Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Gerade Stäbe

kräfte positiv. Die Biegungsmomente $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$ werden an den freien Querschnitten des Stabes als positiv bezeichnet, wenn ihr Drehsinn mit der Richtung des Uhrzeigers übereinstimmt. Die positiven Richtungen der Querkräfte $Q_J^{(h)}, Q_K^{(h)}$ sind in Abb. 285 festgesetzt.

Jedem Gelenk G der Knotenpunktfigur ist eine resultierende Kraft $\mathfrak{P}_G$, jedem Stabknoten J außer $\mathfrak{P}_J$ noch ein resultierendes Kräftepaar M_J zugeordnet, die mit den Anschlußkräften an den freien Querschnitten im Gleichgewicht stehen. Dasselbe gilt von der Belastung $\mathfrak{P}_h$ des Abschnitts (h) und den sechs Anschlußkräften der beiden freien Querschnitte J, K. Von diesen sind drei statisch unbestimmt. Am besten eignen sich $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_K^{(h)}$ als überzählige Größen. Ist der Abschnitt (h) im Stabwerk an dem einen Ende steif, an dem anderen frei drehbar angeschlossen, so sind zwei Anschlußkräfte statisch unbestimmt. Bei zwei Gelenken ist nur eine statisch überzählige Größe $N_K^{(h)}$ vorhanden.

Der Spannungszustand eines jeden Abschnitts (h) wird, abgesehen von der Belastung $\mathfrak{P}_h$ und einer Temperaturänderung $t, \Delta t$, durch die geometrischen Randwerte $\varepsilon_h, \vartheta_h$ der relativen Verschiebung der Stabenden und durch die Drehwinkel der Stabendtangenten bestimmt. Diese sind mit $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}$ oder relativ zu $\overline{J'K'}$ (Abb. 285) mit $\tau_J^{(h)}, \tau_K^{(h)}$ vorgeschrieben, so daß die statisch unbestimmten Anschlußkräfte des Stabes nach dem Superpositionsgesetz folgendermaßen zerlegt werden:

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + M_{J1}^{(h)}\varphi_J^{(h)} + M_{J2}^{(h)}\varphi_K^{(h)} + M_{J3}^{(h)}\vartheta_h + M_{J4}^{(h)}\varepsilon_h,\\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + M_{K1}^{(h)}\varphi_J^{(h)} + M_{K2}^{(h)}\varphi_K^{(h)} + M_{K3}^{(h)}\vartheta_h + M_{K4}^{(h)}\varepsilon_h,\\ N_K^{(h)} &= N_{K0}^{(h)} + N_{K1}^{(h)}\varphi_J^{(h)} + N_{K2}^{(h)}\varphi_K^{(h)} + N_{K3}^{(h)}\vartheta_h + N_{K4}^{(h)}\varepsilon_h. \end{aligned}\right\} \tag{500}$$

Sind die geometrischen Randwerte $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \varepsilon_h, \vartheta_h$ Null, so entstehen mit $M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)}$ usw. die statisch unbestimmten Anschlußkräfte des beiderseits starr eingespannten Stabes oder Stabzugs aus Belastung $\mathfrak{P}$ und Temperaturänderung Δt. Die Anschlußkräfte $M_{J1}^{(h)}, M_{J2}^{(h)}, M_{J3}^{(h)}, M_{J4}^{(h)}$ sind die Anschlußkräfte des beiderseits starr eingespannten, unbelasteten Stabes mit vorgeschriebenen Randbedingungen $\varphi_J^{(h)} = 1, \varphi_K^{(h)} = 1, \vartheta_h = 1, \varepsilon_h = 1$. Die Stäbe mit biegungssteifem Anschluß in J und einem Gelenk G am anderen Ende werden durch die Bezeichnung l_g unterschieden. Bei ihnen ist $M_G^{(g)} = 0$ und

