



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Einflußlinien

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Belastungsglieder  $a_{H0}, a_{b0}$  bedeuten nach S. 320 die virtuellen Arbeiten der Belastung  $\mathfrak{P}$  und der Anschlußkräfte  $M_{J0}^{(h)}$  des geometrisch bestimmten Hauptsystems. Die Vorzahlen  $\beta_{JH}, \beta_{Jb}$  usw. sind durch die elastischen und kinematischen Eigenschaften des Systems bestimmt und unabhängig von der Belastung.

**Berechnung und Nachprüfung der Schnittkräfte.** Die Komponenten  $u_J, \vartheta_h$  des Verschiebungszustandes des Stabwerks werden nach (521) aus den  $(r + f)$  unabhängigen Unbekannten  $\varphi_J, \psi_c$  des Ansatzes durch Superposition berechnet.  $\varphi_J$  und  $\vartheta_h$  bilden nach (500) die Grundlage zur Berechnung der statisch unbestimmten Anschlußkräfte  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_K^{(h)}$  der Stäbe ( $h$ ). Mit diesen sind die übrigen Schnittkräfte des Stabwerks statisch bestimmt.

Die statisch unbestimmten Anschlußkräfte sind nach S. 311 für einen geometrisch verträglichen Verschiebungszustand berechnet worden. Die Ergebnisse lassen sich daher nur durch statische Bedingungen nachprüfen. Jede beliebige Gruppe von inneren Kräften, welche durch die Abtrennung irgend eines Teiles des Stabwerks die Eigenschaft von äußeren Kräften erhalten, ist mit den Lasten und Schnittkräften des Abschnitts im Gleichgewicht und damit den Bedingungen (81) unterworfen. Ebenso ist die virtuelle Arbeit der Belastung und einer beliebigen Gruppe von Schnittkräften des Stabwerks, die als äußere Kräfte an der zugeordneten zwangläufigen Kette angreifen, gleich Null. Diese kann zur Nachprüfung des Spannungszustandes aus dem Stabwerk (S. 315) in beliebiger Weise abgeleitet werden. Die statischen Bedingungen  $\delta A_c = 0$  enthalten dann neben der Belastung als äußere Kräfte nur Biegemomente des Stabwerks und können leicht angeschrieben werden. In der Regel begnügt man sich, das Gleichgewicht der Anschlußmomente an jedem Stabknoten nachzuweisen und damit die Lösung des Ansatzes numerisch zu prüfen.

**Einflußlinien.** Die Ordinaten der Einflußlinien der Komponenten  $\varphi_J, \psi_c$  können für ausgezeichnete Stellungen einer Einzellast  $P_m = 1$  ebenso wie für eine ruhende Belastung angeschrieben werden. Jede Stellung liefert eine Gruppe von Belastungsgliedern  $a_{Jm}, a_{cm}$  und mit den Vorzahlen  $\beta_{JH}, \beta_{cH}$  der konjugierten Matrix die zugeordneten Komponenten  $\varphi_{Jm}, \psi_{cm}$ . Die Entwicklung der Belastungsglieder  $a_{Jm}, a_{cm}$  als stetige Funktion der Abszissen der Laststellung  $P_m$  ist ebenfalls denkbar, so daß die Einflußlinien  $\varphi_{Jm}, \psi_{cm}$  nach (542) durch Superposition einzelner mit Beiwerten erweiterter Funktionen angegeben werden können.

Die Lösung der Aufgabe wird durch das Maxwellsche Gesetz über die Gegenseitigkeit der Formänderung wesentlich vereinfacht. Nach diesem ist die virtuelle Arbeit eines Kräftepaars  $M_J = 1$  mt am Stabknoten  $J$  bei der Winkeldrehung  $\varphi_J$  infolge der wandernden Einzellast  $P_m = 1$  t gleich der virtuellen Arbeit dieser Einzellast bei der Verschiebung  $w_{mJ}$  des Punktes  $m$  des Lastgurtes infolge des Kräftepaars 1 mt in  $J$ :

$$1_J \varphi_{Jm} = 1_m w_{mJ}. \quad (543)$$

Die Einflußlinie  $\varphi_{Jm}$  wird daher als Biegelinie  $w_{mJ}$  des Lastgurtes des Stabwerks für  $M_J = 1$  mt aufgezeichnet. Die Belastung  $M_J = 1$  mt liefert außer  $a_{J0} = 1$  keine Belastungsglieder, so daß die zugeordneten Komponenten des Verschiebungszustandes  $\varphi_{HJ}, \psi_{cJ}$  mit den negativen Vorzahlen der konjugierten Matrix übereinstimmen ( $\varphi_{HJ} = -\beta_{HJ}, \psi_{cJ} = -\beta_{cJ}$ ).

