# Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

## 39. Das Stabwerk mit geraden Stäben

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Ostenfeld, A.: Die Deformationsmethode. Berlin 1926. Außerdem Aufsätze über das gleiche Thema: Eisenbau 1921 S. 275; Bauing. 1923 S. 34. — Mann, L.: Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. Berlin 1927. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.

## 39. Das Stabwerk mit geraden Stäben.

Die Untersuchung eines Stabwerks mit geraden oder mit geraden und gekrümmten Stäben zeigt keine grundsätzlichen Unterschiede. Sie ist nur für gerade Stäbe einfacher und wird daher vorweggenommen. Das Stabwerk besteht in diesem Falle aus $s = s_1$ geraden Stäben, $r$ Stabknoten mit steifen oder gelenkigen Anschlüssen und aus $r_1$ Gelenken. Die mit dem Knoten $J$ steif verbundenen Stäbe sind entweder mit dem benachbarten Stabknoten $K$ ebenfalls starr verbunden (Bezeichnung $h$) oder am benachbarten Stabknoten $G$ durch ein Gelenk angeschlossen (Bezeichnung $g$). Andere Verbindungen sind selten. Stäbe mit freiem Ende werden als Teile des Stabknotens behandelt.

**Hauptsystem und geometrische Superposition.** Der Spannungszustand des Stabwerks ist äquivalent demjenigen einer Knotenkette, wenn die Anschlußmomente des Stabwerks zu den Lasten als äußere Kräfte hinzutreten. Der Verschiebungszustand ist durch $r$ Knotendrehwinkel $\varphi_J$ und $f = f_1$ voneinander unabhängige Komponenten $\psi_c$ bestimmt. Sie werden in einem geometrisch bestimmten, der Knotenkette zugeordneten Hauptsystem mit $\varphi_J = 0$ $(J = A \ldots N)$, $\psi_c = 0$ $(c = 1 \ldots f)$ berechnet. $f$ bezeichnet den Freiheitsgrad der Knotenkette mit $\varphi_J = 0$, $\varepsilon_h = 0$. In Übereinstimmung mit anderen Ansätzen der Baustatik werden stets die $EJ_c$fachen Komponenten des Verschiebungszustandes verwendet und diese in Zukunft durch $\varphi_J$, $\vartheta_h$, $\varepsilon_h$, $u_J$ bezeichnet. Das Vergleichsträgheitsmoment $J_c$ wird nach S. 92 ausgewählt.

Die abhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes sind nach (521) lineare Funktionen der unbekannten Größen $\psi_c$ $(c = 1 \ldots f)$

$$\vartheta_h = \vartheta_{h0} + \sum \vartheta_{hc} \psi_c, \qquad u_J = u_{J0} + \sum u_{Jc} \psi_c. \tag{526}$$

Die Stabdrehwinkel $\vartheta_{h0}$ und die Punktverschiebungen $u_{J0}$ des geometrisch bestimmten Hauptsystems entstehen aus den Stützenverschiebungen $EJ_c\Delta_e$, den Längenänderungen $EJ_c\Delta l_{h0}$ infolge der Längskräfte $N_{h0}$ und der Temperaturänderung $t$ bei $\psi_c = 0$.

$$EJ_c\,\Delta l_{h0} = N_{h0}\frac{J_h}{F_h}l_h' + EJ_c\alpha_t t l_h. \tag{527}$$

Die Stabdrehwinkel $\vartheta_{h0}$ werden hieraus nach Abschn. 13 für jeden Stab numerisch berechnet oder durch einen Williotschen Verschiebungsplan für die Knotenkette zeichnerisch bestimmt. Die Vorzahlen $\vartheta_{hc}$ sind die Stabdrehwinkel des Hauptsystems für $\psi_c = 1$. Auch diese werden aus einem Verschiebungsplan oder durch Rechnung aus dem Polplan der $\psi_c \neq 0$ zugeordneten zwangläufigen Kette $\Gamma_c$ des Hauptsystems erhalten.

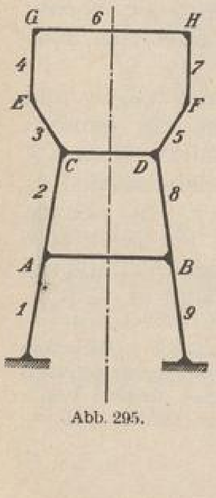
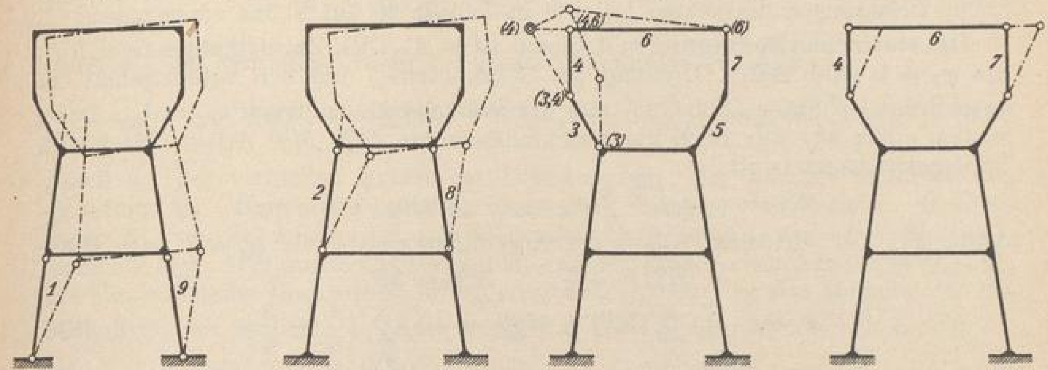


Abb. 295.

Der Rahmenbinder Abb. 295 enthält eine Stabkette mit fünf Freiheitsgraden. Die folgenden Komponenten des Verschiebungszustandes sind unabhängig voneinander.

$\psi_1$ absoluter Drehwinkel des Stabes 1,
$\psi_2$ Änderung des Stabzugwinkels $\sphericalangle BAC$,
$\psi_3$ Änderung des Stabzugwinkels $\sphericalangle DCE$,
$\psi_4$ parallele Verschiebung des Stabes 6 relativ zum Stab $CD$,
$\psi_5$ Änderung des Stabzugwinkels $\sphericalangle CDF$.

Um die für das Superpositionsgesetz (526) notwendigen Stabdrehwinkel $\vartheta_{hc}$ angeben zu können, sind die Verschiebungspläne der zwangläufigen Ketten $\Gamma_1 \ldots \Gamma_4$ für $\psi_1 = 1 \ldots \psi_4 = 1$ gezeichnet worden (Abb. 296). Sie stimmen mit den Ge-




a) Kinematische Kette $\Gamma_1$, b) Kinematische Kette $\Gamma_2$, c) Kinematische Kette $\Gamma_3$, d) Kinematische Kette $\Gamma_4$.
Abb. 296.

schwindigkeitsplänen für $\dot{\psi}_1 = 1 \ldots \dot{\psi}_4 = 1$ überein. Der Verschiebungszustand der zwangläufigen Kette $\Gamma_5$ ist zu demjenigen der Kette $\Gamma_3$ symmetrisch.

**Die Anschlußkräfte am Stabknoten.** Die $(r+f)$ unbekannten unabhängigen Komponenten $\varphi_J$, $\psi_c$ werden aus ebenso vielen statischen Bedingungen

$$\delta A_J = 0, \quad (J = A \ldots N), \qquad \delta A_c = 0, \quad (c = 1 \ldots f) \tag{528}$$

berechnet, die für die äußeren Kräfte an $(r+f)$ zwangläufigen, voneinander unabhängigen Gebilden angeschrieben werden. Hierbei wirken neben der Belastung $(\mathfrak{P}_J, \mathfrak{P}_h)$ der Stabknoten und Stäbe die Anschlußmomente des Stabwerks als äußere Kräfte der Knotenkette mit. Diese sind Funktionen der Belastung, der Temperaturänderung $t$, $\Delta t$ und der geometrischen Randwerte $\varphi_J$, $\varphi_K$, $\vartheta_h$ nach (505), (510). Die Superposition der Anteile liefert bei geraden Stäben mit konstantem Trägheitsmoment $J_h$, $J_g$ und den auf ein Vergleichsträgheitsmoment $J_c$ bezogenen reduzierten Längen $l'_h = l_h J_c / J_h$, $l'_g = l_g J_c / J_g$ folgende Ansätze:

