Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Aufgabe

A. Stabwerke ohne geometrisch überzählige Stäbe: $m = 0$.

a) Stabwerke mit s_2 Stabzügen und s_1 geraden Stäben, deren Dehnungen ε_h vernachlässigt oder geschätzt werden. Anzahl der Unbekannten: r Knotendrehwinkel, s_2 bezogene Längenänderungen von Stabzugsehnen, $f_1 = 2\,(r + r_1) - s$ unabhängige Komponenten ψ_c der Stabkette, $f = f_1 + s_2$ (Abb. 289a).

b) Stabwerke mit $s = s_1 < 2\,(r + r_1) = s + f$ geraden Stäben, deren Dehnungen ε_h vernachlässigt oder geschätzt werden. Anzahl der Unbekannten: r Knotendrehwinkel, $f = f_1 = 2\,(r + r_1) - s$ unabhängige Komponenten ψ_c der Stabkette (Abb. 290a).

c) Stabwerke mit $s = s_1 = 2\,(r + r_1)$ geraden Stäben, welche die Knotenkette mit $\varepsilon_h = 0$ oder $\varepsilon_h = \varepsilon_{h0}$ geometrisch bestimmen. Anzahl der Unbekannten: r Knotendrehwinkel (Abb. 290b).

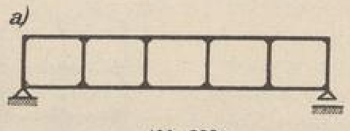

Abb. 290a.
$r=12$, $s=s_1=19$, $m=0$,
$f_1=24-19=5=f$.
$r+f=17$ Unbekannte.

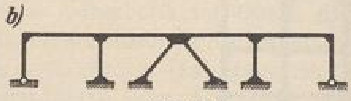

Abb. 290b.
$r=5$, $s=s_1=10$, $s_2=0$, $m=0$. $f_1=0$.
$r+s_2+f_1=5$ Unbekannte.

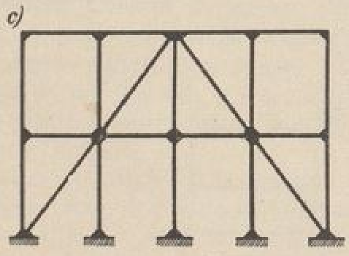

Abb. 290c.
$r=10$, $s=s_1=22$; $s_2=0$, $m=2$,
$f_1=0$, $r+s_2+f_1=10$ Unbekannte.

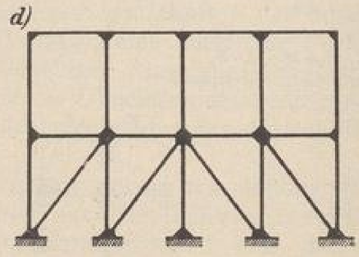

Abb. 290d.
$r=10$, $s=s_1=22$, $s_2=0$, $m=3$,
$f_1=1$, $r+s_2+f_1=11$ Unbekannte.

B. Stabwerke mit m geometrisch überzähligen Stäben.

Die Stablängenänderungen ε_h und ε_{h0} sind geometrisch voneinander abhängig und werden geschätzt oder unter Umständen nach S. 313 berechnet. Für ein Stabwerk mit s_1 geraden und s_2 gekrümmten Stäben ist $f_1 = 2\,(r + r_1) - (s - m)$, so daß r Knotendrehwinkel und $f = s_2^* + f_1$ Komponenten ψ_c der Knotenkette mit $\varphi_J = 0$ berechnet werden müssen (Abb. 290c, d).

Die Aufgabe. Das geometrisch bestimmte Hauptsystem (S. 311) ist mit dem vorgeschriebenen Stabwerk geometrisch und statisch äquivalent, wenn beide im Verschiebungszustand und im Spannungszustand übereinstimmen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich aus der Verträglichkeit des Verschiebungszustandes ($u_J^{(h)} = u_J$, $v_J^{(h)} = v_J$, $\varphi_J^{(h)} = \varphi_J$) und aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte des Hauptsystems (Lasten und Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, N_h). Die Verträglichkeitsbedingungen sind durch die Definition des Hauptsystems nach S. 311 für jede Annahme der Komponenten u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ erfüllt. Dasselbe gilt für die Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte der Stäbe. Daher ist zur Äquivalenz von Hauptsystem und Stabwerk nur noch das Gleichgewicht der äußeren Kräfte des Hauptsystems notwendig. Die notwendige und hinreichende Anzahl der Bedingungen wird mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an den in der Knotenkette enthaltenen $(3\,r + 2\,r_1)$

unabhängigen zwangläufigen Gebilden angeschrieben. Sie dienen zur eindeutigen Berechnung der unabhängigen Komponenten u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ des Verschiebungszustandes, aus denen die Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, N_h des Hauptsystems nach (521) und (500) hervorgehen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist nach Abschn. 8 ein Minimalprinzip der Elastizitätstheorie. Die gesamte potentielle Energie Π des Stabwerks wird für den wirklich vorhandenen Verschiebungszustand u_J, v_J, φ_J zum Minimum. Die partiellen Ableitungen der Funktion Π nach den $(3r + 2r_1)$ unabhängigen Verschiebungskomponenten sind daher Null. Die Minimalbedingungen sind Gleichgewichtsbedingungen, so daß eine vollständige Analogie zu den theoretischen Grundlagen des Abschn. 24 (S. 163) vorhanden ist. Sie werden jedoch hier ebenso wie dort in integrierter Form als Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte eines beweglichen Gebildes angeschrieben.