Dasselbe gilt für die Einflußlinie  $\psi_{cm}$ , da die virtuelle Arbeit der Belastungseinheit des Punktes, der Geraden, des Punkte- oder Geradenpaares  $1_c$  in  $t$  oder  $mt$  bei der Verschiebung der Knotenkette  $\psi_{cm}$  durch die wandernde Last  $P_m = 1$  t gleich der virtuellen Arbeit dieser Last bei den Verschiebungen  $w_{mc}$  der Punkte  $m$  des Lastgurtes durch die Belastungseinheit  $1_c$  ist:

$$1_c \psi_{cm} = 1_m w_{mc}. \quad (544)$$

Die Einflußlinie  $\psi_{cm}$  wird demnach als Biegelinie  $w_{mc}$  des Lastgurtes für den Belastungszustand  $1_c$ , der Einheit des Punktes, der Geraden usw. mit dem Belastungsglied  $a_{c0} = 1$  gefunden. Die Komponenten  $\varphi_{Jc}$ ,  $\psi_{bc}$  sind demnach die negativen Vorzahlen  $\beta_{Jc}$ ,  $\beta_{bc}$  usw. der konjugierten Matrix.

In derselben Weise wird auch die Einflußlinie eines Stabdrehwinkels  $\vartheta_h$  erhalten, denn

$$1_h \vartheta_{hm} = 1_m w_{mh}. \quad (545)$$

Die Einflußlinie  $\vartheta_{hm}$  wird demnach als Biegelinie  $w_{mh}$  des Lastgurtes gefunden, die für die Belastungseinheit  $1_h$ , also für das Kräftepaar  $1/l_h$  an den Stabenden ( $h$ ) berechnet wird. In diesem Falle sind alle Belastungsglieder  $a_{c0}$  von Null verschieden, welche aus Stabketten mit  $\vartheta_{hc} \neq 0$  hervorgegangen sind.

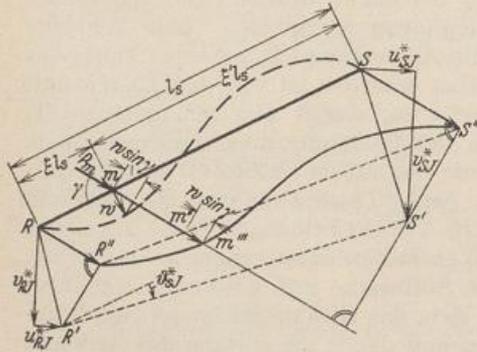


Abb. 308.

Die Biegelinie des Lastgurtes in Richtung der wandernden Einzellast ist bei einem Belastungszustand  $1_J$ ,  $1_c$  durch die geometrischen Randbedingungen  $\varphi_{RJ}^*$ ,  $\vartheta_{sJ}^*$  und  $\varphi_{Rc}^*$ ,  $\vartheta_{sc}^*$  eines jeden Stabes  $RS \equiv l_s$  bestimmt. Die Stabdrehwinkel  $\vartheta_{sJ}^*$ ,  $\vartheta_{sc}^*$  liefern den Geradenzug  $R'S'$  (Abb. 308) mit den Verschiebungen  $u_{RJ}^*$ ,  $v_{RJ}^*$  und  $u_{Rc}^*$ ,  $v_{Rc}^*$  und damit den Verschiebungsplan der Knotenkette, aus dem die Verschiebungen  $RR''$ ,  $SS''$ ,  $mm''$  durch Projektion auf die Krafttrichtung entstehen. Sie ergeben den Geradenzug  $R''S''$ , von welchem die Kom-

ponenten  $w \sin \gamma$  der Stabverbiegung aufgetragen werden. Die Ordinaten  $w$ , senkrecht zu  $RS$  gemessen, erhalten folgende Größe:

a) Der Stab ( $s$ ) ist mit den Knoten  $R$  und  $S$  steif verbunden:

$$w = \frac{l_s l_s'}{6} (M_{RJ}^{(s)} \omega_D' - M_{SJ}^{(s)} \omega_D)$$

oder mit

$$\begin{aligned} M_{RJ}^{(s)} &= \frac{2}{l_s'} (2\varphi_{RJ}^* + \varphi_{SJ}^* - 3\vartheta_{sJ}^*), & M_{SJ}^{(s)} &= \frac{2}{l_s'} (\varphi_{RJ}^* + 2\varphi_{SJ}^* - 3\vartheta_{sJ}^*), \\ w &= \frac{l_s}{3} [(2\varphi_{RJ}^* + \varphi_{SJ}^* - 3\vartheta_{sJ}^*) \omega_D' - (\varphi_{RJ}^* + 2\varphi_{SJ}^* - 3\vartheta_{sJ}^*) \omega_D] \\ &= l_s (\varphi_{RJ}^* \omega_D' - \varphi_{SJ}^* \omega_D + \vartheta_{sJ}^* \omega_D'). \end{aligned} \quad (546)$$

