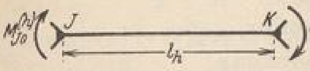
# Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

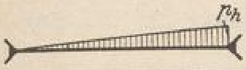
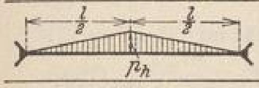
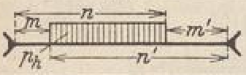
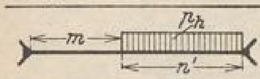
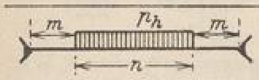
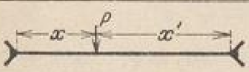
Berlin [u.a.], 1956

Tabellen für die Randmomente des beiderseits und des einseitig eingespannten Stabes mit konstantem Trägheitsmoment

Tabelle 25. Randmomente des beiderseits eingespannten Stabes mit konstantem Trägheitsmoment.




$\frac{m}{l_h} = \mu;\quad \frac{n}{l_h} = \nu;\quad \frac{m'}{l_h} = \mu';\quad \frac{n'}{l_h} = \nu';\quad x/l_h = \xi;\quad x'/l_h = \xi'$

| Belastung | $M_{J0}^{(h)}$ | $M_{K0}^{(h)}$ |
|---|---|---|
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{30}$ | $+\frac{p_h l_h^2}{20}$ |
|  | $-\frac{5}{96} p_h l_h^2$ | $+\frac{5}{96} p_h l_h^2$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}[6(\nu^2-\mu^2)-8(\nu^3-\mu^3)+3(\nu^4-\mu^4)]$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}[6(\nu'^2-\mu'^2)-8(\nu'^3-\mu'^3)+3(\nu'^4-\mu'^4)]$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}\nu'^3(1+3\mu)$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}\nu'^2[1+\mu(2+3\mu)]$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[\nu^2+6\mu(1-\mu)]$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[\nu^2+6\mu(1-\mu)]$ |
|  | $-\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[5\nu^2+6\mu(1-\mu)]$ | $+\frac{p_h l_h^2}{12}\nu[5\nu^2+6\mu(1-\mu)]$ |
|  | $-P l_h \omega_\tau'$ | $+P l_h \omega_\tau$ |
|  | $+\mathrm{M}\,\xi'(2-3\xi')$ | $+\mathrm{M}\,\xi(2-3\xi)$ |
| Ungleichförmige Temperaturänderung um $t_u - t_o = \Delta t$ | $-EJ_h \frac{\alpha_t \Delta t}{h_h}$ | $+EJ_h \frac{\alpha_t \Delta t}{h_h}$ |

Die Anwendung der Theorie zur Berechnung der Verschiebungen und Schnittkräfte wird für alle äußeren Ursachen an zwei einfachen Beispielen gezeigt.

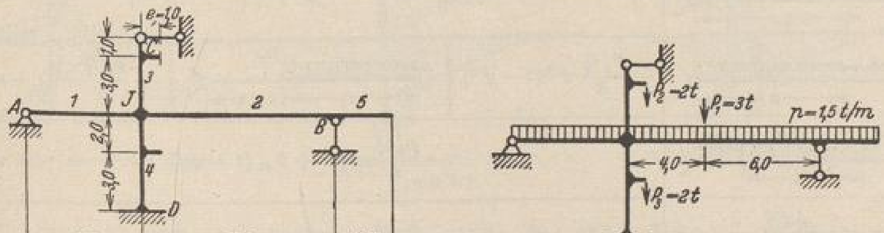



Abb. 300a und b.

**Beispiel 1.**

1. Bezeichnungen und Abmessungen (Abb. 300). (Allen Zahlen liegen die Einheiten t und m zugrunde).

$J_1 = 0{,}006$, $\quad J_2 = 0{,}020$, $\quad J_3 = 0{,}004$, $\quad J_4 = 0{,}005\ \mathrm{m}^4$,

$J_c = 0{,}004$, $\quad E J_c = 2\,100\,000 \cdot 0{,}004 = 8\,400\ \mathrm{tm}^2$;

$l_1' = 4{,}00$, $\quad l_2' = 2{,}00$, $\quad l_3' = 4{,}00$, $\quad l_4' = 4{,}00\ \mathrm{m}$,

Trägerhöhe: $h_1 = 0{,}6$, $\quad h_2 = 0{,}85\ \mathrm{m}$.

Die Verschiebungen $v$, $u$ werden positiv bezeichnet, wenn sie nach unten oder nach rechts gerichtet sind.

Abszissen $\xi$ sind nach rechts und abwärts,
Abszissen $\xi'$ nach links und aufwärts positiv.