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + \varphi_J M_{JJ}^{(h)} + \varphi_K M_{JK}^{(h)} + \vartheta_h M_{J\vartheta}^{(h)}, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \varphi_J M_{KJ}^{(h)} + \varphi_K M_{KK}^{(h)} + \vartheta_h M_{K\vartheta}^{(h)}. \end{aligned}\right\} \tag{529}$$

a) Steife Verbindung des Stabes $(h)$ mit den Knoten $J$ und $K$ nach (505):

$$\left.\begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + \varphi_J \frac{4}{l'_h} + \varphi_K \frac{2}{l'_h} - \vartheta_h \frac{6}{l'_h}, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \varphi_J \frac{2}{l'_h} + \varphi_K \frac{4}{l'_h} - \vartheta_h \frac{6}{l'_h}. \end{aligned}\right\} \tag{530}$$

b) Steife Verbindung des Stabes $(h)$ mit dem elastisch drehbaren Knoten $J$ und der starren Einspannung $K$ nach (506):

$$M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)} + \varphi_J \frac{4}{l'_h} - \vartheta_h \frac{6}{l'_h}, \qquad M_K^{(h)} = M_{K0}^{(h)} + \varphi_J \frac{2}{l'_h} - \vartheta_h \frac{6}{l'_h}. \tag{531}$$

Die Anteile $M_{J0}^{(h)}$, $M_{K0}^{(h)}$ sind als Anschlußmomente des Hauptsystems $(\varphi_J = 0, \psi_c = 0)$ Einspannungsmomente des beiderseits eingespannten Stabes $(h)$ infolge von $\mathfrak{P}_h$, $\Delta t$. Ihr Drehsinn ist nach S. 307 im Uhrzeigersinn positiv.

Die Tabelle 25 S. 323 enthält die Angaben für alle wichtigen Belastungen.

c) Steife Verbindung des Stabes $(g)$ mit dem Knoten $J$ und gelenkige Verbindung mit dem Knoten $G$ nach (510):

$$M_J^{(g)} = M_{J0}^{(g)} + \varphi_J M_{JJ}^{(g)} + \vartheta_h M_{J\vartheta}^{(h)} = M_{J0}^{(g)} + \varphi_J \frac{3}{l'_g} - \vartheta_g \frac{3}{l'_g}. \tag{532}$$

Der Anteil $M_{J0}^{(g)}$ bedeutet hier als Anschlußmoment des Hauptsystems ($\varphi_J = 0$, $\psi_c = 0$) das Einspannungsmoment des einseitig eingespannten Stabes ($g$) infolge von $\mathfrak{P}_h$, $\Delta t$. Der Drehsinn ist ebenfalls im Uhrzeigersinn positiv. Die Ergebnisse $M_{J0}^{(g)}$ für zahlreiche Belastungen des Stabes ($g$) sind in Tabelle 26 auf S. 324 eingetragen.

**Die statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$ ($J = A \ldots N$).** Zwangläufiges Gebilde $\Gamma_J$ mit $\varphi_J \neq 0$ (Abb. 292c). Drehung des Stabknotens $J$ um den Schnittpunkt der anschließenden Stäbe (Abb. 293) mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_J = \mathrm{i}_J$. Dabei leisten außer $\mathsf{M}_J$ nur noch die Anschlußmomente $M_J^{(h)}$, $M_J^{(g)}$ Arbeit. Nach dem Superpositionsgesetz ist

$$\delta A_J = \varphi_J a_{JJ} + \sum \varphi_K a_{JK} + \sum \psi_c a_{Jc} + a_{J0} = 0 .$$

Anteil $a_{JJ}$ der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\varphi_J = 1$ nach (530):

$$M_{JJ}^{(h)} = 4/l_h', \qquad M_{JJ}^{(g)} = 3/l_g',$$

$$a_{JJ} = -\mathrm{i}_J \sum_J (M_{JJ}^{(h)} + M_{JJ}^{(g)}) = -\mathrm{i}_J \sum_J \left(\frac{4}{l_h'} + \frac{3}{l_g'}\right). \tag{533}$$

Anteil $a_{JK}$ der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\varphi_K = 1$:

$$M_{JK}^{(h)} = 2/l_h', \qquad a_{JK} = -\mathrm{i}_J M_{JK}^{(h)} = -\mathrm{i}_J \frac{2}{l_h'}. \tag{534}$$

Anteil $a_{Jc}$ der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus den Stabdrehwinkeln $\vartheta_{hc}$, $\vartheta_{gc}$ infolge von $\psi_c = 1$:

$$M_{Jc}^{(h)} = -\vartheta_{hc} \cdot 6/l_h', \qquad M_{Jc}^{(g)} = -\vartheta_{gc} \cdot 3/l_g',$$

$$a_{Jc} = -\mathrm{i}_J \sum_J (M_{Jc}^{(h)} + M_{Jc}^{(g)}) = +\mathrm{i}_J \sum_J \left(\frac{6\vartheta_{hc}}{l_h'} + \frac{3\vartheta_{gc}}{l_g'}\right). \tag{535}$$

Anteil $a_{J0}$ der virtuellen Arbeit aus der Belastung $\mathsf{M}_J$, $\mathfrak{P}_h$, Temperaturänderung $t$, $\Delta t$ und Stützenverschiebung: Die Anschlußmomente $M_{J0}^{(h)}$, $M_{J0}^{(g)}$ aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ der Stäbe und aus ungleichförmiger Temperaturänderung $\Delta t$ sind in den Tabellen 25 und 26 enthalten. Die Anschlußmomente aus gleichförmiger Temperaturänderung und Stützenverschiebung werden nach (530) aus den Stabdrehwinkeln $\vartheta_{h0} \equiv \vartheta_{ht}$, $\vartheta_{hs}$ des Hauptsystems berechnet.

$$a_{J0} = -\mathrm{i}_J \left[\sum_J (M_{J0}^{(h)} + M_{J0}^{(g)}) - \sum_J \left(\frac{6\vartheta_{h0}}{l_h'} + \frac{3\vartheta_{g0}}{l_g'}\right) - \mathsf{M}_J\right]. \tag{536}$$

**Die statischen Bedingungen $\delta A_c = 0$ ($c = 1 \ldots f$).** Das zwangläufige Gebilde $\Gamma_c$ mit $\psi_c \neq 0$ (Abb. 292e) ist eine Knotenkette. Sie besteht aus den Knotenscheiben und einzelnen Stäben oder Stabgruppen, da die Bewegung in der Regel auf einen Abschnitt der Knotenkette beschränkt bleibt. Dabei können sich die abhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems (S. 311) ändern, dagegen sind alle unabhängigen Komponenten $\varphi_J$, $\psi_b$ außer $\psi_c$ Null. Der Geschwindigkeitszustand der Kette ist durch $\dot{\psi}_c = \mathrm{i}_c$ bestimmt. Dabei verschieben sich die Knotenscheiben parallel, während sich die Kettenstäbe ($h$) um die Pole $O_{hc}$ mit den Winkelgeschwindigkeiten $\nu_{hc}$ drehen (Abb. 294). Diese werden nach Abschn. 13 aus dem Polplan der Kette berechnet. Bei dieser Bewegung entsteht virtuelle Arbeit durch die Belastung $\mathfrak{P}_h$ und durch die Anschlußmomente an den Stäben oder Stabgruppen ($h$).

$$\delta A_c = \psi_c a_{cc} + \sum \psi_b a_{cb} + \sum \varphi_J a_{cJ} + a_{c0} = 0 .$$

Anteil $a_{cc}$ der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\psi_c = 1$ mit den Drehwinkeln $\vartheta_{hc}$ nach S. 312 und (530):

$$M_{Jc}^{(h)} = M_{Kc}^{(h)} = -6\,\vartheta_{hc}/l_h', \qquad M_{Jc}^{(g)} = -3\,\vartheta_{gc}/l_g',$$

$$a_{cc} = \mathrm{i}_c \sum_c [\nu_{hc}(M_{Jc}^{(h)} + M_{Kc}^{(h)}) + \nu_{gc} M_{Jc}^{(g)}] = -\mathrm{i}_c \sum_c \left(\frac{12\,\vartheta_{hc}}{l_h'}\nu_{hc} + \frac{3\,\vartheta_{gc}}{l_g'}\nu_{gc}\right). \tag{537}$$

