



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

38. Die statischen Bedingungsgleichungen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Der unbekannt Stabdrehwinkel  $\psi_{A_i}$  wird nach (496)

$$\psi_{A_i} = - \frac{\sum K_{r_i} \cdot \vartheta_{r_A}}{\sum K_{r_A} \cdot \vartheta_{r_A}} = - \frac{0,0800 \cdot 1 + 2,3630 \cdot 0,5 - 10,9677 \cdot 0,5}{-0,096274} = -43,858,$$

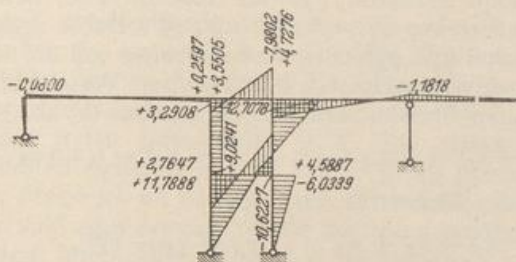


Abb. 284.

$$X_{k_i} = X_{k_i,0} - 43,858 X_{k_A},$$

$$X_{1_i} = +0,0800 - 43,858 \cdot 0,088016 = -3,78 \text{ mt.}$$

Kammer, Statisch unbestimmte Hauptssysteme. Arm. Bet. 1914 S. 161. — Hertwig, A.: Die Berechnung der Rahmengebilde. Eisenbau 1921 S. 122. — Nakonz, W.: Die Berechnung mehrstieliger Rahmen unter Anwendung statisch unbestimmter Hauptssysteme. Berlin 1924. — Spiegel, G.: Mehrteilige Rahmen. Berlin 1920.

## B. Die Berechnung durch Elimination der Schnittkräfte.

### 38. Die statischen Bedingungsgleichungen.

Die Theorie des statisch unbestimmten Stabwerks ist in Abschn. 23 mit einer Zerlegung in Teile ( $h$ ) und ( $J$ ) eingeleitet worden, um Gleichungen teils statischen, teils geometrischen Inhalts zur Beschreibung des Spannungs- und Verschiebungszustandes des Stabwerks zu bilden. Dieser allgemeine Ansatz ist bisher stets auf die geometrischen Bedingungen zurückgeführt worden, um die statisch unbestimmten Schnittkräfte anzugeben. Unter Umständen ist es aber zweckmäßig, diese zu eliminieren und zuerst die Komponenten des Verschiebungszustandes aus den Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen.

**Die Knotenpunktfigur.** Durch die Aufteilung eines Stabwerks allgemeiner Form entstehen Knotenscheiben ( $J$ ), Gelenke ( $G$ ) und Abschnitte ( $h$ ) des Stabwerks. Diese sind gerade oder gekrümmt und können auch aus geschlossenen Gruppen von einzelnen Stäben zusammengesetzt sein. Über die Zerlegung des Stabwerks bestehen keine anderen Vorschriften, als daß jeder Abschnitt ( $h$ ) nur zwei freie Querschnitte erhält, in denen er vorher steif oder frei drehbar angeschlossen war.

Die Konfiguration der Knotenscheiben und Gelenke in der Bildebene heißt Knotenpunktfigur (Abb. 289b). Sie ist durch die Gelenkpunkte  $G$  und durch die Schnittpunkte  $J, K$  von geraden Linien bestimmt, welche die Abschnitte ( $h$ ) des Stabwerks vertreten. Die Schnittpunkte  $J, K$  ersetzen nach der Theorie des Stabwerks, abgesehen von seltenen Ausnahmen, die Knotenscheiben und erhalten aus diesem Grunde die Eigenschaft von materiellen Punkten, mit denen die Anschlußquerschnitte ( $h$ ) des Stabwerks zusammenfallen.

Die Bewegung eines Gelenkes ( $G$ ) ist durch zwei Komponenten  $u_G, v_G$ , die Bewegung eines Stabknotens ( $J$ ) durch drei Komponenten  $u_J, v_J, \varphi_J$  beschrieben.  $\varphi_J$  wird als Knotendrehwinkel bezeichnet und im Uhrzeigersinn positiv gerechnet.



Bei einem Stabwerk mit  $r$  Stabknoten und  $r_1$  Gelenken sind daher  $(3r + 2r_1)$  Komponenten des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur unbekannt.

**Die geometrischen Randwerte für den Verschiebungszustand eines Abschnitts ( $h$ ).** Die Endquerschnitte  $J, K$  des Abschnitts ( $h$ ) bewegen sich in der Richtung  $x, y$  um die Strecken  $u_J^{(h)}, v_J^{(h)}$  und  $u_K^{(h)}, v_K^{(h)}$ . Dabei drehen sich die Endtangente um die Winkel  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}$ . Sie werden ebenso wie die Knotendrehwinkel im Uhrzeigersinn positiv gerechnet. Die relative Verschiebung  $(u_K^{(h)} - u_J^{(h)}, v_K^{(h)} - v_J^{(h)})$  hängt von der Formänderung des Abschnitts ( $h$ ) ab. Nach Abb. 285 ist

$$(x_K - x_J) = l_h \cos \alpha_h, \quad (y_K - y_J) = l_h \sin \alpha_h. \quad (497)$$

Durch die Belastung des Stabwerks wird aus

$$\begin{aligned} x_K &\rightarrow x_K + u_K^{(h)}, & y_K &\rightarrow y_K + v_K^{(h)}, \\ l_h &\rightarrow l_h + \Delta l_h = l_h(1 + \varepsilon_h), & \alpha_h &\rightarrow \alpha_h + \vartheta_h = \alpha_h + \vartheta_h, \end{aligned}$$

so daß durch Variation von (497) folgende Verträglichkeitsbedingungen entstehen:

$$\left. \begin{aligned} u_K^{(h)} - u_J^{(h)} &= \varepsilon_h(x_K - x_J) - \vartheta_h(y_K - y_J), \\ v_K^{(h)} - v_J^{(h)} &= \varepsilon_h(y_K - y_J) + \vartheta_h(x_K - x_J). \end{aligned} \right\} \quad (498)$$

Die bezogene Längenänderung  $\varepsilon_h$  der Stabzugsehne  $l_h$  wird als Verlängerung, der Stabdrehwinkel  $\vartheta_h$  im Uhrzeigersinn positiv gerechnet. Da die Anzahl ( $s$ ) der Abschnitte ( $h$ ) stets größer oder gleich der Summe  $(r + r_1)$  der Knoten ist, können die  $2(r + r_1)$  Komponenten  $u_J, v_J$  des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur stets durch die  $2s$  Randwerte  $\varepsilon_h, \vartheta_h$  des Verschiebungszustandes der Stäbe ausgedrückt werden. Daraus ergibt sich dann auch die Möglichkeit, die Verdrehungen  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}$  der Endtangente der Stäbe ( $h$ ) durch die Winkel  $\tau_J^{(h)}, \tau_K^{(h)}$  auf die Gerade  $\overline{J'K'}$  zu beziehen und unabhängig vom Stabdrehwinkel  $\vartheta_h$  zu beschreiben. Sie werden ebenfalls im Uhrzeigersinn positiv gemessen. Die Randwerte sind nach Abb. 285 untereinander durch die folgenden geometrischen Beziehungen verknüpft:

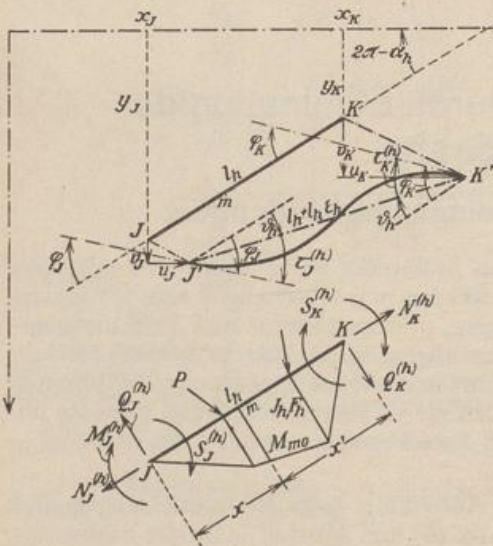


Abb. 285.

$$\varphi_J^{(h)} = \tau_J^{(h)} + \vartheta_h, \quad \varphi_K^{(h)} = \tau_K^{(h)} + \vartheta_h, \quad (u_K^{(h)} - u_J^{(h)}) \cos \alpha_h + (v_K^{(h)} - v_J^{(h)}) \sin \alpha_h = \varepsilon_h l_h. \quad (499)$$

Der Ansatz dient zur algebraischen Transformation der Verschiebungen  $u_J^{(h)}, v_J^{(h)}, \varphi_J^{(h)}$  in die Komponenten  $\varepsilon_h, \vartheta_h, \tau_J^{(h)}$  des Verschiebungszustandes.

