Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die statischen Bedingungen zur Lösung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

unabhängigen zwangläufigen Gebilden angeschrieben. Sie dienen zur eindeutigen Berechnung der unabhängigen Komponenten u_J, v_J, φ_J oder $\varphi_J, \varepsilon_h, \psi_c$ des Verschiebungszustandes, aus denen die Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, N_h des Hauptsystems nach (521) und (500) hervorgehen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist nach Abschn. 8 ein Minimalprinzip der Elastizitätstheorie. Die gesamte potentielle Energie Π des Stabwerks wird für den wirklich vorhandenen Verschiebungszustand u_J, v_J, φ_J zum Minimum. Die partiellen Ableitungen der Funktion Π nach den $(3r + 2r_1)$ unabhängigen Verschiebungskomponenten sind daher Null. Die Minimalbedingungen sind Gleichgewichtsbedingungen, so daß eine vollständige Analogie zu den theoretischen Grundlagen des Abschn. 24 (S. 163) vorhanden ist. Sie werden jedoch hier ebenso wie dort in integrierter Form als Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte eines beweglichen Gebildes angeschrieben.

Die statischen Bedingungen zur Lösung. Die statischen Bedingungen gelten für das Gleichgewicht der Schnittkräfte des Stabwerks an einem geometrisch bestimmten Hauptsystem A mit $u_J = 0,\ v_J = 0,\ \varphi_J = 0\ (J = A \ldots N)$ oder B, C mit $\varphi_J = 0,\ \varepsilon_h = 0,\ \psi_c = 0\ (J = A \ldots N,\ c = 1 \ldots f,\ h = 1 \ldots s)$. Sie enthalten die $(3r + 2r_1) = (r + s + f_1 - m)$ unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes als unbekannte Größen des Ansatzes. Die $(3r + 2r_1)$ Gleichgewichtsbedingungen werden nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten (83) für die äußeren Kräfte an ebenso vielen voneinander unabhängigen, beweglichen Gebilden mit einem Freiheitsgrad angeschrieben. Diese entstehen aus der Knotenpunktfigur, wenn der Reihe nach jede der $(3r + 2r_1)$ Bindungen einzeln gelöst und durch eine ausgezeichnete virtuelle Verschiebung $u_J \neq 0$ oder $v_J \neq 0$ oder $\varphi_J \neq 0$ ersetzt wird. Die Einführung virtueller Geschwindigkeiten $\dot{u}_J \neq 0$ oder $\dot{v}_J \neq 0$ oder $\dot{\varphi}_J \neq 0$ an Stelle der virtuellen Verrückungen besitzt nach S. 40 nur formale Bedeutung. Die Bedingungsgleichungen erhalten folgende Form (Abb. 291):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_J N_J^{(h)} \cos\alpha_h + \sum_J Q_J^{(h)} \sin\alpha_h + X_J = 0\,,\\
&\sum_J N_J^{(h)} \sin\alpha_h - \sum_J Q_J^{(h)} \cos\alpha_h + Y_J = 0\,,\\
&\mathsf{M}_J - \sum_J M_J^{(h)} = 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (522)$$