2. **Überzählige Größe und statische Bedingungsgleichung.**
Überzählige Größe: $\varphi_J$; Statische Bedingung: $a_{JJ}\,\varphi_J + a_{J0} = 0$.

$$\varphi_J = -\frac{a_{J0}}{a_{JJ}}; \qquad a_{JJ} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{l_1'} + \frac{3}{l_2'} + \frac{3}{l_3'} + \frac{4}{l_4'}\right) = -4{,}000\,.$$

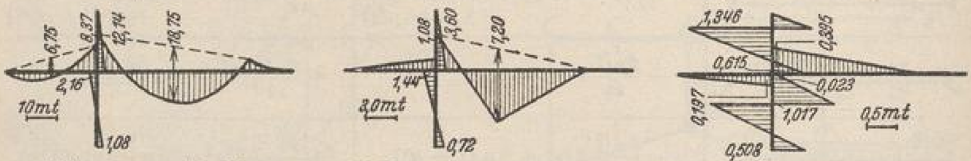
3. **Belastung der Stäbe 1, 2, 5 durch** $p = 1{,}5$ t/m (Abb. 301a).

$$M_{J0}^{(1)} = +\frac{p\,l_1^2}{8} = +6{,}750\,; \qquad M_{J0}^{(2)} = -\frac{p\,l_2^2}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{p\,l_5^2}{2} = -15{,}375 \text{ mt}\,.$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i}\,(M_{J0}^{(1)} + M_{J0}^{(2)}) = +8{,}625\,, \qquad \varphi_J = +2{,}156\,.$$

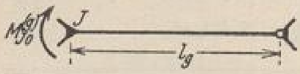
$$M_J^{(1)} = M_{J0}^{(1)} + \frac{3}{l_1'}\,\varphi_J = +8{,}367\,, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = -12{,}141 \text{ mt}$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,\varphi_J = +1{,}617\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{4}{l_4'}\,\varphi_J = +2{,}156\,, \qquad M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,\varphi_J = +1{,}078 \text{ mt}\,.$$

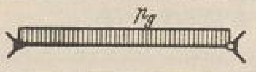
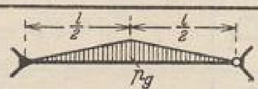
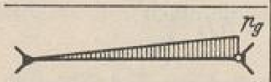
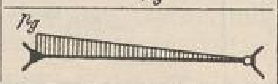
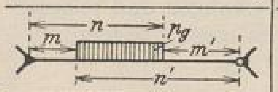
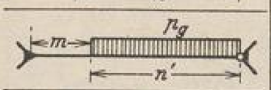
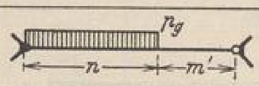
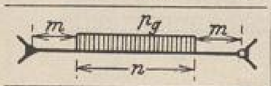
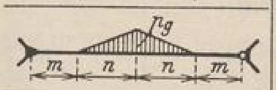
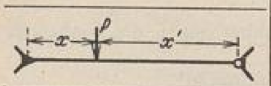
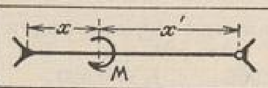



a) Biegungsmomente infolge $p$. b) Biegungsmomente infolge $P_1$. c) Biegungsmomente infolge $P_2 = P_3$.
Abb. 301.

Tabelle 26. **Randmoment des einseitig eingespannten Stabes mit konstantem Trägheitsmoment.**



$$\frac{m}{l_g} = \mu; \quad \frac{n}{l_g} = \nu; \quad \frac{m'}{l_g} = \mu'; \quad \frac{n'}{l_g} = \nu'; \quad x/l_g = \xi; \quad x'/l_g = \xi'$$

| | | | |
|---|---|---|---|
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}$ |  | $-\frac{5}{64}\,p_g\,l_g^2$ |
|  | $-\frac{7}{120}\,p_g\,l_g^2$ |  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{15}$ |
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,[2\,(\nu'^2 - \mu'^2) - (\nu'^4 - \mu'^4)]$ | | |
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu'^2\,(2 - \nu'^2)$ |  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu^2\,(1 + \mu')^2$ |
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu\,[\nu^2 + 6\,\mu\,(1 - \mu)]$ | | |
|  | $-\frac{p_g\,l_g^2}{8}\,\nu\,[5\,\nu^2 + 6\,\mu\,(1 - \mu)]$ | | |
|  | $-\frac{P\,l_g}{2}\,\omega_D'$ |  | $-\frac{M}{2}\,\omega_M'$ |
| Ungleichförmige Temperaturänderung um $t_u - t_o = \Delta t$ | $-\frac{3}{2}\,E J_g\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h_g}$ | | |

4. Belastung des Stabes 2 durch $P_1 = 3$ t (Abb. 301 b).

$$M_{J0}^{(2)} = -\frac{P_1 l_2}{2}\,\omega_D' = -\frac{3{,}0 \cdot 10{,}0}{2} \cdot 0{,}384 = -5{,}760 \text{ mt}.$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i} \cdot M_{J0}^{(2)} = +5{,}760\,; \qquad \varphi_J = +1{,}440\,.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\varphi_J = +1{,}080\,, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\varphi_J = -3{,}600 \text{ mt}.$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\varphi_J = +1{,}080\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{4}{l_4'}\varphi_J = +1{,}440\,, \qquad M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\varphi_J = +0{,}720 \text{ mt}.$$