**Die Randwerte des Spannungszustandes der Abschnitte ( $h$ ) und der Knotenpunktfigur des Stabwerks.** Durch die Zerlegung des Stabwerks in die Abschnitte ( $h$ ) und in die Knotenpunktfigur werden die in jedem freien Querschnitt vorhandenen Schnittkräfte  $N, M, Q$  des Stabwerks paarweise zu äußeren Kräften am Abschnitt ( $h$ ) und am Knotenpunkt ( $J$ ). Sie werden als Anschlußkräfte bezeichnet. Bei dem Querschnitt durch ein Gelenk ist das Anschlußmoment Null. Der positive Sinn dieser äußeren Kräfte wird in einer für die Ableitung geeigneten Form vereinbart. Die Längskräfte  $N_J^{(h)}, N_K^{(h)}$  der Abschnitte ( $h$ ) sind als Zug-



kräfte positiv. Die Biegemomente  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$  werden an den freien Querschnitten des Stabes als positiv bezeichnet, wenn ihr Drehsinn mit der Richtung des Uhrzeigers übereinstimmt. Die positiven Richtungen der Querkräfte  $Q_J^{(h)}, Q_K^{(h)}$  sind in Abb. 285 festgesetzt.

Jedem Gelenk  $G$  der Knotenpunktfigur ist eine resultierende Kraft  $\mathfrak{P}_G$ , jedem Stabknoten  $J$  außer  $\mathfrak{P}_J$  noch ein resultierendes Kräftepaar  $M_J$  zugeordnet, die mit den Anschlußkräften an den freien Querschnitten im Gleichgewicht stehen. Dasselbe gilt von der Belastung  $\mathfrak{P}_h$  des Abschnitts  $(h)$  und den sechs Anschlußkräften der beiden freien Querschnitte  $J, K$ . Von diesen sind drei statisch unbestimmt. Am besten eignen sich  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_K^{(h)}$  als überzählige Größen. Ist der Abschnitt  $(h)$  im Stabwerk an dem einen Ende steif, an dem anderen frei drehbar angeschlossen, so sind zwei Anschlußkräfte statisch unbestimmt. Bei zwei Gelenken ist nur eine statisch überzählige Größe  $N_K^{(h)}$  vorhanden.

Der Spannungszustand eines jeden Abschnitts  $(h)$  wird, abgesehen von der Belastung  $\mathfrak{P}_h$  und einer Temperaturänderung  $t, \Delta t$ , durch die geometrischen Randwerte  $\varepsilon_h, \vartheta_h$  der relativen Verschiebung der Stabenden und durch die Drehwinkel der Stabendtangente bestimmt. Diese sind mit  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}$  oder relativ zu  $J'K'$  (Abb. 285) mit  $\tau_J^{(h)}, \tau_K^{(h)}$  vorgeschrieben, so daß die statisch unbestimmten Anschlußkräfte des Stabes nach dem Superpositionsgesetz folgendermaßen zerlegt werden:

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J_0}^{(h)} + M_{J_1}^{(h)} \varphi_J^{(h)} + M_{J_2}^{(h)} \varphi_K^{(h)} + M_{J_3}^{(h)} \vartheta_h + M_{J_4}^{(h)} \varepsilon_h, \\ M_K^{(h)} &= M_{K_0}^{(h)} + M_{K_1}^{(h)} \varphi_J^{(h)} + M_{K_2}^{(h)} \varphi_K^{(h)} + M_{K_3}^{(h)} \vartheta_h + M_{K_4}^{(h)} \varepsilon_h, \\ N_K^{(h)} &= N_{K_0}^{(h)} + N_{K_1}^{(h)} \varphi_J^{(h)} + N_{K_2}^{(h)} \varphi_K^{(h)} + N_{K_3}^{(h)} \vartheta_h + N_{K_4}^{(h)} \varepsilon_h. \end{aligned} \right\} \quad (500)$$

Sind die geometrischen Randwerte  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \varepsilon_h, \vartheta_h$  Null, so entstehen mit  $M_J^{(h)} = M_{J_0}^{(h)}$  usw. die statisch unbestimmten Anschlußkräfte des beiderseits starr eingespannten Stabes oder Stabzugs aus Belastung  $\mathfrak{P}$  und Temperaturänderung  $\Delta t$ . Die Anschlußkräfte  $M_{J_1}^{(h)}, M_{J_2}^{(h)}, M_{J_3}^{(h)}, M_{J_4}^{(h)}$  sind die Anschlußkräfte des beiderseits starr eingespannten, unbelasteten Stabes mit vorgeschriebenen Randbedingungen  $\varphi_J^{(h)} = 1, \varphi_K^{(h)} = 1, \vartheta_h = 1, \varepsilon_h = 1$ . Die Stäbe mit biegungsstifem Anschluß in  $J$  und einem Gelenk  $G$  am anderen Ende werden durch die Bezeichnung  $l_v$  unterschieden. Bei ihnen ist  $M_G^{(g)} = 0$  und

$$\left. \begin{aligned} M_G^{(g)} &= M_{G_0}^{(g)} + M_{G_1}^{(g)} \varphi_J^{(g)} + M_{G_3}^{(g)} \vartheta_g + M_{G_4}^{(g)} \varepsilon_g, \\ N_G^{(g)} &= N_{G_0}^{(g)} + N_{G_1}^{(g)} \varphi_J^{(g)} + N_{G_3}^{(g)} \vartheta_g + N_{G_4}^{(g)} \varepsilon_g. \end{aligned} \right\} \quad (501)$$

Die Vorzahlen sind die Anschlußkräfte des einseitig starr eingespannten, in  $G$  gelenkig angeschlossenen Stabes aus den Randbedingungen  $\varphi_J^{(g)} = 1, \vartheta_g = 1, \varepsilon_g = 1$ . Das Ergebnis kann unmittelbar angeschrieben oder aus der Lösung für den beiderseits eingespannten Stab mit der Bedingung  $M_K^{(h)} \equiv M_G^{(g)} = 0$  abgeleitet werden. Diese liefert  $\varphi_G^{(g)}$  und damit die Anschlußkräfte  $M_G^{(g)}, N_G^{(g)}$ .

**Gerade Stäbe.** a) Der Stab  $(h)$  ist an beiden Enden  $J$  und  $K$  biegungsstif angeschlossen. Die Schnittkräfte  $M_{J_4}^{(h)}, N_{K_1}^{(h)}, N_{K_2}^{(h)}, N_{K_3}^{(h)}$  sind in (500) Null,  $N_{K_4}^{(h)} = EF_h$  und daher

$$N_K^{(h)} = N_{K_0}^{(h)} + EF_h \varepsilon_h. \quad (502)$$

Die beiden anderen statisch unbestimmten Anschlußkräfte  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$  werden unter Beachtung der Vorzeichen am einfachsten nach Abschn. 26 berechnet. Um dabei die bekannten Bezeichnungen beizubehalten, tritt hier zunächst für den Buchstaben  $J$  die Ziffer 1, für den Buchstaben  $K$  die Ziffer 2. Die Vorzahlen und Belastungszahlen  $\delta$  sind hier jedoch ebenso wie  $\varphi$  und  $\vartheta$  wirkliche Winkel, sie bezeichnen also nicht wie in Abschn. 26 den  $EJ_e$  fachen Betrag. Die Endquerschnitte 1, 2 des statisch bestimmten Stabes drehen sich infolge Belastung  $\mathfrak{P}_h$  und Temperatur-



änderung  $\Delta t$  um  $\delta_{10}$  und  $\delta_{20}$ , infolge der Stützenverschiebungen um  $\delta_{1s} = \varphi_J^{(h)} - \vartheta_h$ ,  $\delta_{2s} = \varphi_K^{(h)} - \vartheta_h$ , so daß bei veränderlichem Trägheitsmoment

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= \frac{\delta_{10} - \delta_{20} \delta_{12}/\delta_{22}}{\delta_{11} - \delta_{12} \delta_{12}/\delta_{22}} + \frac{\delta_{1s} - \delta_{2s} \delta_{12}/\delta_{22}}{\delta_{11} - \delta_{12} \delta_{12}/\delta_{22}} \\ &= M_{J0}^{(h)} + \beta_{11} \varphi_J^{(h)} + \beta_{12} \varphi_K^{(h)} - (\beta_{11} + \beta_{12}) \vartheta_h, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \beta_{12} \varphi_J^{(h)} + \beta_{22} \varphi_K^{(h)} - (\beta_{22} + \beta_{12}) \vartheta_h. \end{aligned} \right\} \quad (503)$$

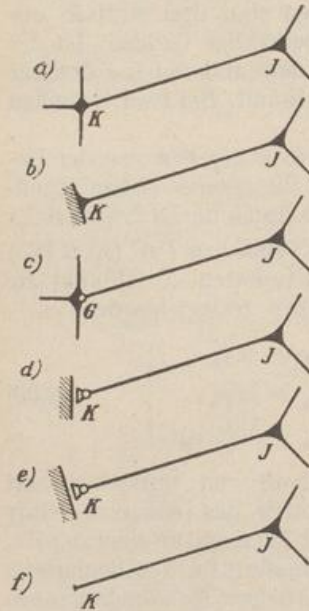


Abb. 286.

Beiderseits elastisch eingespannter Stab.  
Randbedingungen:  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$ .

Starr und elastisch eingespannter Stab.  
Randbedingungen:  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)} = 0, \vartheta_h, \varepsilon_h$ .

