



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Gekrümmte Stäbe und Stabzüge

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

2. Das Stabende J ist elastisch drehbar, das Ende K ist starr eingespannt (Abb. 286b), $\varphi_K^{(h)} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J_0}^{(h)} + 2 \frac{E J_h}{l_h} (2 \varphi_J^{(h)} - 3 \vartheta_h), & M_K^{(h)} &= M_{K_0}^{(h)} + 2 \frac{E J_h}{l_h} (\varphi_J^{(h)} - 3 \vartheta_h), \\ N_J^{(h)} &= N_{J_0}^{(h)} + \varepsilon_h E F_h, & N_K^{(h)} &= N_{K_0}^{(h)} + \varepsilon_h E F_h, \\ Q_J^{(h)} &= Q_{J_0}^{(h)} - 6 \frac{E J_h}{l_h^2} (\varphi_J^{(h)} - 2 \vartheta_h), & Q_K^{(h)} &= Q_{K_0}^{(h)} - 6 \frac{E J_h}{l_h^2} (\varphi_J^{(h)} - 2 \vartheta_h). \end{aligned} \right\} (506)$$

Die Anschlußkräfte $M_{J_0}^{(h)}$, $M_{K_0}^{(h)}$ des beiderseits starr eingespannten Stabes aus \mathfrak{P}_h und $\Delta t = t_u - t_o$ können bei unveränderlichem Stabquerschnitt folgendermaßen berechnet werden (Abb. 287):

$$\left. \begin{aligned} M_{J_0}^{(h)} &= \frac{2}{l_h^2} (2 S_K^{(h)} + S_J^{(h)}), \\ M_{K_0}^{(h)} &= \frac{2}{l_h^2} (2 S_J^{(h)} + S_K^{(h)}), \\ S_J^{(h)} &= \int_0^{l_h} M_{m_0}^{(h)} x dx + \frac{E J_h l_h^2}{2} \frac{\alpha_t \Delta t}{h}; \\ S_K^{(h)} &= - \int_0^{l_h} M_{m_0}^{(h)} x' dx' - \frac{E J_h l_h^2}{2} \frac{\alpha_t \Delta t}{h}. \end{aligned} \right\} (507)$$

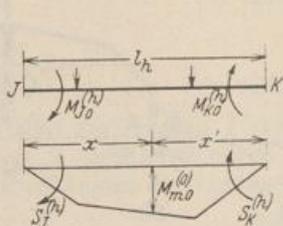


Abb. 287.

$M_{m_0}^{(h)}$ sind die Biegemomente aus der Belastung und $M_{J_0}^{(h)} = M_{K_0}^{(h)} = 0$.

b) Der Stab (g) ist in J steif, in G gelenkig angeschlossen (Abb. 286c). Die Schnittkräfte $M_G^{(g)}$, $N_G^{(g)}$, $N_G^{(g)}$ sind in (501) Null. $N_G^{(g)} = E F_g$ und daher

$$N_G^{(g)} = N_G^{(g)} + E F_g \varepsilon_g. \quad (508)$$

Das Anschlußmoment $M_J^{(g)}$ wird unter Beachtung der Vorzeichen nach Abschn. 26, jedoch unter Verwendung der wirklichen Vorzeichen und Belastungszahlen δ , berechnet. Mit der Bezeichnung $J \equiv$ Ziffer 1 ist die Verdrehung dieses Endquerschnitts durch die Belastung \mathfrak{P}_g und eine ungleichförmige Temperaturänderung Δt des Stabes δ_{10} und $\delta_{1s} = \varphi_J^{(g)} - \vartheta_g$.

$$M_J^{(g)} = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} + \frac{\delta_{1s}}{\delta_{11}} = M_{J_0}^{(g)} + \frac{1}{\delta_{11}} (\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g). \quad (509)$$

Bei konstantem Querschnitt F_g , J_g im Bereich von l_g ist

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(g)} &= M_{J_0}^{(g)} + \frac{3 E J_g}{l_g} (\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g), \\ N_G^{(g)} &= N_{G_0}^{(g)} + E F_g \varepsilon_g, & N_J^{(g)} &= N_{J_0}^{(g)} + E F_g \varepsilon_g, \\ Q_J^{(g)} &= Q_{J_0}^{(g)} - \frac{3 E J_g}{l_g^2} (\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g), & Q_G^{(g)} &= Q_{G_0}^{(g)} - \frac{3 E J_g}{l_g^2} (\varphi_J^{(g)} - \vartheta_g). \end{aligned} \right\} (510)$$

Das Anschlußmoment $M_{J_0}^{(g)}$ aus \mathfrak{P}_g , Δt kann mit den Bezeichnungen der Abb. 287 folgendermaßen berechnet werden:

$$M_{J_0}^{(g)} = - \frac{3}{l_g^2} \left(\int_0^{l_g} M_{m_0}^{(g)} x' dx' + \frac{E J_g l_g^2}{2} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right). \quad (511)$$

c) Die Anschlüsse nach Abb. 286d, e sind selten. Die schräge Führung des Stabes in K nach Abb. 286d ist im Ansatz gleichbedeutend mit gelenkigem Anschluß.

d) Der Stab ist in J steif angeschlossen, am anderen Ende frei (Abb. 286f). Die Belastung des Stabes wird als Belastung des Stabknotens J behandelt.