Anteil $a_{cb}$ der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\psi_b = 1$ mit den Drehwinkeln $\vartheta_{hb}$:

$$a_{cb} = -\mathfrak{i}_c \sum_c \left(\frac{12\,\vartheta_{hb}}{l'_h}\,\nu_{hc} + \frac{3\,\vartheta_{gb}}{l'_g}\,\nu_{gc}\right). \tag{538}$$

Anteil $a_{cJ}$ der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\varphi_J = 1$:

$$a_{cJ} = \mathfrak{i}_c \sum_c [(M_{JJ}^{(h)} + M_{KJ}^{(h)})\,\nu_{hc} + M_{JJ}^{(g)}\,\nu_{gc}] = \mathfrak{i}_c \sum_c \left(\frac{6}{l'_h}\,\nu_{hc} + \frac{3}{l'_g}\,\nu_{gc}\right). \tag{539}$$

Anteil $a_{c0}$ der virtuellen Arbeit der Belastung $\mathfrak{P}_h$, der Anschlußmomente aus Belastung $\mathfrak{P}_h$, Temperaturänderung $t, \Delta t$ und Stützenverschiebungen: Knotenlasten $\mathfrak{P}_J$ werden einem der anschließenden Stäbe zugewiesen. Die Biegungsmomente $M_{J0}^{(h)}, M_{J0}^{(g)}$ aus der Belastung $\mathfrak{P}_h$ und den Stabdrehwinkeln $\vartheta_{h0} = \vartheta_{ht}, \vartheta_{hs}$ des Hauptsystems sind auf S. 307 erörtert worden. $\mathsf{M}_{h,c}$ ist das Moment der Belastung $\mathfrak{P}_h$ des Stabes $h = \overline{JK}$ in bezug auf den Pol $O_{hc}$; $M_0^{(h)} = M_{J0}^{(h)} + M_{K0}^{(h)}$

$$a_{c0} = \mathfrak{i}_c \sum_c \left[\left(M_0^{(h)} - \frac{12\,\vartheta_{h0}}{l'_h} + \mathsf{M}_{h,c}\right)\nu_{hc} + \left(M_{J0}^{(g)} - \frac{3\,\vartheta_{g0}}{l'_g} + \mathsf{M}_{g,c}\right)\nu_{gc}\right]. \tag{540}$$

**Die Form der Matrix.** Die Winkelgeschwindigkeiten $\nu_{hc}$ stimmen bis auf die Dimension mit den Stabdrehwinkeln überein, so daß

$$a_{Ac} = a_{cA}, \qquad a_{bc} = a_{cb}.$$

Das Ergebnis kann auch allgemein aus dem Gesetz über die Gegenseitigkeit der Wirkung von A. J. Maxwell bewiesen werden. In Anlehnung an (166) ist für zwei voneinander unabhängige, geometrisch verträgliche Verschiebungszustände eines Stabwerks

$$\sum \vartheta_I\, \mathfrak{M}_{I\,II} = \sum \vartheta_{II}\, \mathfrak{M}_{II\,I}. \tag{541}$$

Die Matrix der $(r + f)$ linearen Gleichungen $\delta A_J = 0$, $\delta A_b = 0$ ist daher zur Hauptdiagonale symmetrisch.

Polpläne zweier Stabketten mit einer unabhängigen Komponente.
Zwangläufige Kette $\Gamma_1$ mit $\psi_1 = 1$.

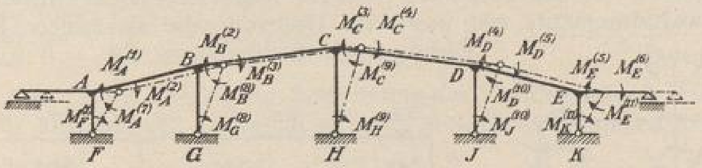



Abb. 297. (Riegelstäbe 1 bis 6, Pfosten 7 bis 11)
$\vartheta_9 = \psi_1 = 1$: $\nu_{01} \dots \nu_{61} = 0$, $\nu_{71} = l_9/l_7$, $\nu_{81} = l_9/l_8$.

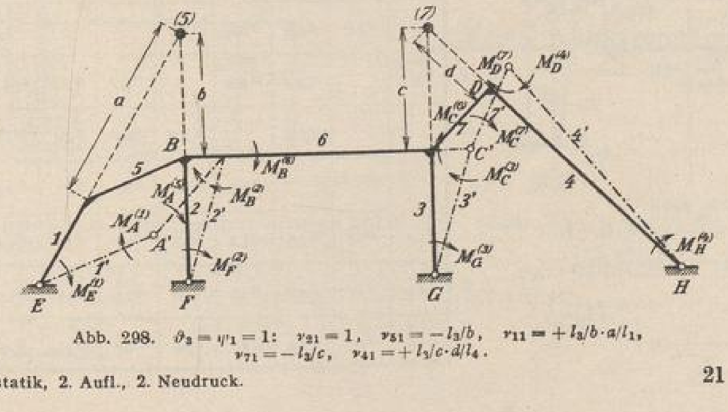



Abb. 298. $\vartheta_3 = \psi_1 = 1$: $\nu_{21} = 1$, $\nu_{51} = -l_3/b$, $\nu_{11} = +l_3/b \cdot a/l_1$, $\nu_{71} = -l_3/c$, $\nu_{41} = +l_3/c \cdot d/l_4$.

Die Vorzahlen $a_{Jc}$, $a_{bc}$ sind in der Regel von Null verschieden, dagegen sind alle Vorzahlen $a_{JH}$ Null, wenn der Knoten $H$ nicht mit dem Stabknoten $J$ durch einen Stab verbunden ist. Die unabhängigen Komponenten $\varphi_J$ des Verschiebungszustandes der Knotenkette sind daher nur zum Teil in den statischen Bedingungen $\delta A_J = 0$ enthalten. Die Matrix besteht dann aus zwei Teilen, von denen der eine voll, der andere je nach der Struktur des Hauptsystems nur teilweise besetzt ist (s. u.).

Die formale Entwicklung der Matrix wird an einem Silorahmen Abb. 299 gezeigt. Der Verschiebungszustand der Knotenkette ist durch $r + j = 6 + 3$ unabhängige Komponenten bestimmt. Sie werden aus neun statischen Bedingungen berechnet:

$$\delta A_J = 0, \qquad J = B \ldots H; \qquad \delta A_c = 0, \qquad c = 1 \ldots 3.$$

Als Komponenten $\psi_c$ der Knotenkette dienen

$$\psi_1 = \vartheta_5, \qquad \psi_2 = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \qquad \psi_3 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}.$$

Demnach sind die statischen Bedingungen für die zwangläufigen Gebilde $\Gamma_1 \ldots \Gamma_3$ notwendig. Die Stabdrehwinkel $\vartheta_{hc}$ und die Winkelgeschwindigkeiten $\nu_{hc}$ werden

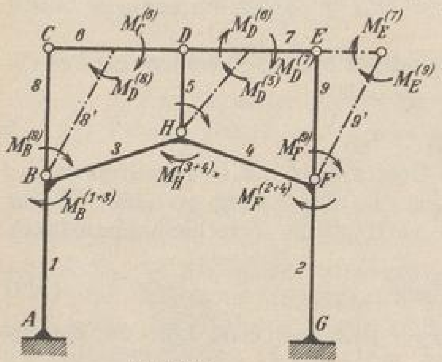



Abb. 299a.
Kette $\Gamma_1$: $\dot\psi_1 = \nu_{51} = 1$, $\nu_{81} = l_5/l_8$, $\nu_{91} = l_5/l_9$, $v_6 = v_7 = l_5$.

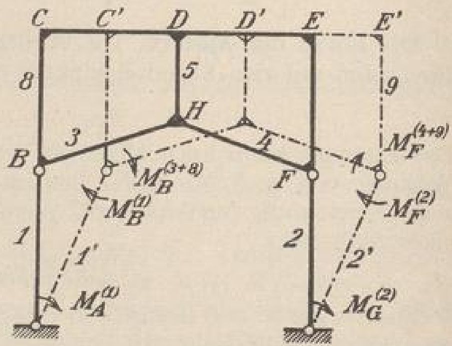



Abb. 299b.
Kette $\Gamma_2$: $\dot\psi_2 = \nu_{22} = 1 = \nu_{12}$, $v_3 = v_4 = \cdots v_9 = l_2$.

durch Rechnung aus den Polplänen Abb. 299 abgeleitet. Diese enthalten auch diejenigen Stabendmomente mit positivem Drehsinn, die als äußere Kräfte in die Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_c = 0$ usw. eingehen.