Gelenkig gelagerter und elastisch eingespannter Stab.  
Randbedingungen:  $M_G = 0, \varphi_J^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$ .

Schräg geführter und elastisch eingespannter Stab.  
Randbedingungen:  $\vartheta_h = f(\varepsilon_h), M_K = 0, \varphi_J^{(h)}, \frac{Q_K}{N_K} = \tan \alpha$ .

Senkrecht geführter und elastisch eingespannter Stab.  
Randbedingungen:  $Q_K = 0, M_K = 0, \varphi_J^{(h)}, \varepsilon_h$ .

Elastisch eingespannter Stab mit freiem Ende.  
Randbedingungen:  $M_K = 0, Q_K = 0, N_K = 0, \varphi_J^{(h)}$ .

Bei symmetrischen Stäben ist  $\delta_{11} = \delta_{22}$ , also auch  $\beta_{11} = \beta_{22}$ . Die Vorzeichen können bei einer stetigen Veränderung des Querschnitts angenähert nach Tabelle 13a, b berechnet werden.

Ist  $J_h$  im Bereich von  $l_h$  konstant, so ist

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l_h}{3EJ_h}, \quad \delta_{12} = -\frac{l_h}{6EJ_h}, \quad \beta_{11} = \beta_{22} = \frac{4EJ_h}{l_h}, \quad \beta_{12} = \frac{2EJ_h}{l_h}. \quad (504)$$

Die statisch unbestimmten Anschlußkräfte können daher bei vorgeschriebenen Randbedingungen  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$  unmittelbar angegeben werden. Damit sind alle Anschlußkräfte des Stabes ( $h$ ) bekannt.

1. Die Stabenden  $J$  und  $K$  sind elastisch drehbar (Abb. 286a):

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + 2 \frac{EJ_h}{l_h} (2\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)} - 3\vartheta_h), \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + 2 \frac{EJ_h}{l_h} (\varphi_J^{(h)} + 2\varphi_K^{(h)} - 3\vartheta_h), \\ N_K^{(h)} &= N_{K0}^{(h)} + EF_h \varepsilon_h, \quad N_J^{(h)} = N_{J0}^{(h)} + EF_h \varepsilon_h, \\ Q_J^{(h)} &= Q_{J0}^{(h)} - 6 \frac{EJ_h}{l_h^2} (\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)} - 2\vartheta_h), \\ Q_K^{(h)} &= Q_{K0}^{(h)} - 6 \frac{EJ_h}{l_h^2} (\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)} - 2\vartheta_h). \end{aligned} \right\} \quad (505)$$



2. Das Stabende  $J$  ist elastisch drehbar, das Ende  $K$  ist starr eingespannt (Abb. 286b),  $\varphi_K^{(h)} = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J_0}^{(h)} + 2 \frac{E J_h}{l_h} (2 \varphi_J^{(h)} - 3 \vartheta_h), & M_K^{(h)} &= M_{K_0}^{(h)} + 2 \frac{E J_h}{l_h} (\varphi_J^{(h)} - 3 \vartheta_h), \\ N_J^{(h)} &= N_{J_0}^{(h)} + \varepsilon_h E F_h, & N_K^{(h)} &= N_{K_0}^{(h)} + \varepsilon_h E F_h, \\ Q_J^{(h)} &= Q_{J_0}^{(h)} - 6 \frac{E J_h}{l_h^2} (\varphi_J^{(h)} - 2 \vartheta_h), & Q_K^{(h)} &= Q_{K_0}^{(h)} - 6 \frac{E J_h}{l_h^2} (\varphi_J^{(h)} - 2 \vartheta_h). \end{aligned} \right\} (506)$$

Die Anschlußkräfte  $M_{J_0}^{(h)}$ ,  $M_{K_0}^{(h)}$  des beiderseits starr eingespannten Stabes aus  $\mathfrak{F}_h$  und  $\Delta t = t_u - t_o$  können bei unveränderlichem Stabquerschnitt folgendermaßen berechnet werden (Abb. 287):

$$\left. \begin{aligned} M_{J_0}^{(h)} &= \frac{2}{l_h^2} (2 S_K^{(h)} + S_J^{(h)}), \\ M_{K_0}^{(h)} &= \frac{2}{l_h^2} (2 S_J^{(h)} + S_K^{(h)}), \\ S_J^{(h)} &= \int_0^{l_h} M_{m_0}^{(h)} x dx + \frac{E J_h l_h^2 \alpha_t \Delta t}{2 h}; \\ S_K^{(h)} &= - \int_0^{l_h} M_{m_0}^{(h)} x' dx' - \frac{E J_h l_h^2 \alpha_t \Delta t}{2 h}. \end{aligned} \right\} (507)$$

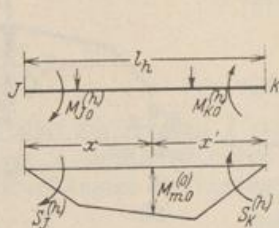


Abb. 287.

$M_{m_0}^{(h)}$  sind die Biegemomente aus der Belastung und  $M_{J_0}^{(h)} = M_{K_0}^{(h)} = 0$ .

b) Der Stab ( $g$ ) ist in  $J$  steif, in  $G$  gelenkig angeschlossen (Abb. 286c). Die Schnittkräfte  $M_G^{(g)}$ ,  $N_G^{(g)}$ ,  $N_G^{(g)}$  sind in (501) Null.  $N_G^{(g)} = E F_g$  und daher

$$N_G^{(g)} = N_G^{(g)} + E F_g \varepsilon_g. \quad (508)$$

Das Anschlußmoment  $M_J^{(g)}$  wird unter Beachtung der Vorzeichen nach Abschn. 26, jedoch unter Verwendung der wirklichen Vorzeichen und Belastungszahlen  $\delta$ , berechnet. Mit der Bezeichnung  $J \equiv$  Ziffer 1 ist die Verdrehung dieses Endquerschnitts durch die Belastung  $\mathfrak{F}_g$  und eine ungleichförmige Temperaturänderung  $\Delta t$  des Stabes  $\delta_{10}$  und  $\delta_{1s} = \varphi_J^{(g)} - \vartheta_g$ .

$$M_J^{(g)} = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} + \frac{\delta_{1s}}{\delta_{11}} = M_{J_0}^{(g)} + \frac{1}{\delta_{11}} (\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g). \quad (509)$$

Bei konstantem Querschnitt  $F_g$ ,  $J_g$  im Bereich von  $l_g$  ist

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(g)} &= M_{J_0}^{(g)} + \frac{3 E J_g}{l_g} (\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g), \\ N_G^{(g)} &= N_{G_0}^{(g)} + E F_g \varepsilon_g, & N_J^{(g)} &= N_{J_0}^{(g)} + E F_g \varepsilon_g, \\ Q_J^{(g)} &= Q_{J_0}^{(g)} - \frac{3 E J_g}{l_g^2} (\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g), & Q_G^{(g)} &= Q_{G_0}^{(g)} - \frac{3 E J_g}{l_g^2} (\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g). \end{aligned} \right\} (510)$$

Das Anschlußmoment  $M_{J_0}^{(g)}$  aus  $\mathfrak{F}_g$ ,  $\Delta t$  kann mit den Bezeichnungen der Abb. 287 folgendermaßen berechnet werden:

$$M_{J_0}^{(g)} = - \frac{3}{l_g^2} \left( \int_0^{l_g} M_{m_0}^{(g)} x' dx' + \frac{E J_g l_g^2 \alpha_t \Delta t}{2 h} \right). \quad (511)$$

c) Die Anschlüsse nach Abb. 286d, e sind selten. Die schräge Führung des Stabes in  $K$  nach Abb. 286d ist im Ansatz gleichbedeutend mit gelenkigem Anschluß.

d) Der Stab ist in  $J$  steif angeschlossen, am anderen Ende frei (Abb. 286f). Die Belastung des Stabes wird als Belastung des Stabknotens  $J$  behandelt.