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(g)} &= M_{J0}^{(g)} + M_{J1}^{(g)}\varphi_J^{(g)} + M_{J3}^{(g)}\vartheta_g + M_{J4}^{(g)}\varepsilon_g,\\ N_G^{(g)} &= N_{G0}^{(g)} + N_{G1}^{(g)}\varphi_J^{(g)} + N_{G3}^{(g)}\vartheta_g + N_{G4}^{(g)}\varepsilon_g. \end{aligned}\right\} \tag{501}$$

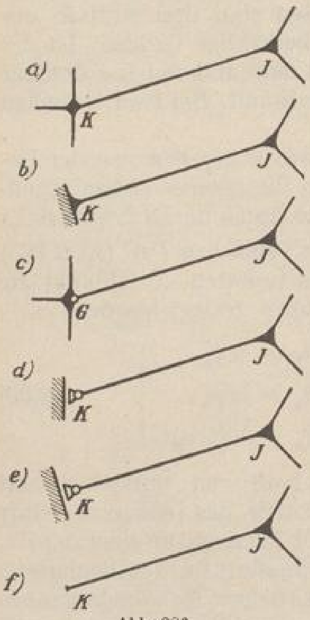
Die Vorzahlen sind die Anschlußkräfte des einseitig starr eingespannten, in G gelenkig angeschlossenen Stabes aus den Randbedingungen $\varphi_J^{(g)} = 1, \vartheta_g = 1, \varepsilon_g = 1$. Das Ergebnis kann unmittelbar angeschrieben oder aus der Lösung für den beiderseits eingespannten Stab mit der Bedingung $M_K^{(g)} \equiv M_G^{(g)} = 0$ abgeleitet werden. Diese liefert $\varphi_G^{(g)}$ und damit die Anschlußkräfte $M_J^{(g)}, N_G^{(g)}$.

Gerade Stäbe. a) Der Stab (h) ist an beiden Enden J und K biegungssteif angeschlossen. Die Schnittkräfte $M_{J4}^{(h)}, N_{K1}^{(h)}, N_{K2}^{(h)}, N_{K3}^{(h)}$ sind in (500) Null, $N_{K4}^{(h)} = EF_h$ und daher

$$N_K^{(h)} = N_{K0}^{(h)} + EF_h\varepsilon_h. \tag{502}$$

Die beiden anderen statisch unbestimmten Anschlußkräfte $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$ werden unter Beachtung der Vorzeichen am einfachsten nach Abschn. 26 berechnet. Um dabei die bekannten Bezeichnungen beizubehalten, tritt hier zunächst für den Buchstaben J die Ziffer 1, für den Buchstaben K die Ziffer 2. Die Vorzahlen und Belastungszahlen δ sind hier jedoch ebenso wie φ und ϑ wirkliche Winkel, sie bezeichnen also nicht wie in Abschn. 26 den EJ_cfachen Betrag. Die Endquerschnitte 1, 2 des statisch bestimmten Stabes drehen sich infolge Belastung $\mathfrak{P}_h$ und Temperaturänderung Δt um δ_{10} und δ_{20}, infolge der Stützenverschiebungen um $\delta_{1s} = \varphi_J^{(h)} - \vartheta_h$, $\delta_{2s} = \varphi_K^{(h)} - \vartheta_h$, so daß bei veränderlichem Trägheitsmoment

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= \frac{\delta_{10} - \delta_{20}\,\delta_{12}/\delta_{22}}{\delta_{11} - \delta_{12}\,\delta_{12}/\delta_{22}} + \frac{\delta_{1s} - \delta_{2s}\,\delta_{12}/\delta_{22}}{\delta_{11} - \delta_{12}\,\delta_{12}/\delta_{22}} \\ &= M_{J0}^{(h)} + \beta_{11}\,\varphi_J^{(h)} + \beta_{12}\,\varphi_K^{(h)} - (\beta_{11} + \beta_{12})\,\vartheta_h\,, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \beta_{12}\,\varphi_J^{(h)} + \beta_{22}\,\varphi_K^{(h)} - (\beta_{22} + \beta_{12})\,\vartheta_h\,. \end{aligned}\right\} \tag{503}$$



Beiderseits elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$.

Starr und elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)} = 0, \vartheta_h, \varepsilon_h$.