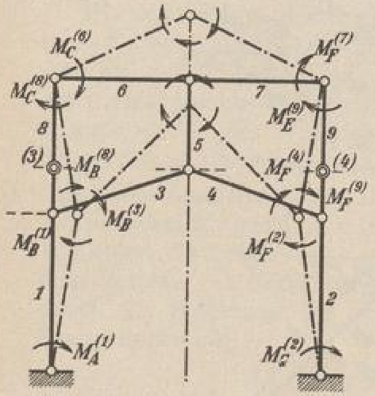



Abb. 299c.
Kette $\Gamma_3$: $\dot\psi_3 = \nu_{13} = -\nu_{23} = 1$,

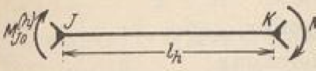
$$-\nu_{83} = +\nu_{93} = \frac{l_1}{l_8},$$

$$-\nu_{33} = +\nu_{43} = -\nu_{63} = +\nu_{73} = \frac{l_1}{l_8 - l_5},$$

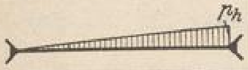
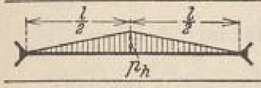
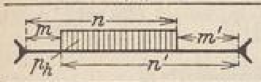
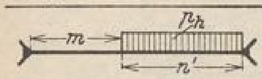
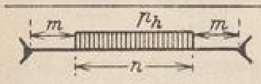
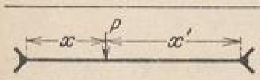
$$v_5 = \frac{l_1}{l_8 - l_5}\, l_8.$$

| | $\varphi_B$ | $\varphi_C$ | $\varphi_D$ | $\varphi_H$ | $\varphi_E$ | $\varphi_F$ | $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | $a_{BB}$ | $a_{BC}$ | | $a_{BH}$ | | | $a_{B1}$ | $a_{B2}$ | $a_{B3}$ | $a_{B0}$ |
| C | $a_{CB}$ | $a_{CC}$ | $a_{CD}$ | | | | $a_{C1}$ | $a_{C2}$ | $a_{C3}$ | $a_{C0}$ |
| D | | $a_{DC}$ | $a_{DD}$ | $a_{DH}$ | $a_{DE}$ | | $a_{D1}$ | $a_{D2}$ | $a_{D3}$ | $a_{D0}$ |
| H | $a_{HB}$ | | $a_{HD}$ | $a_{HH}$ | | $a_{HF}$ | $a_{H1}$ | $a_{H2}$ | $a_{H3}$ | $a_{H0}$ |
| E | | | $a_{ED}$ | | $a_{EE}$ | $a_{EF}$ | $a_{E1}$ | $a_{E2}$ | $a_{E3}$ | $a_{E0}$ |
| F | | | | $a_{FH}$ | $a_{FE}$ | $a_{FF}$ | $a_{F1}$ | $a_{F2}$ | $a_{F3}$ | $a_{F0}$ |
| 1 | $a_{1B}$ | $a_{1C}$ | $a_{1D}$ | $a_{1H}$ | $a_{1E}$ | $a_{1F}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{10}$ |
| 2 | $a_{2B}$ | $a_{2C}$ | $a_{2D}$ | $a_{2H}$ | $a_{2E}$ | $a_{2F}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{20}$ |
| 3 | $a_{3B}$ | $a_{3C}$ | $a_{3D}$ | $a_{3H}$ | $a_{3E}$ | $a_{3F}$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{30}$ |

Tabelle 25. Randmomente des beiderseits eingespannten Stabes mit konstantem Trägheitsmoment.




$\frac{m}{l_h}=\mu$; $\frac{n}{l_h}=\nu$; $\frac{m'}{l_h}=\mu'$; $\frac{n'}{l_h}=\nu'$; $x/l_h=\xi$; $x'/l_h=\xi'$

| Belastung | $M_{J0}^{(h)}$ | $M_{K0}^{(h)}$ |
|---|---|---|
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{30}$ | $+\frac{p_h l_h^2}{20}$ |
|  | $-\frac{5}{96} p_h l_h^2$ | $+\frac{5}{96} p_h l_h^2$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}[6(\nu^2-\mu^2)-8(\nu^3-\mu^3) + 3(\nu^4-\mu^4)]$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}[6(\nu'^2-\mu'^2)-8(\nu'^3-\mu'^3) + 3(\nu'^4-\mu'^4)]$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}\nu'^3(1+3\mu)$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}\nu'^2[1+\mu(2+3\mu)]$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[\nu^2+6\mu(1-\mu)]$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[\nu^2+6\mu(1-\mu)]$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[5\nu^2+6\mu(1-\mu)]$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[5\nu^2+6\mu(1-\mu)]$ |
|  | $-P l_h \omega'_\tau$ | $+P l_h \omega_\tau$ |
|  | $+M\xi'(2-3\xi')$ | $+M\xi(2-3\xi)$ |
| Ungleichförmige Temperaturänderung um $t_u - t_o = \Delta t$ | $-EJ_h \frac{\alpha_t \Delta t}{h_h}$ | $+EJ_h \frac{\alpha_t \Delta t}{h_h}$ |

Die Anwendung der Theorie zur Berechnung der Verschiebungen und Schnittkräfte wird für alle äußeren Ursachen an zwei einfachen Beispielen gezeigt.

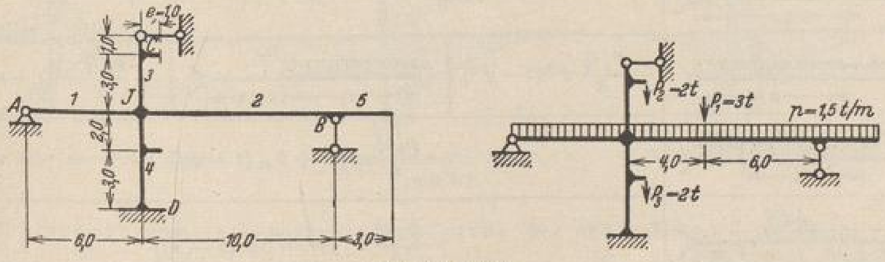



Abb. 300a und b.

**Beispiel 1.**

1. Bezeichnungen und Abmessungen (Abb. 300). (Allen Zahlen liegen die Einheiten t und m zugrunde).

$$J_1 = 0{,}006\,,\quad J_2 = 0{,}020\,,\quad J_3 = 0{,}004\,,\quad J_4 = 0{,}005\ \text{m}^4,$$
$$J_c = 0{,}004\,,\quad E J_c = 2\,100\,000 \cdot 0{,}004 = 8\,400\ \text{tm}^2;$$
$$l'_1 = 4{,}00\,,\quad l'_2 = 2{,}00\,,\quad l'_3 = 4{,}00\,,\quad l'_4 = 4{,}00\ \text{m}\,,$$

Trägerhöhe: $h_1 = 0{,}6\,,\quad h_2 = 0{,}85$ m.

Die Verschiebungen $v$, $u$ werden positiv bezeichnet, wenn sie nach unten oder nach rechts gerichtet sind.

Abszissen $\xi$ sind nach rechts und abwärts,
Abszissen $\xi'$ nach links und aufwärts positiv.

2. Überzählige Größe und statische Bedingungsgleichung.
Überzählige Größe: $\varphi_J$; Statische Bedingung: $a_{JJ}\,\varphi_J + a_{J0} = 0$.

$$\varphi_J = -\frac{a_{J0}}{a_{JJ}}; \qquad a_{JJ} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{l'_1} + \frac{3}{l'_2} + \frac{3}{l'_3} + \frac{4}{l'_4}\right) = -4{,}000.$$

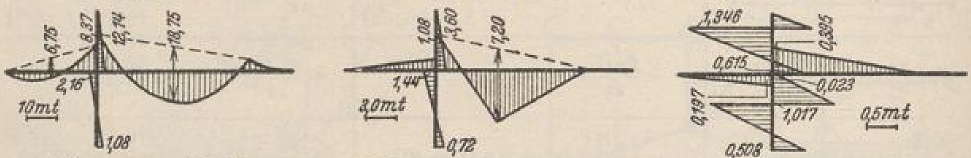
3. Belastung der Stäbe 1, 2, 5 durch $p = 1{,}5$ t/m (Abb. 301a).

$$M^{(1)}_{J0} = +\frac{p\,l_1^2}{8} = +6{,}750; \qquad M^{(2)}_{J0} = -\frac{p\,l_2^2}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{p\,l_5^2}{2} = -15{,}375 \text{ mt}.$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i}\,(M^{(1)}_{J0} + M^{(2)}_{J0}) = +8{,}625, \qquad \varphi_J = +2{,}156.$$

