Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die geometrischen Bedingungen der Knotenkette

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

biegungssteif zusammengehalten sind (Abb. 289c). Die Scheibenkette ist mit den vorgeschriebenen Verschiebungen $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ (z. B. $\varphi_J = 0, \varepsilon_h = 0, \psi_c = 0$) geometrisch bestimmt und wird durch Wahrung der dem Stabwerk eigentümlichen Kontinuität am Stabknoten J und am Querschnitt $T^{(h)}$ ($\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$, $u_J^{(h)} = u_J$, $v_J^{(h)} = v_J$) ebenfalls zum geometrisch bestimmten Hauptsystem mit der Bezeichnung B. Es entsteht daher aus der Scheibenkette, deren kinematische Beweglichkeit durch die in den Stabknoten J und an den Querschnitten $T^{(h)}$ vorgeschriebene Kontinuität aufgehoben wird.

In der Regel sind die Abmessungen der Knotenscheiben gegenüber den Stablängen verschwindend klein. Die Knotenscheibe wird angenähert zum materiellen Punkt, in dem sich alle Anschlußquerschnitte (h) schneiden. Auf diese Weise entsteht eine Idealisierung der kinematisch beweglichen Scheibenkette, die als Knotenkette bezeichnet wird. Sie zählt ebenso wie die Knotenpunktfigur $r + 2(r + r_1)$ Freiheitsgrade und ist für vorgeschriebene Verschiebungen $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ geometrisch bestimmt. Die Knotenkette verliert ebenso wie die Scheibenkette durch die am Stabknoten J und am Querschnitt $T^{(h)}$ vorgeschriebene Kontinuität die kinematische Beweglichkeit und wird dadurch zum geometrisch bestimmten Hauptsystem C.

Der Begriff der Knotenpunktfigur, der Scheibenkette oder Knotenkette und der Begriff des geometrisch bestimmten Hauptsystems A, B oder C haben daher die beliebige Annahme der Verschiebungen u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ gemeinsam. Während jedoch Knotenpunktfigur, Scheibenkette und Knotenkette kinematisch bewegliche Gebilde darstellen, sind die kinematischen Eigenschaften der drei mit A, B, C bezeichneten geometrisch bestimmten Hauptsysteme durch die Verträglichkeitsbedingungen gebunden. Diese sind bei beliebiger Annahme der Komponenten u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ ebenso erfüllt wie die Gleichgewichtsbedingungen eines statisch bestimmten Hauptsystems bei beliebiger Annahme der statisch überzähligen Größen X_k.

Jedes geometrisch bestimmte Hauptsystem enthält neben den unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes, die hier zunächst beliebig festgesetzt werden können, auch abhängige Komponenten, im Hauptsystem C z. B. die Verschiebungen u_H, v_H, ϑ_h. Sie ergeben sich durch Superposition

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_h &= \vartheta_{h0} + \sum \vartheta_{hJ}\varphi_J + \sum \vartheta_{hc}\psi_c + \sum \vartheta_{h,\varepsilon i}\varepsilon_i, \\ u_H &= u_{H0} + \sum u_{HJ}\varphi_J + \sum u_{Hc}\psi_c + \sum u_{H,\varepsilon i}\varepsilon_i, \\ J &= A \ldots N, \qquad c = 1 \ldots f, \qquad i = 1 \ldots s. \end{aligned}\right\} \tag{521}$$

Die Vorzahlen ϑ_{hJ}, u_{HJ} sind im geometrisch bestimmten Hauptsystem C Null. Die Anteile ϑ_{h0}, u_{H0} werden aus einem Verschiebungsplan der Knotenkette des Hauptsystems C entnommen, der mit $\Delta l_{h0} = \varepsilon_{h0} l_h$ für $\psi_c = 0$ ($c = 1 \ldots f$) gezeichnet wird. Die Stabdrehwinkel ϑ_{hc} sind in einem Verschiebungsplan der Knotenkette für $\psi_c = 1$ enthalten. Sie werden am einfachsten aus dem Polplan der Bewegung berechnet. Dieselben Betrachtungen lassen sich für die anderen beiden Hauptsysteme A und B wiederholen.

Mit dem Verschiebungszustand $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ des Hauptsystems B oder C sind nach (500) die Anschlußkräfte der Abschnitte (h) und damit auch der Spannungszustand bestimmt. Die Ansätze (505) und (506) sind mit $\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$ ebenfalls Ausdruck des Superpositionsgesetzes.