Gelenkig gelagerter und elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $M_G = 0, \varphi_J^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$.

Schräg geführter und elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $\vartheta_h = f(\varepsilon_h), M_K = 0, \varphi_J^{(h)}, \dfrac{Q_K}{N_K} = \operatorname{tg}\alpha$.

Senkrecht geführter und elastisch eingespannter Stab.
Randbedingungen: $Q_K = 0, M_K = 0, \varphi_J^{(h)}, \varepsilon_h$.

Elastisch eingespannter Stab mit freiem Ende.
Randbedingungen: $M_K = 0, Q_K = 0, N_K = 0, \varphi_J^{(h)}$.

Abb. 286.

Bei symmetrischen Stäben ist $\delta_{11} = \delta_{22}$, also auch $\beta_{11} = \beta_{22}$. Die Vorzahlen können bei einer stetigen Veränderung des Querschnitts angenähert nach **Tabelle 13**a, b berechnet werden.

Ist J_h im Bereich von l_h konstant, so ist

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l_h}{3EJ_h}, \quad \delta_{12} = -\frac{l_h}{6EJ_h}, \quad \beta_{11} = \beta_{22} = \frac{4EJ_h}{l_h}, \quad \beta_{12} = \frac{2EJ_h}{l_h}. \tag{504}$$

Die statisch unbestimmten Anschlußkräfte können daher bei vorgeschriebenen Randbedingungen $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$ unmittelbar angegeben werden. Damit sind alle Anschlußkräfte des Stabes (h) bekannt.

1. Die Stabenden J und K sind elastisch drehbar (Abb. 286a):

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + 2\,\frac{EJ_h}{l_h}\,(2\,\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)} - 3\,\vartheta_h)\,, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + 2\,\frac{EJ_h}{l_h}\,(\varphi_J^{(h)} + 2\,\varphi_K^{(h)} - 3\,\vartheta_h)\,, \\ N_K^{(h)} &= N_{K0}^{(h)} + EF_h\,\varepsilon_h\,, \qquad N_J^{(h)} = N_{J0}^{(h)} + EF_h\,\varepsilon_h\,, \\ Q_J^{(h)} &= Q_{J0}^{(h)} - 6\,\frac{EJ_h}{l_h^2}\,(\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)} - 2\,\vartheta_h)\,, \\ Q_K^{(h)} &= Q_{K0}^{(h)} - 6\,\frac{EJ_h}{l_h^2}\,(\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)} - 2\,\vartheta_h)\,. \end{aligned}\right\} \tag{505}$$

2. Das Stabende J ist elastisch drehbar, das Ende K ist starr eingespannt (Abb. 286b), $\varphi_K^{(h)} = 0$:

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + 2\,\frac{E\,J_h}{l_h}\,(2\,\varphi_J^{(h)} - 3\,\vartheta_h), & M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + 2\,\frac{E\,J_h}{l_h}\,(\varphi_J^{(h)} - 3\,\vartheta_h), \\ N_J^{(h)} &= N_{J0}^{(h)} + \varepsilon_h\,E\,F_h, & N_K^{(h)} &= N_{K0}^{(h)} + \varepsilon_h\,E\,F_h, \\ Q_J^{(h)} &= Q_{J0}^{(h)} - 6\,\frac{E\,J_h}{l_h^2}\,(\varphi_J^{(h)} - 2\,\vartheta_h), & Q_K^{(h)} &= Q_{K0}^{(h)} - 6\,\frac{E\,J_h}{l_h^2}\,(\varphi_J^{(h)} - 2\,\vartheta_h). \end{aligned}\right\} \quad (506)$$

