_{HH}^{(h)}-\overline{\varphi}_H}\,,\\ \overline{\tau}_J^{(h)}=\alpha_{JJ}^{(h)}+M_{HJ}^{(h)}\,\alpha_{JH}^{(h)}=\alpha_{JJ}^{(h)}-\frac{\alpha_{JH}^{(h)2}}{\alpha_{HH}^{(h)}-\overline{\varphi}_H}=\frac{1}{\varrho_J^{(h)}}\,. \end{aligned}\right\} \quad (611)$$

Bei gelenkigem Anschluß des Stabes (h) am Knoten H ist $M_{HJ}^{(h)}=0$, also $\overline{\varphi}_H=\infty$ und $\overline{\tau}_J^{(h)}=\alpha_{JJ}^{(h)}$, bei starrer Einspannung ist $\overline{\varphi}_H=0$. Für Stäbe mit konstantem Querschnitt ist

$$\text{bei } \overline{\varphi}_H=\infty:\ \ \overline{\tau}_J^{(h)}=l_h'/3\,, \qquad \text{bei } \overline{\varphi}_H=0:\ \ \overline{\tau}_J^{(h)}=l_h'/4\,. \quad (612)$$

Die Anschlußzahl $\varrho_H^{(h)}$ des Stabes (h) am Knoten H kann ebenso festgestellt werden:

$$\overline{\tau}_H^{(h)}=\alpha_{HH}^{(h)}-\frac{\alpha_{HJ}^{(h)2}}{\alpha_{JJ}^{(h)}-\overline{\varphi}_J}=\frac{1}{\varrho_H^{(h)}}\,. \quad (613)$$

Die Anschlußmomente am Knoten J durch äußere Kräfte am Stabe JK. a) Die Belastung des Stabes besteht aus dem Anschlußmoment $M_J^{(k)}=1$ des Stabwerks als äußerer Kraft (Abb. 343c). Sie erzeugt an den übrigen in J angeschlossenen Stäben (h) die Anschlußmomente $M_J^{(h)}=\mu_{hk}$. Diese stehen mit $M_J^{(k)}=1$ im Gleichgewicht.

$$\sum_J \mu_{hk}+1_J^{(k)}=0\,. \quad (614)$$

Ihre Größe ergibt sich aus der winkeltreuen Verformung der im Knoten J angeschlossenen Stäbe (h).

$$\left.\begin{aligned} \mu_{1k}\,\overline{\tau}_J^{(1)}=\mu_{2k}\,\overline{\tau}_J^{(2)}=\cdots=\mu_{hk}\,\overline{\tau}_J^{(h)}=\cdots=\overline{\varphi}_J\,,\\ \frac{\mu_{1k}}{\varrho_J^{(1)}}=\frac{\mu_{2k}}{\varrho_J^{(2)}}=\cdots=\frac{\mu_{hk}}{\varrho_J^{(h)}}=\cdots=\overline{\varphi}_J\,. \end{aligned}\right\} \quad (615)$$

Aus dieser laufenden Proportion entsteht

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu_{hk}}{\Sigma\,\mu_{hk}}=\frac{\varrho_J^{(h)}}{\Sigma\,\varrho_J^{(h)}}\,,\quad \mu_{hk}=-1_J^{(k)}\frac{\varrho_J^{(h)}}{\Sigma\,\varrho_J^{(h)}}=-\frac{\varrho_J^{(h)}}{\Phi_J^{(k)}}\,,\quad \overline{\varphi}_J=\frac{\mu_{hk}}{\varrho_J^{(h)}}=-\frac{1}{\Phi_J^{(k)}}\,,\\ \Phi_J^{(k)}=\Sigma\,\varrho_J^{(h)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (616)$$

Dabei ist $\overline{\varphi}_J$ der $E\,J_c$fache Betrag des Drehwinkels des Stabknotens J aus einem Anschlußmoment $M_J^{(k)}=1$. Die Anschlußmomente $M_J^{(h)}=\mu_{hk}\,M_J^{(k)}$ sind bis auf eine Konstante allein durch die elastischen Eigenschaften des Stabwerks bestimmt, die μ_{hk} sind also Kennbeziehungen zwischen den Anschlußmomenten am Stabknoten. Sie werden in der Literatur Übergangszahlen genannt. Da $M_J^{(k)}$ in diesem Zusammenhang als äußere Kraft, der Anschluß des Stabes (k) in J daher als Gelenk anzusehen ist, bezeichnet $\Phi_J^{(k)}$ die Summe der Anschlußzahlen aller in J steif angeschlossenen Stäbe l_h.

b) Die Belastung des Stabes (k) besteht aus dem Anschlußmoment $M_K^{(k)}=1$ als äußerer Kraft. $\mathfrak{P}_k=0$ (Abb. 343d). Daher ist nach (611)

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(k)}=-\frac{\alpha_{JK}^{(k)}}{\alpha_{JJ}^{(k)}-\overline{\varphi}_J}\,M_K^{(k)} \quad \text{und} \quad \frac{M_J^{(k)}}{M_K^{(k)}}=\varkappa_{JK}=\frac{a_{JK}}{b_{JK}}\,,\\ \nu_{JK}=\frac{a_{JK}}{l_k}=\frac{\varkappa_{JK}}{1+\varkappa_{JK}}=-\frac{\alpha_{JK}^{(k)}}{\alpha_{JJ}^{(k)}-\overline{\varphi}_J-\alpha_{JK}^{(k)}}\,. \end{aligned}\right\} \quad (617)$$

Mit $M_J^{(k)}$ als äußerer Kraft und $\mathfrak{P}_k=0$ ist

$$\left.\begin{aligned} M_K^{(k)}=-\frac{\alpha_{KJ}^{(k)}}{\alpha_{KK}^{(k)}-\overline{\varphi}_K}\,M_J^{(k)} \quad \text{und} \quad \frac{M_K^{(k)}}{M_J^{(k)}}=\varkappa_{KJ}=\frac{a_{KJ}}{b_{KJ}}\,,\\ \nu_{KJ}=\frac{a_{KJ}}{l_k}=\frac{\varkappa_{KJ}}{1+\varkappa_{KJ}}=-\frac{\alpha_{KJ}^{(k)}}{\alpha_{KK}^{(k)}-\overline{\varphi}_K-\alpha_{KJ}^{(k)}}\,. \end{aligned}\right\} \quad (618)$$

Bei geraden Stäben mit konstantem Stabquerschnitt wird

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_{JK} &= \frac{1}{2+\dfrac{6}{l_k' \Phi_J^{(k)}}}\,; \qquad \nu_{JK} = \frac{1}{3+\dfrac{6}{l_k' \Phi_J^{(k)}}} = \frac{a_{JK}}{l_k}\,; \\ \varkappa_{KJ} &= \frac{1}{2+\dfrac{6}{l_k' \Phi_K^{(k)}}}\,; \qquad \nu_{KJ} = \frac{1}{3+\dfrac{6}{l_k' \Phi_K^{(k)}}} = \frac{a_{KJ}}{l_k}\,. \end{aligned}\right\} \tag{619}$$

Diese Verhältniszahlen sind durch die elastischen Eigenschaften des Stabwerks vollständig bestimmt und daher Kennbeziehungen für die Anschlußmomente des unbelasteten Stabes (k). Beim Vorwärtsschreiten in Richtung $\overrightarrow{JK}$ werden aus gegebenen Anschlußzahlen $\varrho_J^{(h)}$ die Kennbeziehungen $\varkappa_{JK}$, ν_{JK} und die Festpunktabstände a_{JK} für die zeichnerische Untersuchung berechnet. Damit ist dann auch die Anschlußzahl $\varrho_K^{(k)}$ des Stabes (k) bestimmt.

$$\bar{\tau}_K^{(k)} = \frac{1}{\varrho_K^{(k)}} = \alpha_{KK}^{(k)} + \varkappa_{JK}\, \alpha_{KJ}^{(k)}. \tag{620}$$

Umgekehrt wird die Anschlußzahl $\varrho_J^{(h)}$ aus $\varkappa_{KJ}$ gefunden.

$$\bar{\tau}_J^{(k)} = \frac{1}{\varrho_J^{(k)}} = \alpha_{JJ}^{(k)} + \varkappa_{KJ}\, \alpha_{JK}^{(k)}. \tag{621}$$

Bei konstantem Trägheitsmoment können nach (619) folgende Ergebnisse angeschrieben werden:

$$\varrho_K^{(k)} = \frac{2}{l_k'} \frac{1-\nu_{JK}}{2/3-\nu_{JK}}\,; \qquad \varrho_J^{(k)} = \frac{2}{l_k'} \frac{1-\nu_{KJ}}{2/3-\nu_{KJ}}\,. \tag{622}$$

c) Der EJ_cfache Betrag der relativen Verschiebung der Anschlußquerschnitte J, K eines Stabes l_k winkelrecht zur Stabachse ist $w_K - w_J = l_k \vartheta_k$, unter ϑ_k den EJ_cfachen Betrag des Stabdrehwinkels verstanden (Abb. 344). Die Anschlußmomente für $\vartheta_k = 1$ und $\mathfrak{P}_k = 0$ werden mit $M_{J\vartheta,k}^{(k)}$, $M_{K\vartheta,k}^{(k)}$ bezeichnet. Sie ergeben sich aus einem Ansatz für die Kontinuität der Verbindung zwischen Stab und Stabknoten.

$$\vartheta_k + M_{J\vartheta,k}^{(k)} (\alpha_{JJ}^{(k)} - \bar{\varphi}_J) + M_{K\vartheta,k}^{(k)} \alpha_{JK}^{(k)} = 0,$$
$$\vartheta_k + M_{K\vartheta,k}^{(k)} (\alpha_{KK}^{(k)} - \bar{\varphi}_K) + M_{J\vartheta,k}^{(k)} \alpha_{KJ}^{(k)} = 0.$$

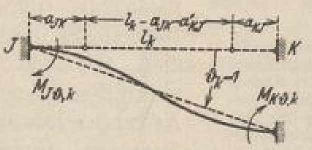


Abb. 344.