Gekrümmte Stäbe und Stabzüge. Die Anschlußkräfte des Stabes (h) können für dreierlei Randbedingungen angegeben werden. Der Stab ist entweder an beiden

Enden J, K eingespannt oder an einem Ende J eingespannt, am anderen gelenkig angeschlossen oder an beiden Enden durch Gelenke mit den Stabknoten J, K verbunden. Die Rechnung für symmetrische oder unsymmetrische Stabformen wird unter Beachtung der positiven Definition von Drehwinkel und Anschlussmoment für die Belastung \mathfrak{P}_h , die Temperaturänderung t , Δt und für vorgeschriebene Randwerte $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$, ε_h , ϑ_h nach Abschn. 26 behandelt. Die Lösung kann auf ein statisch bestimmtes oder unbestimmtes Hauptsystem bezogen und durch Superposition der einzelnen Ursachen nach (500) angeschrieben werden. Sie wird hier auf den beiderseits eingespannten symmetrischen Stab beschränkt. Die anderen Aufgaben sind zum Teil umständlich, bieten aber keine Schwierigkeiten. Neben den beiden Anschluß-

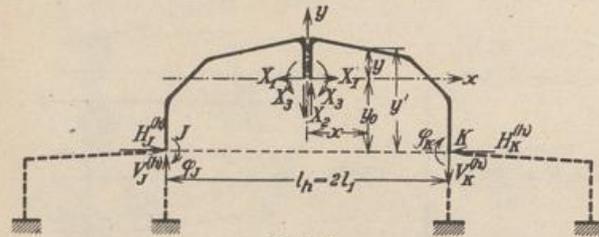


Abb. 288.

momenten $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$ spielt hier auch die Längskraft N_h im Symmetriepunkt des Stabes eine Rolle.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte des Bogenstabes werden nach S. 196, jedoch unter Verwendung der wirklichen Vorzeichen und Belastungszahlen δ , mit dem statisch bestimmten Hauptsystem

Abb. 288 berechnet. Die Belastung \mathfrak{P}_h und die ungleichförmige Temperaturänderung Δt erzeugen die gegenseitigen Verschiebungen δ_{10} , δ_{20} , δ_{30} . Die gleichförmige Temperaturänderung führt zu einer Verschiebung $\delta_{1t} = \alpha_t t l_h$, $\delta_{2t} = 0$, $\delta_{3t} = 0$. Die vorgeschriebenen Randwerte $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$, ϑ_h und $\Delta l_h = \varepsilon_h l_h$ ergeben nach (300)

$$\left. \begin{aligned} I_1 \delta_{1s} &= y_0 (\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h, & I_2 \delta_{2s} &= -\frac{l}{2} (\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)}) - l \vartheta_h, \\ I_3 \delta_{3s} &= \varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}. \end{aligned} \right\} \quad (512)$$

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \int \frac{y' \frac{1}{EJ} ds}{\delta_{33}}, & X_1 &= \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} + \frac{1}{\delta_{11}} [y_0 (\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h], \\ X_2 &= \frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} - \frac{l}{\delta_{22}} \left[\frac{1}{2} (\varphi_J^{(h)} + \varphi_K^{(h)}) - \vartheta_h \right], & X_3 &= \frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} + \frac{1}{\delta_{33}} (\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}). \end{aligned} \right\} \quad (513)$$

Die Anschlußkräfte des Hauptsystems (Kragträger J und K , Abb. 288) aus der Belastung \mathfrak{P}_h werden mit $M_{J0}^{(0)}$, $M_{K0}^{(0)}$ usw. nach dem vereinbarten positiven Dreh Sinn bezeichnet, so daß hier für den beiderseits eingespannten Stabbogen folgende Ergebnisse angeschrieben werden können:

a) Schnittkräfte aus der Belastung \mathfrak{P}_h

$$\left. \begin{aligned} M_{J0}^{(h)} &= M_{J0}^{(0)} + X_{10} y_0 - X_{20} l_1 + X_{30}, \\ M_{K0}^{(h)} &= M_{K0}^{(0)} - X_{10} y_0 - X_{20} l_1 - X_{30}, & -N_{h0} &= X_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (514)$$

b) Schnittkräfte aus der Belastung \mathfrak{P}_h , der Temperaturänderung t und vorgeschriebenen Randbedingungen $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$, ϑ_h , $\Delta l_h = \varepsilon_h l_h$

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + \varphi_J^{(h)} \left(\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4 \delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}} \right) + \varphi_K^{(h)} \left(-\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4 \delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}} \right) \\ &\quad - \vartheta_h \frac{l_h^2}{2 \delta_{22}} - \frac{y_0}{\delta_{11}} (\Delta l_h - \alpha_t t l_h), \end{aligned} \right\} \quad (515)$$

$$\left. \begin{aligned} M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \varphi_J^{(h)} \left(-\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4 \delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}} \right) + \varphi_K^{(h)} \left(\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4 \delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}} \right) \\ &\quad - \vartheta_h \frac{l_h^2}{2 \delta_{22}} + \frac{y_0}{\delta_{11}} (\Delta l_h - \alpha_t t l_h). \end{aligned} \right\} \quad (516)$$

$$-N_h = X_1^{(h)} = X_{10}^{(h)} + \frac{1}{\delta_{11}} [\gamma_0(\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h + \alpha_t t l_h]. \quad (517)$$