5. Belastung der Stäbe 3 und 4 durch $P_2 = P_3 = 2$ t (Abb. 301 c).

$$M_{J0}^{(3)} = -\frac{P_2 e}{2}(3\xi^2 - 1) = -\frac{2{,}0 \cdot 1{,}0}{2}(3 \cdot 0{,}25^2 - 1) = +0{,}812 \text{ mt}.$$

$$M_{J0}^{(4)} = P_3 e\,\xi'(2 - 3\xi') = 2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}6\,(2 - 3 \cdot 0{,}6) = +0{,}240\,,$$

$$M_{D0}^{(4)} = P_3 e\,\xi(2 - 3\xi) = +0{,}640\,.$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i}\,(M_{J0}^{(3)} + M_{J0}^{(4)}) = -1{,}052\,; \qquad \varphi_J = -0{,}263\,.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\varphi_J = -0{,}197\,, \quad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\varphi_J = -0{,}395 \text{ mt}, \quad M_J^{(3)} = M_{J0}^{(3)} + \frac{3}{l_3'}\varphi_J = +0{,}615\,,$$

$$M_J^{(4)} = M_{J0}^{(4)} + \frac{4}{l_4'}\varphi_J = -0{,}023 \text{ mt}, \qquad M_D^{(4)} = M_{D0}^{(4)} + \frac{2}{l_4'}\varphi_J = +0{,}508\,.$$

6. Temperaturerhöhung aller Stäbe um $t = 15^0$ (Abb. 302a).

$$\alpha_t t = 0{,}00015\,, \qquad \alpha_t t\,E\,J_c = 1{,}26\,,$$

$$\vartheta_{1t} = -E\,J_c\frac{\alpha_t t\,l_4}{l_1} = -1{,}050\,, \qquad \vartheta_{2t} = +E\,J_c\frac{\alpha_t t\,l_4}{l_2} = +0{,}630\,,$$

$$\vartheta_{3t} = -E\,J_c\frac{\alpha_t t\,l_1}{l_3} = -1{,}890\,, \qquad \vartheta_{4t} = +E\,J_c\frac{\alpha_t t\,l_1}{l_4} = +1{,}512\,,$$

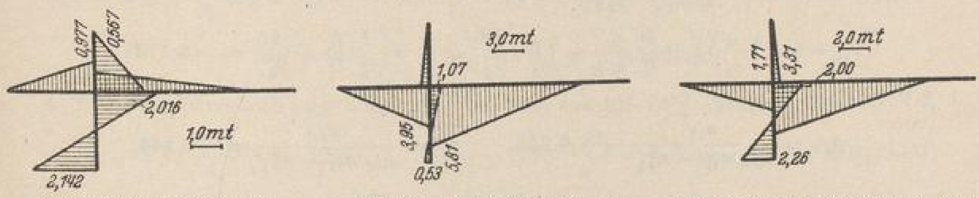
$$a_J = -\mathrm{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\vartheta_{1t} - \frac{3}{l_2'}\vartheta_{2t} - \frac{3}{l_3'}\vartheta_{3t} - \frac{6}{l_4'}\vartheta_{4t}\right) = +1{,}008\,.$$

$$\varphi_J = +0{,}252\,,$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}(\varphi_J - \vartheta_{1t}) = +0{,}977\,, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}(\varphi_J - \vartheta_{2t}) = -0{,}567 \text{ mt},$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}(\varphi_J - \vartheta_{3t}) = +1{,}606\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(2\varphi_J - 3\vartheta_{4t}) = -2{,}016\,,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}(\varphi_J - 3\vartheta_{4t}) = -2{,}142\,.$$




a) Biegungsmomente infolge $t$. b) Biegungsmomente infolge $\Delta t$. c) Biegungsmomente infolge $\Delta x_d$, $\Delta y_d$.

Abb. 302.

7. Ungleichförmige Temperatur-Änderung der Stäbe 1 und 2 um $\Delta t = -10^0$.

$$M_{J\Delta t}^{(1)} = \frac{3}{2}E\,J_1\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h_1} = -3{,}150\,, \qquad M_{J\Delta t}^{(2)} = -\frac{3}{2}E\,J_2\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h_2} = +7{,}413 \text{ mt},$$

$$a_{J\Delta t} = -\mathrm{i}\,(M_{J\Delta t}^{(1)} + M_{J\Delta t}^{(2)}) = -4{,}263\,; \qquad \varphi_J = -1{,}066\,.$$

$$M_J^{(1)} = M_{J\Delta t}^{(1)} + \frac{3}{l_1'}\varphi_J = -3{,}949\,, \qquad M_J^{(2)} = M_{J\Delta t}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\varphi_J = +5{,}814 \text{ mt},$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\varphi_J = -0{,}799\,, \quad M_J^{(4)} = \frac{4}{l_4'}\varphi_J = -1{,}066\,, \quad M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\varphi_J = -0{,}533 \quad \text{(Abb. 302b)}.$$