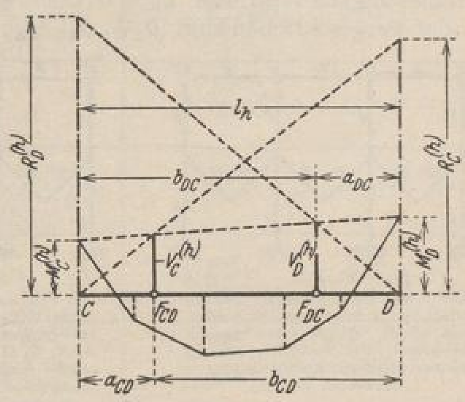


Abb. 345.

$$\left.\begin{aligned} M_{J\vartheta,k}^{(k)} &= \frac{\vartheta_k}{\alpha_{JK}^{(k)}} \frac{\varkappa_{JK}(1+\varkappa_{KJ})}{1-\varkappa_{JK}\varkappa_{KJ}} = \frac{\vartheta_k}{\alpha_{JK}^{(k)}} \frac{a_{JK}}{l_k - a_{JK} - a_{KJ}}, \\ M_{K\vartheta,k}^{(k)} &= \frac{\vartheta_k}{\alpha_{JK}^{(k)}} \frac{\varkappa_{KJ}(1+\varkappa_{JK})}{1-\varkappa_{JK}\varkappa_{KJ}} = \frac{\vartheta_k}{\alpha_{JK}^{(k)}} \frac{a_{KJ}}{l_k - a_{JK} - a_{KJ}}. \end{aligned}\right\} \tag{623}$$

Bei konstantem Trägheitsmoment im Bereiche des Stabes (k) ist für $\vartheta_k = 1$

$$M_{J\vartheta,k}^{(k)} = -\frac{6}{l_k'} \frac{a_{JK}}{l_k - a_{JK} - a_{KJ}}, \qquad M_{K\vartheta,k}^{(k)} = -\frac{6}{l_k'} \frac{a_{KJ}}{l_k - a_{JK} - a_{KJ}}. \tag{624}$$

d) Die Anschlußmomente $M_{C0}^{(h)}$, $M_{D0}^{(h)}$ des beiderseits elastisch eingespannten Stabes $l_h = \overline{CD}$ aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ werden ebenfalls aus den Kontinuitätsbedingungen an den Stabknoten bestimmt (Abb. 345).

$$M_{C0}^{(h)}(\alpha_{CC}^{(h)} - \overline{\varphi}_C) + M_{D0}^{(h)}\alpha_{CD}^{(h)} + \alpha_{C0}^{(h)} = 0,$$
$$M_{C0}^{(h)}\alpha_{DC}^{(h)} + M_{D0}^{(h)}(\alpha_{DD}^{(h)} - \overline{\varphi}_D) + \alpha_{D0}^{(h)} = 0.$$

Mit den Kennbeziehungen $\varkappa_{CD}$ und $\varkappa_{DC}$ ist dann nach (617), (618)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\varkappa_{CD}} M_{C0}^{(h)} + M_{D0}^{(h)} &= -\frac{\alpha_{C0}^{(h)}}{\alpha_{CD}^{(h)}} = +R_C^{(h)}, \\ M_{C0}^{(h)} - \frac{1}{\varkappa_{DC}} M_{D0}^{(h)} &= -\frac{\alpha_{D0}^{(h)}}{\alpha_{DC}^{(h)}} = +R_D^{(h)}. \end{aligned}\right\} \tag{625}$$

$R_C^{(h)}$, $R_D^{(h)}$ werden in ihrer Bedeutung als Momente ebenfalls im Uhrzeiger positiv gerechnet. Sie sind aus der Belastung des Stabes bekannt und dienen bei der zeichnerischen Bestimmung der Anschlußmomente $M_{C0}^{(h)}$, $M_{D0}^{(h)}$ nach Abb. 345 als Kreuzlinienabschnitte. Die Festpunkte F_{CD}, F_{DC} sind bereits vorher mit a_{CD} und a_{DC} eingerechnet worden. Die Konstruktion ist nach Abb. 345 ohne besondere Erklärung verständlich. Sie wird durch die Verwendung der Momente

$$V_{C0}^{(h)} = \frac{a_{CD}}{l_h} R_{C0}^{(h)} = \nu_{CD} R_{C0}^{(h)}, \qquad V_{D0}^{(h)} = \frac{a_{DC}}{l_h} R_{D0}^{(h)} = \nu_{DC}^{(h)} R_{D0}^{(h)} \tag{626}$$

noch übersichtlicher. Die algebraische Auflösung der beiden Gl. (625) liefert

$$M_{C0}^{(h)} = -\frac{R_C^{(h)}}{\dfrac{1}{\varkappa_{CD}} - \varkappa_{DC}} - \frac{R_D^{(h)}}{\dfrac{1}{\varkappa_{CD}}\dfrac{1}{\varkappa_{DC}} - 1}, \qquad M_{D0}^{(h)} = -\frac{R_D^{(h)}}{\dfrac{1}{\varkappa_{DC}} - \varkappa_{CD}} - \frac{R_C^{(h)}}{\dfrac{1}{\varkappa_{CD}}\dfrac{1}{\varkappa_{DC}} - 1}. \tag{627}$$

Die Belastungsglieder $R_C^{(h)}$, $R_D^{(h)}$ können unter Beachtung der Vorzeichenregel dieses Abschnitts aus den Tabellen 12ff. angegeben werden. Sie sind für die wichtigsten Belastungsannahmen $\mathfrak{P}_h$ und Stäbe (h) mit gleichbleibendem Querschnitt, also mit $\alpha_{CD}^{(h)} = -l_h'/6$ in Tabelle 27 zur unmittelbaren Verwendung vorbereitet.

Die Verwendung der Ansätze. Die Ansätze unter a bis d gelten für einen Verschiebungszustand mit $\psi_c = 0$ oder $\psi_c = 1$, dessen Stabdrehwinkel damit Null oder vorgeschrieben sind ($\vartheta_h = \vartheta_{h0}, \vartheta_{ht}, \vartheta_{hs}, \vartheta_{hc}$). Das Kräftebild wird für die Belastung eines einzelnen Stabes entwickelt, dessen Anschlußmomente bei bekannter elastischer Einspannung angeschrieben werden können. Die Anschlußmomente der benachbarten Stäbe ergeben sich aus den Kennbeziehungen μ_{hk}, $\varkappa_{JK}$ des Ansatzes. Die eindeutige Existenz dieser elastischen Konstanten des Tragwerks wird dabei vorausgesetzt. Sie ist jedoch nur vorhanden, wenn die Knotendrehwinkel in einen dreigliedrigen Ansatz eingehen, so daß Kennbeziehungen $\overline{\varkappa}_{JK}$, $\overline{\varkappa}_{KJ}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotendrehwinkeln φ_J, φ_K entstehen, welche von der Lage des belasteten Stabes unabhängig sind. In den anderen Fällen sind die Ansätze für die Klärung des theoretischen Zusammenhanges ohne Bedeutung. Sie können daher zur Berechnung von durchgehenden Trägern mit beliebiger Abstützung nach S. 378 verwendet werden, sie sind dagegen zur theoretisch einwandfreien Untersuchung von steifen Vierecksnetzen (Abb. 346b) unbrauchbar. In diesem Falle entstehen zwar bei der Belastung eines Stabes ebenfalls nur zwei Belastungsglieder, in jeder Gleichung sind aber vier oder fünf Knotendrehwinkel miteinander verknüpft, so daß bei der Auflösung nach (423) dreigliedrige Kennbeziehungen entstehen.

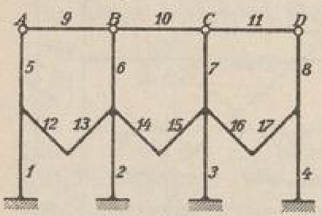


Abb. 346a.
Die Knotendrehwinkel der geometrisch bestimmten Stabkette werden aus einem dreigliedrigen Ansatz berechnet. Die Anschlußmomente können daher mit Kennbeziehungen berechnet werden.

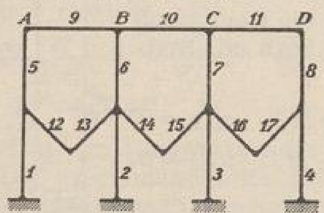
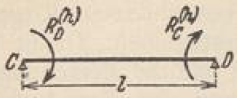


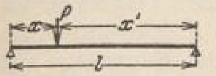
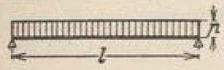
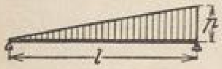
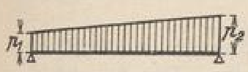
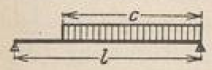
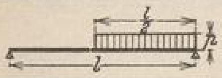
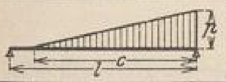
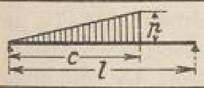
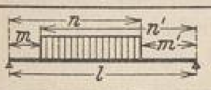
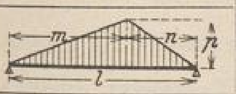
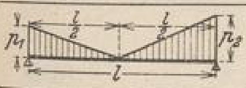
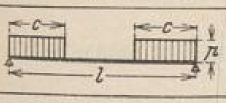
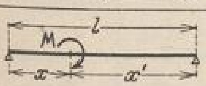
Abb. 346b.
Die Elimination der Knotendrehwinkel führt zu dreigliedrigen Kennbeziehungen, so daß in den Knoten A, B, C, D statische oder geometrische Randbedingungen für den Anschluß der Pfosten 5 bis 8 vorgeschrieben werden müssen.

Tabelle 27. Kreuzlinienabschnitte.



