Die Statik im Stahlbetonbau

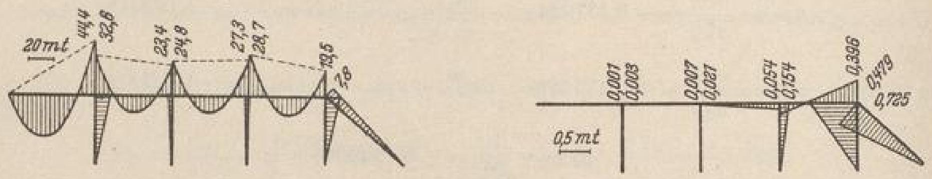
Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Geometrisch bestimmtes Hauptsystem

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

$$M_A^{(1)} = M_{A0}^{(1)} + \frac{3}{l'_1}\varphi_A = +44{,}362\,; \qquad M_A^{(2)} = \frac{3}{l'_2}\varphi_A = -11{,}806\,.$$
$$M_A^{(3)} = M_{A0}^{(3)} + \frac{2}{l'_3}(2\varphi_A + \varphi_B) = -32{,}556\,; \qquad M_B^{(4)} = \frac{3}{l'_4}\varphi_B = +1{,}405\,.$$
$$M_B^{(3)} = M_{B0}^{(3)} + \frac{2}{l'_3}(2\varphi_B + \varphi_A) = +23{,}403\,; \qquad M_C^{(6)} = \frac{3}{l'_6}\varphi_C = +1{,}399\,.$$
$$M_B^{(5)} = M_{B0}^{(5)} + \frac{2}{l'_5}(2\varphi_B + \varphi_C) = -24{,}808\,; \qquad M_D^{(8)} = \frac{3}{l'_8}\varphi_D = -11{,}770\,.$$
$$M_C^{(5)} = M_{C0}^{(5)} + \frac{2}{l'_5}(2\varphi_C + \varphi_B) = +27{,}275\,; \qquad M_D^{(9)} = \frac{3}{l'_9}\varphi_D = -\;7{,}776\,.$$
$$M_C^{(7)} = M_{C0}^{(7)} + \frac{2}{l'_7}(2\varphi_C + \varphi_D) = -28{,}674\,.$$
$$M_D^{(7)} = M_{D0}^{(7)} + \frac{2}{l'_7}(2\varphi_D + \varphi_C) = +19{,}547 \text{ mt}\,.$$



a) Biegungsmomente infolge $g = 2$ t/m. Abb. 307. b) Biegungsmomente infolge $W = 1$ t.

5. Belastung durch eine waagerechte Kraft W in 1,6 m Höhe über dem Knoten D (Abb. 307b).

$$\mathsf{M}_D = 1{,}6\,W \qquad a_{D0} = 1{,}6\,W$$
$$\varphi_A = -0{,}003\,731\,W \qquad \varphi_C = -0{,}182\,787\,W$$
$$\varphi_B = +0{,}025\,174\,W \qquad \varphi_D = +1{,}329\,114\,W$$
$$M_A^{(1)} = -0{,}000\,799\,W \qquad M_C^{(5)} = -0{,}054\,464\,W$$
$$M_A^{(2)} = -0{,}002\,035\,W \qquad M_C^{(6)} = -0{,}099\,702\,W$$
$$M_A^{(3)} = +0{,}002\,833\,W \qquad M_C^{(7)} = +0{,}154\,166\,W$$
$$M_B^{(3)} = +0{,}007\,459\,W \qquad M_D^{(7)} = +0{,}396\,071\,W$$
$$M_B^{(4)} = +0{,}013\,731\,W \qquad M_D^{(8)} = +0{,}724\,971\,W$$
$$M_B^{(5)} = -0{,}021\,190\,W \qquad M_D^{(9)} = +0{,}478\,960\,W \text{ mt}\,.$$

40. Die Auflösung des Ansatzes.

Geometrisch bestimmtes Hauptsystem. Die $(r + f)$ linearen Gleichungen des Ansatzes $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ werden mit dem Gaußschen Algorithmus (Abschnitt 29) aufgelöst. Die Rechnung ist formal einfach, aber bei einer größeren Anzahl von Unbekannten zeitraubend und durch ungünstige Fehlerfortpflanzung unter Umständen schwierig. Die Wurzeln des Ansatzes werden daher bei einzelnen Belastungsfällen oft schneller und zuverlässiger durch Iteration bestimmt (Abschnitt 30).

Um die Unbekannten auch bei zahlreichen Belastungsfällen in einfacher Weise anzugeben oder Einflußlinien der unbekannten Verschiebungen und Anschlußkräfte aufzuzeichnen, werden die Vorzahlen β_{JH}, β_{cb} der zu a_{JH}, a_{cb} konjugierten Matrix berechnet (Abschn. 25). Damit ist

$$\left.\begin{aligned} -\varphi_J &= \sum\beta_{JH}\,a_{H0} + \sum\beta_{Jb}\,a_{b0}, \qquad (H = 1\ldots N,\ \ b = 1\ldots f),\\ -\psi_c &= \sum\beta_{cH}\,a_{H0} + \sum\beta_{cb}\,a_{b0}, \qquad (H = 1\ldots N,\ \ b = 1\ldots f).\end{aligned}\right\} \quad (542)$$

Die Belastungsglieder a_{H0}, a_{b0} bedeuten nach S. 320 die virtuellen Arbeiten der Belastung $\mathfrak{P}$ und der Anschlußkräfte $M_{J0}^{(h)}$ des geometrisch bestimmten Hauptsystems. Die Vorzahlen β_{JH}, β_{Jb} usw. sind durch die elastischen und kinematischen Eigenschaften des Systems bestimmt und unabhängig von der Belastung.