8. Verschiebung des Stützpunktes $D$ um $\Delta x_d = -0{,}001$ m und $\Delta y_d = +0{,}002$ m.

$$\vartheta_{1s} = +E\,J_c \frac{\Delta y_d}{l_1} = +2{,}800\,, \qquad \vartheta_{2s} = -E\,J_c \frac{\Delta y_d}{l_2} = -1{,}680\,,$$

$$\vartheta_{4s} = -E\,J_c \frac{\Delta x_d}{l_4} = +1{,}680\,.$$

$$a_{Js} = -\mathrm{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\,\vartheta_{1s} - \frac{3}{l_2'}\,\vartheta_{2s} - \frac{6}{l_4'}\,\vartheta_{4s}\right) = +2{,}100\,; \qquad \varphi_J = +0{,}525\,.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,(\varphi_J - \vartheta_{1s}) = -1{,}706\,, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,(\varphi_J - \vartheta_{2s}) = +3{,}308 \text{ mt}\,,$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,\varphi_J = +0{,}394\,, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_{4s}) = -1{,}995\,,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(\varphi_J - 3\,\vartheta_{4s}) = -2{,}258 \quad \text{(Abb. 302c)}.$$

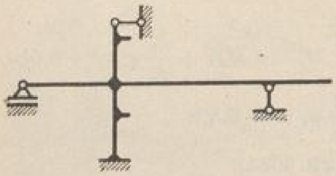


Abb. 303.

**Beispiel 2.**

1. Bezeichnungen und Abmessungen: Das System (Abb. 303) unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur durch ein bewegliches Lager $A$. Die Abmessungen und Belastungen sind unverändert.

2. Überzählige Größen: $\varphi_J$, $\psi_1 = \vartheta_4$.

Statische Bedingungen: $a_{JJ}\,\varphi_J + a_{J1}\,\psi_1 + a_{J0} = 0$,
$a_{1J}\,\varphi_J + a_{11}\,\psi_1 + a_{10} = 0$.

Zustand $\varphi_J = 1$:

$$M_{JJ}^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,, \qquad M_{JJ}^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,, \qquad M_{JJ}^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,, \qquad M_{JJ}^{(4)} = \frac{4}{l_4'}\,, \qquad M_{DJ}^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,.$$

Zustand $\psi_1 = 1$:

$$\vartheta_{11} = 0\,, \qquad \vartheta_{21} = 0\,, \qquad \vartheta_{31} = -\frac{l_4}{l_3}\,, \qquad \vartheta_{41} = 1\,;$$

$$M_{J1}^{(1)} = M_{J1}^{(2)} = 0\,, \qquad M_{J1}^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,\frac{l_4}{l_3}\,, \qquad M_{J1}^{(4)} = M_{D1}^{(4)} = -\frac{6}{l_4'}\,.$$

Vorzahlen der Bedingungsgleichungen:

$$a_{JJ} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{l_1'} + \frac{3}{l_2'} + \frac{3}{l_3'} + \frac{4}{l_4'}\right) = -4{,}000\,,$$

$$a_{J1} = -\mathrm{i}\left(+\frac{3}{l_3'}\,\frac{l_4}{l_3} - \frac{6}{l_4'}\right) = +0{,}562\,,$$

$$a_{11} = \left(-\mathrm{i}\,\frac{l_4}{l_3}\right)\left(+\frac{3}{l_3'}\,\frac{l_4}{l_3}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{12}{l_4'}\right) = -3\left(\frac{1}{l_3'}\,\frac{l_4^2}{l_3^2} + \frac{4}{l_4'}\right) = -4{,}172\,.$$

$\beta$-Vorzahlen:

$$\beta_{JJ} = \frac{a_{11}}{a_{JJ}\,a_{11} - a_{J1}^2} = -0{,}255\,, \qquad \beta_{11} = \frac{a_{JJ}}{a_{JJ}\,a_{11} - a_{J1}^2} = -0{,}244$$

$$\beta_{J1} = -\frac{a_{J1}}{a_{JJ}\,a_{11} - a_{J1}^2} = -0{,}034\,;$$

$$-\varphi_J = a_{J0}\,\beta_{JJ} + a_{10}\,\beta_{J1}\,, \qquad -\psi_1 = a_{J0}\,\beta_{1J} + a_{10}\,\beta_{11}\,.$$

3. Belastung der Stäbe 1, 2, 5 durch $p = 1{,}5$ t/m (Abb. 304a).

$$M_{J0}^{(1)} = +6{,}750\,, \qquad M_{J0}^{(2)} = -15{,}375 \text{ mt}\,.$$

$$a_{J0} = -\mathrm{i}\,(M_{J0}^{(1)} + M_{J0}^{(2)}) = +8{,}625\,, \qquad a_{10} = 0\,.$$

$$-\varphi_J = a_{J0}\,\beta_{JJ} = -2{,}199\,, \qquad -\psi_1 = a_{J0}\,\beta_{1J} = -0{,}297\,.$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0\,, \qquad \vartheta_3 = -\frac{l_4}{l_3}\,\psi_1 = -0{,}371\,, \qquad \vartheta_4 = +0{,}297\,.$$

$$M_J^{(1)} = M_{J0}^{(1)} + \frac{3}{l_1'}\,\varphi_J = +8{,}399, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = -12{,}076,$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,(\varphi_J - \vartheta_3) = +1{,}928, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +1{,}754,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}654 \text{ mt}.$$