Die Anschlußkräfte $M_{J0}^{(h)}$, $M_{K0}^{(h)}$ des beiderseits starr eingespannten Stabes aus $\mathfrak{P}_h$ und $\Delta t = t_u - t_o$ können bei unveränderlichem Stabquerschnitt folgendermaßen berechnet werden (Abb. 287):

$$\left.\begin{aligned} M_{J0}^{(h)} &= \frac{2}{l_h^2}\,(2\,S_K^{(h)} + S_J^{(h)}), \\ M_{K0}^{(h)} &= \frac{2}{l_h^2}\,(2\,S_J^{(h)} + S_K^{(h)}), \\ S_J^{(h)} &= \int_0^{l_h} M_{m0}^{(0)}\,x\,dx + \frac{E\,J_h\,l_h^2}{2}\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}; \\ S_K^{(h)} &= -\int_0^{l_h} M_{m0}^{(0)}\,x'\,dx' - \frac{E\,J_h\,l_h^2}{2}\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}. \end{aligned}\right\} \quad (507)$$

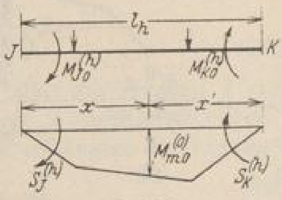


Abb. 287.

$M_{m0}^{(0)}$ sind die Biegungsmomente aus der Belastung und $M_{J0}^{(h)} = M_{K0}^{(h)} = 0$.

b) Der Stab (g) ist in J steif, in G gelenkig angeschlossen (Abb. 286c). Die Schnittkräfte $M_{G4}^{(g)}$, $N_{G1}^{(g)}$, $N_{G3}^{(g)}$ sind in (501) Null. $N_{G4}^{(g)} = EF_g$ und daher

$$N_G^{(g)} = N_{G0}^{(g)} + E\,F_g\,\varepsilon_g\,. \quad (508)$$

Das Anschlußmoment $M_J^{(g)}$ wird unter Beachtung der Vorzeichen nach Abschn. 26, jedoch unter Verwendung der wirklichen Vorzahlen und Belastungszahlen δ, berechnet. Mit der Bezeichnung $J \equiv$ Ziffer 1 ist die Verdrehung dieses Endquerschnitts durch die Belastung $\mathfrak{P}_g$ und eine ungleichförmige Temperaturänderung Δt des Stabes δ_{10} und $\delta_{1s} = \varphi_J^{(g)} - \vartheta_g$.

$$M_J^{(g)} = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} + \frac{\delta_{1s}}{\delta_{11}} = M_{J0}^{(g)} + \frac{1}{\delta_{11}}\,(\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g)\,. \quad (509)$$

Bei konstantem Querschnitt F_g, J_g im Bereich von l_g ist

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(g)} &= M_{J0}^{(g)} + \frac{3\,E\,J_g}{l_g}\,(\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g), & & \\ N_G^{(g)} &= N_{G0}^{(g)} + E\,F_g\,\varepsilon_g, & N_J^{(g)} &= N_{J0}^{(g)} + E\,F_g\,\varepsilon_g, \\ Q_J^{(g)} &= Q_{J0}^{(g)} - \frac{3\,E\,J_g}{l_g^2}\,(\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g), & Q_G^{(g)} &= Q_{G0}^{(g)} - \frac{3\,E\,J_g}{l_g^2}\,(\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g). \end{aligned}\right\} \quad (510)$$

Das Anschlußmoment $M_{J0}^{(g)}$ aus $\mathfrak{P}_g$, Δt kann mit den Bezeichnungen der Abb. 287 folgendermaßen berechnet werden:

$$M_{J0}^{(g)} = -\frac{3}{l_g^2}\left(\int_0^{l_g} M_{m0}^{(0)}\,x'\,dx' + \frac{E\,J_g\,l_g^2}{2}\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\right). \quad (511)$$

c) Die Anschlüsse nach Abb. 286d, e sind selten. Die schräge Führung des Stabes in K nach Abb. 286d ist im Ansatz gleichbedeutend mit gelenkigem Anschluß.

d) Der Stab ist in J steif angeschlossen, am anderen Ende frei (Abb. 286f). Die Belastung des Stabes wird als Belastung des Stabknotens J behandelt.

Gekrümmte Stäbe und Stabzüge. Die Anschlußkräfte des Stabes (h) können für dreierlei Randbedingungen angegeben werden. Der Stab ist entweder an beiden