Die Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$, N_h können in derselben Weise auch für geschlossene Stabzüge oder ganze Abschnitte \overline{JK} des Stabwerks als Funktion der Belastung und der vorgeschriebenen Randbedingungen $\varphi_J^{(h)}$, $\varphi_K^{(h)}$, ϑ_h , ε_h angegeben werden. Derartige Ansätze haben jedoch nur in Ausnahmefällen Bedeutung.

Die Bedingungen für die geometrische Verträglichkeit der Knotenpunktfigur. Die geometrische Verträglichkeit in dem vorgelegten Stabwerk oder in dem statisch und kinematisch äquivalenten Bilde der Knotenpunktfigur bedeutet an jedem Stabknoten J die gleiche Verschiebung aller angeschlossenen Stabenden

$$u_J^{(h)} = u_J, \quad v_J^{(h)} = v_J. \quad (518)$$

Bei steif angeschlossenen Stäben ist aus demselben Grunde

$$\varphi_J^{(h)} = \varphi_J. \quad (519)$$

Daher sind auch die Drehwinkel $\varphi_J^{(h)}$ der Endtangente aller am Knoten J steif angeschlossener Stäbe einander gleich. Die Kontinuität von n steif am Knoten J angeschlossener Stäbe kann daher auch durch $(n-1)$ unabhängige Bedingungen

$$\tau_J^{(h)} + \vartheta_h = \tau_J^{(h+1)} + \vartheta_{h+1} \quad (520)$$

ausgesprochen werden (vgl. Abschn. 41).

Das geometrisch bestimmte Hauptsystem. Der Spannungs- und Verschiebungszustand der einzelnen Abschnitte (h) des Stabwerks ist wegen der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung am Stabknoten (518), (519) durch die r Drehwinkel φ_J und durch $2(r+r_1)$ Punktverschiebungen u_J, v_J der Knotenpunktfigur bestimmt. Diese sind nach (282) die unabhängigen Unbekannten eines linearen Ansatzes, so daß die Knotenpunktfigur in Verbindung mit den Verträglichkeitsbedingungen am Stabknoten bei beliebig vorgeschriebenen Verschiebungen u_J, v_J, φ_J ($u_J = 0, v_J = 0, \varphi_J = 0$) die Eigenschaften eines geometrisch bestimmten Hauptsystems erhält, für welches ausgezeichnete Werte u_J, v_J, φ_J bestimmt werden sollen. Die Knotenpunktfigur mit $3r + 2r_1$ Freiheitsgraden wird also erst durch die Ausschaltung der kinematischen Beweglichkeit mit dem Zwang zur Kontinuität zum Hauptsystem: Hauptsystem A .

Die Komponenten u_J, v_J, φ_J des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur sind mit den Komponenten $\varepsilon_h, \vartheta_h$ des Verschiebungszustandes der Abschnitte (h) durch $2s$ Transformationen (499) verknüpft, so daß auch diese an Stelle von u_J, v_J als unbekannte Größen verwendet werden können, soweit sie unabhängig voneinander sind. Der Verschiebungszustand des Stabwerks wird dann durch r Knotendrehwinkel φ_J , durch $s - m = s^*$ (vgl. S. 312) bezogene Längenänderungen ε_h und durch $(3r + 2r_1) - (r + s^*) = 2(r + r_1) - s^* = f_1$ ausgezeichnete, voneinander unabhängige Bestimmungsstücke ψ_o beschrieben, für die sich je nach der Art des Stabwerks Verschiebungen u_J, v_J , Stabdrehwinkel ϑ_h oder die gegenseitige Verschiebung zweier Punkte und die gegenseitige Verdrehung zweier Geraden eignen (Abb. 296).

Die Verwendung dieser Komponenten des Verschiebungszustandes zu unabhängigen Unbekannten führt neben der Knotenpunktfigur noch zu einem anderen, dem Stabwerk statisch und geometrisch äquivalenten Bilde. Die Knotendrehwinkel φ_J , die bezogenen Längenänderungen ε_h und die ausgezeichneten Komponenten ψ_o bestimmen den Verschiebungszustand einer beweglichen, dem vorgeschriebenen Stabwerk statisch äquivalenten Scheibenkette, an welcher neben der Belastung \mathfrak{P} die Anschlußmomente $M_J^{(h)}$ zwischen Stab und Knotenscheibe und die Längskräfte N_h ausgezeichneter Querschnitte $T^{(h)}$ der Stäbe (h) als äußere Kräfte wirken. Sie besteht daher aus den Knotenscheiben (J) und den frei drehbar angeschlossenen Stäben (h), die in den Querschnitten $T^{(h)}$ unterbrochen und nur durch eine Führung