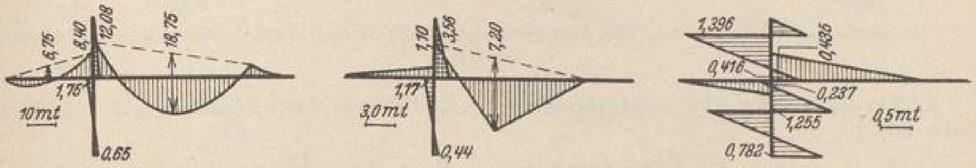
4. Belastung des Stabes 2 durch $P_1 = 3$ t (Abb. 304b).

$$M_{J0}^{(2)} = -5{,}760, \qquad a_{J0} = -\dot{1}\,M_{J0}^{(2)} = +5{,}76, \qquad a_{10} = 0,$$

$$\varphi_J = +1{,}469, \qquad \psi_1 = +0{,}198, \qquad \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \qquad \vartheta_3 = -0{,}247, \qquad \vartheta_4 = +0{,}198.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,(\varphi_J - \vartheta_1) = +1{,}102, \qquad M_J^{(2)} = M_{J0}^{(2)} + \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = -3{,}557 \text{ mt},$$

$$M_J^{(3)} = +1{,}287, \qquad M_J^{(4)} = +1{,}172, \qquad M_D^{(4)} = +0{,}438.$$




a) Biegungsmomente infolge $p$. b) Biegungsmomente infolge $P_1$. c) Biegungsmomente infolge $P_2 = P_3$.

Abb. 304.

5. Belastung der Stäbe 3 und 4 durch $P_2 = P_3 = 2$ t (Abb. 304c).

$$M_{J0}^{(3)} = +0{,}812, \qquad M_{J0}^{(4)} = +0{,}240, \qquad M_{D0}^{(4)} = +0{,}640 \text{ mt},$$

$$a_{J0} = -\dot{1}\,(M_{J0}^{(3)} + M_{J0}^{(4)}) = -1{,}052,$$

$$a_{10} = -\dot{1}\,\frac{l_4}{l_3}\,(M_{J0}^{(3)} + \mathsf{M}_{3,1}) + \dot{1}\,(M_{J0}^{(4)} + M_{D0}^{(4)} + \mathsf{M}_{4,1})$$

$$= -\dot{1}\,\frac{4{,}00}{5{,}00}\,(0{,}812 + 2{,}0 \cdot 1{,}0) + 1\,(0{,}240 + 0{,}640 + 2{,}0 \cdot 1{,}0) = -0{,}636.$$

$$-\varphi_J = a_{J0}\,\beta_{JJ} + a_{10}\,\beta_{J1} = +0{,}290, \qquad -\psi_1 = a_{J0}\,\beta_{1J} + a_{10}\,\beta_{11} = +0{,}191,$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \qquad \vartheta_3 = -\frac{l_4}{l_3}\,\psi_1 = +0{,}239, \qquad \vartheta_4 = -0{,}191,$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,\varphi_J = -0{,}218, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,\varphi_J = -0{,}435,$$

$$M_J^{(3)} = M_{J0}^{(3)} + \frac{3}{l_3'}\,(\varphi_J - \vartheta_3) = +0{,}416, \qquad M_J^{(4)} = M_{J0}^{(4)} + \frac{2}{l_4'}\,(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}237,$$

$$M_D^{(4)} = M_{D0}^{(4)} + \frac{2}{l_4'}\,(\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}782 \text{ mt}.$$

6. Temperaturerhöhung aller Stäbe um $t = 15^0$ (Abb. 305a).

$$\vartheta_{1t} = -E\,J_c\,\frac{\alpha_t\,t\,l_4}{l_1} = -1{,}050, \qquad \vartheta_{2t} = +E\,J_c\,\frac{\alpha_t\,t\,l_4}{l_2} = +0{,}630, \qquad \vartheta_{3t} = \vartheta_{4t} = 0,$$

$$a_{Jt} = -\dot{1}\left(-\frac{3}{l_1'}\,\vartheta_{1t} - \frac{3}{l_2'}\,\vartheta_{2t}\right) = +0{,}158, \qquad a_{1t} = 0,$$

$$\varphi_J = 0{,}040, \qquad \psi_1 = 0{,}005.$$

$$\vartheta_1 = -1{,}050, \qquad \vartheta_2 = +0{,}630, \qquad \vartheta_3 = -\frac{l_4}{l_3}\,\psi_1 = -0{,}007, \qquad \vartheta_4 = +0{,}005.$$

$$M_J^{(1)} = \frac{3}{l_1'}\,(\varphi_J - \vartheta_1) = +0{,}818, \qquad M_J^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,(\varphi_J - \vartheta_2) = -0{,}885 \text{ mt},$$

$$M_J^{(3)} = \frac{3}{l_3'}\,(\varphi_J - \vartheta_3) = +0{,}035, \qquad M_J^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(2\,\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}032,$$

$$M_D^{(4)} = \frac{2}{l_4'}\,(\varphi_J - 3\,\vartheta_4) = +0{,}012 \text{ mt}.$$

7. Ungleichförmige Temperaturänderung der Stäbe 1 und 2 um $\Delta t = -10^0$.

$$M_{J\Delta t}^{(1)} = -3{,}150, \qquad M_{J\Delta t}^{(2)} = +7{,}413 \text{ mt}.$$