Die statischen Bedingungen zur Lösung. Die statischen Bedingungen gelten für das Gleichgewicht der Schnittkräfte des Stabwerks an einem geometrisch bestimmten Hauptsystem A mit $u_J = 0$, $v_J = 0$, $\varphi_J = 0$ $(J = A \dots N)$ oder B, C mit $\varphi_J = 0$, $\varepsilon_h = 0$, $\psi_c = 0$ $(J = A \dots N,\ c = 1 \dots f,\ h = 1 \dots s)$. Sie enthalten die $(3r + 2r_1) = (r + s + f_1 - m)$ unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes als unbekannte Größen des Ansatzes. Die $(3r + 2r_1)$ Gleichgewichtsbedingungen werden nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten (83) für die äußeren Kräfte an ebenso vielen voneinander unabhängigen, beweglichen Gebilden mit e i n e m Freiheitsgrad angeschrieben. Diese entstehen aus der Knotenpunktfigur, wenn der Reihe nach jede der $(3r + 2r_1)$ Bindungen einzeln gelöst und durch eine ausgezeichnete virtuelle Verschiebung $u_J \neq 0$ oder $v_J \neq 0$ oder $\varphi_J \neq 0$ ersetzt wird. Die Einführung virtueller Geschwindigkeiten $\dot u_J \neq 0$ oder $\dot v_J \neq 0$ oder $\dot\varphi_J \neq 0$ an Stelle der virtuellen Verrückungen besitzt nach S. 40 nur formale Bedeutung. Die Bedingungsgleichungen erhalten folgende Form (Abb. 291):

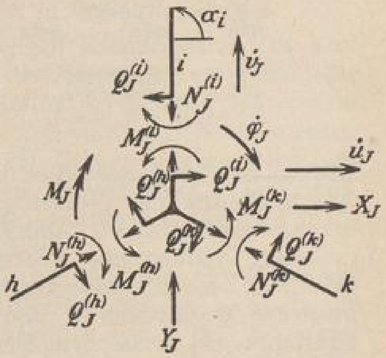

Abb. 291.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_J N_J^{(h)} \cos\alpha_h + \sum_J Q_J^{(h)} \sin\alpha_h + X_J = 0\,,\\
&\sum_J N_J^{(h)} \sin\alpha_h - \sum_J Q_J^{(h)} \cos\alpha_h + Y_J = 0\,,\\
&\qquad \mathsf{M}_J - \sum_J M_J^{(h)} = 0\,.
\end{aligned}\right| \qquad (522)$$

Der Ansatz ist für diejenigen Stabwerke ungeeignet, deren bezogene Längenänderungen ε_h für gerade Stäbe Null oder bekannt sind. Die $(3r + 2r_1) = (r + s + f_1 - m)$ notwendigen, voneinander unabhängigen, zwangläufigen Gebilde werden daher besser aus dem geometrisch bestimmten Hauptsystem C abgeleitet. Dabei wird jede unabhängige Komponente $\varphi_J, \psi_c, \varepsilon_h$ des Verschiebungszustandes des Hauptsystems der Reihe nach mit $\varphi_J \neq 0$ oder $\psi_c \neq 0$ oder $\varepsilon_h \neq 0$ einzeln zum Freiwert der virtuellen Verrückung. Ohne die s_1 bezogenen Längenänderungen ε_h der geraden Stäbe ($\varepsilon_h = 0$ nach S. 313) lassen sich r unabhängige Bewegungen an ebenso vielen zwangläufigen Gebilden Γ_J mit $\varphi_J \neq 0$ und $f = f_1 + s_2$ unabhängige Bewegungen $\psi_c \neq 0$ an ebenso vielen zwangläufigen Gebilden Γ_c unterscheiden. Sie werden nach S. 47 wiederum durch den Geschwindigkeitszustand $\dot\varphi_J = 1$ oder $\dot\psi_c = 1$ beschrieben, so daß die $r + f = r + f_1 + s_2$ Gleichgewichtsbedingungen für die an jeder der $r + f$ zwangläufigen Ketten angreifenden äußeren Kräfte (Belastung $\mathfrak{P}$, Anschlußkräfte $M_J^{(h)}, N_h$) aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nach (83) hervorgehen. Sie werden nach dem Superpositionsgesetz als Funktionen der un-