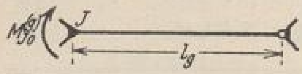
$$M^{(1)}_J = M^{(1)}_{J0} + \frac{3}{l'_1}\,\varphi_J = +8{,}367, \qquad M^{(2)}_J = M^{(2)}_{J0} + \frac{3}{l'_2}\,\varphi_J = -12{,}141 \text{ mt}$$

$$M^{(3)}_J = \frac{3}{l'_3}\,\varphi_J = +1{,}617, \qquad M^{(4)}_J = \frac{4}{l'_4}\,\varphi_J = +2{,}156, \qquad M^{(4)}_D = \frac{2}{l'_4}\,\varphi_J = +1{,}078 \text{ mt}.$$

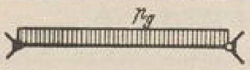
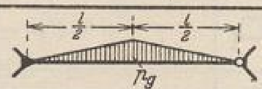
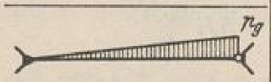
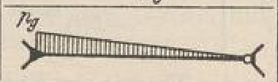
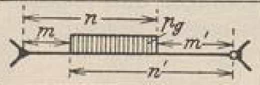
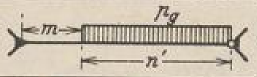
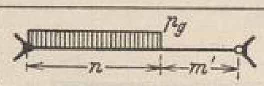
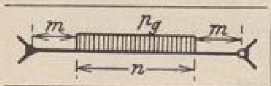
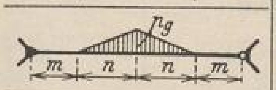
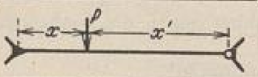
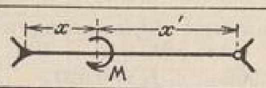



a) Biegungsmomente infolge $p$. b) Biegungsmomente infolge $P_1$. c) Biegungsmomente infolge $P_2 = P_3$.
Abb. 301.

Tabelle 26. Randmoment des einseitig eingespannten Stabes mit konstantem Trägheitsmoment.



$$\frac{m}{l_g} = \mu; \quad \frac{n}{l_g} = \nu; \quad \frac{m'}{l_g} = \mu'; \quad \frac{n'}{l_g} = \nu'; \quad x/l_g = \xi; \quad x'/l_g = \xi'$$

| | | | |
|---|---|---|---|
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}$ |  | $-\frac{5}{64}\,p_g\,l_g^2$ |
|  | $-\frac{7}{120}\,p_g\,l_g^2$ |  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{15}$ |
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,[2\,(\nu'^2 - \mu'^2) - (\nu'^4 - \mu'^4)]$ | | |
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu'^2\,(2 - \nu'^2)$ |  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu^2\,(1 + \mu')^2$ |
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu\,[\nu^2 + 6\,\mu\,(1 - \mu)]$ | | |
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu\,[5\,\nu^2 + 6\,\mu\,(1 - \mu)]$ | | |
|  | $-\frac{P\,l_g}{2}\,\omega'_D$ |  | $-\frac{M}{2}\,\omega'_M$ |
| Ungleichförmige Temperaturänderung um $t_u - t_o = \Delta t$ | $-\frac{3}{2}\,E J_g\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h_g}$ | | |

4. Belastung des Stabes 2 durch $P_1 = 3$ t (Abb. 301 b).

$$M_{J0}^{(2)} = -\frac{P_1 l_2}{2}\,\omega_D' = -\frac{3{,}0 \cdot 10{,}0}{2} \cdot 0{,}384 = -5{,}760 \text{ mt}.$$

$$a_{J0} = -\mathfrak{i} \cdot M_{J0}^{(2)} = +5{,}760\,; \qquad \varphi_J = +1{,}440\,.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,\varphi_J = +1{,}080\,, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = -3{,}600 \text{ mt}.$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,\varphi_J = +1{,}080\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{4}{l_4'}\,\varphi_J = +1{,}440\,, \qquad M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,\varphi_J = +0{,}720 \text{ mt}.$$

5. Belastung der Stäbe 3 und 4 durch $P_2 = P_3 = 2$ t (Abb. 301 c).

$$M_{J0}^{(3)} = -\frac{P_2 e}{2}(3\,\xi^2 - 1) = -\frac{2{,}0 \cdot 1{,}0}{2}(3 \cdot 0{,}25^2 - 1) = +0{,}812 \text{ mt}.$$

$$M_{J0}^{(4)} = P_3 e\,\xi'(2 - 3\,\xi') = 2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}6\,(2 - 3 \cdot 0{,}6) = +0{,}240\,,$$

$$M_{D0}^{(4)} = P_3 e\,\xi\,(2 - 3\,\xi) = +0{,}640\,.$$

$$a_{J0} = -\mathfrak{i}\,(M_{J0}^{(3)} + M_{J0}^{(4)}) = -1{,}052\,; \qquad \varphi_J = -0{,}263\,.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,\varphi_J = -0{,}197\,, \quad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = -0{,}395 \text{ mt}\,, \quad M_J^{(3)} = M_{J0}^{(3)} + \frac{3}{l_3'}\,\varphi_J = +0{,}615\,,$$

$$M_J^{(4)} = M_{J0}^{(4)} + \frac{4}{l_4'}\,\varphi_J = -0{,}023 \text{ mt}\,, \qquad M_D^{(4)} = M_{D0}^{(4)} + \frac{2}{l_4'}\,\varphi_J = +0{,}508\,.$$

6. Temperaturerhöhung aller Stäbe um $t = 15^0$ (Abb. 302 a).

$$\alpha_t t = 0{,}00015\,, \qquad \alpha_t t\,E\,J_c = 1{,}26\,,$$

$$\vartheta_{1t} = -E\,J_c\,\frac{\alpha_t t\,l_4}{l_1} = -1{,}050\,, \qquad \vartheta_{2t} = +E\,J_c\,\frac{\alpha_t t\,l_4}{l_2} = +0{,}630\,,$$

$$\vartheta_{3t} = -E\,J_c\,\frac{\alpha_t t\,l_1}{l_3} = -1{,}890\,, \qquad \vartheta_{4t} = +E\,J_c\,\frac{\alpha_t t\,l_1}{l_4} = +1{,}512\,,$$

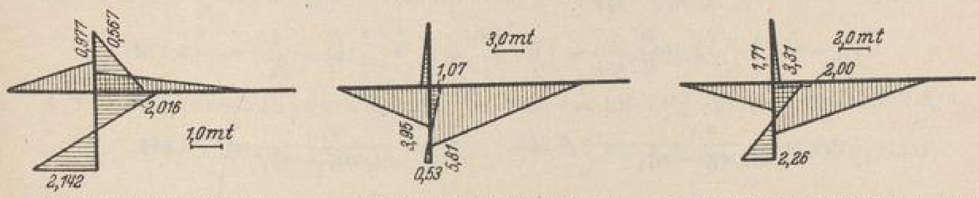
$$a_J = -\mathfrak{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\,\vartheta_{1t} - \frac{3}{l_2'}\,\vartheta_{2t} - \frac{3}{l_3'}\,\vartheta_{3t} - \frac{6}{l_4'}\,\vartheta_{4t}\right) = +1{,}008\,.$$

$$\varphi_J = +0{,}252\,,$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}(\varphi_J - \vartheta_{1t}) = +0{,}977\,, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}(\varphi_J - \vartheta_{2t}) = -0{,}567 \text{ mt}\,,$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}(\varphi_J - \vartheta_{3t}) = +1{,}606\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_{4t}) = -2{,}016\,,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(\varphi_J - 3\,\vartheta_{4t}) = -2{,}142\,.$$




a) Biegungsmomente infolge $t$. b) Biegungsmomente infolge $\Delta t$. c) Biegungsmomente infolge $\Delta x_d$, $\Delta y_d$.

Abb. 302.