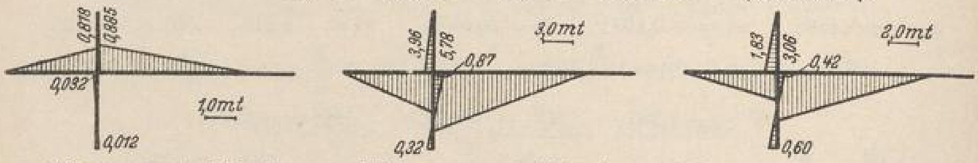
$$a_{J\Delta t} = -1\,(M_{J\Delta t}^{(1)} + M_{J\Delta t}^{(2)}) = -4{,}263, \qquad a_{1\Delta t} = 0;$$

$$\varphi_J = -1{,}086, \qquad \psi_1 = -0{,}146.$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \qquad \vartheta_3 = +0{,}183, \qquad \vartheta_4 = -0{,}146,$$

$$M_J^{(1)} = -3{,}965, \qquad M_J^{(2)} = +5{,}784, \qquad M_J^{(3)} = -0{,}952,$$

$$M_J^{(4)} = -0{,}867, \qquad M_D^{(4)} = -0{,}324 \text{ mt} \qquad \text{(Abb. 305b)}.$$




a) Biegungsmomente infolge $t$. b) Biegungsmomente infolge $\Delta t$. c) Biegungsmomente infolge $\Delta x_d$, $\Delta y_d$.

Abb. 305.

8. Verschiebung des Stützpunktes $d$ um $\Delta x_d = -0{,}001$ m und $\Delta y_d = +0{,}002$ m (Abb. 305c).

$$\vartheta_{1s} = +E J_c \frac{\Delta y_d}{l_1} = +2{,}800, \qquad \vartheta_{2s} = -E J_c \frac{\Delta y_d}{l_2} = -1{,}680,$$

$$\vartheta_{4s} = -E J_c \frac{\Delta x_d}{l_4} = +1{,}680,$$

$$a_{Js} = -\mathrm{i}\left(-\frac{3}{l_1'}\vartheta_{1s} - \frac{3}{l_2'}\vartheta_{2s} - \frac{6}{l_4'}\vartheta_{4s}\right) = +2{,}100, \qquad a_{1s} = \mathrm{i}\left(-\frac{12}{l_4'}\vartheta_{4s}\right) = -5{,}040,$$

$$\varphi_J = +0{,}362, \qquad \psi_1 = -1{,}160.$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1s} = +2{,}800, \qquad \vartheta_2 = \vartheta_{2s} = -1{,}680, \qquad \vartheta_3 = \vartheta_{31}\,\psi_1 = +1{,}450,$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_{4s} + \vartheta_{41}\,\psi_1 = +0{,}520,$$

$$M_J^{(1)} = -1{,}828, \qquad M_J^{(2)} = +3{,}063, \qquad M_J^{(3)} = -0{,}816 \text{ mt},$$

$$M_J^{(4)} = -0{,}418, \qquad M_D^{(4)} = -0{,}599.$$

**Durchgehender Träger mit elastisch drehbaren Stützen. $\psi_c = 0$.**

1. Geometrische Größen (alle Zahlen mit den Einheiten m und t), Abb. 306:
Trägheitsmoment der Riegel: $J_r = 0{,}120$ m$^4$; Trägheitsmoment der Pfosten: $J_s = 0{,}240$ m$^4$; $J_c = J_r = 0{,}120$; $l_1' = 14{,}0$; $l_3' = l_5' = l_7' = 12{,}5$; $l_9' = 8{,}325$; $l_2' = l_4' = l_6' = l_8' = 5{,}5$.

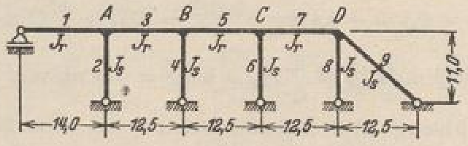



Abb. 306.

2. Überzählige Größen und statische Bedingungsgleichungen. Überzählige: $\varphi_A$, $\varphi_B$, $\varphi_C$, $\varphi_D$.
Matrix der statischen Bedingungen:

| | $\varphi_A$ | $\varphi_B$ | $\varphi_C$ | $\varphi_D$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | $a_{AA}$ | $a_{AB}$ | · | · | $a_{A0}$ |
| B | $a_{BA}$ | $a_{BB}$ | $a_{BC}$ | · | $a_{B0}$ |
| C | · | $a_{BC}$ | $a_{CC}$ | $a_{CD}$ | $a_{C0}$ |
| D | · | · | $a_{CD}$ | $a_{DD}$ | $a_{D0}$ |

$$a_{AA} = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{l_1'} + \frac{3}{l_2'} + \frac{4}{l_3'}\right) = -1{,}079712,$$

$$a_{AB} = a_{BC} = a_{CD} = -\mathrm{i}\,\frac{2}{l_3'} = -0{,}160000,$$

$$a_{BB} = a_{CC} = -\mathrm{i}\left(\frac{4}{l_3'} + \frac{3}{l_4'} + \frac{4}{l_5'}\right) = -1{,}185454,$$

$$a_{DD} = -\mathrm{i}\left(\frac{4}{l_7'} + \frac{3}{l_8'} + \frac{3}{l_9'}\right) = -1{,}225814.$$

| | $\varphi_A$ | $\varphi_B$ | $\varphi_C$ | $\varphi_D$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | − 1,079 712 | − 0,160 000 | | |
| $B$ | − 0,160 000 | − 1,185 454 | − 0,160 000 | |
| $C$ | | − 0,160 000 | − 1,185 454 | − 0,160 000 |
| $D$ | | | − 0,160 000 | − 1,225 814 |