$x/l = \xi \qquad x'/l = \xi' \qquad c/l = \gamma$

$m/l = \mu \qquad m'/l = \mu' \qquad n/l = \nu \qquad n'/l = \nu$

Belastung	$R_D^{(h)} = -\alpha_{D0}^{(h)}/\alpha_{CD}$	$R_C^{(h)} = -\alpha_{C0}^{(h)}/\alpha_{CD}$
	$-P\,l\,\omega_D$	$+P\,l\,\omega'_D$
	$-\frac{p\,l^2}{4}$	$+\frac{p\,l^2}{4}$
	$-\frac{2}{15}p_0\,l^2$	$+\frac{7}{60}p_0\,l^2$
	$-\frac{l^2}{60}(7\,p_1 + 8\,p_2)$	$+\frac{l^2}{60}(8\,p_1 + 7\,p_2)$
	$-\frac{p\,l^2}{4}\gamma^2(2-\gamma)^2$	$+\frac{p\,l^2}{4}\gamma^2(2-\gamma^2)$
	$-\frac{9}{64}p\,l^2$	$+\frac{7}{64}p\,l^2$
	$-\frac{p\,l^2}{60}\gamma^2(20-15\,\gamma+3\,\gamma^2)$	$+\frac{p\,l^2}{60}\gamma^2(10-3\,\gamma^2)$
	$-\frac{p\,l^2}{15}\gamma^2(5-3\,\gamma)$	$+\frac{p\,l^2}{60}\gamma^2(40-45\,\gamma+12\,\gamma^2)$
	$-\frac{p\,l^2}{4}[2(\nu^2-\mu^2)-(\nu^4-\mu^4)]$	$+\frac{p\,l^2}{4}[2(\nu'^2-\mu'^2)-(\nu'^4-\mu'^4)]$
	$-\frac{p\,l^2}{60}(1+\mu)(7-3\,\mu^2)$	$+\frac{p\,l^2}{60}(1+\nu)(7-3\,\nu^2)$
	$-\frac{l^2}{960}(37\,p_1+53\,p_2)$	$+\frac{l^2}{960}(53\,p_1+37\,p_2)$
	$-\frac{p\,l^2}{2}\gamma^2(3-2\,\gamma)$	$+\frac{p\,l^2}{2}\gamma^2(3-2\,\gamma)$
	$-\frac{p\,l^2}{5}$	$+\frac{p\,l^2}{5}$
	$-(1-3\,\xi^2)\,\mathsf{M} = +\mathsf{M}\,\omega_M$	$-(1-3\,\xi'^2)\,\mathsf{M} = +\mathsf{M}\,\omega'_M$
Ungleichförmige Temperaturänderung um $t_u - t_o = \Delta t$	$-3\,E\,J\,\frac{\alpha\,\Delta t}{h}$	$+3\,E\,J\,\frac{\alpha\,\Delta t}{h}$

Um die Rechenvorschrift daher für Stockwerkrahmen zu verwenden, wird der Anschluß der Pfosten des belasteten Trägers an den benachbarten Riegelstäben durch statische oder kinematische Bedingungen vorgeschrieben. Damit ist der elastische Zusammenhang gelöst und die Untersuchung auf die Berechnung eines durchgehenden Trägers zurückgeführt. Die Einrechnung der Kennbeziehungen $\mu_{hk}, \varkappa_{JK}$ für größere Abschnitte des Tragwerks mit Annahmen über die Lage einzelner Festpunkte und anschließender Auflösung der Ansätze (S. 375) durch Iteration führt nur zur Verbesserung der Randbedingungen des durchgehenden Trägers an den Pfostenenden. Diese Abschätzung des Spannungszustandes der Stockwerkrahmen wird infolge ihrer Übersichtlichkeit bei praktischen Aufgaben des Bauwesens viel verwendet. Sie führt bei der üblichen Belastung der Träger zu brauchbaren Ergebnissen, die zwar weder die Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte am Knoten noch die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, aber zur Querschnittsbemessung ausreichen.

Die Anwendung der Rechenvorschrift gewinnt mit der geometrischen Darstellung der Kennbeziehungen $\varkappa_{JK}, \mu_{hk}$ durch Festpunkte und Übergangslinien an Übersichtlichkeit. Diese werden nach (616), (619) berechnet und in das Stabnetz eingetragen.

Die Eigenart der Lösung besteht in der weitgehenden Zerlegung der äußeren Ursachen in die jedem Stabe zufallenden Anteile $\mathfrak{P}_h, \vartheta_{ht}, \vartheta_{hs}, \vartheta_{hc}$. Die Anschlußkräfte $\overline{M}^{(h)}_{C0,h}, \overline{M}^{(h)}_{D0,h}$ aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ des Stabes (h) werden nach (627) bestimmt, die übrigen Anschlußkräfte ergeben sich daraus durch Rechnung oder Zeichnung mit Kennbeziehungen. Das endgültige Ergebnis wird durch die Superposition zugeordneter Anteile gefunden

$$\overline{M}^{(k)}_{J0} = \sum \overline{M}^{(k)}_{J0,h} \qquad (h = 1 \ldots s)\,. \tag{628}$$

Damit sind dann auch die anderen Schnittkräfte bekannt.

Die Anschlußmomente $\overline{M}^{(h)}_{C\vartheta,h}, \overline{M}^{(h)}_{D\vartheta,h}$ des Stabes h aus $\vartheta_h = 1$ werden nach (624) angegeben. Ihnen sind durch die Kennbeziehungen Anschlußmomente $\overline{M}^{(k)}_{J\vartheta,h}$ an allen übrigen Knoten zugeordnet. Diese Rechnung ist nur als algebraische Grundlage der Superposition zu verstehen, sie wird für jeden Stab wiederholt. Da nun einer vorgeschriebenen Stützen- oder Temperaturbewegung Stabdrehwinkel $\vartheta_{hs}, \vartheta_{ht}$ und dem Belastungsfall $\psi_c = 1$ Stabdrehwinkel ϑ_{hc} zugeordnet sind, kann nach dem Superpositionsgesetz

$$\overline{M}^{(k)}_{Jt} = \sum \overline{M}^{(k)}_{J\vartheta,h} \vartheta_{ht}\,, \qquad \overline{M}^{(k)}_{Jc} = \sum \overline{M}^{(k)}_{J\vartheta,h} \vartheta_{hc} \tag{629}$$

angeschrieben werden. Die Schnittkräfte des vorgegebenen Tragwerks erhalten schließlich folgende Form:

$$M^{(k)}_J = \overline{M}^{(k)}_{J0} + \overline{M}^{(k)}_{Jt} + \sum \overline{M}^{(k)}_{Jc} \psi_c\,. \tag{630}$$

Kennbeziehungen eines durchgehenden Trägers nach (616) und (619).

$$\sum_{h=1}^{h=m} \varrho^{(k)}_J = \Phi^{(k)}_J\,.$$

1. Randbedingungen: $\nu_{KE} = \nu_{QE} = \frac{1}{3}, \qquad \nu_{AG} = \nu_{BG} = 0$ usw.

$$\varrho^{(1)}_C = \varrho^{(16)}_G = 3/l\,, \qquad \varrho^{(9)}_E = 4 : h'_u = 13{,}92/l\,, \qquad \varrho^{(8)}_E = 4/h'_0 = 8{,}7/l \quad \text{usw.}$$

2. Stab CD. $\Phi^{(4)}_C = \frac{3{,}0 + 8{,}7 + 13{,}92}{l} = \frac{25{,}62}{l}, \qquad \nu_{CD} = 1 : \left(3 + \frac{6}{25{,}62}\right) = 0{,}309 = \nu_{GF}\,.$

$$\varrho^{(4)}_D = \frac{2}{l}\,\frac{1 - 0{,}309}{0{,}667 - 0{,}309} = \frac{3{,}86}{l} = \varrho^{(13)}_F$$

3. Stab DE. $\Phi_D^{(7)} = \frac{3{,}86 + 8{,}7 + 13{,}92}{l} = \frac{26{,}48}{l}$, $\quad \nu_{DE} = 1 : \left(3 + \frac{6}{26{,}48}\right) = 0{,}310 = \nu_{FE}$.

$$\varrho_E^{(7)} = \frac{2}{l}\,\frac{0{,}690}{0{,}357} = \frac{3{,}86}{l} = \varrho_E^{(10)}.$$

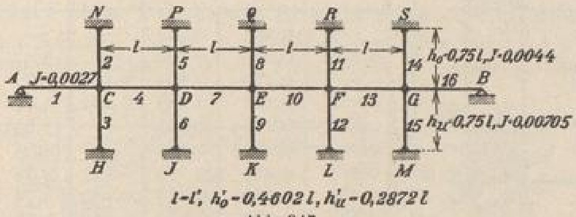


Abb. 347.

Für die übrigen Stäbe des Riegels bleiben die Kennbeziehungen $\nu = 0{,}310$ und $\varrho = 3{,}86 : l$ erhalten.

4. Stab CN. $\Phi_C^{(2)} = \frac{3{,}0 + 13{,}92 + 3{,}86}{l} = \frac{20{,}78}{l}$, $\quad \nu_{CN} = 1 : \left(3 + \frac{6}{0{,}46 \cdot 20{,}78}\right) = 0{,}267 = \nu_{GS}$.

5. Stab DP. $\Phi_D^{(5)} = \frac{3{,}86 + 13{,}92 + 3{,}86}{l} = \frac{21{,}64}{l}$, $\quad \nu_{DP} = 1 : \left(3 + \frac{6}{0{,}46 \cdot 21{,}64}\right) = 0{,}278 = \nu_{FR}$.

6. Stab CH. $\Phi_C^{(3)} = \frac{3{,}0 + 8{,}7 + 3{,}86}{l} = \frac{15{,}56}{l}$, $\quad \nu_{CH} = 1 : \left(3 + \frac{6}{0{,}287 \cdot 15{,}56}\right) = 0{,}230 = \nu_{GM}$.

7. Stab DJ. $\Phi_D^{(6)} = \frac{3{,}86 + 8{,}7 + 3{,}86}{l} = \frac{16{,}42}{l}$, $\quad \nu_{DJ} = 1 : \left(3 + \frac{6}{0{,}287 \cdot 16{,}42}\right) = 0{,}234 = \nu_{FL}$.