Die geometrischen Bedingungen der Knotenkette. Die dem Hauptsystem C zugeordnete Knotenkette wird durch $\varepsilon_h = 0$ und Herausnahme der Knotenscheiben zur Stabkette (Abb. 289e). Diese ist im Sinne des Abschnitts 13 statisch bestimmt oder statisch unbestimmt. Bei m überzähligen Stäben ($m \geqq 0$) sind daher ebenso viele Längenänderungen ε_h der Stäbe oder Stabsehnen von den übrigen abhängig. Der Verschiebungszustand des Hauptsystems C ist daher durch r Knotendrehwinkel

φ_J, $(s - m)$ bezogene Dehnungen ε_h und $f_1 = 2(r + r_1) - (s - m)$ ausgezeichnete Komponenten ψ_c der Knotenkette bestimmt. f_1 bedeutet den Freiheitsgrad der Stabkette.

Die Längen der Stäbe und Stabzugsehnen ändern sich mit der Temperatur und den inneren Kräften aus Belastung und Stützensenkung. Diese bestehen aus einem statisch bestimmten Anteil und einem statisch unbestimmten Anteil, der von dem biegungssteifen Anschluß und den geometrisch überzähligen Stäben der Knotenkette herrührt. Die Längenänderung ε_h kann daher nach $\varepsilon_h = \varepsilon_{h0} + \varepsilon_{h1} + \varepsilon_{h2}$ zerlegt werden. Die Dehnung ε_{h0} aus der Belastung des Stabes, den zugeordneten statisch bestimmten Anschlußkräften und einer Temperaturänderung $t, \Delta t$ ist bekannt und führt mit den Stützenverschiebungen zu den Stabdrehwinkeln ϑ_{h0}. Die Dehnung ε_{h1} entsteht aus den statisch unbestimmten Anschlußkräften der

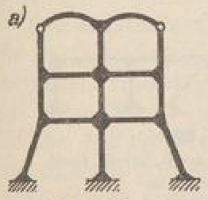

Abb. 289a. Stabwerk.
$r=7$, $r_1=2$,
$s_1=13$, $s_2=2$, $s=15$,
$m=0$, $f_1=18-15=3$,
$r+s_2+f_1=12$ Unbekannte.

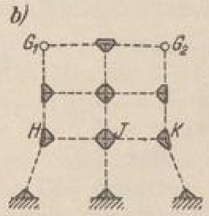

Abb. 289b. Knotenpunktfigur.

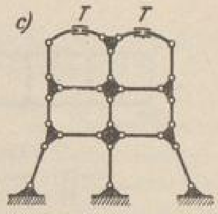

Abb. 289c. Scheibenkette mit $\varepsilon_h=0$ für alle geraden Stäbe.

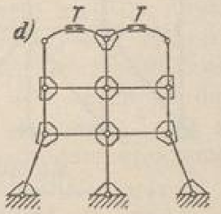

Abb. 289d. Knotenkette mit $\varepsilon_h=0$ für alle geraden Stäbe.

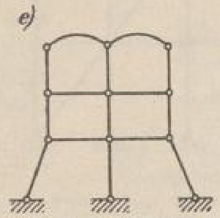

Abb. 289e. Stabkette.

Stäbe. Sie ist in biegungssteifen, geraden Stäben nahezu Null und darf unbedenklich vernachlässigt werden. Aus demselben Grunde werden die Dehnungen ε_{h2} infolge geometrisch überzähliger Stäbe in einem System berechnet, dessen Stabknoten durch Gelenke ersetzt sind.

Daher werden in einem Stabwerk die geraden und gekrümmten Stäbe unterschieden, deren Anzahl durch s_1 und s_2 bezeichnet wird ($s = s_1 + s_2$). Die unabhängigen Komponenten ε_h der s_1 geraden Stäbe sind dann im Ansatz Null oder der Größe nach vorgeschrieben, also bekannt. Diese Annahme trifft bei biegungssteifen Stäben nahezu vollständig zu. Sie gilt dagegen bei unbelasteten Zugstäben nur als Näherung. Die Dehnung wird für diese zur Vereinfachung der Rechnung geschätzt, im Ergebnis geprüft und unter Umständen durch Iteration verbessert. Daher ist bei der Ausbildung des Hauptsystems die auf S. 311 erwähnte Teilung der Abschnitte (h) und die Führung der Enden bei geraden Stäben unnötig.

Der Verschiebungszustand wird nunmehr durch $r + f = (r + s_2^* + f_1)$ unbekannte Komponenten bestimmt. Sie bilden die überzähligen geometrischen Größen des Hauptsystems C. s_2^* ist die Anzahl der gekrümmten Stäbe mit geometrisch unabhängigen Längen. (Bei $m = 0$ ist $s_2^* = s_2$.)