7. Ungleichförmige Temperatur-Änderung der Stäbe 1 und 2 um $\Delta t = -10^0$.

$$M_{J\Delta t}^{(1)} = \frac{3}{2}\,E\,J_1\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h_1} = -3{,}150\,, \qquad M_{J\Delta t}^{(2)} = -\frac{3}{2}\,E\,J_2\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h_2} = +7{,}413 \text{ mt}\,,$$

$$a_{J\Delta t} = -\mathfrak{i}\,(M_{J\Delta t}^{(1)} + M_{J\Delta t}^{(2)}) = -4{,}263\,; \qquad \varphi_J = -1{,}066\,.$$

$$M_J^{(1)} = M_{J\Delta t}^{(1)} + \frac{3}{l_1'}\,\varphi_J = -3{,}949\,, \qquad M_J^{(2)} = M_{J\Delta t}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = +5{,}814 \text{ mt}\,,$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,\varphi_J = -0{,}799\,, \quad M_J^{(4)} = \frac{4}{l_4'}\,\varphi_J = -1{,}066\,, \quad M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,\varphi_J = -0{,}533 \quad \text{(Abb. 302 b).}$$

8. Verschiebung des Stützpunktes $D$ um $\Delta x_d = -0{,}001$ m und $\Delta y_d = +0{,}002$ m.

$$\vartheta_{1s} = +E J_c \frac{\Delta y_d}{l_1} = +2{,}800, \qquad \vartheta_{2s} = -E J_c \frac{\Delta y_d}{l_2} = -1{,}680,$$

$$\vartheta_{4s} = -E J_c \frac{\Delta x_d}{l_4} = +1{,}680.$$

$$a_{Js} = -\mathrm{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\vartheta_{1s} - \frac{3}{l_2'}\vartheta_{2s} - \frac{6}{l_4'}\vartheta_{4s}\right) = +2{,}100; \qquad \varphi_J = +0{,}525.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}(\varphi_J - \vartheta_{1s}) = -1{,}706, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}(\varphi_J - \vartheta_{2s}) = +3{,}308 \text{ mt},$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\varphi_J = +0{,}394, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(2\varphi_J - 3\vartheta_{4s}) = -1{,}995,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(\varphi_J - 3\vartheta_{4s}) = -2{,}258 \quad \text{(Abb. 302c).}$$

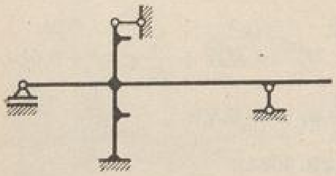


Abb. 303.

**Beispiel 2.**

1. Bezeichnungen und Abmessungen: Das System (Abb. 303) unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur durch ein bewegliches Lager $A$. Die Abmessungen und Belastungen sind unverändert.

2. Überzählige Größen: $\varphi_J$, $\psi_1 = \vartheta_4$.

Statische Bedingungen: $a_{JJ}\varphi_J + a_{J1}\psi_1 + a_{J0} = 0$,
$a_{1J}\varphi_J + a_{11}\psi_1 + a_{10} = 0$.

Zustand $\varphi_J = 1$:

$$M_{JJ}^{(1)} = \frac{3}{l_1'}, \qquad M_{JJ}^{(2)} = \frac{3}{l_2'}, \qquad M_{JJ}^{(3)} = \frac{3}{l_3'}, \qquad M_{JJ}^{(4)} = \frac{4}{l_4'}, \qquad M_{DJ}^{(4)} = \frac{2}{l_4'}.$$

Zustand $\psi_1 = 1$:

$$\vartheta_{11} = 0, \qquad \vartheta_{21} = 0, \qquad \vartheta_{31} = -\frac{l_4}{l_3}, \qquad \vartheta_{41} = 1;$$

$$M_{J1}^{(1)} = M_{J1}^{(2)} = 0, \qquad M_{J1}^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\frac{l_4}{l_3}, \qquad M_{J1}^{(4)} = M_{D1}^{(4)} = -\frac{6}{l_4'}.$$

Vorzahlen der Bedingungsgleichungen:

$$a_{JJ} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{l_1'} + \frac{3}{l_2'} + \frac{3}{l_3'} + \frac{4}{l_4'}\right) = -4{,}000,$$

$$a_{J1} = -\mathrm{i}\left(+\frac{3}{l_3'}\frac{l_4}{l_3} - \frac{6}{l_4'}\right) = +0{,}562,$$

$$a_{11} = \left(-\mathrm{i}\frac{l_4}{l_3}\right)\left(+\frac{3}{l_3'}\frac{l_4}{l_3}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{12}{l_4'}\right) = -3\left(\frac{1}{l_3'}\frac{l_4^2}{l_3^2} + \frac{4}{l_4'}\right) = -4{,}172.$$

$\beta$-Vorzahlen:

$$\beta_{JJ} = \frac{a_{11}}{a_{JJ}a_{11} - a_{J1}^2} = -0{,}255, \qquad \beta_{11} = \frac{a_{JJ}}{a_{JJ}a_{11} - a_{J1}^2} = -0{,}244$$

$$\beta_{J1} = -\frac{a_{J1}}{a_{JJ}a_{11} - a_{J1}^2} = -0{,}034;$$

$$-\varphi_J = a_{J0}\beta_{JJ} + a_{10}\beta_{J1}, \qquad -\psi_1 = a_{J0}\beta_{1J} + a_{10}\beta_{11}.$$

3. Belastung der Stäbe 1, 2, 5 durch $p = 1{,}5$ t/m (Abb. 304a).

$$M_{J0}^{(1)} = +6{,}750, \qquad M_{J0}^{(2)} = -15{,}375 \text{ mt}.$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i}\,(M_{J0}^{(1)} + M_{J0}^{(2)}) = +8{,}625, \qquad a_{10} = 0.$$

$$-\varphi_J = a_{J0}\beta_{JJ} = -2{,}199, \qquad -\psi_1 = a_{J0}\beta_{1J} = -0{,}297.$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \qquad \vartheta_3 = -\frac{l_4}{l_3}\psi_1 = -0{,}371, \qquad \vartheta_4 = +0{,}297.$$

$$M_J^{(1)} = M_{J0}^{(1)} + \frac{3}{l_1'}\,\varphi_J = +8{,}399, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = -12{,}076,$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,(\varphi_J - \vartheta_3) = +1{,}928, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +1{,}754,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}654 \text{ mt}.$$

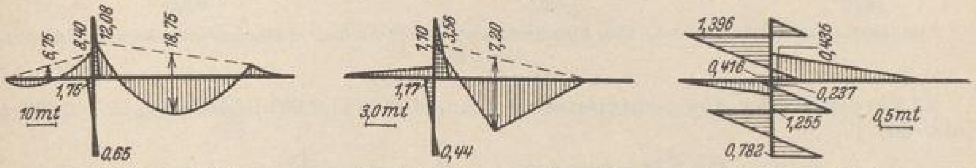
4. Belastung des Stabes 2 durch $P_1 = 3$ t (Abb. 304b).

$$M_{J0}^{(2)} = -5{,}760, \qquad a_{J0} = -\mathrm{i}\,M_{J0}^{(2)} = +5{,}76, \qquad a_{10} = 0,$$

$$\varphi_J = +1{,}469, \quad \psi_1 = +0{,}198, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \quad \vartheta_3 = -0{,}247, \quad \vartheta_4 = +0{,}198.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,(\varphi_J - \vartheta_1) = +1{,}102, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = -3{,}557 \text{ mt},$$

$$M_J^{(3)} = +1{,}287, \qquad M_J^{(4)} = +1{,}172, \qquad M_D^{(4)} = +0{,}438.$$




a) Biegungsmomente infolge $p$. b) Biegungsmomente infolge $P_1$. c) Biegungsmomente infolge $P_2 = P_3$.

Abb. 304.