Diese Zahlen gelten auch für die übrigen Pfosten. Die Übergangszahlen werden nach (616) bestimmt.

Übersicht für den Punkt C.

k	1			2			3			4		
h	2	3	4	3	4	1	4	1	2	1	2	3
μ	0,328	0,526	0,145	0,670	0,186	0,144	0,248	0,193	0,559	0,117	0,339	0,544

Übersicht der Ergebnisse.

Knoten	ν				ϱl			
	links	rechts	oben	unten	links	rechts	oben	unten
C	0,310	0,309	0,276	0,230	3,00	3,86	8,70	13,92
D	0,310	0,310	0,278	0,234	3,86	3,86	8,70	13,92
E	0,310	0,310	0,278	0,234	3,86	3,86	8,70	13,92

Tabelle 28a. Angenäherte Kennbeziehungen in quadratischen Vierecksnetzen mit Stäben von gleich großem Trägheitsmoment.

Eckfeld und Mittelfeld (Abb. 348).

Knoten	ν			ϱl		
	links	rechts	oben	links	rechts	oben
A	—	0,211	0,215	—	3,47	3,47
B	0,261	0,260	0,260	3,64	3,64	3,64
C	0,260	0,260	0,260	3,64	3,64	3,64
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
J	0,261	0,261	0,261	3,64	3,64	3,64

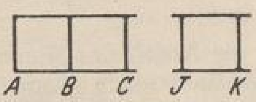


Abb. 348.

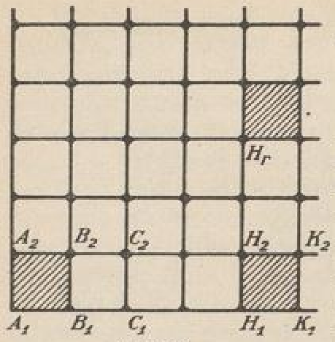


Abb. 349.

Tab. 28a (Forts.). Eck-, Außen- und Mittelfeld (Abb. 349).

Knoten	ν				$\varrho\, l$			
	links	rechts	oben	unten	links	rechts	oben	unten
A_1	—	0,215	0,215	—	—	3,65	3,65	—
B_1	0,262	0,260	0,260	—	3,47	3,65	3,735	—
A_2	—	0,260	0,261	0,262	—	3,735	3,65	3,47
B_2	0,282	0,283	0,283	0,282	3,64	3,65	3,64	3,74
H_1	0,2625	0,2625	0,262	—	3,65	3,65	3,74	—
K_1	0,2625	0,2625	0,262	—	3,65	3,65	3,74	—
H_2	0,283	0,283	0,283	0,283	3,74	3,74	3,74	3,65
K_2	0,283	0,283	0,283	0,283	3,74	3,74	3,74	3,65
H_r	0,283	0,283	0,283	0,283	3,74	3,74	3,74	3,74

Für Vierecksnetze von doppelter Mannigfaltigkeit mit ungleichen Seiten (Seitenverhältnis $n = h:l$) und gleich großem Trägheitsmoment sind die Kennbeziehungen ν und ϱ von A. Ritter angegeben worden.

Tabelle 28b.

Kennbeziehungen an einem mittleren Knoten nach A. Ritter.

$h:l$	$a:l=\nu$ links und rechts	$a:l=\nu$ oben und unten	$\varrho\, l$ links und rechts	$\varrho\, h$ oben und unten
1	0,2829	0,2829	3,737	3,737
0,909	0,2855	0,2802	3,749	3,725
0,80	0,2890	0,2765	3,765	3,709
0,70	0,2925	0,2727	3,782	3,692
0,60	0,2964	0,2682	3,800	3,673
0,50	0,3007	0,2630	3,822	3,651
0,10	0,3246	0,2277	3,950	3,521
0,00	0,3333	0,2113	4,000	3,464

Die Zahlen erleichtern die Abschätzung der Schnittkräfte steifer Vierecksnetze nach S. 378.

Die Komponenten ψ_c des Verschiebungszustandes. Die unabhängigen Komponenten ψ_c $(c = 1 \ldots f)$ der Knotenkette werden nach Abschnitt 38 ausgewählt und mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen aus dem Gleichgewicht der Anschlußmomente $M_J^{(h)}$ berechnet. Hierzu dienen f voneinander unabhängige zwangläufige Gebilde Γ_b. Wird das Moment der Belastung $\mathfrak{P}_h$ in bezug auf das Momentanzentrum O_{hb} des Stabes (h) der Kette Γ_b nach S. 317 mit $\mathsf{M}_{h,b}$ und $(M_J^{(h)} + M_K^{(h)})$ mit $M^{(h)}$ bezeichnet, so entstehen die folgenden statischen Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \delta A_b = 0 = \sum (\mathsf{M}_{h,b} + M^{(h)})\,\nu_{hb} = \sum (\mathsf{M}_{h,b} + \overline{M}_0^{(h)} + \sum \psi_c \overline{M}_c^{(h)})\,\nu_{hb}\,, \\ \sum_1^f \psi_c \sum \overline{M}_c^{(h)}\,\nu_{hb} + \sum (\mathsf{M}_{h,b} + \overline{M}_0^{(h)})\,\nu_{hb} = 0\,. \qquad (b = 1 \ldots f)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (631)$$

Die unbekannten Komponenten ψ_c werden daher aus f Gleichungen eindeutig bestimmt. Jeder der Summanden ist der Ausdruck für eine virtuelle Arbeit, so daß folgender Ansatz angeschrieben werden kann:

$$\delta A_b = 0 = \sum_1^f \psi_c\, a_{bc} + a_{b0} \qquad (b = 1 \ldots f). \qquad (632)$$

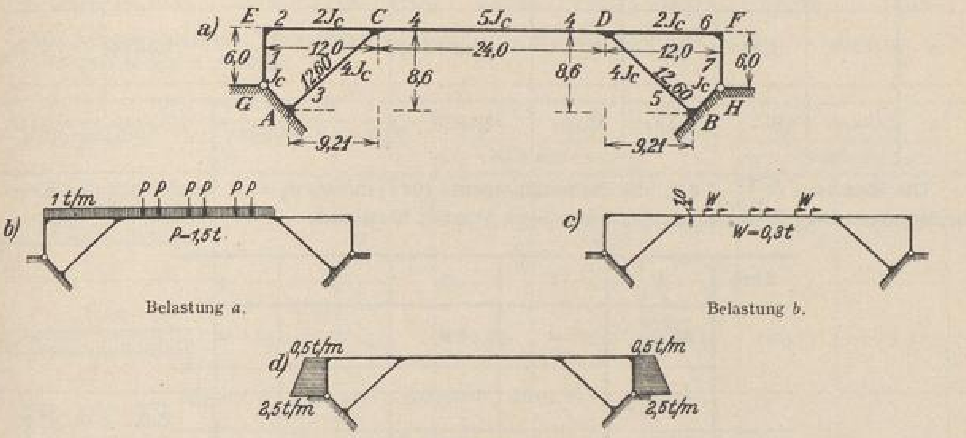
a_{bc} ist die Arbeit der Momente $\overline{M}_c^{(h)}$ bei der virtuellen Bewegung Γ_b und $\overline{M}_c^{(h)}$ das Moment eines $r$fach geometrisch unbestimmten Systems infolge von $\psi_c = 1$. Die Arbeit a_{b0} wird bei der virtuellen Bewegung Γ_b von den Momenten $\mathsf{M}_{h,b}$ und von den Anschlußmomenten $\overline{M}_0^{(h)}$ geleistet, welche in dem $r$fach geometrisch unbestimmten System aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ und Temperaturänderung t, Δt entstehen.

Die Wurzeln ψ_c $(c = 1 \ldots f)$ werden durch den Gaußschen Algorithmus oder durch Iteration bestimmt. Bei mehreren Belastungsfällen wird die reziproke Matrix β_{bc} zu den Vorzahlen a_{bc} angegeben und ψ_c nach (633) berechnet

$$-\psi_c = \sum \beta_{cb}\, a_{b0}. \qquad (633)$$

Rahmenträger einer Brücke als Beispiel eines offenen Stabzugs.

Die Berechnung der Schnittkräfte ist für drei Belastungsfälle nach Abb. 350 und für eine gleichförmige Erwärmung der Riegelstäbe und Schrägstützen durchgeführt worden.



Belastung a. Belastung b.

Belastung c.

Abb. 350.

1. Kennbeziehungen und Festpunkte. Anwendung der Beziehungen (619) und (622). Randbedingungen: $a_1 = a_7' = 0$, $a_3 = a_5' = 12{,}6/3 = 4{,}2$ m.