Der erste Ansatz wird für Stäbe ( $s$ ) mit  $\vartheta_{sJ}^* \neq 0$ , der zweite für Stäbe ( $s$ ) mit  $\vartheta_{sJ}^* = 0$  verwendet. Beide gelten ebenso für die Ursache  $c$  wie für  $J$ .

b) Der Stab ( $s$ ) ist mit dem Knoten  $R$  steif, mit dem Knoten  $S$  frei drehbar verbunden:

$$w = \frac{l_s l_s'}{6} M_{RJ}^{(s)} \omega_D' \quad \text{oder mit} \quad M_{RJ}^{(s)} = \frac{3}{l_s'} (\varphi_{RJ}^* - \vartheta_{sJ}^*),$$

$$w = \frac{l_s}{2} (\varphi_{RJ}^* - \vartheta_{sJ}^*) \omega_D'. \quad (547)$$

Die gesuchte Verschiebung  $\overrightarrow{mm''}$  des Punktes  $m$  in Richtung der wandernden Kraft  $P$  entsteht durch Addition der gerichteten Strecken  $\overrightarrow{mm''}$  und  $w \sin \gamma$ . Die Lösung ist bei senkrechter Belastung eines waagerechten Stabes einfacher und durch Abb. 309 beschrieben.

Einflußlinien der Anschlußmomente  $M^{(h)}$ .

a) Der Stab  $l_h = \overline{JK}$  ist mit den Stabknoten  $J$  und  $K$  steif verbunden (Abb. 310a). Anschlußmomente nach (530)

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J_0}^{(h)} + \frac{2}{l_h} (2\varphi_J + \varphi_K - 3\vartheta_h) = M_{J_0}^{(h)} + M_{J_*}^{(h)}, \\ M_K^{(h)} &= M_{K_0}^{(h)} + \frac{2}{l_h} (\varphi_J + 2\varphi_K - 3\vartheta_h) = M_{K_0}^{(h)} + M_{K_*}^{(h)}. \end{aligned} \right\} \quad (548)$$

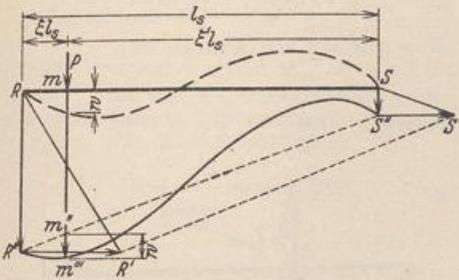


Abb. 309.

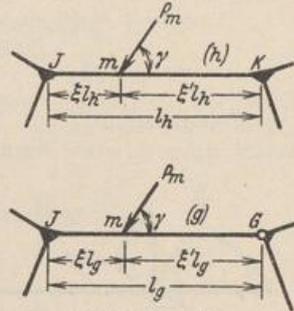


Abb. 310 a und b.

Die Einflußlinien bestehen daher im Bereich des Stabes ( $h$ ) aus den Ordinaten  $M_{J_0}^{(h)}$ ,  $M_{K_0}^{(h)}$  des beiderseits starr eingespannten Stabes ( $h$ ) und aus den Einflußgrößen  $M_{J_*}^{(h)}$ ,  $M_{K_*}^{(h)}$ , die sich aus den Einflußlinien  $\varphi_J$ ,  $\varphi_K$ ,  $\vartheta_h$  zusammensetzen. Dieser Anteil ist außerhalb des Abschnitts ( $h$ ) des Lastgurtes allein vorhanden.

$$M_{J_0}^{(h)} = -1 \sin \gamma \cdot l_h \omega_R \xi' = -l_h \sin \gamma \omega'_i, \quad M_{K_0}^{(h)} = +l_h \sin \gamma \omega_r. \quad (549)$$

Die Einflußlinien  $M_{J_*}^{(h)}$ ,  $M_{K_*}^{(h)}$  werden nach S. 331 als Biegelinien des Lastgurtes für die äußeren Kräfte

$$M_J = 4/l_h, \quad M_K = 2/l_h, \quad M_h = -6/l_h$$

und für

$$M_J = 2/l_h, \quad M_K = 4/l_h, \quad M_h = -6/l_h$$

gewonnen. Die erste liefert die Belastungsglieder  $a_{J_0} = 4/l_h$ ,  $a_{K_0} = 2/l_h$  und die Belastungsglieder  $a_{c_0} = -\vartheta_{hc} \cdot 6/l_h$  nach den Angaben auf S. 321. Ähnliches gilt für die Biegelinie  $M_{K_*}^{(h)}$ .

