



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Teilung der Matrix und geometrisch unbestimmtes Hauptsystem

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Waagerechte Verschiebung des Knotens  $J$ :  $u_{J1}^* = l_4 \vartheta_{41}^* = 1,2225$

$$w_1 = -\frac{l_1}{2} \varphi_{J1}^* \omega_D = -0,1032 \omega_D, \quad w_2 = +\frac{l_2}{2} \varphi_{J1}^* \omega_D = +0,1720 \omega_D,$$

$$w_3 = +1,2225 \xi + \frac{l_3}{2} (\varphi_{J1}^* - \vartheta_{31}^*) \omega_D = 1,2225 \xi + 0,6800 \omega_D,$$

$$w_4 = +1,2225 \xi' - l_4 (\varphi_{J1}^* \omega'_\tau + \vartheta_{41}^* \omega''_D) = 1,2225 \xi' - 0,1720 \omega'_\tau - 1,2225 \omega''_D,$$

$$w_5 = \varphi_{B1}^* z = -\frac{\varphi_{J1}^*}{2} z = -0,0172 z.$$

c) Einflußlinie  $M_J^{(3)}$ .  $M_J^{(3)} = M_{J0}^{(3)} + \frac{3}{l_3} (\varphi_J - \vartheta_3) = M_{J0}^{(3)} + M_{J*}^{(3)}$ .

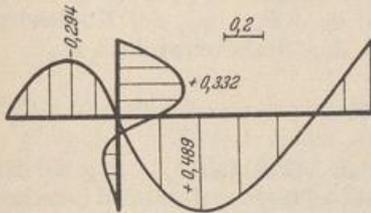
Im Bereich des Stabes (3) ist  $M_{J0}^{(3)} = -l_3/2 \cdot \omega_D$ , im Bereich der übrigen Stäbe Null. Der zweite Anteil  $M_{J*}^{(3)}$ , die mit  $3/l_3$  erweiterte Differenz der Einflußlinien  $\varphi_J$  und  $\vartheta_3$ , wird als Biegelinie infolge des Momentes  $3/l_3$  am Knoten  $J$  und des Kräftepaars  $-3/l_3$  am Stabe (3) aufgezeichnet (Abb. 312c). Für diese Belastung ist

$$a_{J0} = \frac{3}{l_3} = +0,7500, \quad a_{10} = \left(-1 \frac{l_4}{l_2}\right) \left(-\frac{3}{l_2}\right) = +0,9375,$$

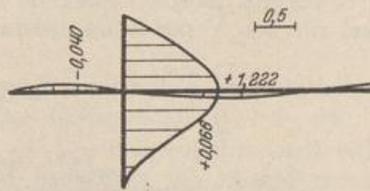
$$-\varphi_{J,J3}^* = a_{J0} \beta_{JJ} + a_{10} \beta_{J1} = -0,2235,$$

$$-\psi_{1,J3}^* = a_{J0} \beta_{1J} + a_{10} \beta_{11} = -0,2550,$$

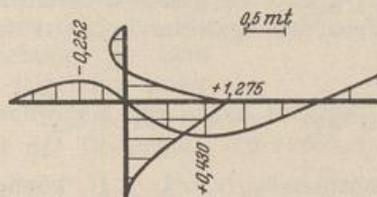
$$\vartheta_{1,J3}^* = \vartheta_{2,J3}^* = 0, \quad \vartheta_{3,J3}^* = \vartheta_{31} \psi_{1,J3}^* = -0,3188, \quad \vartheta_{4,J3}^* = +0,2550.$$



a) Einflußlinie  $\varphi_J$ .



b) Einflußlinie  $\psi_1$ .



c) Einflußlinie  $M_J^{(3)}$ .

Abb. 312.

Waagerechte Verschiebung des Knotens  $J$ :  $u_{J,J3}^* = l_4 \vartheta_{4,J3}^* = +1,2750$ ,

Stab 1:  $M_J^{(3)} = -\frac{l_1}{2} \varphi_{J,J3}^* \omega_D = -0,6708 \omega_D$ ,

Stab 2:  $M_J^{(3)} = +\frac{l_2}{2} \varphi_{J,J3}^* \omega_D = +1,1175 \omega_D$ ,

Stab 3:  $M_J^{(3)} = -\frac{l_3}{2} \omega_D + u_{J,J3}^* \xi + \frac{l_3}{2} (\varphi_{J,J3}^* - \vartheta_{3,J3}^*) \omega_D = 1,2750 \xi - 2,0630 \omega_D$ ,

Stab 4:  $M_J^{(3)} = +u_{J,J3}^* \xi' - l_4 (\varphi_{J,J3}^* \omega'_\tau + \vartheta_{4,J3}^* \omega''_D) = 1,2750 \xi' - 1,1175 \omega'_\tau - 1,2750 \omega''_D$ ,

Stab 5:  $M_J^{(3)} = +\varphi_{B,J3}^* z = -\frac{\varphi_{J,J3}^*}{2} z = -0,1117 z$ .