Festpunkte und Anschlußzahlen:

$$\varrho_E^{(1)} = \varrho_F^{(7)} = \frac{3}{l_1'} = 0{,}5, \qquad \varrho_C^{(3)} = \varrho_D^{(5)} = \frac{4}{l_3'} = 1{,}27\,,$$

$$\nu_{EC} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l_2'\,\varrho_E^{(1)}}\right) = 0{,}2\,, \qquad a_{EC} = a_2 = 2{,}4\,, \qquad \varrho_C^{(2)} = \frac{2}{l_2'}\,\frac{1-\nu_{EC}}{\frac{2}{3}-\nu_{EC}} = 0{,}5714.$$

$$\nu_{CD} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l_4'\,(\varrho_C^{(2)} + \varrho_C^{(3)})}\right) = 0{,}272\,, \quad a_{CD} = a_4 = 6{,}524\,, \quad \varrho_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,\frac{1-\nu_{CD}}{\frac{2}{3}-\nu_{CD}} = 0{,}7684.$$

$$\nu_{DF} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l_6'\,(\varrho_D^{(4)} + \varrho_D^{(5)})}\right) = 0{,}286\,, \quad a_{DF} = a_6 = 3{,}438\,, \quad \varrho_D^{(6)} = \varrho_C^{(2)} = 0{,}5714\,,$$

$$\nu_{DB} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l_5'\,(\varrho_D^{(4)} + \varrho_D^{(6)})}\right) = 0{,}226\,, \quad a_{DB} = a_5 = 2{,}850\,, \quad \varrho_F^{(6)} = \varrho_E^{(2)} = \frac{2}{l_6'}\,\frac{1-\nu_{DF}}{\frac{2}{3}-\nu_{DF}} = 0{,}6256,$$

$$\nu_{FH} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l_7'\,\varrho_F^{(6)}}\right) = 0{,}2175\,, \qquad a_{FH} = a_7 = 1{,}305\,.$$

Kennbeziehungen und Übergangszahlen:

$$\varkappa_{CE} = \varkappa_{DF} = \frac{a_6}{l_6 - a_6} = 0{,}4015\,, \qquad \varkappa_{DC} = \varkappa_{CD} = \frac{a_4}{l_4 - a_4} = 0{,}3733\,,$$

$$\varkappa_{FD} = \varkappa_{EC} = \frac{a_2}{l_2 - a_2} = 0{,}25\,, \qquad \varkappa_{AC} = \varkappa_{BD} = \frac{a_3}{l_3 - a_3} = 0{,}5\,,$$

$$\mu_{42} = \mu_{46} = -\frac{\varrho_C^{(4)}}{\varrho_C^{(3)} + \varrho_C^{(4)}} = -0{,}3770\,, \qquad \mu_{32} = \mu_{56} = -\frac{\varrho_C^{(3)}}{\varrho_C^{(3)} + \varrho_C^{(4)}} = -0{,}6230\,,$$

$$\mu_{54} = \mu_{34} = -\frac{\varrho_D^{(5)}}{\varrho_D^{(5)} + \varrho_D^{(6)}} = -0{,}6897\,, \qquad \mu_{64} = \mu_{24} = -\frac{\varrho_D^{(6)}}{\varrho_D^{(5)} + \varrho_D^{(6)}} = -0{,}3103\,,$$

$$\mu_{23} = \mu_{65} = -\frac{\varrho_C^{(2)}}{\varrho_C^{(2)} + \varrho_C^{(4)}} = -0{,}4265\,, \qquad \mu_{43} = \mu_{45} = -\frac{\varrho_C^{(4)}}{\varrho_C^{(2)} + \varrho_C^{(4)}} = -0{,}5735$$

2. Stabendmomente für $l_h = C\,D$ bei einer Drehung $\vartheta_h = 1$ nach (624).

Stab	l_h	l'_h	a_h	a'_h	$l_h - a_h - a'_h$	$\overline{M}^{(h)}_{C\vartheta,h}$	$\overline{M}^{(h)}_{D\vartheta,h}$
1	6,0	6,0	0	1,305	4,695	0	$-0{,}2780$
2	12,0	6,0	2,4	3,438	6,162	$-\frac{6}{6{,}0}\,\frac{2{,}4}{6{,}162} = -0{,}3895$	$-0{,}5579$
3	12,6	3,15	4,2	2,850	5,550	$-\frac{6}{3{,}15}\,\frac{4{,}2}{5{,}550} = -1{,}4414$	$-0{,}9781$
4	24,0	4,8	6,524	6,524	10,952	$-\frac{6}{4{,}8}\,\frac{6{,}524}{10{,}952} = -0{,}7446$	$-0{,}7446$

Die Momente $\overline{M}^{(k)}_{J\vartheta,h}$, d. h. die Stabendmomente für l_k infolge $\vartheta_h = 1$, werden mit den Kennbeziehungen und Übergangszahlen aus obigen Werten bestimmt.

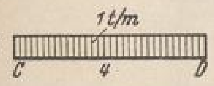
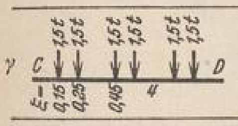
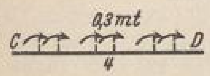
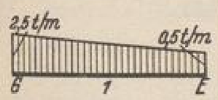
Stab	h	1	2	3	4
1	$\overline{M}^{(1)}_{G\vartheta,h}$	0	0	0	0
	$\overline{M}^{(1)}_{E\vartheta,h}$	$-0{,}2780$	$+0{,}3895$	$-0{,}1043$	$-0{,}0578$
2	$\overline{M}^{(2)}_{E\vartheta,h}$	$+0{,}2780$	$-0{,}3895$	$+0{,}1043$	$+0{,}0578$
	$\overline{M}^{(2)}_{C\vartheta,h}$	$+0{,}1116$	$-0{,}5579$	$+0{,}4172$	$+0{,}2310$
3	$\overline{M}^{(3)}_{A\vartheta,h}$	$-0{,}0348$	$+0{,}1738$	$-1{,}4414$	$+0{,}2568$
	$\overline{M}^{(3)}_{C\vartheta,h}$	$-0{,}0695$	$+0{,}3476$	$-0{,}9781$	$+0{,}5136$
4	$\overline{M}^{(4)}_{C\vartheta,h}$	$-0{,}0421$	$+0{,}2103$	$+0{,}5609$	$-0{,}7446$
	$\overline{M}^{(4)}_{D\vartheta,h}$	$-0{,}0157$	$+0{,}0785$	$+0{,}2094$	$-0{,}7446$
5	$\overline{M}^{(5)}_{D\vartheta,h}$	$+0{,}0108$	$-0{,}0541$	$-0{,}1444$	$+0{,}5136$
	$\overline{M}^{(5)}_{B\vartheta,h}$	$+0{,}0054$	$-0{,}0270$	$-0{,}0722$	$+0{,}2568$
6	$\overline{M}^{(6)}_{D\vartheta,h}$	$+0{,}0049$	$-0{,}0244$	$-0{,}0650$	$+0{,}2310$
	$\overline{M}^{(6)}_{F\vartheta,h}$	$+0{,}0012$	$-0{,}0061$	$-0{,}0162$	$+0{,}0578$
7	$\overline{M}^{(7)}_{F\vartheta,h}$	$-0{,}0012$	$+0{,}0061$	$+0{,}0162$	$-0{,}0578$
	$\overline{M}^{(7)}_{H\vartheta,h}$	0	0	0	0

In diesen Tabellen sind die Endmomente aller Stäbe aus der Verdrehung $\vartheta_h = 1$ des einzelnen **Stabes** h **enthalten** (vgl. S. 378). Sie bilden die Grundlage zur Bestimmung von $\overline{M}^{(h)}_{Jl}$ und $\overline{M}^{(h)}_{J1}$ nach (629).

3. Stabendmomente des belasteten Stabes $l_h = C\,D$ nach (627). $1/\varkappa = \lambda$.

Stab	l_h	a_h	$\varkappa_{CD} = \frac{a_h}{l_h - a_h}$	λ_{CD}	a'_h	$\varkappa_{DC} = \frac{a'_h}{l_h - a'_h}$	λ_{DC}	$\lambda_{CD}\lambda_{DC} - 1$	$\lambda_{CD} - \varkappa_{DC}$	$\lambda_{DC} - \varkappa_{CD}$
1	6,00	0	0	∞	1,305	0,2780	3,597	∞	∞	3,597
2	12,00	2,40	0,25	4	3,438	0,4015	2,491	8,964	3,598	2,241
3	12,60	4,20	0,50	2	2,850	0,2923	3,421	5,842	1,708	2,921
4	24,00	6,524	0,3733	2,679	6,524	0,3733	2,679	6,177	2,306	2,306

Die vorgeschriebenen Belastungsfälle werden in die den einzelnen Stäben zufallenden Teilbelastungen α bis ε zerlegt.

Teilbelastung	$R_D^{(h)}$	$R_C^{(h)}$	$\frac{R_C^{(h)}}{\lambda_{CD} - \varkappa_{DC}}$	$\frac{R_D^{(h)}}{\lambda_{CD}\lambda_{DC} - 1}$	$\overline{M}_{C0}^{(h)}$	$\frac{R_D^{(h)}}{\lambda_{DC} - \varkappa_{CD}}$	$\frac{R_C^{(h)}}{\lambda_{CD}\lambda_{DC} - 1}$	$\overline{M}_{D0}^{(h)}$
α 	-36	36	10,00	$-4{,}016$	$-5{,}98$	$-16{,}06$	$+4{,}016$	$+12{,}05$
β 	-144	144	62,45	$-23{,}31$	$-39{,}14$	$-62{,}45$	$+23{,}31$	$+39{,}14$
γ 	$-60{,}86$	60,86	26,39	$-9{,}853$	$-16{,}54$	$-26{,}39$	$+9{,}853$	$+16{,}54$
δ 	$-0{,}1125$	$-0{,}1125$	$-0{,}049$	$-0{,}018$	$+0{,}067$	$-0{,}049$	$-0{,}018$	$+0{,}067$
ε 	$-12{,}900$	—	—	0	0	$-3{,}586$	—	$+3{,}586$

Die übrigen Stabendmomente einer Teilbelastung werden mit den Kennbeziehungen oder graphisch mit den Festpunkten berechnet. Die Belastung des Stabes l_4 liefert im. Falle β und γ symmetrische, im Falle δ antimetrische Ergebnisse.

Die Momente aus der Belastung a (Abb. 350b) werden durch Superposition der Ergebnisse α, β, γ erhalten. Der Belastungsfall b (Abb. 350c) ist mit der Teilbelastung δ identisch. Der Belastungsfall c (Abb. 350d) ist symmetrisch. Die Schnittkräfte entstehen durch Superposition der Ergebnisse ε mit denjenigen aus der spiegelbildlich gleichartigen Belastung des Stabes FH.