**Gekrümmte Stäbe und Stabzüge.** Die Anschlußkräfte des Stabes ( $h$ ) können für dreierlei Randbedingungen angegeben werden. Der Stab ist entweder an beiden



Enden  $J, K$  eingespannt oder an einem Ende  $J$  eingespannt, am anderen gelenkig angeschlossen oder an beiden Enden durch Gelenke mit den Stabknoten  $J, K$  verbunden. Die Rechnung für symmetrische oder unsymmetrische Stabformen wird unter Beachtung der positiven Definition von Drehwinkel und Anschlussmoment für die Belastung  $\mathfrak{P}_h$ , die Temperaturänderung  $t, \Delta t$  und für vorgeschriebene Randwerte  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \varepsilon_h, \vartheta_h$  nach Abschn. 26 behandelt. Die Lösung kann auf ein statisch bestimmtes oder unbestimmtes Hauptsystem bezogen und durch Superposition der einzelnen Ursachen nach (500) angeschrieben werden. Sie wird hier auf den beiderseits eingespannten symmetrischen Stab beschränkt. Die anderen Aufgaben sind zum Teil umständlich, bieten aber keine Schwierigkeiten. Neben den beiden Anschluß-

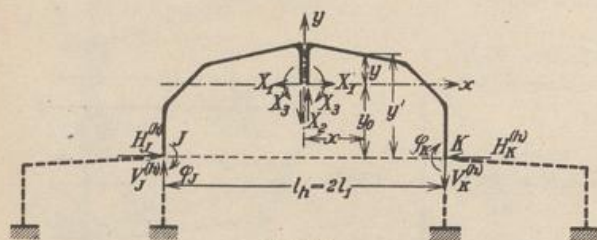


Abb. 288.

momenten  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$  spielt hier auch die Längskraft  $N_h$  im Symmetriepunkt des Stabes eine Rolle.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte des Bogenstabes werden nach S. 196, jedoch unter Verwendung der wirklichen Vorzeichen und Belastungszahlen  $\delta$ , mit dem statisch bestimmten Hauptsystem

Abb. 288 berechnet. Die Belastung  $\mathfrak{P}_h$  und die ungleichförmige Temperaturänderung  $\Delta t$  erzeugen die gegenseitigen Verschiebungen  $\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30}$ . Die gleichförmige Temperaturänderung führt zu einer Verschiebung  $\delta_{1t} = \alpha_t t l_h, \delta_{2t} = 0, \delta_{3t} = 0$ . Die vorgeschriebenen Randwerte  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \vartheta_h$  und  $\Delta l_h = \varepsilon_h l_h$  ergeben nach (300)

$$\left. \begin{aligned} 1_1 \delta_{1s} &= y_0 (\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h, & 1_2 \delta_{2s} &= -\frac{l}{2} (\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)}) - l \vartheta_h, \\ 1_3 \delta_{3s} &= \varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}. \end{aligned} \right\} \quad (512)$$

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \int \frac{y' \frac{1}{EJ} ds}{\delta_{33}}, & X_1 &= \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} + \frac{1}{\delta_{11}} [y_0 (\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h], \\ X_2 &= \frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} - \frac{l}{\delta_{22}} \left[ \frac{1}{2} (\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)}) - \vartheta_h \right], & X_3 &= \frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} + \frac{1}{\delta_{33}} (\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}). \end{aligned} \right\} \quad (513)$$

Die Anschlußkräfte des Hauptsystems (Kragträger  $J$  und  $K$ , Abb. 288) aus der Belastung  $\mathfrak{P}_h$  werden mit  $M_{J0}^{(0)}, M_{K0}^{(0)}$  usw. nach dem vereinbarten positiven Dreh Sinn bezeichnet, so daß hier für den beiderseits eingespannten Stabbogen folgende Ergebnisse angeschrieben werden können:

a) Schnittkräfte aus der Belastung  $\mathfrak{P}_h$

$$\left. \begin{aligned} M_{J0}^{(h)} &= M_{J0}^{(0)} + X_{10} y_0 - X_{20} l_1 + X_{30}, \\ M_{K0}^{(h)} &= M_{K0}^{(0)} - X_{10} y_0 - X_{20} l_1 - X_{30}, & -N_{h0} &= X_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (514)$$

b) Schnittkräfte aus der Belastung  $\mathfrak{P}_h$ , der Temperaturänderung  $t$  und vorgeschriebenen Randbedingungen  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \vartheta_h, \Delta l_h = \varepsilon_h l_h$

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + \varphi_J^{(h)} \left( \frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4 \delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}} \right) + \varphi_K^{(h)} \left( -\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4 \delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}} \right) \\ &\quad - \vartheta_h \frac{l_h^2}{2 \delta_{22}} - \frac{y_0}{\delta_{11}} (\Delta l_h - \alpha_t t l_h), \end{aligned} \right\} \quad (515)$$

$$\left. \begin{aligned} M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \varphi_J^{(h)} \left( -\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4 \delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}} \right) + \varphi_K^{(h)} \left( \frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4 \delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}} \right) \\ &\quad - \vartheta_h \frac{l_h^2}{2 \delta_{22}} + \frac{y_0}{\delta_{11}} (\Delta l_h - \alpha_t t l_h). \end{aligned} \right\} \quad (516)$$



$$-N_h = X_1^{(h)} = X_{10}^{(h)} + \frac{1}{\delta_{11}} [\gamma_0 (\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h + \alpha_t t l_h]. \quad (517)$$

Die Anschlußkräfte  $M_J^{(h)}$ ,  $M_K^{(h)}$ ,  $N_h$  können in derselben Weise auch für geschlossene Stabzüge oder ganze Abschnitte  $\overline{JK}$  des Stabwerks als Funktion der Belastung und der vorgeschriebenen Randbedingungen  $\varphi_J^{(h)}$ ,  $\varphi_K^{(h)}$ ,  $\vartheta_h$ ,  $\varepsilon_h$  angegeben werden. Derartige Ansätze haben jedoch nur in Ausnahmefällen Bedeutung.

**Die Bedingungen für die geometrische Verträglichkeit der Knotenpunktfigur.** Die geometrische Verträglichkeit in dem vorgelegten Stabwerk oder in dem statisch und kinematisch äquivalenten Bilde der Knotenpunktfigur bedeutet an jedem Stabknoten  $J$  die gleiche Verschiebung aller angeschlossenen Stabenden

$$u_J^{(h)} = u_J, \quad v_J^{(h)} = v_J. \quad (518)$$

Bei steif angeschlossenen Stäben ist aus demselben Grunde

$$\varphi_J^{(h)} = \varphi_J. \quad (519)$$

Daher sind auch die Drehwinkel  $\varphi_J^{(h)}$  der Endtangente aller am Knoten  $J$  steif angeschlossener Stäbe einander gleich. Die Kontinuität von  $n$  steif am Knoten  $J$  angeschlossener Stäbe kann daher auch durch  $(n-1)$  unabhängige Bedingungen

$$\tau_J^{(h)} + \vartheta_h = \tau_J^{(h+1)} + \vartheta_{h+1} \quad (520)$$

ausgesprochen werden (vgl. Abschn. 41).

**Das geometrisch bestimmte Hauptssystem.** Der Spannungs- und Verschiebungszustand der einzelnen Abschnitte ( $h$ ) des Stabwerks ist wegen der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung am Stabknoten (518), (519) durch die  $r$  Drehwinkel  $\varphi_J$  und durch  $2(r+r_1)$  Punktverschiebungen  $u_J, v_J$  der Knotenpunktfigur bestimmt. Diese sind nach (282) die unabhängigen Unbekannten eines linearen Ansatzes, so daß die Knotenpunktfigur in Verbindung mit den Verträglichkeitsbedingungen am Stabknoten bei beliebig vorgeschriebenen Verschiebungen  $u_J, v_J, \varphi_J$  ( $u_J = 0, v_J = 0, \varphi_J = 0$ ) die Eigenschaften eines geometrisch bestimmten Hauptsystems erhält, für welches ausgezeichnete Werte  $u_J, v_J, \varphi_J$  bestimmt werden sollen. Die Knotenpunktfigur mit  $3r + 2r_1$  Freiheitsgraden wird also erst durch die Ausschaltung der kinematischen Beweglichkeit mit dem Zwang zur Kontinuität zum Hauptsystem: Hauptsystem  $A$ .

Die Komponenten  $u_J, v_J, \varphi_J$  des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur sind mit den Komponenten  $\varepsilon_h, \vartheta_h$  des Verschiebungszustandes der Abschnitte ( $h$ ) durch  $2s$  Transformationen (499) verknüpft, so daß auch diese an Stelle von  $u_J, v_J$  als unbekannte Größen verwendet werden können, soweit sie unabhängig voneinander sind. Der Verschiebungszustand des Stabwerks wird dann durch  $r$  Knotendrehwinkel  $\varphi_J$ , durch  $s-m = s^*$  (vgl. S. 312) bezogene Längenänderungen  $\varepsilon_h$  und durch  $(3r + 2r_1) - (r + s^*) = 2(r+r_1) - s^* = f_1$  ausgezeichnete, voneinander unabhängige Bestimmungsstücke  $\psi_o$  beschrieben, für die sich je nach der Art des Stabwerks Verschiebungen  $u_J, v_J$ , Stabdrehwinkel  $\vartheta_h$  oder die gegenseitige Verschiebung zweier Punkte und die gegenseitige Verdrehung zweier Geraden eignen (Abb. 296).

