Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Das geometrisch bestimmte Hauptsystem

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

$$-N_h = X_1^{(h)} = X_{10}^{(h)} + \frac{1}{\delta_{11}}[y_0(\varphi_J^{(h)} - \varphi_K^{(h)}) - \Delta l_h + \alpha_t t l_h]. \tag{517}$$

Die Anschlußkräfte $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_h$ können in derselben Weise auch für geschlossene Stabzüge oder ganze Abschnitte $\overline{JK}$ des Stabwerks als Funktion der Belastung und der vorgeschriebenen Randbedingungen $\varphi_J^{(h)}, \varphi_K^{(h)}, \vartheta_h, \varepsilon_h$ angegeben werden. Derartige Ansätze haben jedoch nur in Ausnahmefällen Bedeutung.

Die Bedingungen für die geometrische Verträglichkeit der Knotenpunktfigur. Die geometrische Verträglichkeit in dem vorgelegten Stabwerk oder in dem statisch und kinematisch äquivalenten Bilde der Knotenpunktfigur bedeutet an jedem Stabknoten J die gleiche Verschiebung aller angeschlossenen Stabenden

$$u_J^{(h)} = u_J, \qquad v_J^{(h)} = v_J. \tag{518}$$

Bei steif angeschlossenen Stäben ist aus demselben Grunde

$$\varphi_J^{(h)} = \varphi_J. \tag{519}$$

Daher sind auch die Drehwinkel $\varphi_J^{(h)}$ der Endtangenten aller am Knoten J steif angeschlossenen Stäbe einander gleich. Die Kontinuität von n steif am Knoten J angeschlossenen Stäbe kann daher auch durch $(n-1)$ unabhängige Bedingungen

$$\tau_J^{(h)} + \vartheta_h = \tau_J^{(h+1)} + \vartheta_{h+1} \tag{520}$$

ausgesprochen werden (vgl. Abschn. 41).

Das geometrisch bestimmte Hauptsystem. Der Spannungs- und Verschiebungszustand der einzelnen Abschnitte (h) des Stabwerks ist wegen der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung am Stabknoten (518), (519) durch die r Drehwinkel φ_J und durch $2(r + r_1)$ Punktverschiebungen u_J, v_J der Knotenpunktfigur bestimmt. Diese sind nach (282) die unabhängigen Unbekannten eines linearen Ansatzes, so daß die Knotenpunktfigur in Verbindung mit den Verträglichkeitsbedingungen am Stabknoten bei beliebig vorgeschriebenen Verschiebungen u_J, v_J, φ_J $(u_J = 0, v_J = 0, \varphi_J = 0)$ die Eigenschaften eines geometrisch bestimmten Hauptsystems erhält, für welches ausgezeichnete Werte u_J, v_J, φ_J bestimmt werden sollen. Die Knotenpunktfigur mit $3r + 2r_1$ Freiheitsgraden wird also erst durch die Ausschaltung der kinematischen Beweglichkeit mit dem Zwang zur Kontinuität zum Hauptsystem: Hauptsystem A.

Die Komponenten u_J, v_J, φ_J des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur sind mit den Komponenten $\varepsilon_h, \vartheta_h$ des Verschiebungszustandes der Abschnitte (h) durch $2s$ Transformationen (499) verknüpft, so daß auch diese an Stelle von u_J, v_J als unbekannte Größen verwendet werden können, soweit sie unabhängig voneinander sind. Der Verschiebungszustand des Stabwerks wird dann durch r Knotendrehwinkel φ_J, durch $s - m = s^*$ (vgl. S. 312) bezogene Längenänderungen ε_h und durch $(3r + 2r_1) - (r + s^*) = 2(r + r_1) - s^* = f_1$ ausgezeichnete, voneinander unabhängige Bestimmungsstücke ψ_e beschrieben, für die sich je nach der Art des Stabwerks Verschiebungen u_J, v_J, Stabdrehwinkel ϑ_h oder die gegenseitige Verschiebung zweier Punkte und die gegenseitige Verdrehung zweier Geraden eignen (Abb. 296).

Die Verwendung dieser Komponenten des Verschiebungszustandes zu unabhängigen Unbekannten führt neben der Knotenpunktfigur noch zu einem anderen, dem Stabwerk statisch und geometrisch äquivalenten Bilde. Die Knotendrehwinkel φ_J, die bezogenen Längenänderungen ε_h und die ausgezeichneten Komponenten ψ_e bestimmen den Verschiebungszustand einer beweglichen, dem vorgeschriebenen Stabwerk statisch äquivalenten Scheibenkette, an welcher neben der Belastung $\mathfrak{P}$ die Anschlußmomente $M_J^{(h)}$ zwischen Stab und Knotenscheibe und die Längskräfte N_h ausgezeichneter Querschnitte $T^{(h)}$ der Stäbe (h) als äußere Kräfte wirken. Sie besteht daher aus den Knotenscheiben (J) und den frei drehbar angeschlossenen Stäben (h), die in den Querschnitten $T^{(h)}$ unterbrochen und nur durch eine Führung biegungssteif zusammengehalten sind (Abb. 289c). Die Scheibenkette ist mit den vorgeschriebenen Verschiebungen $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ (z. B. $\varphi_J = 0, \varepsilon_h = 0, \psi_c = 0$) geometrisch bestimmt und wird durch Wahrung der dem Stabwerk eigentümlichen Kontinuität am Stabknoten J und am Querschnitt $T^{(h)}$ ($\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$, $u_J^{(h)} = u_J$, $v_J^{(h)} = v_J$) ebenfalls zum geometrisch bestimmten Hauptsystem mit der Bezeichnung B. Es entsteht daher aus der Scheibenkette, deren kinematische Beweglichkeit durch die in den Stabknoten J und an den Querschnitten $T^{(h)}$ vorgeschriebene Kontinuität aufgehoben wird.

