



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Die Randwerte des Spannungszustandes der Abschnitte (h) und der  
Knotenpunktfigur des Stabwerks

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Bei einem Stabwerk mit  $r$  Stabknoten und  $r_1$  Gelenken sind daher  $(3r + 2r_1)$  Komponenten des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur unbekannt.

**Die geometrischen Randwerte für den Verschiebungszustand eines Abschnitts ( $h$ ).** Die Endquerschnitte  $J, K$  des Abschnitts ( $h$ ) bewegen sich in der Richtung  $x, y$  um die Strecken  $u_J^{(h)}, v_J^{(h)}$  und  $u_K^{(h)}, v_K^{(h)}$ . Dabei drehen sich die Endtangente um die Winkel  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}$ . Sie werden ebenso wie die Knotendrehwinkel im Uhrzeigersinn positiv gerechnet. Die relative Verschiebung  $(u_K^{(h)} - u_J^{(h)}, v_K^{(h)} - v_J^{(h)})$  hängt von der Formänderung des Abschnitts ( $h$ ) ab. Nach Abb. 285 ist

$$(x_K - x_J) = l_h \cos \alpha_h, \quad (y_K - y_J) = l_h \sin \alpha_h. \quad (497)$$

Durch die Belastung des Stabwerks wird aus

$$\begin{aligned} x_K &\rightarrow x_K + u_K^{(h)}, & y_K &\rightarrow y_K + v_K^{(h)}, \\ l_h &\rightarrow l_h + \Delta l_h = l_h(1 + \varepsilon_h), & \alpha_h &\rightarrow \alpha_h + \vartheta_h, \end{aligned}$$

so daß durch Variation von (497) folgende Verträglichkeitsbedingungen entstehen:

$$\left. \begin{aligned} u_K^{(h)} - u_J^{(h)} &= \varepsilon_h(x_K - x_J) - \vartheta_h(y_K - y_J), \\ v_K^{(h)} - v_J^{(h)} &= \varepsilon_h(y_K - y_J) + \vartheta_h(x_K - x_J). \end{aligned} \right\} \quad (498)$$

Die bezogene Längenänderung  $\varepsilon_h$  der Stabzugsehne  $l_h$  wird als Verlängerung, der Stabdrehwinkel  $\vartheta_h$  im Uhrzeigersinn positiv gerechnet. Da die Anzahl ( $s$ ) der Abschnitte ( $h$ ) stets größer oder gleich der Summe  $(r + r_1)$  der Knoten ist, können die  $2(r + r_1)$  Komponenten  $u_J, v_J$  des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur stets durch die  $2s$  Randwerte  $\varepsilon_h, \vartheta_h$  des Verschiebungszustandes der Stäbe ausgedrückt werden. Daraus ergibt sich dann auch die Möglichkeit, die Verdrehungen  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}$  der Endtangente der Stäbe ( $h$ ) durch die Winkel  $\tau_J^{(h)}, \tau_K^{(h)}$  auf die Gerade  $\overline{J'K'}$  zu beziehen und unabhängig vom Stabdrehwinkel  $\vartheta_h$  zu beschreiben. Sie werden ebenfalls im Uhrzeigersinn positiv gemessen. Die Randwerte sind nach Abb. 285 untereinander durch die folgenden geometrischen Beziehungen verknüpft:

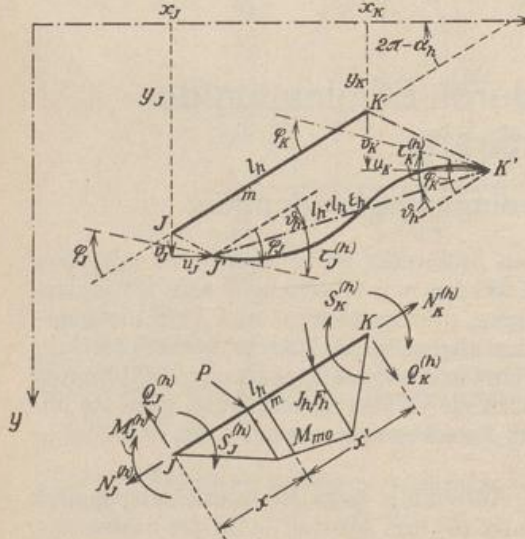


Abb. 285.