Die Verwendung dieser Komponenten des Verschiebungszustandes zu unabhängigen Unbekannten führt neben der Knotenpunktfigur noch zu einem anderen, dem Stabwerk statisch und geometrisch äquivalenten Bilde. Die Knotendrehwinkel  $\varphi_J$ , die bezogenen Längenänderungen  $\varepsilon_h$  und die ausgezeichneten Komponenten  $\psi_o$  bestimmen den Verschiebungszustand einer beweglichen, dem vorgeschriebenen Stabwerk statisch äquivalenten Scheibenkette, an welcher neben der Belastung  $\mathfrak{P}$  die Anschlußmomente  $M_J^{(h)}$  zwischen Stab und Knotenscheibe und die Längskräfte  $N_h$  ausgezeichneter Querschnitte  $T^{(h)}$  der Stäbe ( $h$ ) als äußere Kräfte wirken. Sie besteht daher aus den Knotenscheiben ( $J$ ) und den frei drehbar angeschlossenen Stäben ( $h$ ), die in den Querschnitten  $T^{(h)}$  unterbrochen und nur durch eine Führung



biegungssteif zusammengehalten sind (Abb. 289c). Die Scheibenkette ist mit den vorgeschriebenen Verschiebungen  $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$  (z. B.  $\varphi_J = 0, \varepsilon_h = 0, \psi_c = 0$ ) geometrisch bestimmt und wird durch Wahrung der dem Stabwerk eigentümlichen Kontinuität am Stabknoten  $J$  und am Querschnitt  $T^{(h)}$  ( $\varphi_J^{(h)} = \varphi_J, u_J^{(h)} = u_J, v_J^{(h)} = v_J$ ) ebenfalls zum geometrisch bestimmten Hauptsystem mit der Bezeichnung  $B$ . Es entsteht daher aus der Scheibenkette, deren kinematische Beweglichkeit durch die in den Stabknoten  $J$  und an den Querschnitten  $T^{(h)}$  vorgeschriebene Kontinuität aufgehoben wird.

In der Regel sind die Abmessungen der Knotenscheiben gegenüber den Stablängen verschwindend klein. Die Knotenscheibe wird angenähert zum materiellen Punkt, in dem sich alle Anschlußquerschnitte ( $h$ ) schneiden. Auf diese Weise entsteht eine Idealisierung der kinematisch beweglichen Scheibenkette, die als Knotenkette bezeichnet wird. Sie zählt ebenso wie die Knotenpunktfigur  $r + 2$  ( $r + r_1$ ) Freiheitsgrade und ist für vorgeschriebene Verschiebungen  $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$  geometrisch bestimmt. Die Knotenkette verliert ebenso wie die Scheibenkette durch die am Stabknoten  $J$  und am Querschnitt  $T^{(h)}$  vorgeschriebene Kontinuität die kinematische Beweglichkeit und wird dadurch zum geometrisch bestimmten Hauptsystem  $C$ .

Der Begriff der Knotenpunktfigur, der Scheibenkette oder Knotenkette und der Begriff des geometrisch bestimmten Hauptsystems  $A, B$  oder  $C$  haben daher die beliebige Annahme der Verschiebungen  $u_J, v_J, \varphi_J$  oder  $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$  gemeinsam. Während jedoch Knotenpunktfigur, Scheibenkette und Knotenkette kinematisch bewegliche Gebilde darstellen, sind die kinematischen Eigenschaften der drei mit  $A, B, C$  bezeichneten geometrisch bestimmten Hauptsysteme durch die Verträglichkeitsbedingungen gebunden. Diese sind bei beliebiger Annahme der Komponenten  $u_J, v_J, \varphi_J$  oder  $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$  ebenso erfüllt wie die Gleichgewichtsbedingungen eines statisch bestimmten Hauptsystems bei beliebiger Annahme der statisch überzähligen Größen  $X_k$ .

Jedes geometrisch bestimmte Hauptsystem enthält neben den unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes, die hier zunächst beliebig festgesetzt werden können, auch abhängige Komponenten, im Hauptsystem  $C$  z. B. die Verschiebungen  $u_H, v_H, \vartheta_h$ . Sie ergeben sich durch Superposition

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_h &= \vartheta_{h0} + \sum \vartheta_{hJ} \varphi_J + \sum \vartheta_{hc} \psi_c + \sum \vartheta_{h,ei} \varepsilon_i, \\ u_H &= u_{H0} + \sum u_{HJ} \varphi_J + \sum u_{Hc} \psi_c + \sum u_{H,ei} \varepsilon_i, \\ J &= A \dots N, \quad c = 1 \dots f, \quad i = 1 \dots s. \end{aligned} \right\} \quad (521)$$

Die Vorzahlen  $\vartheta_{hJ}, u_{HJ}$  sind im geometrisch bestimmten Hauptsystem  $C$  Null. Die Anteile  $\vartheta_{h0}, u_{H0}$  werden aus einem Verschiebungsplan der Knotenkette des Hauptsystems  $C$  entnommen, der mit  $\Delta l_{h0} = \varepsilon_{h0} l_h$  für  $\psi_c = 0$  ( $c = 1 \dots f$ ) gezeichnet wird. Die Stabdrehwinkel  $\vartheta_{hc}$  sind in einem Verschiebungsplan der Knotenkette für  $\psi_c = 1$  enthalten. Sie werden am einfachsten aus dem Polplan der Bewegung berechnet. Dieselben Betrachtungen lassen sich für die anderen beiden Hauptsysteme  $A$  und  $B$  wiederholen.

Mit dem Verschiebungszustand  $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$  des Hauptsystems  $B$  oder  $C$  sind nach (500) die Anschlußkräfte der Abschnitte ( $h$ ) und damit auch der Spannungszustand bestimmt. Die Ansätze (505) und (506) sind mit  $\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$  ebenfalls Ausdruck des Superpositionsgesetzes.

**Die geometrischen Bedingungen der Knotenkette.** Die dem Hauptsystem  $C$  zugeordnete Knotenkette wird durch  $\varepsilon_h = 0$  und Herausnahme der Knotenscheiben zur Stabkette (Abb. 289e). Diese ist im Sinne des Abschnitts 13 statisch bestimmt oder statisch unbestimmt. Bei  $m$  überzähligen Stäben ( $m \geq 0$ ) sind daher ebenso viele Längenänderungen  $\varepsilon_h$  der Stäbe oder Stabsehnen von den übrigen abhängig. Der Verschiebungszustand des Hauptsystems  $C$  ist daher durch  $r$  Knotendrehwinkel



$\varphi_j$ ,  $(s - m)$  bezogene Dehnungen  $\varepsilon_h$  und  $f_1 = 2(r + r_1) - (s - m)$  ausgezeichnete Komponenten  $\psi_e$  der Knotenkette bestimmt.  $f_1$  bedeutet den Freiheitsgrad der Stabkette.

Die Längen der Stäbe und Stabzugsehnern ändern sich mit der Temperatur und den inneren Kräften aus Belastung und Stützensenkung. Diese bestehen aus einem statisch bestimmten Anteil und einem statisch unbestimmten Anteil, der von dem biegeungssteifen Anschluß und den geometrisch überzähligen Stäben der Knotenkette herrührt. Die Längenänderung  $\varepsilon_h$  kann daher nach  $\varepsilon_h = \varepsilon_{h0} + \varepsilon_{h1} + \varepsilon_{h2}$  zerlegt werden. Die Dehnung  $\varepsilon_{h0}$  aus der Belastung des Stabes, den zugeordneten statisch bestimmten Anschlußkräften und einer Temperaturänderung  $t$ ,  $\Delta t$  ist bekannt und führt mit den Stützenverschiebungen zu den Stabdrehwinkeln  $\vartheta_{h0}$ . Die Dehnung  $\varepsilon_{h1}$  entsteht aus den statisch unbestimmten Anschlußkräften der

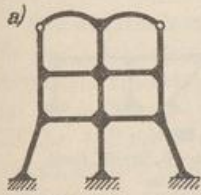


Abb. 289 a. Stabwerk.  
 $r=7$ ,  $r_1=2$ ,  
 $s_1=13$ ,  $s_2=2$ ,  $s=15$ ,  
 $m=0$ ,  $f_1=18-15=3$ ,  
 $r+s_2+f_1=12$  Unbekannte.

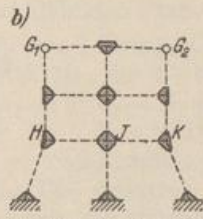


Abb. 289 b. Knotenpunktfigur.

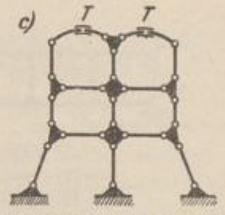


Abb. 289 c. Scheibenkette mit  $\varepsilon_h=0$  für alle geraden Stäbe.

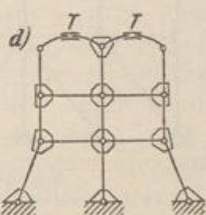


Abb. 289 d. Knotenkette mit  $\varepsilon_h=0$  für alle geraden Stäbe.

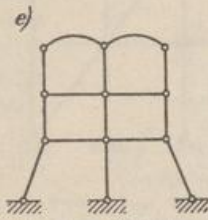


Abb. 289 e. Stabkette.

Stäbe. Sie ist in biegeungssteifen, geraden Stäben nahezu Null und darf unbedenklich vernachlässigt werden. Aus demselben Grunde werden die Dehnungen  $\varepsilon_{h2}$  infolge geometrisch überzähliger Stäbe in einem System berechnet, dessen Stabknoten durch Gelenke ersetzt sind.