Belastung	$\overline{M}_{E0}^{(2)}$	$\overline{M}_{C0}^{(2)}$	$\overline{M}_{C0}^{(3)}$	$\overline{M}_{C0}^{(4)}$	$\overline{M}_{D0}^{(4)}$	$\overline{M}_{D0}^{(5)}$	$\overline{M}_{D0}^{(6)}$	$\overline{M}_{F0}^{(6)}$
α	$-5{,}98$	$+12{,}05$	$-7{,}51$	$-4{,}54$	$-1{,}70$	$+1{,}17$	$+0{,}53$	$+0{,}13$
β	$+3{,}04$	$+12{,}15$	$+26{,}99$	$-39{,}14$	$+39{,}14$	$-26{,}99$	$-12{,}15$	$-3{,}04$
γ	$+1{,}28$	$+5{,}13$	$+11{,}41$	$-16{,}54$	$+16{,}54$	$-11{,}41$	$-5{,}13$	$-1{,}28$
δ	$-0{,}005$	$-0{,}021$	$-0{,}046$	$+0{,}067$	$+0{,}067$	$-0{,}046$	$-0{,}021$	$-0{,}005$
ε	$-3{,}59$	$-1{,}44$	$+0{,}90$	$+0{,}54$	$+0{,}20$	$-0{,}14$	$-0{,}06$	$-0{,}02$
a	$-1{,}66$	$+29{,}33$	$+30{,}89$	$-60{,}22$	$+53{,}98$	$-37{,}23$	$-16{,}75$	$-4{,}19$
b	$-0{,}005$	$-0{,}021$	$-0{,}046$	$+0{,}067$	$+0{,}067$	$-0{,}046$	$-0{,}021$	$-0{,}005$
c	$-3{,}57$	$-1{,}38$	$+1{,}04$	$+0{,}34$	$-0{,}34$	$-1{,}04$	$-1{,}38$	$-3{,}57$

Die Stabendmomente aus den Belastungen a, b, c gelten für das unverschiebliche Knotennetz und sind daher nur für den symmetrischen Belastungsfall c endgültig (Abb. 351).

4. Temperaturmomente. Die Temperaturänderung des Tragwerks ist symmetrisch, der Symmetriepunkt des Riegels l_4 erleidet daher keine waagerechte Verschiebung. Unter der An-

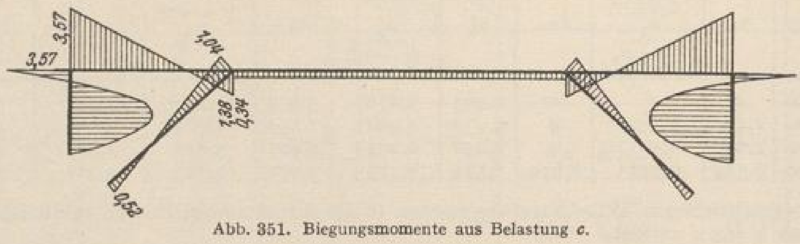


Abb. 351. Biegungsmomente aus Belastung *c*.

nahme, daß die Riegelstäbe ihre Temperatur um $+20^0$, die Schrägstützen l_3 und l_5 um $+10^0$ und die Endstützen um 0^0 ändern, sind die Längenänderungen $\alpha_t\, t l$ der Stäbe l_h für

$$h = 1 \text{ u. } 7 \quad 2 \text{ u. } 6 \quad 3 \text{ u. } 5 \quad 4$$
$$\Delta l = \quad 0 \quad +0{,}0024 \quad +0{,}00126 \quad +0{,}0048 \text{ m}.$$

Die Stabdrehwinkel ϑ_{ht} werden mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Abschn. 18 berechnet. Hiernach ist $1\,\vartheta_{ht} = E J_c \Sigma \overline{N} \alpha_t\, t l$. Die gedachten Kräfte sind mit den ihnen zugeordneten Längskräften in Abb. 352 eingetragen.

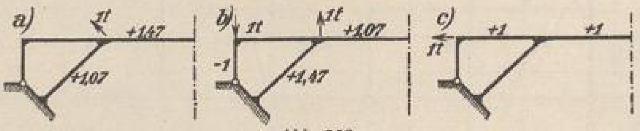


Abb. 352.

Dann ist mit $E J_c = 16670$ tm²: $\vartheta_{4t} = 0$.

$$\vartheta_{5t} = -\vartheta_{3t} = \frac{E J_c}{l_3}(+1{,}47 \cdot 0{,}0024 + 1{,}07 \cdot 0{,}00126) = +\ 6{,}45\,,$$

$$\vartheta_{6t} = -\vartheta_{2t} = \frac{E J_c}{l_2}(+1{,}07 \cdot 0{,}0024 + 1{,}47 \cdot 0{,}00126) = +\ 6{,}13\,,$$

$$\vartheta_{7t} = -\vartheta_{1t} = \frac{E J_c}{l_1}(+1{,}00 \cdot 0{,}0024 + 1{,}00 \cdot 0{,}0024) = +13{,}33\,,$$

Nach (629) ergeben sich die Anschlußmomente aus

$$\overline{M}_{Jt}^{(k)} = \Sigma\, \overline{M}_{J\vartheta,h}^{(k)} \vartheta_{ht}\,. \qquad \text{(Abb. 353.)}$$

Stab	$h=$	1	2	3	4	5	6	7	$\overline{M}_{Jt}^{(k)}$
1	$\overline{M}_{G\vartheta,h}^{(1)}\vartheta_{ht}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\overline{M}_{E\vartheta,h}^{(1)}\vartheta_{ht}$	+3,71	−2,39	+0,67	0	+0,10	+0,04	−0,02	+2,11
2	$\overline{M}_{E\vartheta,h}^{(2)}\vartheta_{ht}$	−3,71	+2,39	−0,67	0	−0,10	−0,04	+0,02	−2,11
	$\overline{M}_{C\vartheta,h}^{(2)}\vartheta_{ht}$	−1,49	+3,42	−2,69	0	−0,42	−0,15	+0,06	−1,27
3	$\overline{M}_{A\vartheta,h}^{(3)}\vartheta_{ht}$	+0,46	−1,06	+9,30	0	−0,46	−0,17	+0,07	+8,14
	$\overline{M}_{C\vartheta,h}^{(3)}\vartheta_{ht}$	+0,93	−2,13	+6,31	0	−0,93	−0,33	+0,14	+3,99
4	$\overline{M}_{C\vartheta,h}^{(4)}\vartheta_{ht}$	+0,56	−1,29	−3,62	0	+1,35	+0,48	−0,21	−2,73
	$\overline{M}_{D\vartheta,h}^{(4)}\vartheta_{ht}$	+0,21	−0,48	−1,35	0	+3,62	+1,29	−0,56	+2,73

(Fortsetzung).

Stab	$h=$	1	2	3	4	5	6	7	$\overline{M}_{Jt}^{(k)}$
5	$\overline{M}_{D\vartheta,h}^{(5)}\vartheta_{ht}$	−0,14	+0,33	+0,93	0	−6,31	+2,13	−0,93	−3,99
	$\overline{M}_{B\vartheta,h}^{(5)}\vartheta_{ht}$	−0,07	+0,17	+0,46	0	−9,30	+1,06	−0,46	−8,14
6	$\overline{M}_{D\vartheta,h}^{(6)}\vartheta_{ht}$	−0,06	+0,15	+0,42	0	+2,69	−3,42	+1,49	+1,27
	$\overline{M}_{F\vartheta,h}^{(6)}\vartheta_{ht}$	−0,02	+0,04	+0,10	0	+0,67	−2,39	+3,71	+2,11
7	$\overline{M}_{F\vartheta,h}^{(7)}\vartheta_{ht}$	+0,02	−0,04	−0,10	0	−0,67	+2,39	−3,71	−2,11
	$\overline{M}_{H\vartheta,h}^{(7)}\vartheta_{ht}$	0	0	0	0	0	0	0	0

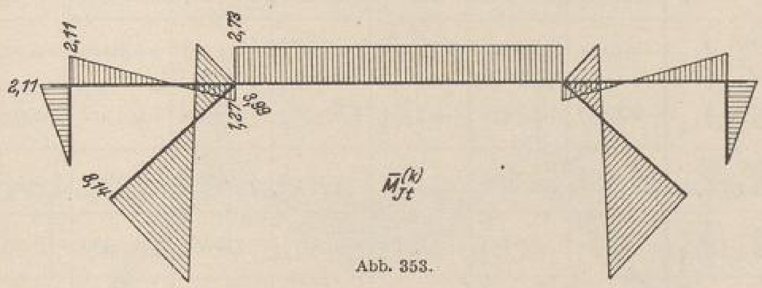


Abb. 353.

5. Momente $\overline{M}_{J1}^{(k)}$ des einfach geometrisch unbestimmten Systems für $\psi_1 = 1$. Da die Stabdrehwinkel für die Belastungsfälle a und b (Abb. 350 b, c) von Null verschieden sind, wird die zweite Stufe der Berechnung notwendig. Die Knotenpunktfigur besitzt einen Freiheitsgrad. Als Parameter ψ_1 der Formänderung wird der Drehwinkel ϑ_1 gewählt.

Statische Bedingung: $\psi_1 a_{11} + a_{10} = 0$

$$a_{11} = \Sigma\, \overline{M}_1^{(k)} v_{k1}\,; \qquad a_{10} = \Sigma\, (\mathsf{M}_{k1} + \overline{M}_0^{(k)})\, v_{k1}\,.$$

Die Werte v_{k1} werden aus dem Polplan der kinematischen Kette Abb. 354 entnommen:

$$v_{11} = v_{71} = \psi_1 = 1\,,$$

$$v_{21} = v_{61} = 6:11{,}21 = 0{,}5352\,,$$

$$v_{31} = v_{51} = \frac{16{,}42 \cdot 0{,}535}{12{,}6} = 0{,}6975\,,$$

$$v_{41} = -\frac{0{,}535 \cdot 16{,}42}{16{,}42} = -0{,}5352\,.$$

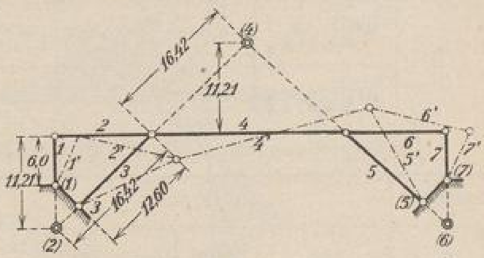


Abb. 354.