5. Belastung der Stäbe 3 und 4 durch $P_2 = P_3 = 2$ t (Abb. 304c).

$$M_{J0}^{(3)} = +0{,}812, \qquad M_{J0}^{(4)} = +0{,}240, \qquad M_{D0}^{(4)} = +0{,}640 \text{ mt},$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i}\,(M_{J0}^{(3)} + M_{J0}^{(4)}) = -1{,}052,$$

$$a_{10} = -\mathrm{i}\,\frac{l_4}{l_3}\,(M_{J0}^{(3)} + \mathsf{M}_{3,1}) + \mathrm{i}\,(M_{J0}^{(4)} + M_{D0}^{(4)} + \mathsf{M}_{4,1})$$

$$= -\mathrm{i}\,\frac{4{,}00}{5{,}00}\,(0{,}812 + 2{,}0 \cdot 1{,}0) + \mathrm{i}\,(0{,}240 + 0{,}640 + 2{,}0 \cdot 1{,}0) = -0{,}636.$$

$$-\varphi_J = a_{J0}\,\beta_{JJ} + a_{10}\,\beta_{J1} = +0{,}290, \qquad -\psi_1 = a_{J0}\,\beta_{1J} + a_{10}\,\beta_{11} = +0{,}191,$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \qquad \vartheta_3 = -\frac{l_4}{l_3}\,\psi_1 = +0{,}239, \qquad \vartheta_4 = -0{,}191,$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,\varphi_J = -0{,}218, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = -0{,}435,$$

$$M_J^{(3)} = M_{J0}^{(3)} + \frac{3}{l_3'}\,(\varphi_J - \vartheta_3) = +0{,}416, \qquad M_J^{(4)} = M_{J0}^{(4)} + \frac{2}{l_4'}\,(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}237,$$

$$M_D^{(4)} = M_{D0}^{(4)} + \frac{2}{l_4'}\,(\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}782 \text{ mt}.$$

6. Temperaturerhöhung aller Stäbe um $t = 15^0$ (Abb. 305a).

$$\vartheta_{1t} = -E\,J_c\,\frac{\alpha_t\,t\,l_4}{l_1} = -1{,}050, \qquad \vartheta_{2t} = +E\,J_c\,\frac{\alpha_t\,t\,l_4}{l_2} = +0{,}630, \qquad \vartheta_{3t} = \vartheta_{4t} = 0,$$

$$a_{Jt} = -\mathrm{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\,\vartheta_{1t} - \frac{3}{l_2'}\,\vartheta_{2t}\right) = +0{,}158, \qquad a_{1t} = 0,$$

$$\varphi_J = 0{,}040, \qquad \psi_1 = 0{,}005.$$

$$\vartheta_1 = -1{,}050, \qquad \vartheta_2 = +0{,}630, \qquad \vartheta_3 = -\frac{l_4}{l_3}\,\psi_1 = -0{,}007, \qquad \vartheta_4 = +0{,}005.$$

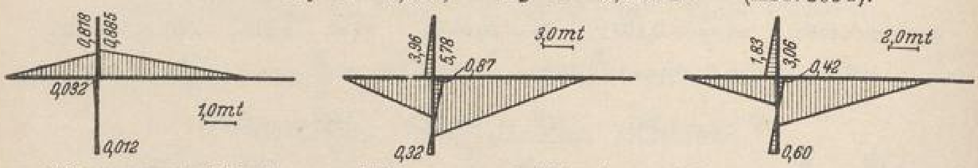
$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,(\varphi_J - \vartheta_1) = +0{,}818, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,(\varphi_J - \vartheta_2) = -0{,}885 \text{ mt},$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,(\varphi_J - \vartheta_3) = +0{,}035, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}032,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}012 \text{ mt}.$$

7. Ungleichförmige Temperaturänderung der Stäbe 1 und 2 um $\Delta t = -10^0$.

$$M^{(1)}_{J\Delta t} = -3{,}150, \qquad M^{(2)}_{J\Delta t} = +7{,}413 \text{ mt}.$$
$$a_{J\Delta t} = -1\,(M^{(1)}_{J\Delta t} + M^{(2)}_{J\Delta t}) = -4{,}263, \qquad a_{1\Delta t} = 0;$$
$$\varphi_J = -1{,}086, \qquad \psi_1 = -0{,}146.$$
$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \qquad \vartheta_3 = +0{,}183, \qquad \vartheta_4 = -0{,}146,$$
$$M_J^{(1)} = -3{,}965, \qquad M_J^{(2)} = +5{,}784, \qquad M_J^{(3)} = -0{,}952,$$
$$M_J^{(4)} = -0{,}867, \qquad M_D^{(4)} = -0{,}324 \text{ mt} \qquad \text{(Abb. 305b).}$$




a) Biegungsmomente infolge $t$. b) Biegungsmomente infolge $\Delta t$. c) Biegungsmomente infolge $\Delta x_d$, $\Delta y_d$.
Abb. 305.

8. Verschiebung des Stützpunktes $d$ um $\Delta x_d = -0{,}001$ m und $\Delta y_d = +0{,}002$ m (Abb. 305c).

$$\vartheta_{1s} = +E J_c \frac{\Delta y_d}{l_1} = +2{,}800, \qquad \vartheta_{2s} = -E J_c \frac{\Delta y_d}{l_2} = -1{,}680,$$
$$\vartheta_{4s} = -E J_c \frac{\Delta x_d}{l_4} = +1{,}680,$$
$$a_{Js} = -\mathrm{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\vartheta_{1s} - \frac{3}{l_2'}\vartheta_{2s} - \frac{6}{l_4'}\vartheta_{4s}\right) = +2{,}100, \qquad a_{1s} = \mathrm{i}\left(-\frac{12}{l_4'}\vartheta_{4s}\right) = -5{,}040,$$
$$\varphi_J = +0{,}362, \qquad \psi_1 = -1{,}160.$$
$$\vartheta_1 = \vartheta_{1s} = +2{,}800, \qquad \vartheta_2 = \vartheta_{2s} = -1{,}680, \qquad \vartheta_3 = \vartheta_{31}\,\psi_1 = +1{,}450,$$
$$\vartheta_4 = \vartheta_{4s} + \vartheta_{41}\,\psi_1 = +0{,}520,$$
$$M_J^{(1)} = -1{,}828, \qquad M_J^{(2)} = +3{,}063, \qquad M_J^{(3)} = -0{,}816 \text{ mt},$$
$$M_J^{(4)} = -0{,}418, \qquad M_D^{(4)} = -0{,}599.$$

**Durchgehender Träger mit elastisch drehbaren Stützen. $\psi_c = 0$.**

1. Geometrische Größen (alle Zahlen mit den Einheiten m und t), Abb. 306:
Trägheitsmoment der Riegel: $J_r = 0{,}120$ m$^4$; Trägheitsmoment der Pfosten: $J_s = 0{,}240$ m$^4$; $J_c = J_r = 0{,}120$; $l_1' = 14{,}0$; $l_3' = l_5' = l_7' = 12{,}5$; $l_9' = 8{,}325$; $l_2' = l_4' = l_6' = l_8' = 5{,}5$.

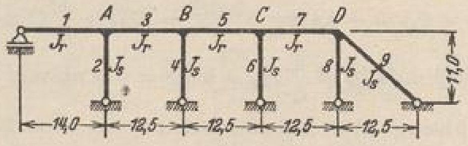



Abb. 306.

2. Überzählige Größen und statische Bedingungsgleichungen. Überzählige: $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$.
Matrix der statischen Bedingungen:

| | $\varphi_A$ | $\varphi_B$ | $\varphi_C$ | $\varphi_D$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $a_{AA}$ | $a_{AB}$ | · | · | $a_{A0}$ |
| $B$ | $a_{BA}$ | $a_{BB}$ | $a_{BC}$ | · | $a_{B0}$ |
| $C$ | · | $a_{BC}$ | $a_{CC}$ | $a_{CD}$ | $a_{C0}$ |
| $D$ | · | · | $a_{CD}$ | $a_{DD}$ | $a_{D0}$ |

$$a_{AA} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{l_1'} + \frac{3}{l_2'} + \frac{4}{l_3'}\right) = -1{,}079712,$$
$$a_{AB} = a_{BC} = a_{CD} = -\mathrm{i}\,\frac{2}{l_3'} = -0{,}160000,$$
$$a_{BB} = a_{CC} = -\mathrm{i}\left(\frac{4}{l_3'} + \frac{3}{l_4'} + \frac{4}{l_5'}\right) = -1{,}185454,$$
$$a_{DD} = -\mathrm{i}\left(\frac{4}{l_7'} + \frac{3}{l_8'} + \frac{3}{l_9'}\right) = -1{,}225814.$$

| | $\varphi_A$ | $\varphi_B$ | $\varphi_C$ | $\varphi_D$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | − 1,079712 | − 0,160000 | | |
| $B$ | − 0,160000 | − 1,185454 | − 0,160000 | |
| $C$ | | − 0,160000 | − 1,185454 | − 0,160000 |
| $D$ | | | − 0,160000 | − 1,225814 |