Berechnung und Nachprüfung der Schnittkräfte. Die Komponenten u_J, ϑ_h des Verschiebungszustandes des Stabwerks werden nach (521) aus den $(r+f)$ unabhängigen Unbekannten φ_J, ψ_c des Ansatzes durch Superposition berechnet. φ_J und ϑ_h bilden nach (500) die Grundlage zur Berechnung der statisch unbestimmten Anschlußkräfte $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$, $N_K^{(h)}$ der Stäbe (h). Mit diesen sind die übrigen Schnittkräfte des Stabwerks statisch bestimmt.

Die statisch unbestimmten Anschlußkräfte sind nach S. 311 für einen geometrisch verträglichen Verschiebungszustand berechnet worden. Die Ergebnisse lassen sich daher nur durch statische Bedingungen nachprüfen. Jede beliebige Gruppe von inneren Kräften, welche durch die Abtrennung irgend eines Teiles des Stabwerks die Eigenschaft von äußeren Kräften erhalten, ist mit den Lasten und Schnittkräften des Abschnitts im Gleichgewicht und damit den Bedingungen (81) unterworfen. Ebenso ist die virtuelle Arbeit der Belastung und einer beliebigen Gruppe von Schnittkräften des Stabwerks, die als äußere Kräfte an der zugeordneten zwangläufigen Kette angreifen, gleich Null. Diese kann zur Nachprüfung des Spannungszustandes aus dem Stabwerk (S. 315) in beliebiger Weise abgeleitet werden. Die statischen Bedingungen $\delta A_c = 0$ enthalten dann neben der Belastung als äußere Kräfte nur Biegungsmomente des Stabwerks und können leicht angeschrieben werden. In der Regel begnügt man sich, das Gleichgewicht der Anschlußmomente an jedem Stabknoten nachzuweisen und damit die Lösung des Ansatzes numerisch zu prüfen.

Einflußlinien. Die Ordinaten der Einflußlinien der Komponenten φ_J, ψ_c können für ausgezeichnete Stellungen einer Einzellast $P_m = 1$ ebenso wie für eine ruhende Belastung angeschrieben werden. Jede Stellung liefert eine Gruppe von Belastungsgliedern a_{Jm}, a_{cm} und mit den Vorzahlen β_{JH}, β_{cH} der konjugierten Matrix die zugeordneten Komponenten φ_{Jm}, ψ_{cm}. Die Entwicklung der Belastungsglieder a_{Jm}, a_{cm} als stetige Funktion der Abszissen der Laststellung P_m ist ebenfalls denkbar, so daß die Einflußlinien φ_{Jm}, ψ_{cm} nach (542) durch Superposition einzelner mit Beiwerten erweiterter Funktionen angegeben werden können.

Die Lösung der Aufgabe wird durch das Maxwellsche Gesetz über die Gegenseitigkeit der Formänderung wesentlich vereinfacht. Nach diesem ist die virtuelle Arbeit eines Kräftepaares $\mathsf{M}_J = 1$ mt am Stabknoten J bei der Winkeldrehung φ_J infolge der wandernden Einzellast $P_m = 1$ t gleich der virtuellen Arbeit dieser Einzellast bei der Verschiebung w_{mJ} des Punktes m des Lastgurtes infolge des Kräftepaares 1 mt in J:

$$\mathbf{1}_J \, \varphi_{Jm} = \mathbf{1}_m \, w_{mJ} \, . \tag{543}$$

Die Einflußlinie φ_{Jm} wird daher als Biegelinie w_{mJ} des Lastgurtes des Stabwerks für $\mathsf{M}_J = 1$ mt aufgezeichnet. Die Belastung $\mathsf{M}_J = 1$ mt liefert außer $a_{J0} = 1$ keine Belastungsglieder, so daß die zugeordneten Komponenten des Verschiebungszustandes φ_{HJ}, ψ_{cJ} mit den negativen Vorzahlen der konjugierten Matrix übereinstimmen $(\varphi_{HJ} = -\beta_{HJ}, \psi_{cJ} = -\beta_{cJ})$.

Dasselbe gilt für die Einflußlinie ψ_{cm}, da die virtuelle Arbeit der Belastungseinheit des Punktes, der Geraden, des Punkte- oder Geradenpaares $\mathbf{1}_c$ in t oder mt bei der Verschiebung der Knotenkette ψ_{cm} durch die wandernde Last $P_m = 1$ t gleich der virtuellen Arbeit dieser Last bei den Verschiebungen w_{mc} der Punkte m des Lastgurtes durch die Belastungseinheit $\mathbf{1}_c$ ist:

$$\mathbf{1}_c \, \psi_{cm} = \mathbf{1}_m \, w_{mc} \, . \tag{544}$$