3. Auflösung durch Entwicklung von $\beta_{44}$ und $\beta_{11}$ nach einem Kettenbruch:

$$\varkappa_{AB} = \frac{a_{BA}}{a_{AA}} = +\,0{,}148\,188; \qquad a_{BB}^{(1)} = a_{BB} - a_{AB}\varkappa_{AB} = -\,1{,}161\,744,$$

$$\varkappa_{BC} = \frac{a_{CB}}{a_{BB}^{(1)}} = +\,0{,}137\,724; \qquad a_{CC}^{(2)} = a_{CC} - a_{BC}\varkappa_{BC} = -\,1{,}163\,418,$$

$$\varkappa_{CD} = \frac{a_{DC}}{a_{CC}^{(2)}} = +\,0{,}137\,526; \qquad a_{DD}^{(3)} = a_{DD} - a_{CD}\varkappa_{CD} = -\,1{,}203\,810,$$

$$\beta_{DD} = \frac{1}{a_{DD}^{(3)}} = -\,0{,}830\,696,$$

$$\varkappa_{DC} = \frac{a_{CD}}{a_{DD}} = +\,0{,}130\,526; \qquad a_{CC}^{(1)} = a_{CC} - a_{DC}\varkappa_{DC} = -\,1{,}164\,570,$$

$$\varkappa_{CB} = \frac{a_{BC}}{a_{CC}^{(1)}} = +\,0{,}137\,390; \qquad a_{BB}^{(2)} = a_{BB} - a_{CB}\varkappa_{CB} = -\,1{,}163\,472,$$

$$\varkappa_{BA} = \frac{a_{AB}}{a_{BB}^{(2)}} = +\,0{,}137\,519; \qquad a_{AA}^{(3)} = a_{AA} - a_{BA}\varkappa_{BA} = -\,1{,}057\,709,$$

$$\beta_{AA} = \frac{1}{a_{AA}^{(3)}} = -\,0{,}945\,440.$$

Vorzahlen $\beta_{JK}$

$\succ\!\!\longrightarrow$ − 0,137 519 − 0,137 390 − 0,130 526 $\longrightarrow$

| | $a_{A0}$ | $a_{B0}$ | $a_{C0}$ | $a_{D0}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_A$ | − 0,945 440 | + 0,130 016 | − 0,017 863 | + 0,002 332 | − 0,148 188 |
| $\varphi_B$ | + 0,130 016 | − 0,877 371 | + 0,120 542 | − 0,015 734 | − 0,137 724 |
| $\varphi_C$ | − 0,017 863 | + 0,120 542 | − 0,875 243 | + 0,114 242 | − 0,137 526 |
| $\varphi_D$ | + 0,002 332 | − 0,015 734 | + 0,114 242 | − 0,830 696 | |

$$\varphi_J = -\sum \beta_{Jk}\, a_{k0}$$

4. Belastung durch Eigengewicht $g = 2{,}0$ t/m (Abb. 307a).

$$M_{A0}^{(1)} = +\frac{g\,l_1^2}{8} = +\,49{,}0000\,, \qquad M_{A0}^{(3)} = -\frac{g\,l_3^2}{12} = -\,26{,}0417 \text{ mt}\,,$$

$$M_{B0}^{(3)} = -\,M_{B0}^{(5)} = M_{C0}^{(5)} = -\,M_{C0}^{(7)} = M_{D0}^{(7)} = +\,26{,}0417\,.$$

$$a_{A0} = -\,\mathrm{i}\,(M_{A0}^{(1)} + M_{A0}^{(3)}) = -\,22{,}9583\,; \qquad a_{B0} = -\,\mathrm{i}\,(M_{B0}^{(3)} + M_{B0}^{(5)}) = 0\,,$$

$$a_{C0} = 0\,; \qquad a_{D0} = -\,26{,}0417\,.$$

$$\varphi_A = -\,21{,}645\,, \qquad \varphi_B = +\,2{,}575\,, \qquad \varphi_C = +\,2{,}565\,, \qquad \varphi_D = -\,21{,}579$$

$$M_A^{(1)} = M_{A0}^{(1)} + \frac{3}{l_1'}\,\varphi_A \qquad = +\,44{,}362\,; \qquad M_A^{(2)} = \frac{3}{l_2'}\,\varphi_A = -\,11{,}806\,.$$

$$M_A^{(3)} = M_{A0}^{(3)} + \frac{2}{l_3'}\,(2\,\varphi_A + \varphi_B) = -\,32{,}556\,; \qquad M_B^{(4)} = \frac{3}{l_4'}\,\varphi_B = +\,1{,}405\,.$$