Die Knoten- und Stabdrehwinkel  $\varphi_{R,Jh}^*$ ,  $\varphi_{S,Jh}^*$ ,  $\vartheta_{s,Jh}^*$  des Anteils  $M_{J_*}^{(h)}$  und  $\varphi_{R,Kh}^*$ ,  $\varphi_{S,Kh}^*$ ,  $\vartheta_{s,Kh}^*$  des Anteils  $M_{K_*}^{(h)}$  eines Stabes ( $s$ ) werden aus der konjugierten Matrix der statischen Bedingungen  $\delta A_J = 0$ ,  $\delta A_c = 0$  berechnet. Die Stabdrehwinkel  $\vartheta_{s,Jh}^*$ ,  $\vartheta_{s,Kh}^*$  bestimmen den Geradenzug  $R'S'$  und die Ordinaten  $mm''$ , welche durch die Ordinaten  $w \sin \gamma$  nach S. 332 zu  $mm'''$  ergänzt werden (Abb. 308).

b) Der Stab ( $g$ ) ist am Stabknoten  $J$  steif, am Stabknoten  $G$  frei drehbar angeschlossen (Abb. 310b). Anschlußmoment nach (532):

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(g)} &= M_{J_0}^{(g)} + \frac{3}{l_g} (\varphi_J - \vartheta_g) = M_{J_0}^{(g)} + M_{J_*}^{(g)}, \\ M_G^{(g)} &= -\frac{l_g}{2} \omega'_D. \end{aligned} \right\} \quad (550)$$

Die Einflußlinien  $M_{J_*}^{(g)}$  werden nach S. 331 als die Biegelinien des Lastabzuges für die äußeren Kräfte  $M_J = 3/l_g$ ,  $M_h = -3/l_g$  angegeben. Dabei entstehen das Belastungsglied  $a_{J_0} = 3/l_g$  und die Belastungsglieder  $a_{c_0} = -\vartheta_{gc} \cdot 3/l_g$ , die in Verbindung mit der konjugierten Matrix der Bedingungsgleichungen  $\delta A_J = 0$ ,  $\delta A_c = 0$  wiederum Komponenten  $\varphi_{R,Jg}^*$ ,  $\varphi_{S,Jg}^*$ ,  $\vartheta_{s,Jg}^*$  liefern. Damit ist der Verschiebungsplan  $R'S'$  bestimmt, aus dem sich wieder die Ordinaten  $mm'''$  der Funktion  $M_{J_*}^{(g)}$  nach S. 332 ergeben (Abb. 308).

Die Einflußlinien an den Stabwerken Abb. 300 und 303 für senkrechte Lasten im Bereich der Stäbe (1), (2), (5) und für waagerechte Lasten im Bereich der Stäbe (3), (4).

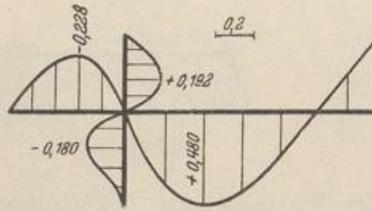
1. System a (Abb. 300a).

a) Einflußlinie  $\varphi_J$ . Die Einflußlinie  $\varphi_{Jm}$  wird als Biegelinie  $w_{mJ}$  der Stäbe (1) bis (5) infolge der Belastung  $M_J = 1$  mt aufgezeichnet (Abb. 311a).

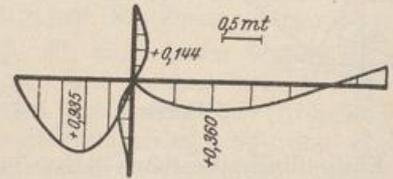
$$\begin{aligned} a_{J0} &= +\dot{1}_J M_J = +1; & \varphi_{JJ}^* &= -a_{J0}/a_{JJ} = +0,250, \\ w_1 &= \frac{l_1}{2} \varphi_{JJ}^* \omega_D = -0,750 \omega_D, & w_2 &= +\frac{l_2}{2} \varphi_{JJ}^* \omega_D' = +1,250 \omega_D', \\ w_3 &= +\frac{l_3}{2} \varphi_{JJ}^* \omega_D = +0,500 \omega_D, & w_4 &= -l_4 \varphi_{JJ}^* \omega_4' = -1,250 \omega_4', \\ w_5 &= +\varphi_{BJ}^* z - \frac{\varphi_{JJ}^*}{2} z = -0,125 z, \quad (z = \text{Abstand von Auflager B.}) \end{aligned}$$

b) Einflußlinie  $M_J^{(1)}$ .