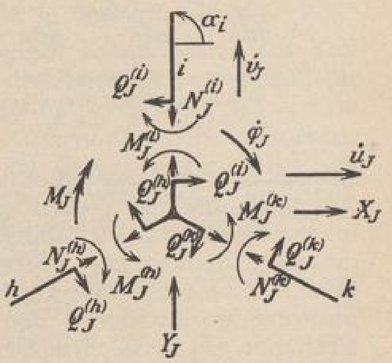
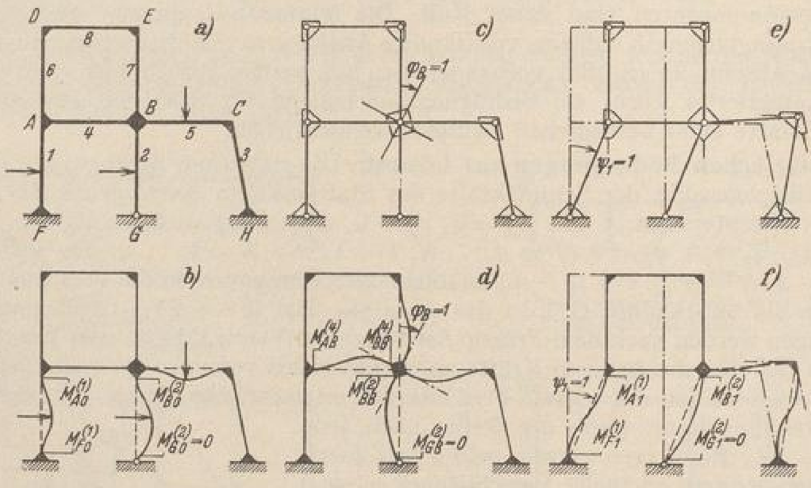


Abb. 291.

Der Ansatz ist für diejenigen Stabwerke ungeeignet, deren bezogene Längenänderungen ε_h für gerade Stäbe Null oder bekannt sind. Die $(3r + 2r_1) = (r + s + f_1 - m)$ notwendigen, voneinander unabhängigen, zwangläufigen Gebilde werden daher besser aus dem geometrisch bestimmten Hauptsystem C abgeleitet. Dabei wird jede unabhängige Komponente $\varphi_J, \psi_c, \varepsilon_h$ des Verschiebungszustandes des Hauptsystems der Reihe nach mit $\varphi_J \neq 0$ oder $\psi_c \neq 0$ oder $\varepsilon_h \neq 0$ einzeln zum Freiwert der virtuellen Verrückung. Ohne die s_1 bezogenen Längenänderungen ε_h der geraden Stäbe ($\varepsilon_h = 0$ nach S. 313) lassen sich r unabhängige Bewegungen an ebenso vielen zwangläufigen Gebilden Γ_J mit $\varphi_J \neq 0$ und $f = f_1 + s_2$ unabhängige Bewegungen $\psi_c \neq 0$ an ebenso vielen zwangläufigen Gebilden Γ_c unterscheiden. Sie werden nach S. 47 wiederum durch den Geschwindigkeitszustand $\dot{\varphi}_J = 1$ oder $\dot{\psi}_c = 1$ beschrieben, so daß die $r + f = r + f_1 + s_2$ Gleichgewichtsbedingungen für die an jeder der $r + f$ zwangläufigen Ketten angreifenden äußeren Kräfte (Belastung $\mathfrak{P}$, Anschlußkräfte $M_J^{(h)}, N_h$) aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nach (83) hervorgehen. Sie werden nach dem Superpositionsgesetz als Funktionen der unbekannten Komponenten des Verschiebungszustandes des geometrisch bestimmten Hauptsystems entwickelt.

$$\left.\begin{aligned} \delta A_J &= a_{JJ}\varphi_J + \sum a_{JK}\varphi_K + \sum a_{Jc}\psi_c + a_{J0} = 0\,, \\ \delta A_c &= a_{cc}\psi_c + \sum a_{cb}\psi_b + \sum a_{cJ}\varphi_J + a_{c0} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{523}$$

Die Vorzahlen a_{JJ}, a_{JK}, a_{Jc} sind virtuelle Arbeiten der Anschlußkräfte des geometrisch bestimmten Hauptsystems infolge von $\varphi_J = 1$, $\varphi_K = 1$, $\psi_c = 1$ (Abb. 292c bis f) bei einer Bewegung der kinematischen Kette Γ_J mit $\dot{\varphi}_J = \dot{1}_J$.



System und Hauptsystem mit $\varphi_J = 0$, $\psi_c = 0$, $r = 5$, $m = 0$, $f = 2$, $\psi_1 = \vartheta_1$, $\psi_2 = \vartheta_4$.

Knotenkette und Hauptsystem mit $\varphi_B = 1$.

Knotenkette und Hauptsystem mit $\psi_1 = 1$.