Diese Bemerkungen werden durch die folgende, für die theoretische Behandlung wichtige Einteilung der Stabwerke erläutert.

A. Stabwerke ohne geometrisch überzählige Stäbe: $m = 0$.

a) Stabwerke mit s_2 Stabzügen und s_1 geraden Stäben, deren Dehnungen ε_h vernachlässigt oder geschätzt werden. Anzahl der Unbekannten: r Knotendrehwinkel, s_2 bezogene Längenänderungen von Stabzugsehnen, $f_1 = 2\,(r + r_1) - s$ unabhängige Komponenten ψ_c der Stabkette, $f = f_1 + s_2$ (Abb. 289a).

b) Stabwerke mit $s = s_1 < 2\,(r + r_1) = s + f$ geraden Stäben, deren Dehnungen ε_h vernachlässigt oder geschätzt werden. Anzahl der Unbekannten: r Knotendrehwinkel, $f = f_1 = 2\,(r + r_1) - s$ unabhängige Komponenten ψ_c der Stabkette (Abb. 290a).

c) Stabwerke mit $s = s_1 = 2\,(r + r_1)$ geraden Stäben, welche die Knotenkette mit $\varepsilon_h = 0$ oder $\varepsilon_h = \varepsilon_{h0}$ geometrisch bestimmen. Anzahl der Unbekannten: r Knotendrehwinkel (Abb. 290b).

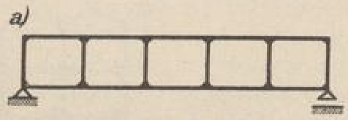

Abb. 290a.
$r=12$, $s=s_1=19$, $m=0$,
$f_1=24-19=5=f$.
$r+f=17$ Unbekannte.

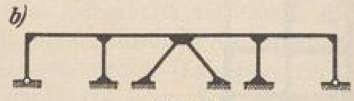

Abb. 290b.
$r=5$, $s=s_1=10$, $s_2=0$, $m=0$. $f_1=0$.
$r+s_2+f_1=5$ Unbekannte.

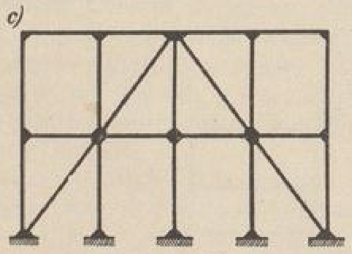

Abb. 290c.
$r=10$, $s=s_1=22$, $s_2=0$, $m=2$,
$f_1=0$, $r+s_2+f_1=10$ Unbekannte.

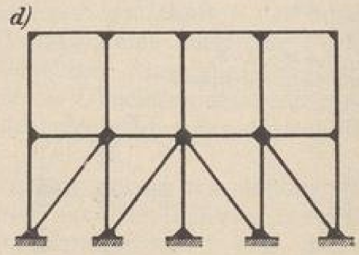

Abb. 290d.
$r=10$, $s=s_1=22$, $s_2=0$, $m=3$,
$f_1=1$, $r+s_2+f_1=11$ Unbekannte.

B. Stabwerke mit m geometrisch überzähligen Stäben.

Die Stablängenänderungen ε_h und ε_{h0} sind geometrisch voneinander abhängig und werden geschätzt oder unter Umständen nach S. 313 berechnet. Für ein Stabwerk mit s_1 geraden und s_2 gekrümmten Stäben ist $f_1 = 2\,(r + r_1) - (s - m)$, so daß r Knotendrehwinkel und $f = s_2^* + f_1$ Komponenten ψ_c der Knotenkette mit $\varphi_J = 0$ berechnet werden müssen (Abb. 290c, d).

Die Aufgabe. Das geometrisch bestimmte Hauptsystem (S. 311) ist mit dem vorgeschriebenen Stabwerk geometrisch und statisch äquivalent, wenn beide im Verschiebungszustand und im Spannungszustand übereinstimmen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich aus der Verträglichkeit des Verschiebungszustandes ($u_J^{(h)} = u_J$, $v_J^{(h)} = v_J$, $\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$) und aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte des Hauptsystems (Lasten und Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, N_h). Die Verträglichkeitsbedingungen sind durch die Definition des Hauptsystems nach S. 311 für jede Annahme der Komponenten u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ erfüllt. Dasselbe gilt für die Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte der Stäbe. Daher ist zur Äquivalenz von Hauptsystem und Stabwerk nur noch das Gleichgewicht der äußeren Kräfte des Hauptsystems notwendig. Die notwendige und hinreichende Anzahl der Bedingungen wird mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an den in der Knotenkette enthaltenen $(3\,r + 2\,r_1)$