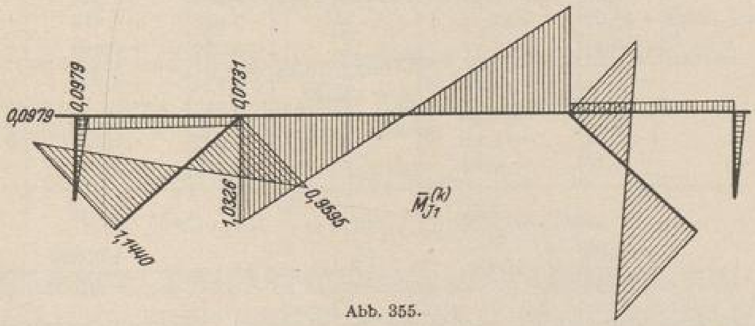


Abb. 355.

Die Momente $\overline{M}_1^{(k)}$ werden nach (629) aus den Werten $\overline{M}_{J1}^{(k)} = \sum \overline{M}_{J\vartheta,h}\,\vartheta_{h1}$ bestimmt (Abb. 355).

Stab	$h=$	1	2	3	4	5	6	7	$\overline{M}_{J1}^{(k)}$
1	$\overline{M}_{G\vartheta,h}^{(1)}\vartheta_{h1}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\overline{M}_{E\vartheta,h}^{(1)}\vartheta_{h1}$	−0,2780	+0,2085	−0,0727	+0,0309	+0,0113	+0,0033	−0,0012	−0,0979
2	$\overline{M}_{E\vartheta,h}^{(2)}\vartheta_{h1}$	+0,2780	−0,2085	+0,0727	−0,0309	−0,0113	−0,0033	+0,0012	+0,0979
	$\overline{M}_{C\vartheta,h}^{(2)}\vartheta_{h1}$	+0,1116	−0,2986	+0,2910	−0,1236	−0,0453	−0,0131	+0,0049	−0,0731
3	$\overline{M}_{A\vartheta,h}^{(3)}\vartheta_{h1}$	−0,0348	+0,0930	−1,0054	−0,1374	−0,0504	−0,0144	+0,0054	−1,1440
	$\overline{M}_{C\vartheta,h}^{(3)}\vartheta_{h1}$	−0,0695	+0,1860	−0,6822	−0,2749	−0,1007	−0,0290	+0,0108	−0,9595
4	$\overline{M}_{C\vartheta,h}^{(4)}\vartheta_{h1}$	−0,0421	+0,1126	+0,3912	+0,3985	+0,1461	+0,0420	−0,0157	+1,0326
	$\overline{M}_{D\vartheta,h}^{(4)}\vartheta_{h1}$	−0,0157	+0,0420	+0,1461	+0,3985	+0,3912	+0,1126	−0,0421	+1,0326
5	$\overline{M}_{D\vartheta,h}^{(5)}\vartheta_{h1}$	+0,0108	−0,0290	−0,1007	−0,2749	−0,6822	+0,1860	−0,0695	−0,9595
	$\overline{M}_{B\vartheta,h}^{(5)}\vartheta_{h1}$	+0,0054	−0,0144	−0,0504	−0,1374	−1,0054	+0,0930	−0,0348	−1,1440
6	$\overline{M}_{D\vartheta,h}^{(6)}\vartheta_{h1}$	+0,0049	−0,0131	−0,0453	−0,1236	+0,2910	−0,2986	+0,1116	−0,0731
	$\overline{M}_{F\vartheta,h}^{(6)}\vartheta_{h1}$	+0,0012	−0,0033	−0,0113	−0,0309	+0,0727	−0,2085	+0,2780	+0,0979
7	$\overline{M}_{F\vartheta,h}^{(7)}\vartheta_{h1}$	−0,0012	+0,0033	+0,0113	+0,0309	−0,0727	+0,2085	−0,2780	−0,0979
	$\overline{M}_{H\vartheta,h}^{(7)}\vartheta_{h1}$	0	0	0	0	0	0	0	0

6. Ermittlung von ψ_1 für die Belastungen a und b.

Belastung		$a \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$			$b \equiv \delta$			$\psi_1 = 1$	
k	ν_{k1}	M_{k1}	$\overline{M}_0^{(k)}$	$(\mathsf{M}_{k1}+\overline{M}_0^{(k)})\nu_{k1}$	M_{k1}	$\overline{M}_0^{(k)}$	$(\mathsf{M}_{k1}+\overline{M}_0^{(k)})\nu_{k1}$	$\overline{M}_1^{(k)}$	$\overline{M}_1^{(k)}\nu_{k1}$
1	+1	0	+ 1,66	+ 1,66	0	+0,005	+0,005	−0,0979	−0,0979
2	+0,5352	$1\cdot 12\cdot \frac{12}{2}=72$	+27,67	+53,34	0	−0,026	−0,014	+0,0248	+0,0133
3	+0,6975	0	+46,34	+32,32	0	−0,069	−0,048	−2,1035	−1,4672
4	−0,5352	0	− 6,24	+ 3,34	$-6\cdot 0{,}3\cdot 10{,}21$ $-18{,}378$	+0,134	+9,764	+2,0652	−1,1053
5	+0,6975	0	−55,85	−38,96	0	−0,069	−0,048	−2,1035	−1,4672
6	+0,5352	0	−20,94	−11,21	0	−0,026	−0,014	+0,0248	+0,0133
7	+1	0	+ 4,19	+ 4,19	0	+0,005	+0,005	−0,0979	−0,0979
				$a_{10} = +44{,}63$			$a_{10} = +9{,}650$	$a_{11} = -4{,}209$	

Belastung a: $\psi_1 = -\dfrac{+44{,}68}{-4{,}209} = +10{,}62$. Belastung b: $\psi_1 = -\dfrac{+9{,}650}{-4{,}209} = +2{,}293$.

Die endgültigen Stabmomente werden aus der folgenden Superposition gefunden:

$$M_J^{(k)} = \overline{M}_{J0}^{(k)} + \psi_1\,\overline{M}_{J1}^{(k)}.$$

		$M_E^{(2)}$	$M_G^{(2)}$	$M_G^{(3)}$	$M_G^{(4)}$	$M_A^{(3)}$	$M_D^{(4)}$	$M_D^{(5)}$	$M_D^{(6)}$	$M_B^{(5)}$	$M_F^{(6)}$
Belastung *a*	$\overline{M}_{J0}^{(k)}$	−1,66	+29,53	+30,89	−60,22	+15,44	+53,98	−37,23	−16,75	−18,62	−4,19
	$\overline{M}_{J1}^{(k)}$	+0,098	−0,073	−0,960	+1,033	−1,144	+1,033	−0,960	−0,073	−1,144	+0,098
	$\psi_1 \overline{M}_{J1}^{(k)}$	+1,04	−0,78	−10,20	+10,97	−12,15	+10,97	−10,20	−0,78	−12,15	+1,04
	$M_{J0}^{(k)}$	−0,62	+28,55	+20,69	−49,25	+3,29	+64,95	−47,43	−17,53	−30,77	−3,15
Belastung *b*	$\overline{M}_{J0}^{(k)}$	−0,005	−0,021	−0,046	+0,067	−0,023	+0,067	−0,046	−0,021	−0,023	−0,005
	$\psi_1 \overline{M}_{J1}^{(k)}$	+0,225	−0,167	−2,201	+2,369	−2,623	+2,369	−2,201	−0,167	−2,623	+0,225
	$M_{J0}^{(k)}$	+0,220	−0,188	−2,247	+2,436	−2,646	+2,436	−2,247	−0,188	−2,646	+0,220

Die Ergebnisse sind in Abb. 356 und 357 enthalten. Die Richtigkeit wird mit den Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte an einem Knoten oder Stabteil nachgeprüft.

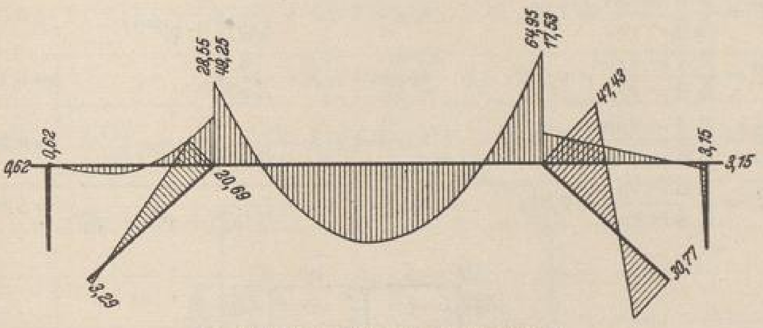


Abb. 356. Biegungsmomente aus Belastung *a*.

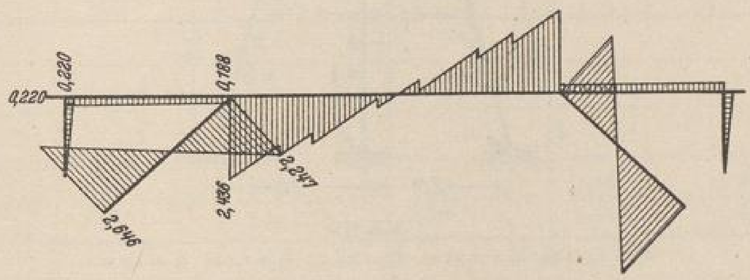


Abb. 357. Biegungsmomente aus Belastung *b*.

Festpunkte und Übergangszahlen eines geschlossenen Rahmens.

Die Festpunkte werden durch allmähliche Annäherung gewonnen.