$$\varphi_J^{(h)} = \tau_J^{(h)} + \vartheta_h, \quad \varphi_K^{(h)} = \tau_K^{(h)} + \vartheta_h, \quad (u_K^{(h)} - u_J^{(h)}) \cos \alpha_h + (v_K^{(h)} - v_J^{(h)}) \sin \alpha_h = \varepsilon_h l_h. \quad (499)$$

Der Ansatz dient zur algebraischen Transformation der Verschiebungen  $u_J^{(h)}, v_J^{(h)}, \varphi_J^{(h)}$  in die Komponenten  $\varepsilon_h, \vartheta_h, \tau_J^{(h)}$  des Verschiebungszustandes.

**Die Randwerte des Spannungszustandes der Abschnitte ( $h$ ) und der Knotenpunktfigur des Stabwerks.** Durch die Zerlegung des Stabwerks in die Abschnitte ( $h$ ) und in die Knotenpunktfigur werden die in jedem freien Querschnitt vorhandenen Schnittkräfte  $N, M, Q$  des Stabwerks paarweise zu äußeren Kräften am Abschnitt ( $h$ ) und am Knotenpunkt ( $J$ ). Sie werden als Anschlußkräfte bezeichnet. Bei dem Querschnitt durch ein Gelenk ist das Anschlußmoment Null. Der positive Sinn dieser äußeren Kräfte wird in einer für die Ableitung geeigneten Form vereinbart. Die Längskräfte  $N_J^{(h)}, N_K^{(h)}$  der Abschnitte ( $h$ ) sind als Zug-



kräfte positiv. Die Biegemomente  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$  werden an den freien Querschnitten des Stabes als positiv bezeichnet, wenn ihr Drehsinn mit der Richtung des Uhrzeigers übereinstimmt. Die positiven Richtungen der Querkräfte  $Q_J^{(h)}, Q_K^{(h)}$  sind in Abb. 285 festgesetzt.

Jedem Gelenk  $G$  der Knotenpunktfigur ist eine resultierende Kraft  $\mathfrak{P}_G$ , jedem Stabknoten  $J$  außer  $\mathfrak{P}_J$  noch ein resultierendes Kräftepaar  $M_J$  zugeordnet, die mit den Anschlußkräften an den freien Querschnitten im Gleichgewicht stehen. Dasselbe gilt von der Belastung  $\mathfrak{P}_h$  des Abschnitts  $(h)$  und den sechs Anschlußkräften der beiden freien Querschnitte  $J, K$ . Von diesen sind drei statisch unbestimmt. Am besten eignen sich  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_K^{(h)}$  als überzählige Größen. Ist der Abschnitt  $(h)$  im Stabwerk an dem einen Ende steif, an dem anderen frei drehbar angeschlossen, so sind zwei Anschlußkräfte statisch unbestimmt. Bei zwei Gelenken ist nur eine statisch überzählige Größe  $N_K^{(h)}$  vorhanden.

Der Spannungszustand eines jeden Abschnitts  $(h)$  wird, abgesehen von der Belastung  $\mathfrak{P}_h$  und einer Temperaturänderung  $t, \Delta t$ , durch die geometrischen Randwerte  $\varepsilon_h, \vartheta_h$  der relativen Verschiebung der Stabenden und durch die Drehwinkel der Stabendtangente bestimmt. Diese sind mit  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}$  oder relativ zu  $J'K'$  (Abb. 285) mit  $\tau_J^{(h)}, \tau_K^{(h)}$  vorgeschrieben, so daß die statisch unbestimmten Anschlußkräfte des Stabes nach dem Superpositionsgesetz folgendermaßen zerlegt werden:

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J_0}^{(h)} + M_{J_1}^{(h)} \varphi_J^{(h)} + M_{J_2}^{(h)} \varphi_K^{(h)} + M_{J_3}^{(h)} \vartheta_h + M_{J_4}^{(h)} \varepsilon_h, \\ M_K^{(h)} &= M_{K_0}^{(h)} + M_{K_1}^{(h)} \varphi_J^{(h)} + M_{K_2}^{(h)} \varphi_K^{(h)} + M_{K_3}^{(h)} \vartheta_h + M_{K_4}^{(h)} \varepsilon_h, \\ N_K^{(h)} &= N_{K_0}^{(h)} + N_{K_1}^{(h)} \varphi_J^{(h)} + N_{K_2}^{(h)} \varphi_K^{(h)} + N_{K_3}^{(h)} \vartheta_h + N_{K_4}^{(h)} \varepsilon_h. \end{aligned} \right\} \quad (500)$$

Sind die geometrischen Randwerte  $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \varepsilon_h, \vartheta_h$  Null, so entstehen mit  $M_J^{(h)} = M_{J_0}^{(h)}$  usw. die statisch unbestimmten Anschlußkräfte des beiderseits starr eingespannten Stabes oder Stabzugs aus Belastung  $\mathfrak{P}$  und Temperaturänderung  $\Delta t$ . Die Anschlußkräfte  $M_{J_1}^{(h)}, M_{J_2}^{(h)}, M_{J_3}^{(h)}, M_{J_4}^{(h)}$  sind die Anschlußkräfte des beiderseits starr eingespannten, unbelasteten Stabes mit vorgeschriebenen Randbedingungen  $\varphi_J^{(h)} = 1, \varphi_K^{(h)} = 1, \vartheta_h = 1, \varepsilon_h = 1$ . Die Stäbe mit biegungsstiftem Anschluß in  $J$  und einem Gelenk  $G$  am anderen Ende werden durch die Bezeichnung  $l_v$  unterschieden. Bei ihnen ist  $M_G^{(g)} = 0$  und

$$\left. \begin{aligned} M_G^{(g)} &= M_{G_0}^{(g)} + M_{G_1}^{(g)} \varphi_J^{(g)} + M_{G_3}^{(g)} \vartheta_g + M_{G_4}^{(g)} \varepsilon_g, \\ N_G^{(g)} &= N_{G_0}^{(g)} + N_{G_1}^{(g)} \varphi_J^{(g)} + N_{G_3}^{(g)} \vartheta_g + N_{G_4}^{(g)} \varepsilon_g. \end{aligned} \right\} \quad (501)$$

Die Vorzahlen sind die Anschlußkräfte des einseitig starr eingespannten, in  $G$  gelenkig angeschlossenen Stabes aus den Randbedingungen  $\varphi_J^{(g)} = 1, \vartheta_g = 1, \varepsilon_g = 1$ . Das Ergebnis kann unmittelbar angeschrieben oder aus der Lösung für den beiderseits eingespannten Stab mit der Bedingung  $M_K^{(h)} \equiv M_G^{(g)} = 0$  abgeleitet werden. Diese liefert  $\varphi_G^{(g)}$  und damit die Anschlußkräfte  $M_G^{(g)}, N_G^{(g)}$ .

**Gerade Stäbe.** a) Der Stab  $(h)$  ist an beiden Enden  $J$  und  $K$  biegungsstif angeschlossen. Die Schnittkräfte  $M_{J_4}^{(h)}, N_{K_1}^{(h)}, N_{K_2}^{(h)}, N_{K_3}^{(h)}$  sind in (500) Null,  $N_{K_4}^{(h)} = EF_h$  und daher

$$N_K^{(h)} = N_{K_0}^{(h)} + EF_h \varepsilon_h. \quad (502)$$

Die beiden anderen statisch unbestimmten Anschlußkräfte  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$  werden unter Beachtung der Vorzeichen am einfachsten nach Abschn. 26 berechnet. Um dabei die bekannten Bezeichnungen beizubehalten, tritt hier zunächst für den Buchstaben  $J$  die Ziffer 1, für den Buchstaben  $K$  die Ziffer 2. Die Vorzahlen und Belastungszahlen  $\delta$  sind hier jedoch ebenso wie  $\varphi$  und  $\vartheta$  wirkliche Winkel, sie bezeichnen also nicht wie in Abschn. 26 den  $EJ_e$  fachen Betrag. Die Endquerschnitte 1, 2 des statisch bestimmten Stabes drehen sich infolge Belastung  $\mathfrak{P}_h$  und Temperatur-