$$M_J^{(1)} = M_{J0}^{(1)} + 3/l_1 \cdot \varphi_J = M_{J0}^{(1)} + M_{J*}^{(1)}.$$



a) Einflußlinie  $\varphi_J$ .



b) Einflußlinie  $M_J^{(1)}$ .

Abb. 311.

Im Bereich des Stabes (1) ist  $M_{J0}^{(1)} = l_1/2 \cdot \omega_D$ , im Bereich der übrigen Stäbe jedoch nicht vorhanden. Der zweite Anteil  $M_{J*}^{(1)}$ , die mit  $3/l_1$  erweiterte Einflußlinie  $\varphi_J$ , wird als Biegelinie infolge  $M_J = 3/l_1$  dargestellt (Abb. 311b).

$$\begin{aligned} \text{Stab 1: } M_J^{(1)} &= \frac{l_1}{2} \omega_D + \frac{3}{l_1} \varphi_J = +2,4375 \omega_D, & \text{Stab 2: } M_J^{(1)} &= \frac{3}{l_1} \varphi_J = +0,9375 \omega_D', \\ \text{Stab 3: } M_J^{(1)} &= \frac{3}{l_1} \varphi_J = +0,375 \omega_D, & \text{Stab 4: } M_J^{(1)} &= \frac{3}{l_1} \varphi_J = -0,9375 \omega_4', \\ \text{Stab 5: } M_J^{(1)} &= \frac{3}{l_1} \varphi_J = -0,094 z. \end{aligned}$$

2. System b (Abb. 303).

a) Die Einflußlinie  $\varphi_J$  wird als Biegelinie infolge  $M_J = 1$  mt aufgezeichnet (Abb. 312a)

$$\begin{aligned} a_{J0} &= +\dot{1}_J \cdot 1 = 1, & a_{10} &= 0, \\ \varphi_{JJ}^* &= -\beta_{JJ} = 0,2550, & \varphi_{1J}^* &= -\beta_{1J} = 0,0344, \\ \vartheta_{1J}^* &= \vartheta_{2J}^* = 0, & \vartheta_{3J}^* &= \vartheta_{31} \varphi_{1J}^* = -0,0430, & \vartheta_{4J}^* &= \vartheta_{41} \varphi_{1J}^* = +0,0344. \end{aligned}$$

Randbedingungen der Biegelinien: die lotrechten Verschiebungen der Knoten A, J, B und die waagerechten Verschiebungen  $u_{0J}^*$ ,  $u_{D'J}^*$  sind Null;  $u_{JJ}^* = l_4 \vartheta_{4J}^* = +0,1720$ .

$$w_1 = -\frac{l_1}{2} \varphi_{JJ}^* \omega_D = -0,7644 \omega_D, \quad w_2 = +\frac{l_2}{2} \varphi_{JJ}^* \omega_D' = +1,2743 \omega_D',$$

$$w_3 = +0,1720 \xi + \frac{l_3}{2} (\varphi_{JJ}^* - \vartheta_{3J}^*) \omega_D = 0,1720 \xi + 0,5957 \omega_D,$$

$$w_4 = +0,1720 \xi' - l_4 (\varphi_{JJ}^* \omega_4' + \vartheta_{4J}^* \omega_D') = 0,1720 \xi' - 1,2750 \omega_4' - 0,1720 \omega_D'',$$

$$w_5 = +\varphi_{BJ}^* z - \frac{\varphi_{JJ}^*}{2} z = -0,1275 z.$$

b) Die Einflußlinie  $\varphi_1$  wird als Biegelinie der Stäbe (1) bis (5) infolge eines Kräftepaarses  $M_4 = 1$  mt am Stab (4) aufgezeichnet (Abb. 312b).

$$\begin{aligned} a_{J0} &= 0, & a_{10} &= 1, \\ \varphi_{J1}^* &= -\beta_{J1} = +0,0344, & \varphi_{11}^* &= -\beta_{11} = +0,2445, \\ \vartheta_{11}^* &= \vartheta_{21}^* = 0, & \vartheta_{31}^* &= \vartheta_{31} \varphi_{11}^* = -0,3056, & \vartheta_{41}^* &= +0,2445. \end{aligned}$$