Daher werden in einem Stabwerk die geraden und gekrümmten Stäbe unterschieden, deren Anzahl durch  $s_1$  und  $s_2$  bezeichnet wird ( $s = s_1 + s_2$ ). Die unabhängigen Komponenten  $\varepsilon_h$  der  $s_1$  geraden Stäbe sind dann im Ansatz Null oder der Größe nach vorgeschrieben, also bekannt. Diese Annahme trifft bei biegeungssteifen Stäben nahezu vollständig zu. Sie gilt dagegen bei unbelasteten Zugstäben nur als Näherung. Die Dehnung wird für diese zur Vereinfachung der Rechnung geschätzt, im Ergebnis geprüft und unter Umständen durch Iteration verbessert. Daher ist bei der Ausbildung des Hauptsystems die auf S. 311 erwähnte Teilung der Abschnitte ( $h$ ) und die Führung der Enden bei geraden Stäben unnötig.

Der Verschiebungszustand wird nunmehr durch  $r + f = (r + s_2^* + f_1)$  unbekannt Komponenten bestimmt. Sie bilden die überzähligen geometrischen Größen des Hauptsystems C.  $s_2^*$  ist die Anzahl der gekrümmten Stäbe mit geometrisch unabhängigen Längen. (Bei  $m = 0$  ist  $s_2^* = s_2$ .)

Diese Bemerkungen werden durch die folgende, für die theoretische Behandlung wichtige Einteilung der Stabwerke erläutert.



A. Stabwerke ohne geometrisch überzählige Stäbe:  $m = 0$ .

a) Stabwerke mit  $s_2$  Stabzügen und  $s_1$  geraden Stäben, deren Dehnungen  $\varepsilon_h$  vernachlässigt oder geschätzt werden. Anzahl der Unbekannten:  $r$  Knotendrehwinkel,  $s_2$  bezogene Längenänderungen von Stabzugsehnern,  $f_1 = 2(r + r_1) - s$  unabhängige Komponenten  $\psi_c$  der Stabkette,  $f = f_1 + s_2$  (Abb. 289a).

b) Stabwerke mit  $s = s_1 < 2(r + r_1) = s + f$  geraden Stäben, deren Dehnungen  $\varepsilon_h$  vernachlässigt oder geschätzt werden. Anzahl der Unbekannten:  $r$  Knotendrehwinkel,  $f = f_1 = 2(r + r_1) - s$  unabhängige Komponenten  $\psi_c$  der Stabkette (Abb. 290a).

c) Stabwerke mit  $s = s_1 = 2(r + r_1)$  geraden Stäben, welche die Knotenkette mit  $\varepsilon_h = 0$  oder  $\varepsilon_h = \varepsilon_{h0}$  geometrisch bestimmen. Anzahl der Unbekannten:  $r$  Knotendrehwinkel (Abb. 290b).

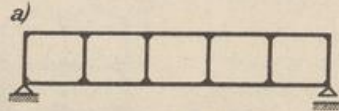


Abb. 290 a.

$$\begin{aligned} r &= 12, \quad s = s_1 = 19, \quad m = 0, \\ f_1 &= 24 - 19 = 5 = f, \\ r + f &= 17 \text{ Unbekannte.} \end{aligned}$$



Abb. 290 b.

$$\begin{aligned} r &= 5, \quad s = s_1 = 10, \quad s_2 = 0, \quad m = 0, \quad f_1 = 0, \\ r + s_2 + f_1 &= 5 \text{ Unbekannte.} \end{aligned}$$

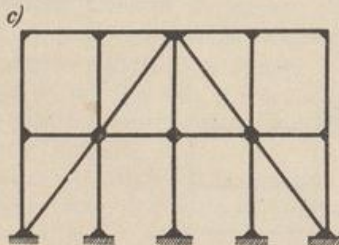


Abb. 290 c.

$$\begin{aligned} r &= 10, \quad s = s_1 = 22, \quad s_2 = 0, \quad m = 2, \\ f_1 &= 0, \quad r + s_2 + f_1 = 10 \text{ Unbekannte.} \end{aligned}$$

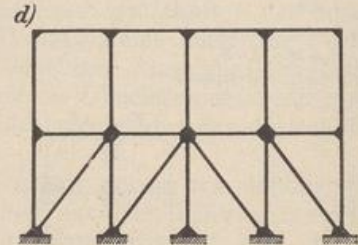


Abb. 290 d.

$$\begin{aligned} r &= 10, \quad s = s_1 = 22, \quad s_2 = 0, \quad m = 3, \\ f_1 &= 1, \quad r + s_2 + f_1 = 11 \text{ Unbekannte.} \end{aligned}$$

B. Stabwerke mit  $m$  geometrisch überzähligen Stäben.

Die Stablängenänderungen  $\varepsilon_h$  und  $\varepsilon_{h0}$  sind geometrisch voneinander abhängig und werden geschätzt oder unter Umständen nach S. 313 berechnet. Für ein Stabwerk mit  $s_1$  geraden und  $s_2$  gekrümmten Stäben ist  $f_1 = 2(r + r_1) - (s - m)$ , so daß  $r$  Knotendrehwinkel und  $f = s_2^* + f_1$  Komponenten  $\psi_c$  der Knotenkette mit  $\varphi_J = 0$  berechnet werden müssen (Abb. 290c, d).

**Die Aufgabe.** Das geometrisch bestimmte Hauptsystem (S. 311) ist mit dem vorgeschriebenen Stabwerk geometrisch und statisch äquivalent, wenn beide im Verschiebungszustand und im Spannungszustand übereinstimmen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich aus der Verträglichkeit des Verschiebungszustandes ( $u_J^{(h)} = u_J, v_J^{(h)} = v_J, \varphi_J^{(h)} = \varphi_J$ ) und aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte des Hauptsystems (Lasten und Anschlußkräfte  $M_J^{(h)}, N_J$ ). Die Verträglichkeitsbedingungen sind durch die Definition des Hauptsystems nach S. 311 für jede Annahme der Komponenten  $u_J, v_J, \varphi_J$  oder  $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$  erfüllt. Dasselbe gilt für die Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte der Stäbe. Daher ist zur Äquivalenz von Hauptsystem und Stabwerk nur noch das Gleichgewicht der äußeren Kräfte des Hauptsystems notwendig. Die notwendige und hinreichende Anzahl der Bedingungen wird mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an den in der Knotenkette enthaltenen ( $3r + 2r_1$ )



unabhängigen zwangläufigen Gebilden angeschrieben. Sie dienen zur eindeutigen Berechnung der unabhängigen Komponenten  $u_J, v_J, \varphi_J$  oder  $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$  des Verschiebungszustandes, aus denen die Anschlußkräfte  $M_J^{(h)}, N_h$  des Hauptsystems nach (521) und (500) hervorgehen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist nach Abschn. 8 ein Minimalprinzip der Elastizitätstheorie. Die gesamte potentielle Energie  $\Pi$  des Stabwerks wird für den wirklich vorhandenen Verschiebungszustand  $u_J, v_J, \varphi_J$  zum Minimum. Die partiellen Ableitungen der Funktion  $\Pi$  nach den  $(3r + 2r_1)$  unabhängigen Verschiebungskomponenten sind daher Null. Die Minimalbedingungen sind Gleichgewichtsbedingungen, so daß eine vollständige Analogie zu den theoretischen Grundlagen des Abschn. 24 (S. 163) vorhanden ist. Sie werden jedoch hier ebenso wie dort in integrierter Form als Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte eines beweglichen Gebildes angeschrieben.

**Die statischen Bedingungen zur Lösung.** Die statischen Bedingungen gelten für das Gleichgewicht der Schnittkräfte des Stabwerks an einem geometrisch bestimmten Hauptsystem  $A$  mit  $u_J = 0, v_J = 0, \varphi_J = 0$  ( $J = A \dots N$ ) oder  $B, C$  mit  $\varphi_J = 0, \varepsilon_h = 0, \psi_c = 0$  ( $J = A \dots N, c = 1 \dots f, h = 1 \dots s$ ). Sie enthalten die  $(3r + 2r_1) = (r + s + f_1 - m)$  unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes als unbekannte Größen des Ansatzes. Die  $(3r + 2r_1)$  Gleichgewichtsbedingungen werden nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten (83) für die äußeren Kräfte an ebenso vielen voneinander unabhängigen, beweglichen Gebilden mit einem Freiheitsgrad angeschrieben. Diese entstehen aus der Knotenpunktfigur, wenn der Reihe nach jede der  $(3r + 2r_1)$  Bindungen einzeln gelöst und durch eine ausgezeichnete virtuelle Verschiebung  $u_J \neq 0$  oder  $v_J \neq 0$  oder  $\varphi_J \neq 0$  ersetzt wird. Die Einführung virtueller Geschwindigkeiten  $\dot{u}_J \neq 0$  oder  $\dot{v}_J \neq 0$  oder  $\dot{\varphi}_J \neq 0$  an Stelle der virtuellen Verrückungen besitzt nach S. 40 nur formale Bedeutung. Die Bedingungsgleichungen erhalten folgende Form (Abb. 291):

$$\left. \begin{aligned} \sum_J N_J^{(h)} \cos \alpha_h + \sum_J Q_J^{(h)} \sin \alpha_h + X_J &= 0, \\ \sum_J N_J^{(h)} \sin \alpha_h - \sum_J Q_J^{(h)} \cos \alpha_h + Y_J &= 0, \\ M_J - \sum_J M_J^{(h)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (522)$$

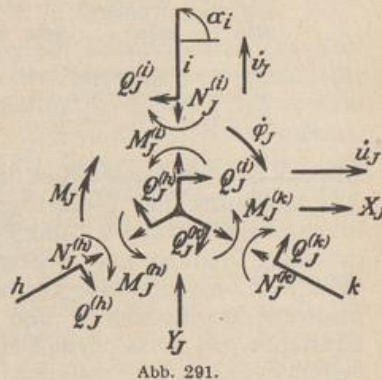


Abb. 291.