1. Randbedingungen für die Festpunktermittlung

$$a_{AG} = a_{BE} = 0, \qquad a_{FD} = 3{,}0,$$

$$\varrho_G^{(1)} = \varrho_E^{(1)} = \frac{3}{l_1'} = 1{,}290; \quad \varrho_D^{(4)} = \frac{4}{l_4'} = 1{,}778.$$

2. Festpunkte der linken Zeile beim Fortschreiten im Uhrzeigersinn: Die Werte $\nu_{KJ} = 0{,}25$ und $\nu_{ED} = 0{,}25$ werden zunächst geschätzt und führen zu den Anschlußzahlen $\varrho_J^{(10)} = 0{,}798$ und $\varrho_D^{(8)} = 2{,}39$. Ausgangswert: $\nu_{JD} = 0{,}25$.

$$\varrho_D^{(5)} = \frac{2}{l'_5}\,\frac{1 - \nu_{JD}}{\frac{2}{3} - \nu_{JD}} = 1{,}20\,, \qquad \nu_{DC} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_2(\varrho_D^{(4)} + \varrho_D^{(5)} + \varrho_D^{(8)})}\right) = 0{,}267\,,$$

$$\varrho_C^{(2)} = \frac{2}{l'_2}\,\frac{1 - \nu_{DC}}{\frac{2}{3} - \nu_{DC}} = 2{,}44\,, \qquad \nu_{CH} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_3(\varrho_C^{(1)} + \varrho_C^{(2)})}\right) = 0{,}246\,,$$

$$\varrho_H^{(3)} = \frac{2}{l'_3}\,\frac{1 - \nu_{CH}}{\frac{2}{3} - \nu_{CH}} = 2{,}39\,, \qquad \nu_{HJ} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_6\,\varrho_H^{(3)}}\right) = 0{,}281\,,$$

$$\varrho_J^{(6)} = \frac{2}{l'_6}\,\frac{1 - \nu_{HJ}}{\frac{2}{3} - \nu_{HJ}} = 0{,}828\,, \qquad \nu_{JD} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_5(\varrho_J^{(6)} + \varrho_J^{(10)})}\right) = 0{,}236\,.$$

Die Rechnung wird mit $\nu_{JD} = 0{,}236$ wiederholt und der geschätzte Wert ν_{KJ} wegen der Symmetrie des Systems durch den verbesserten Wert $\nu_{KJ} = \nu_{HJ} = 0{,}281$ ersetzt. Der Wert $\nu_{ED} = 0{,}250$ wird beibehalten. ν_{KJ} und ν_{ED} liefern die Anschlußzahlen $\varrho_J^{(10)} = 0{,}828$, $\varrho_D^{(8)} = 2{,}39$ und diese nach dem ersten Ansatz die Werte $\varrho_D^{(5)} = 1{,}18$, $\nu_{DC} = 0{,}267$. Da ν_{DC} sich gegenüber der ersten Rechnung nicht geändert hat, gilt das gleiche für $\varrho_C^{(2)}$, ν_{CH}, $\varrho_H^{(3)}$, ν_{HJ}, $\varrho_J^{(6)}$ und ν_{JD}.

3. Festpunkte der linken Zelle beim Fortschreiten entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Werte $\nu_{KJ} = 0{,}281$ und $\nu_{ED} = 0{,}250$ mit den Anschlußzahlen $\varrho_J^{(10)} = 0{,}828$ und $\varrho_D^{(8)} = 2{,}39$ werden wieder verwendet. Als Ausgangswert dient $\nu_{DJ} = 0{,}25$.

$$\varrho_J^{(5)} = \frac{2}{l'_5}\,\frac{1 - \nu_{DJ}}{\frac{2}{3} - \nu_{DJ}} = 1{,}20\,, \qquad \nu_{JH} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_6(\varrho_J^{(5)} + \varrho_J^{(10)})}\right) = 0{,}273\,,$$

$$\varrho_H^{(6)} = \frac{2}{l'_6}\,\frac{1 - \nu_{JH}}{\frac{2}{3} - \nu_{JH}} = 0{,}820\,, \qquad \nu_{HC} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_3\,\varrho_H^{(6)}}\right) = 0{,}127\,,$$

$$\varrho_C^{(3)} = \frac{2}{l'_3}\,\frac{1 - \nu_{HC}}{\frac{2}{3} - \nu_{HC}} = 2{,}15\,, \qquad \nu_{CD} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_2(\varrho_C^{(1)} + \varrho_C^{(3)})}\right) = 0{,}240\,,$$

$$\varrho_D^{(2)} = \frac{2}{l'_2}\,\frac{1 - \nu_{CD}}{\frac{2}{3} - \nu_{CD}} = 2{,}37\,, \qquad \nu_{DJ} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_5(\varrho_D^{(2)} + \varrho_D^{(4)} + \varrho_D^{(8)})}\right) = 0{,}302\,.$$

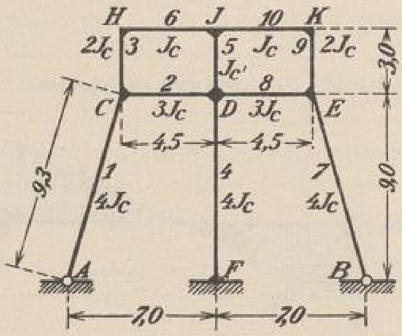


Abb. 358.

$l'_1 = 2{,}325$ m, $l'_4 = 2{,}25$ m, $l'_2 = 1{,}5$ m, $l'_3 = 1{,}5$ m, $l_6 = 4{,}5$ m.

Der neue Ausgangswert $\nu_{DJ} = 0{,}302$ und die verbesserten $\nu_{KJ} = 0{,}281$, $\nu_{ED} = 0{,}240$ führen in Verbindung mit $\varrho_J^{(10)} = 0{,}828$ und $\varrho_D^{(8)} = 2{,}37$ der Reihe nach zu

$$\varrho_J^{(5)} = 1{,}274\,, \qquad \nu_{JH} = 0{,}275\,, \qquad \varrho_H^{(6)} = 0{,}822\,, \qquad \nu_{HC} = 0{,}127\,.$$

Da ν_{HC} sich im Vergleich zur ersten Rechnung nicht geändert hat, gelten für $\varrho_C^{(3)}$, ν_{CD} und $\varrho_D^{(2)}$ die bekannten Ergebnisse.

4. Die Rechnung ist im Uhrzeigersinn mit $\nu_{ED} = 0{,}250$ und $\varrho_D^{(8)} = 2{,}39$ entwickelt worden. Die verbesserten Werte $\nu_{ED} = 0{,}240$ und $\varrho_D^{(8)} = 2{,}37$ führen innerhalb der Genauigkeit des Rechenschiebers zu keiner Änderung der Ergebnisse

$$\nu_{CA} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_1(\varrho_C^{(2)} + \varrho_C^{(3)})}\right) = 0{,}281\,, \qquad \varrho_A^{(1)} = \frac{2}{l'_1}\,\frac{1 - \nu_{CA}}{\frac{2}{3} - \nu_{CA}} = 1{,}60\,,$$

$$\nu_{DF} = 1 : \left(3 + \frac{6}{l'_4(\varrho_D^{(2)} + \varrho_D^{(5)\prime} + \varrho_D^{(8)})}\right) = 0{,}290\,, \qquad \varrho_F^{(4)} = \frac{2}{l'_4}\,\frac{1 - \nu_{DF}}{\frac{2}{3} - \nu_{DF}} = 1{,}67\,.$$

5. Übersicht der Ergebnisse:

Knoten	ν				ϱ			
	links	rechts	oben	unten	links	rechts	oben	unten
A	—	—	0	—	—	—	1,60	—
B	—	—	0	—	—	—	1,60	—
C	—	0,240	0,246	0,281	—	2,44	2,15	1,29
D	0,267	0,267	0,302	0,290	2,37	2,37	1,18	1,78
E	0,240	—	0,246	0,281	2,44	—	2,15	1,29
F	—	—	0,333	—	—	—	1,67	—
H	—	0,281	—	0,127	—	0,82	—	2,39
J	0,275	0,275	—	0,236	0,83	0,83	—	1,27
K	0,281	—	—	0,127	0,82	—	—	2,39

6. Übergangszahlen $-\mu_{ik}$ nach (616).

C					
1		2		3	
2	3	1	3	1	2
$\frac{2,44}{4.59}=0,53$	$\frac{2,15}{4.59}=0,47$	$\frac{1,29}{3.44}=0,37$	$\frac{2,15}{3.44}=0,63$	$\frac{1,29}{3.73}=0,35$	$\frac{2,44}{3.73}=0,65$

J					
5		6		10	
6	10	5	10	5	6
$\frac{0,83}{1,66}=0,50$	$\frac{0,83}{1,66}=0,50$	$\frac{1,27}{2,10}=0,60$	$\frac{0,83}{2,10}=0,40$	$\frac{1,27}{2,10}=0,60$	$\frac{0,83}{2,10}=0,40$

D					
2			4		
4	5	8	2	5	8
$\frac{1,78}{5.33}=0,33$	$\frac{1,18}{5.33}=0,22$	$\frac{2,37}{5.33}=0,45$	$\frac{2,37}{5.92}=0,40$	$\frac{1,18}{5.92}=0,20$	$\frac{2,37}{5.92}=0,40$

D					
5			8		
2	4	8	2	4	5
$\frac{2,37}{6,52}=0,36$	$\frac{1,78}{6,52}=0,28$	$\frac{2,37}{6,52}=0,36$	$\frac{2,37}{5.33}=0,45$	$\frac{1,78}{5.33}=0,33$	$\frac{1,18}{5.33}=0,22$

Ritter, W.: Anwendung der graphischen Statik, III. Teil: Der kontinuierliche Balken. Zürich 1900. — Schächterle, W.: Elastische Bogen, Bogenstellungen und mehrstielige Rahmen. Berlin 1912. — Ritter, A.: Berechnung rechteckiger Silozellen. Stuttgart 1916. — Straßner, A.: Statik der Rahmentragwerke und der elastischen Bogenträger. Berlin 1916. — Hoost, K: Beitrag zur Berechnung rechteckiger Rahmen und Rahmenträger. Dissertation Danzig 1917. — Pichl, E.: Der durchgehende gelenklose Bogen auf elastischen Stützen. Stuttgart 1919. — Suter, E.: Die Methode der Festpunkte. Berlin 1923.