Abb. 292.

Ebenso ist das Absolutglied a_{J0} die virtuelle Arbeit der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Anschlußkräfte des geometrisch bestimmten Hauptsystems mit $\varphi_J = 0$, $\psi_c = 0$ infolge der Belastung $\mathfrak{P}$ (Abb. 292b) bei einer Bewegung der Kette Γ_J. Diese besteht in einer Drehung des Knotens J (Abb. 293), so daß nur die Anschlußmomente am Knoten J und das Kräftepaar M_J in die virtuellen Arbeiten a_{JJ}, a_{JK}, a_{Jc} und a_{J0} eingehen. Der erste Index bezeichnet also Kette und Geschwindigkeitszustand, der zweite die Ursache der in dem Arbeitsausdruck enthaltenen Kräfte.

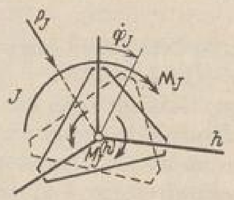


Abb. 293.

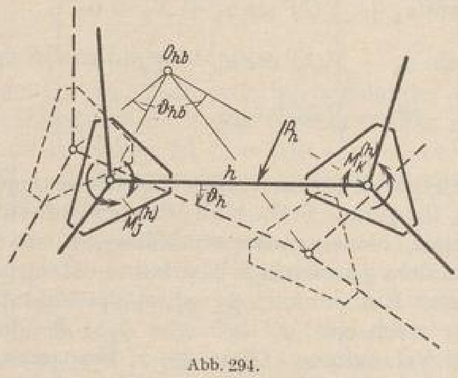


Abb. 294.

Die Vorzahlen a_{cc}, a_{cb}, a_{cJ} sind die virtuellen Arbeiten der Anschlußkräfte des Hauptsystems aus $\psi_c = 1$, $\psi_b = 1$, $\varphi_J = 1$ (Abb. 292c bis f) bei der Bewegung der Kette Γ_c mit $\dot{\psi}_c = \dot{1}_c$. Das Absolutglied a_{c0} ist die virtuelle Arbeit der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Anschlußkräfte des Hauptsystems mit $\varphi_J = 0$, $\psi_c = 0$ infolge der Belastung $\mathfrak{P}$ (Abb. 292 b) bei einer Bewegung der Kette Γ_c. Diese erfaßt meist nur einzelne Stäbe oder Stabgruppen. Jeder Stab (h) beschreibt dabei in der Regel eine Drehung ϑ_{hc} um einen der Momentanbewegung $\dot{\psi}_c = \dot{1}_c$ zugeordneten Pol O_{hc}, der nach Abschn. 13 aufgezeichnet wird (Abb. 294). Mit diesem sind auch die Winkelgeschwindigkeiten ν_{hc} der Stäbe (h) bestimmt. Die unabhängigen Komponenten $\dot{\varphi}_{Jc}, \dot{\psi}_{bc}$ der Bewegung sind dabei nach Vorschrift Null.

Die virtuelle Arbeit entsteht bei der Drehung eines Stabes $h = \overline{JK}$ mit $\varepsilon_h = 0$ aus den Anschlußmomenten $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$ und aus dem Moment $\mathsf{M}_{h,c}$ der Belastung $\mathfrak{P}_h$ in bezug auf den Pol O_{hc} der Momentanbewegung $\dot{\psi}_c = \dot{1}_c$. Mit $M_J^{(h)} + M_K^{(h)} = M^{(h)}$ ist daher

$$\delta A_c = \sum_c (\mathsf{M}_{h,c} + M^{(h)})\, \nu_{hc} = 0. \tag{524}$$

Ist der Stab (h) nach S. 311 im Querschnitt $T^{(h)}$ durch eine Führung unterbrochen $(\varepsilon_h \neq 0)$, so besitzen die beiden Teile zwar die gleiche Winkelgeschwindigkeit ν_{hc}, drehen sich jedoch um verschiedene Pole $O_{h'c}, O_{h''c}$. Die Momente $\mathsf{M}_{h',c}, \mathsf{M}_{h'',c}$ der Belastung $\mathfrak{P}_h$ und $\mathsf{M}^*_{h',c}, \mathsf{M}^*_{h'',c}$ der Längskräfte N_h in $T^{(h)}$ werden daher für die beiden Pole $O_{h'c}, O_{h''c}$ angeschrieben und folgendermaßen verwendet:

$$\delta A_c = \sum_c [(\mathsf{M}_{h',c} + \mathsf{M}_{h'',c}) + (\mathsf{M}^*_{h',c} + \mathsf{M}^*_{h'',c}) + M^{(h)}]\, \nu_{hc} = 0. \tag{525}$$

Die statischen Bedingungen zur Lösung lassen sich ebenso für das Hauptsystem B anschreiben. Dies wird an einem Beispiel im Abschn. 41 gezeigt. Im übrigen wird jedoch nur das Hauptsystem C und die zugeordnete Knotenkette als Berechnungsgrundlage verwendet, so daß die Bezeichnung C in Zukunft wegfällt.

Anwendung der Lösung. Die $(r + f)$ unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes, die Knotendrehwinkel φ_J und die Komponenten ψ_c sind die Wurzeln eines linearen Ansatzes. Sie werden durch Elimination oder durch Iteration der Lösung bestimmt. Mit ihnen können dann alle übrigen Komponenten $u_J, v_J, \vartheta_h, \varepsilon_h$ des Verschiebungszustandes nach (521) durch Superposition angegeben werden. Dasselbe gilt von den statisch unbestimmten Anschlußkräften $M_J^{(h)}$, die mit $M_{J0}^{(h)}$, φ_J, φ_K, ϑ_h und den Kontinuitätsbedingungen (518) oder (519) ebenfalls durch Superposition bestimmt sind.

Die statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$, $(J = A \ldots N)$ hängen in der Regel nur von wenigen Unbekannten φ_J, ψ_c ab, während die Gleichungen $\delta A_c = 0$ oft alle unabhängigen Komponenten φ_J, ψ_c enthalten. Der Ansatz B eignet sich daher nur für Stabwerke mit wenigen gekrümmten Stäben und einem kleinen Freiheitsgrad f_1 der Stabkette $\varepsilon_h = 0$. Er gewinnt damit aber gerade für diejenigen Stabwerke Bedeutung, deren statische Untersuchung mit den geometrischen Bedingungsgleichungen des Abschnitts 24 Schwierigkeiten bereitet. Die Lösung wird hier ebenso wie in den Abschnitten 27, 28 oft noch durch Symmetrie nach einer oder zwei Achsen in Verbindung mit Belastungsumordnung vereinfacht.

Der geometrische Charakter der Unbekannten erleichtert Schätzungen und Näherungslösungen. Die Vernachlässigung der Längenänderungen der geraden biegungssteifen Stäbe, welche von den statisch unbestimmten Anschlußkräften $N_K^{(h)}$ usw. herrühren, ist hierfür ein Beispiel. Dasselbe gilt für die Stabdrehwinkel ϑ_h statisch bestimmter oder unbestimmter Fachwerke mit $s \geqq 2\,(r + r_1)$. Sie können zur Berechnung der Nebenspannungen durch steife Anschlüsse der Fachwerkstäbe aus einem Verschiebungsplan abgeleitet werden, der für die Stabkräfte N_{h0} und die Längenänderungen Δl_{h0} bei gelenkigen Stabknoten aufgezeichnet wird $(\vartheta_h = \vartheta_{h0})$.

Mohr, O.: Ziviling. Bd. 38 (1892) und Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1906. — Müller-Breslau, H.: Graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2 2. Abt. Leipzig 1908. — Bendixsen, A.: Die Methode der Alphagleichungen. Berlin 1914. — Marcus, H.: Die Einflußlinien mehrfach gestützter Rahmenträger. Berlin 1915. —