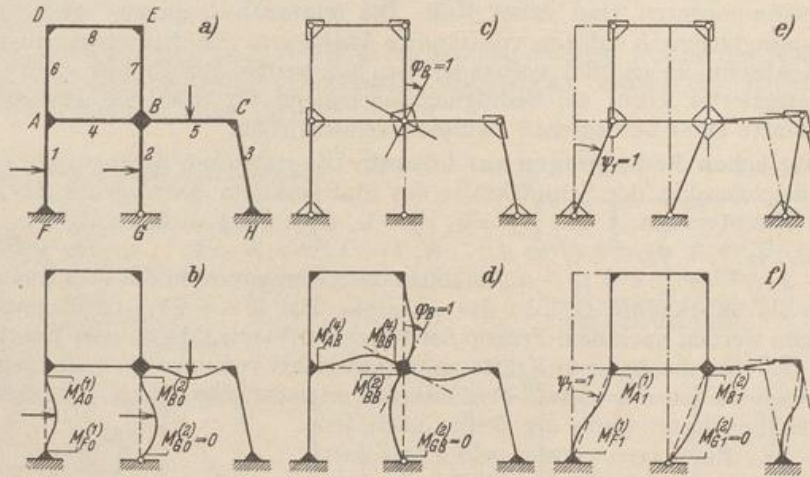
Der Ansatz ist für diejenigen Stabwerke ungeeignet, deren bezogene Längenänderungen  $\varepsilon_h$  für gerade Stäbe Null oder bekannt sind. Die  $(3r + 2r_1) = (r + s + f_1 - m)$  notwendigen, voneinander unabhängigen, zwangläufigen Gebilde werden daher besser aus dem geometrisch bestimmten Hauptsystem  $C$  abgeleitet. Dabei wird jede unabhängige Komponente  $\varphi_J, \psi_c, \varepsilon_h$  des Verschiebungszustandes des Hauptsystems der Reihe nach mit  $\varphi_J \neq 0$  oder  $\psi_c \neq 0$  oder  $\varepsilon_h \neq 0$  einzeln zum Freiwert der virtuellen Verrückung. Ohne die  $s_1$  bezogenen Längenänderungen  $\varepsilon_h$  der geraden Stäbe ( $\varepsilon_h = 0$  nach S. 313) lassen sich  $r$  unabhängige Bewegungen an ebenso vielen zwangläufigen Gebilden  $\Gamma_J$  mit  $\varphi_J \neq 0$  und  $f = f_1 + s_2$  unabhängige Bewegungen  $\psi_c \neq 0$  an ebenso vielen zwangläufigen Gebilden  $\Gamma_c$  unterscheiden. Sie werden nach S. 47 wiederum durch den Geschwindigkeitszustand  $\dot{\varphi}_J = 1$  oder  $\dot{\psi}_c = 1$  beschrieben, so daß die  $r + f = r + f_1 + s_2$  Gleichgewichtsbedingungen für die an jeder der  $r + f$  zwangläufigen Ketten angreifenden äußeren Kräfte (Belastung  $\mathfrak{P}$ , Anschlußkräfte  $M_J^{(h)}, N_h$ ) aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nach (83) hervorgehen. Sie werden nach dem Superpositionsgesetz als Funktionen der un-



bekannten Komponenten des Verschiebungszustandes des geometrisch bestimmten Hauptsystems entwickelt.

$$\left. \begin{aligned} \delta A_J &= a_{JJ} \varphi_J + \sum a_{JK} \varphi_K + \sum a_{Jc} \psi_c + a_{J0} = 0, \\ \delta A_c &= a_{cc} \psi_c + \sum a_{cb} \psi_b + \sum a_{cJ} \varphi_J + a_{c0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (523)$$

Die Vorzahlen  $a_{JJ}, a_{JK}, a_{Jc}$  sind virtuelle Arbeiten der Anschlußkräfte des geometrisch bestimmten Hauptsystems infolge von  $\varphi_J = 1, \varphi_K = 1, \psi_c = 1$  (Abb. 292 c bis f) bei einer Bewegung der kinematischen Kette  $\Gamma_J$  mit  $\dot{\varphi}_J = \dot{1}_J$ .



System und Hauptsystem mit  $\varphi_J = 0, \psi_c = 0, r = 5, m = 0, j = 2, \psi_1 = \theta_1, \psi_2 = \theta_2$ .

Knotenkette und Hauptsystem mit  $\varphi_B = 1$ .

Knotenkette und Hauptsystem mit  $\psi_1 = 1$ .

Abb. 292.

Ebenso ist das Absolutglied  $a_{J0}$  die virtuelle Arbeit der Belastung  $\mathfrak{P}$  und der Anschlußkräfte des geometrisch bestimmten Hauptsystems mit  $\varphi_J = 0, \psi_c = 0$  infolge der Belastung  $\mathfrak{P}$  (Abb. 292 b) bei einer Bewegung der Kette  $\Gamma_J$ . Diese besteht in einer Drehung des Knotens  $J$  (Abb. 293), so daß nur die Anschlußmomente am Knoten  $J$  und das Kräftepaar  $M_J$  in die virtuellen Arbeiten  $a_{JJ}, a_{JK}, a_{Jc}$  und  $a_{J0}$  ein-

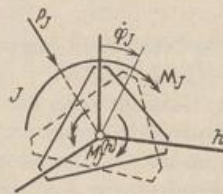


Abb. 293.

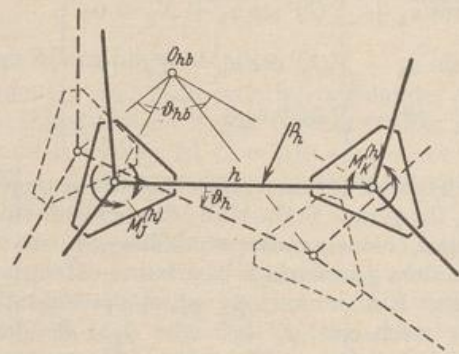


Abb. 294.

gehen. Der erste Index bezeichnet also Kette und Geschwindigkeitszustand, der zweite die Ursache der in dem Arbeitsausdruck enthaltenen Kräfte.

Die Vorzahlen  $a_{cc}, a_{cb}, a_{cJ}$  sind die virtuellen Arbeiten der Anschlußkräfte des Hauptsystems aus  $\psi_c = 1, \psi_b = 1, \varphi_J = 1$  (Abb. 292 c bis f) bei der Bewegung der Kette  $\Gamma_c$  mit  $\dot{\psi}_c = \dot{1}_c$ . Das Absolutglied  $a_{c0}$  ist die virtuelle Arbeit der Belastung  $\mathfrak{P}$  und der Anschlußkräfte des Hauptsystems mit  $\varphi_J = 0, \psi_c = 0$  infolge



der Belastung  $\mathfrak{P}$  (Abb. 292 b) bei einer Bewegung der Kette  $I_c$ . Diese erfährt meist nur einzelne Stäbe oder Stabgruppen. Jeder Stab ( $h$ ) beschreibt dabei in der Regel eine Drehung  $\vartheta_{hc}$  um einen der Momentanbewegung  $\dot{\psi}_c = \dot{i}_c$  zugeordneten Pol  $O_{hc}$ , der nach Abschn. 13 aufgezeichnet wird (Abb. 294). Mit diesem sind auch die Winkelgeschwindigkeiten  $v_{hc}$  der Stäbe ( $h$ ) bestimmt. Die unabhängigen Komponenten  $\dot{\varphi}_{Jc}, \dot{\psi}_{bc}$  der Bewegung sind dabei nach Vorschrift Null.