In der Regel sind die Abmessungen der Knotenscheiben gegenüber den Stablängen verschwindend klein. Die Knotenscheibe wird angenähert zum materiellen Punkt, in dem sich alle Anschlußquerschnitte (h) schneiden. Auf diese Weise entsteht eine Idealisierung der kinematisch beweglichen Scheibenkette, die als Knotenkette bezeichnet wird. Sie zählt ebenso wie die Knotenpunktfigur $r + 2\,(r + r_1)$ Freiheitsgrade und ist für vorgeschriebene Verschiebungen $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ geometrisch bestimmt. Die Knotenkette verliert ebenso wie die Scheibenkette durch die am Stabknoten J und am Querschnitt $T^{(h)}$ vorgeschriebene Kontinuität die kinematische Beweglichkeit und wird dadurch zum geometrisch bestimmten Hauptsystem C.

Der Begriff der Knotenpunktfigur, der Scheibenkette oder Knotenkette und der Begriff des geometrisch bestimmten Hauptsystems A, B oder C haben daher die beliebige Annahme der Verschiebungen u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ gemeinsam. Während jedoch Knotenpunktfigur, Scheibenkette und Knotenkette kinematisch bewegliche Gebilde darstellen, sind die kinematischen Eigenschaften der drei mit A, B, C bezeichneten geometrisch bestimmten Hauptsysteme durch die Verträglichkeitsbedingungen gebunden. Diese sind bei beliebiger Annahme der Komponenten u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ ebenso erfüllt wie die Gleichgewichtsbedingungen eines statisch bestimmten Hauptsystems bei beliebiger Annahme der statisch überzähligen Größen X_k.

Jedes geometrisch bestimmte Hauptsystem enthält neben den unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes, die hier zunächst beliebig festgesetzt werden können, auch abhängige Komponenten, im Hauptsystem C z. B. die Verschiebungen u_H, v_H, ϑ_h. Sie ergeben sich durch Superposition

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_h &= \vartheta_{h0} + \sum \vartheta_{hJ}\varphi_J + \sum \vartheta_{hc}\psi_c + \sum \vartheta_{h,\varepsilon i}\varepsilon_i, \\ u_H &= u_{H0} + \sum u_{HJ}\varphi_J + \sum u_{Hc}\psi_c + \sum u_{H,\varepsilon i}\varepsilon_i, \\ J &= A \ldots N, \qquad c = 1 \ldots f, \qquad i = 1 \ldots s. \end{aligned}\right\} \tag{521}$$

Die Vorzahlen ϑ_{hJ}, u_{HJ} sind im geometrisch bestimmten Hauptsystem C Null. Die Anteile ϑ_{h0}, u_{H0} werden aus einem Verschiebungsplan der Knotenkette des Hauptsystems C entnommen, der mit $\Delta l_{h0} = \varepsilon_{h0} l_h$ für $\psi_c = 0$ ($c = 1 \ldots f$) gezeichnet wird. Die Stabdrehwinkel ϑ_{hc} sind in einem Verschiebungsplan der Knotenkette für $\psi_c = 1$ enthalten. Sie werden am einfachsten aus dem Polplan der Bewegung berechnet. Dieselben Betrachtungen lassen sich für die anderen beiden Hauptsysteme A und B wiederholen.

Mit dem Verschiebungszustand $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ des Hauptsystems B oder C sind nach (500) die Anschlußkräfte der Abschnitte (h) und damit auch der Spannungszustand bestimmt. Die Ansätze (505) und (506) sind mit $\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$ ebenfalls Ausdruck des Superpositionsgesetzes.

Die geometrischen Bedingungen der Knotenkette. Die dem Hauptsystem C zugeordnete Knotenkette wird durch $\varepsilon_h = 0$ und Herausnahme der Knotenscheiben zur Stabkette (Abb. 289e). Diese ist im Sinne des Abschnitts 13 statisch bestimmt oder statisch unbestimmt. Bei m überzähligen Stäben ($m \geqq 0$) sind daher ebenso viele Längenänderungen ε_h der Stäbe oder Stabsehnen von den übrigen abhängig. Der Verschiebungszustand des Hauptsystems C ist daher durch r Knotendrehwinkel