3. Auflösung durch Entwicklung von $\beta_{44}$ und $\beta_{11}$ nach einem Kettenbruch:

$$\varkappa_{AB} = \frac{a_{BA}}{a_{AA}} = +0{,}148188; \qquad a_{BB}^{(1)} = a_{BB} - a_{AB}\varkappa_{AB} = -1{,}161744,$$

$$\varkappa_{BC} = \frac{a_{CB}}{a_{BB}^{(1)}} = +0{,}137724; \qquad a_{CC}^{(2)} = a_{CC} - a_{BC}\varkappa_{BC} = -1{,}163418,$$

$$\varkappa_{CD} = \frac{a_{DC}}{a_{CC}^{(2)}} = +0{,}137526; \qquad a_{DD}^{(3)} = a_{DD} - a_{CD}\varkappa_{CD} = -1{,}203810,$$

$$\beta_{DD} = \frac{1}{a_{DD}^{(3)}} = -0{,}830696,$$

$$\varkappa_{DC} = \frac{a_{CD}}{a_{DD}} = +0{,}130526; \qquad a_{CC}^{(1)} = a_{CC} - a_{DC}\varkappa_{DC} = -1{,}164570,$$

$$\varkappa_{CB} = \frac{a_{BC}}{a_{CC}^{(1)}} = +0{,}137390; \qquad a_{BB}^{(2)} = a_{BB} - a_{CB}\varkappa_{CB} = -1{,}163472,$$

$$\varkappa_{BA} = \frac{a_{AB}}{a_{BB}^{(2)}} = +0{,}137519; \qquad a_{AA}^{(3)} = a_{AA} - a_{BA}\varkappa_{BA} = -1{,}057709,$$

$$\beta_{AA} = \frac{1}{a_{AA}^{(3)}} = -0{,}945440.$$

Vorzahlen $\beta_{JK}$

$\longrightarrow$ − 0,137519 − 0,137390 − 0,130526 $\longrightarrow$

| | $a_{A0}$ | $a_{B0}$ | $a_{C0}$ | $a_{D0}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_A$ | − 0,945440 | + 0,130016 | − 0,017863 | + 0,002332 | − 0,148188 |
| $\varphi_B$ | + 0,130016 | − 0,877371 | + 0,120542 | − 0,015734 | − 0,137724 |
| $\varphi_C$ | − 0,017863 | + 0,120542 | − 0,875243 | + 0,114242 | − 0,137526 |
| $\varphi_D$ | + 0,002332 | − 0,015734 | + 0,114242 | − 0,830696 | |

$$\varphi_J = -\sum \beta_{Jk} a_{k0}$$

4. Belastung durch Eigengewicht $g = 2{,}0$ t/m (Abb. 307a).

$$M_{A0}^{(1)} = +\frac{g\,l_1^2}{8} = +49{,}0000, \qquad M_{A0}^{(3)} = -\frac{g\,l_3^2}{12} = -26{,}0417 \text{ mt},$$

$$M_{B0}^{(3)} = -M_{B0}^{(5)} = M_{C0}^{(5)} = -M_{C0}^{(7)} = M_{D0}^{(7)} = +26{,}0417.$$

$$a_{A0} = -\mathrm{i}\,(M_{A0}^{(1)} + M_{A0}^{(3)}) = -22{,}9583; \qquad a_{B0} = -\mathrm{i}\,(M_{B0}^{(3)} + M_{B0}^{(5)}) = 0,$$

$$a_{C0} = 0; \qquad a_{D0} = -26{,}0417.$$

$$\varphi_A = -21{,}645, \quad \varphi_B = +2{,}575, \quad \varphi_C = +2{,}565, \quad \varphi_D = -21{,}579$$

$$M_A^{(1)} = M_{A0}^{(1)} + \frac{3}{l'_1}\,\varphi_A = +\,44{,}362\,; \qquad M_A^{(2)} = \frac{3}{l'_2}\,\varphi_A = -\,11{,}806\,.$$

$$M_A^{(3)} = M_{A0}^{(3)} + \frac{2}{l'_3}\,(2\,\varphi_A + \varphi_B) = -\,32{,}556\,; \qquad M_B^{(4)} = \frac{3}{l'_4}\,\varphi_B = +\,1{,}405\,.$$

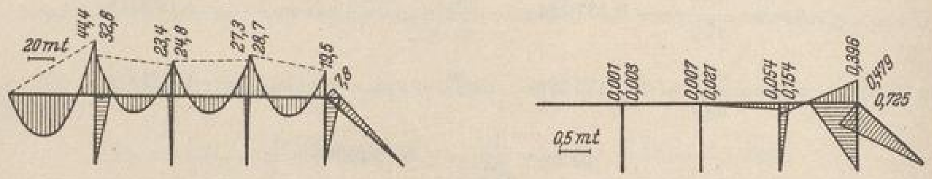
$$M_B^{(3)} = M_{B0}^{(3)} + \frac{2}{l'_3}\,(2\,\varphi_B + \varphi_A) = +\,23{,}403\,; \qquad M_C^{(6)} = \frac{3}{l'_6}\,\varphi_C = +\,1{,}399\,.$$

$$M_B^{(5)} = M_{B0}^{(5)} + \frac{2}{l'_5}\,(2\,\varphi_B + \varphi_C) = -\,24{,}808\,; \qquad M_D^{(8)} = \frac{3}{l'_8}\,\varphi_D = -\,11{,}770\,.$$

$$M_C^{(5)} = M_{C0}^{(5)} + \frac{2}{l'_5}\,(2\,\varphi_C + \varphi_B) = +\,27{,}275\,; \qquad M_D^{(9)} = \frac{3}{l'_9}\,\varphi_D = -\;\;7{,}776\,.$$

$$M_C^{(7)} = M_{C0}^{(7)} + \frac{2}{l'_7}\,(2\,\varphi_C + \varphi_D) = -\,28{,}674\,.$$

$$M_D^{(7)} = M_{D0}^{(7)} + \frac{2}{l'_7}\,(2\,\varphi_D + \varphi_C) = +\,19{,}547 \text{ mt}\,.$$




a) Biegungsmomente infolge $g = 2$ t/m. Abb. 307. b) Biegungsmomente infolge $W = 1$ t.

5. Belastung durch eine waagerechte Kraft $W$ in 1,6 m Höhe über dem Knoten $D$ (Abb. 307b).

| | |
|---|---|
| $M_D = 1{,}6\,W$ | $a_{D0} = 1{,}6\,W$ |
| $\varphi_A = -\,0{,}003731\,W$ | $\varphi_C = -\,0{,}182787\,W$ |
| $\varphi_B = +\,0{,}025174\,W$ | $\varphi_D = +\,1{,}329114\,W$ |
| $M_A^{(1)} = -\,0{,}000799\,W$ | $M_C^{(5)} = -\,0{,}054464\,W$ |
| $M_A^{(2)} = -\,0{,}002035\,W$ | $M_C^{(6)} = -\,0{,}099702\,W$ |
| $M_A^{(3)} = +\,0{,}002833\,W$ | $M_C^{(7)} = +\,0{,}154166\,W$ |
| $M_B^{(3)} = +\,0{,}007459\,W$ | $M_D^{(7)} = +\,0{,}396071\,W$ |
| $M_B^{(4)} = +\,0{,}013731\,W$ | $M_D^{(8)} = +\,0{,}724971\,W$ |
| $M_B^{(5)} = -\,0{,}021190\,W$ | $M_D^{(9)} = +\,0{,}478960\,W$ mt. |

## 40. Die Auflösung des Ansatzes.

**Geometrisch bestimmtes Hauptsystem.** Die $(r+f)$ linearen Gleichungen des Ansatzes $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ werden mit dem Gaußschen Algorithmus (Abschnitt 29) aufgelöst. Die Rechnung ist formal einfach, aber bei einer größeren Anzahl von Unbekannten zeitraubend und durch ungünstige Fehlerfortpflanzung unter Umständen schwierig. Die Wurzeln des Ansatzes werden daher bei einzelnen Belastungsfällen oft schneller und zuverlässiger durch Iteration bestimmt (Abschnitt 30).

Um die Unbekannten auch bei zahlreichen Belastungsfällen in einfacher Weise anzugeben oder Einflußlinien der unbekannten Verschiebungen und Anschlußkräfte aufzuzeichnen, werden die Vorzahlen $\beta_{JH}$, $\beta_{cb}$ der zu $a_{JH}$, $a_{cb}$ konjugierten Matrix berechnet (Abschn. 25). Damit ist

$$\left.\begin{aligned} -\varphi_J &= \sum \beta_{JH}\, a_{H0} + \sum \beta_{Jb}\, a_{b0}, \qquad (H = 1 \ldots N,\ \ b = 1 \ldots f), \\ -\psi_c &= \sum \beta_{cH}\, a_{H0} + \sum \beta_{cb}\, a_{b0}, \qquad (H = 1 \ldots N,\ \ b = 1 \ldots f). \end{aligned}\right\} \tag{542}$$