Die virtuelle Arbeit entsteht bei der Drehung eines Stabes  $h = \overline{JK}$  mit  $\varepsilon_h = 0$  aus den Anschlußmomenten  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$  und aus dem Moment  $M_{h,c}$  der Belastung  $\mathfrak{P}_h$  in bezug auf den Pol  $O_{hc}$  der Momentanbewegung  $\dot{\psi}_c = \dot{i}_c$ . Mit  $M_J^{(h)} + M_K^{(h)} = M^{(h)}$  ist daher

$$\delta A_c = \sum_c (M_{h,c} + M^{(h)}) v_{hc} = 0. \quad (524)$$

Ist der Stab ( $h$ ) nach S. 311 im Querschnitt  $T^{(h)}$  durch eine Führung unterbrochen ( $\varepsilon_h \neq 0$ ), so besitzen die beiden Teile zwar die gleiche Winkelgeschwindigkeit  $v_{hc}$ , drehen sich jedoch um verschiedene Pole  $O_{h'c}, O_{h''c}$ . Die Momente  $M_{h'c}, M_{h''c}$  der Belastung  $\mathfrak{P}_h$  und  $M_{h'c}^*, M_{h''c}^*$  der Längskräfte  $N_h$  in  $T^{(h)}$  werden daher für die beiden Pole  $O_{h'c}, O_{h''c}$  angeschrieben und folgendermaßen verwendet:

$$\delta A_c = \sum_c [(M_{h'c} + M_{h''c}) + (M_{h'c}^* + M_{h''c}^*) + M^{(h)}] v_{hc} = 0. \quad (525)$$

Die statischen Bedingungen zur Lösung lassen sich ebenso für das Hauptsystem  $B$  anschreiben. Dies wird an einem Beispiel im Abschn. 41 gezeigt. Im übrigen wird jedoch nur das Hauptsystem  $C$  und die zugeordnete Knotenkette als Berechnungsgrundlage verwendet, so daß die Bezeichnung  $C$  in Zukunft wegfällt.

**Anwendung der Lösung.** Die  $(r + f)$  unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes, die Knotendrehwinkel  $\varphi_J$  und die Komponenten  $\psi_c$  sind die Wurzeln eines linearen Ansatzes. Sie werden durch Elimination oder durch Iteration der Lösung bestimmt. Mit ihnen können dann alle übrigen Komponenten  $u_J, v_J, \vartheta_h, \varepsilon_h$  des Verschiebungszustandes nach (521) durch Superposition angegeben werden. Dasselbe gilt von den statisch unbestimmten Anschlußkräften  $M_J^{(h)}$ , die mit  $M_{J_0}^{(h)}, \varphi_J, \varphi_K, \vartheta_h$  und den Kontinuitätsbedingungen (518) oder (519) ebenfalls durch Superposition bestimmt sind.

Die statischen Bedingungen  $\delta A_J = 0$ , ( $J = A \dots N$ ) hängen in der Regel nur von wenigen Unbekannten  $\varphi_J, \psi_c$  ab, während die Gleichungen  $\delta A_c = 0$  oft alle unabhängigen Komponenten  $\varphi_J, \psi_c$  enthalten. Der Ansatz  $B$  eignet sich daher nur für Stabwerke mit wenigen gekrümmten Stäben und einem kleinen Freiheitsgrad  $f_1$  der Stabkette  $\varepsilon_h = 0$ . Er gewinnt damit aber gerade für diejenigen Stabwerke Bedeutung, deren statische Untersuchung mit den geometrischen Bedingungsgleichungen des Abschnitts 24 Schwierigkeiten bereitet. Die Lösung wird hier ebenso wie in den Abschnitten 27, 28 oft noch durch Symmetrie nach einer oder zwei Achsen in Verbindung mit Belastungsumordnung vereinfacht.

Der geometrische Charakter der Unbekannten erleichtert Schätzungen und Näherungslösungen. Die Vernachlässigung der Längenänderungen der geraden biegeunfähigen Stäbe, welche von den statisch unbestimmten Anschlußkräften  $N_K^{(h)}$  usw. herrühren, ist hierfür ein Beispiel. Dasselbe gilt für die Stabdrehwinkel  $\vartheta_h$  statisch bestimmter oder unbestimmter Fachwerke mit  $s \geq 2(r + r_1)$ . Sie können zur Berechnung der Nebenspannungen durch steife Anschlüsse der Fachwerkstäbe aus einem Verschiebungsplan abgeleitet werden, der für die Stabkräfte  $N_{h_0}$  und die Längenänderungen  $\Delta l_{h_0}$  bei gelenkigen Stabknoten aufgezeichnet wird ( $\vartheta_h = \vartheta_{h_0}$ ).

Mohr, O.: Ziviling. Bd. 38 (1892) und Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1906. — Müller-Breslau, H.: Graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2 2. Abt. Leipzig 1908. — Bendixsen, A.: Die Methode der Alphagleichungen. Berlin 1914. — Marcus, H.: Die Einflußlinien mehrfach gestützter Rahmenträger. Berlin 1915. —



Ostenfeld, A.: Die Deformationsmethode. Berlin 1926. Außerdem Aufsätze über das gleiche Thema: Eisenbau 1921 S. 275; Bauing. 1923 S. 34. — Mann, L.: Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. Berlin 1927. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefestester Stab- und Flächentragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.

### 39. Das Stabwerk mit geraden Stäben.

Die Untersuchung eines Stabwerks mit geraden oder mit geraden und gekrümmten Stäben zeigt keine grundsätzlichen Unterschiede. Sie ist nur für gerade Stäbe einfacher und wird daher vorweggenommen. Das Stabwerk besteht in diesem Falle aus  $s = s_1$  geraden Stäben,  $r$  Stabknoten mit steifen oder gelenkigen Anschlüssen und aus  $r_1$  Gelenken. Die mit dem Knoten  $J$  steif verbundenen Stäbe sind entweder mit dem benachbarten Stabknoten  $K$  ebenfalls starr verbunden (Bezeichnung  $h$ ) oder am benachbarten Stabknoten  $G$  durch ein Gelenk angeschlossen (Bezeichnung  $g$ ). Andere Verbindungen sind selten. Stäbe mit freiem Ende werden als Teile des Stabknotens behandelt.

**Hauptsystem und geometrische Superposition.** Der Spannungszustand des Stabwerks ist äquivalent demjenigen einer Knotenkette, wenn die Anschlussmomente des Stabwerks zu den Lasten als äußere Kräfte hinzutreten. Der Verschiebungszustand ist durch  $r$  Knotendrehwinkel  $\varphi_J$  und  $f = f_1$  voneinander unabhängige Komponenten  $\psi_c$  bestimmt. Sie werden in einem geometrisch bestimmten, der Knotenkette zugeordneten Hauptsystem mit  $\varphi_J = 0$  ( $J = A \dots N$ ),  $\psi_c = 0$  ( $c = 1 \dots f$ ) berechnet.  $f$  bezeichnet den Freiheitsgrad der Knotenkette mit  $\varphi_J = 0$ ,  $\varepsilon_h = 0$ . In Übereinstimmung mit anderen Ansätzen der Baustatik werden stets die  $EJ_c$ -fachen Komponenten des Verschiebungszustandes verwendet und diese in Zukunft durch  $\varphi_J$ ,  $\vartheta_h$ ,  $\varepsilon_h$ ,  $u_J$  bezeichnet. Das Vergleichsträgheitsmoment  $J_c$  wird nach S. 92 ausgewählt.

Die abhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes sind nach (521) lineare Funktionen der unbekanntenen Größen  $\psi_c$  ( $c = 1 \dots f$ )

$$\vartheta_h = \vartheta_{h0} + \sum \vartheta_{hc} \psi_c, \quad u_J = u_{J0} + \sum u_{Jc} \psi_c. \quad (526)$$

Die Stabdrehwinkel  $\vartheta_{h0}$  und die Punktverschiebungen  $u_{J0}$  des geometrisch bestimmten Hauptsystems entstehen aus den Stützenverschiebungen  $EJ_c \Delta_e$ , den Längenänderungen  $EJ_c \Delta l_{h0}$  infolge der Längskräfte  $N_{h0}$  und der Temperaturänderung  $t$  bei  $\psi_c = 0$ .

$$EJ_c \Delta l_{h0} = N_{h0} \frac{J_h}{F_h} l'_h + EJ_c \alpha_t t l_h. \quad (527)$$

Die Stabdrehwinkel  $\vartheta_{h0}$  werden hieraus nach Abschn. 13 für jeden Stab numerisch berechnet oder durch einen Williot'schen Verschiebungsplan für die Knotenkette zeichnerisch bestimmt. Die Vorzahlen  $\vartheta_{hc}$  sind die Stabdrehwinkel des Hauptsystems für  $\psi_c = 1$ . Auch diese werden aus einem Verschiebungsplan oder durch Rechnung aus dem Polplan der  $\psi_c \neq 0$  zugeordneten zwangsläufigen Kette  $\Gamma_c$  des Hauptsystems erhalten.

Der Rahmenbinder Abb. 295 enthält eine Stabkette mit fünf Freiheitsgraden. Die folgenden Komponenten des Verschiebungszustandes sind unabhängig voneinander.

- $\psi_1$  absoluter Drehwinkel des Stabes 1,
- $\psi_2$  Änderung des Stabzugwinkels  $\sphericalangle BAC$ ,
- $\psi_3$  Änderung des Stabzugwinkels  $\sphericalangle DCE$ ,
- $\psi_4$  parallele Verschiebung des Stabes 6 relativ zum Stab  $CD$ ,
- $\psi_5$  Änderung des Stabzugwinkels  $\sphericalangle CDF$ .

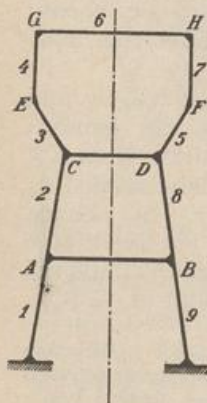


Abb. 295.