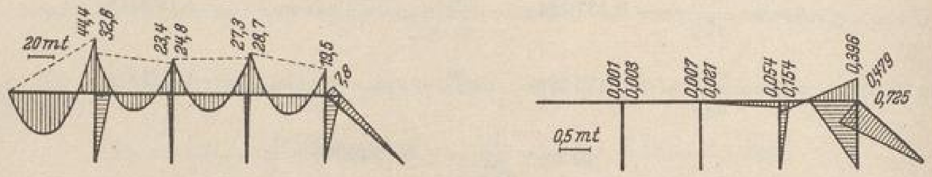
$$M_B^{(3)} = M_{B0}^{(3)} + \frac{2}{l_3'}\,(2\,\varphi_B + \varphi_A) = +\,23{,}403\,; \qquad M_C^{(6)} = \frac{3}{l_6'}\,\varphi_C = +\,1{,}399\,.$$

$$M_B^{(5)} = M_{B0}^{(5)} + \frac{2}{l_5'}\,(2\,\varphi_B + \varphi_C) = -\,24{,}808\,; \qquad M_D^{(8)} = \frac{3}{l_8'}\,\varphi_D = -\,11{,}770\,.$$

$$M_C^{(5)} = M_{C0}^{(5)} + \frac{2}{l_5'}\,(2\,\varphi_C + \varphi_B) = +\,27{,}275\,; \qquad M_D^{(9)} = \frac{3}{l_9'}\,\varphi_D = -\;\;7{,}776\,.$$

$$M_C^{(7)} = M_{C0}^{(7)} + \frac{2}{l_7'}\,(2\,\varphi_C + \varphi_D) \;=\; -\,28{,}674\,.$$

$$M_D^{(7)} = M_{D0}^{(7)} + \frac{2}{l_7'}\,(2\,\varphi_D + \varphi_C) \;=\; +\,19{,}547\ \mathrm{mt}\,.$$




a) Biegungsmomente infolge $g = 2$ t/m. b) Biegungsmomente infolge $W = 1$ t.

Abb. 307.

5. Belastung durch eine waagerechte Kraft $W$ in 1,6 m Höhe über dem Knoten $D$ (Abb. 307b).

| | |
|---|---|
| $\mathsf{M}_D = 1{,}6\,W$ | $a_{D0} = 1{,}6\,W$ |
| $\varphi_A = -\,0{,}003\,731\,W$ | $\varphi_C = -\,0{,}182\,787\,W$ |
| $\varphi_B = +\,0{,}025\,174\,W$ | $\varphi_D = +\,1{,}329\,114\,W$ |
| $M_A^{(1)} = -\,0{,}000\,799\,W$ | $M_C^{(5)} = -\,0{,}054\,464\,W$ |
| $M_A^{(2)} = -\,0{,}002\,035\,W$ | $M_C^{(6)} = -\,0{,}099\,702\,W$ |
| $M_A^{(3)} = +\,0{,}002\,833\,W$ | $M_C^{(7)} = +\,0{,}154\,166\,W$ |
| $M_B^{(3)} = +\,0{,}007\,459\,W$ | $M_D^{(7)} = +\,0{,}396\,071\,W$ |
| $M_B^{(4)} = +\,0{,}013\,731\,W$ | $M_D^{(8)} = +\,0{,}724\,971\,W$ |
| $M_B^{(5)} = -\,0{,}021\,190\,W$ | $M_D^{(9)} = +\,0{,}478\,960\,W$ mt . |

## 40. Die Auflösung des Ansatzes.

**Geometrisch bestimmtes Hauptsystem.** Die $(r + f)$ linearen Gleichungen des Ansatzes $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ werden mit dem Gaußschen Algorithmus (Abschnitt 29) aufgelöst. Die Rechnung ist formal einfach, aber bei einer größeren Anzahl von Unbekannten zeitraubend und durch ungünstige Fehlerfortpflanzung unter Umständen schwierig. Die Wurzeln des Ansatzes werden daher bei einzelnen Belastungsfällen oft schneller und zuverlässiger durch Iteration bestimmt (Abschnitt 30).

Um die Unbekannten auch bei zahlreichen Belastungsfällen in einfacher Weise anzugeben oder Einflußlinien der unbekannten Verschiebungen und Anschlußkräfte aufzuzeichnen, werden die Vorzahlen $\beta_{JH}$, $\beta_{cb}$ der zu $a_{JH}$, $a_{cb}$ konjugierten Matrix berechnet (Abschn. 25). Damit ist

$$\left.\begin{aligned} -\,\varphi_J &= \textstyle\sum \beta_{JH}\,a_{H0} + \sum \beta_{Jb}\,a_{b0}\,, \qquad (H = 1 \ldots N,\;\; b = 1 \ldots f)\,,\\ -\,\psi_c &= \textstyle\sum \beta_{cH}\,a_{H0} + \sum \beta_{cb}\,a_{b0}\,, \qquad (H = 1 \ldots N,\;\; b = 1 \ldots f)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (542)$$