**Teilung der Matrix und geometrisch unbestimmtes Hauptsystem.** Die unabhängigen Komponenten  $\psi_0$  des Ansatzes sind bei ausgezeichneten Belastungen

oft klein, so daß die  $r$  Knotendrehwinkel  $\varphi_J$  zur Beschreibung des Verschiebungs- und Spannungszustandes ausreichen. Der Ansatz besteht dann nur aus den  $r$  statischen Bedingungen  $\delta A_J = 0$  mit  $\psi_c = 0$ , deren Wurzeln an Stelle von  $\varphi_J$  mit  $\varphi_{J0}$  bezeichnet werden. Diese lassen sich, falls die nachträgliche Auflösung der  $(r+f)$  Gleichungen des vollständigen Ansatzes notwendig oder erwünscht erscheint, mit  $\psi_c = 0$  nach Abschn. 30 als Anfangswerte einer Iteration der Lösung des allgemeinen Ansatzes  $\delta A_J = 0, \delta A_c = 0$  verwenden. Das Ergebnis  $\varphi_J, \psi_c$  ist dann in zwei Stufen gewonnen.

Die Lösung in zwei Stufen kann auch zur vollständigen algebraischen Rechenvorschrift ausgebildet werden. Dabei treten die  $f$  Summanden mit den unbekannt Komponenten  $\psi_c$  der vollständigen Gleichungen  $\delta A_J = 0$  zunächst zu den Belastungsgliedern des Ansatzes,

$$\varphi_J a_{JJ} + \sum_K \varphi_K a_{JK} = -a_{J0} - \sum_1^f \psi_c a_{Jc}, \quad (551)$$

so daß die Wurzeln  $\varphi_J$  nach dem Superpositionsgesetz als linearer Ansatz angeschrieben werden können.

$$\varphi_J = \varphi_{J0} + \sum_1^f \varphi_{Jc} \psi_c. \quad (552)$$

Dabei ist  $\varphi_{J0}$  der Knotendrehwinkel aus den äußeren Ursachen (Belastung, Temperaturbewegung, Stützenbewegung mit  $\psi_c = 0$  und  $\vartheta_h = \vartheta_{h0}$ ),  $\varphi_{Jc}$  der Knotendrehwinkel für den Verschiebungszustand  $\psi_c = 1$  mit den Stabdrehwinkeln  $\vartheta_{hc}$ .

$$\vartheta_h = \vartheta_{h0} + \sum_1^f \vartheta_{hc} \psi_c. \quad (553)$$

Die Knotendrehwinkel  $\varphi_{J0}, \varphi_{Jc}$  werden aus den Vorzahlen  $\beta_{JJ}, \beta_{JK}$  der konjugierten Matrix der statischen Bedingungen  $\delta A_J = 0$  ( $J = A \dots N$ ) berechnet, die oft in regelmäßiger Gliederung drei und fünf Unbekannte enthalten und nach Abschn. 29 gelöst werden. Die äußeren Ursachen liefern Belastungsglieder  $a_{J0}$ , der geometrisch bestimmte Verschiebungszustand  $\psi_c = 1$  der Knotenkette die Belastungsglieder  $a_{Jc}$ .

$$-\varphi_{J0} = \sum_A^N \beta_{JH} a_{H0}, \quad -\varphi_{Jc} = \sum_A^N \beta_{JH} a_{Hc}; \quad c = 1 \dots f. \quad (554)$$

Die unbekannt Komponenten  $\psi_c$  ( $c = 1 \dots f$ ) können unabhängig von den Knotendrehwinkeln aus den  $f$  Gleichungen  $\delta A_c = 0$  der zweiten Stufe berechnet werden. Die statische Bedingung für die zwangläufige Kette  $\Gamma_b$  erhält dabei nach Einführung von (552) folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{J=A}^N \varphi_J a_{bJ} + \sum_{c=1}^f \psi_c a_{bc} + a_{b0} &= 0; & b = 1 \dots f. \\ \sum_1^f \psi_c (a_{bc} + \sum_A^N \varphi_{Jc} a_{bJ}) + (a_{b0} + \sum_A^N a_{bJ} \varphi_{J0}) &= 0, \\ \sum \psi_c a_{bc}^{(r)} + a_{b0}^{(r)} &= \delta A_b^{(r)} = 0, \\ r &= \text{Anzahl der Knoten } A \dots N. \end{aligned} \right\} \quad (555)$$

Die algebraische Auflösung des Ansatzes  $\delta A_J = 0, \delta A_c = 0$  in zwei Stufen bedeutet mechanisch die Berechnung der Komponenten  $\psi_c$  in einem geometrisch  $r$  fach unbestimmten Hauptsystem, dessen Komponenten  $\varphi_{J0}, \varphi_{Jc}$  mit den zugeordneten Anschlußkräften  $M_{J0}^{(r)}, M_{Jc}^{(r)}$  bekannt sind. Die Belastungszahlen  $w_{b0}^{(r)}$

sind der Ausdruck für die virtuelle Arbeit der Belastung  $\mathfrak{P}$  und der Anschlußkräfte  $M_{J_0}^{(a,r)}$  des geometrisch unbestimmten Hauptsystems aus allen äußeren Ursachen ( $\mathfrak{P}, t, \Delta t$ ) an einer mit  $\psi_b = 1$  angetriebenen Kette  $\Gamma_b$ . Die Vorzahlen  $a_{b_c}^{(r)}$  sind der Ausdruck für die virtuelle Arbeit der Anschlußkräfte  $M_{J_c}^{(a,r)}$  des geometrisch unbestimmten Hauptsystems aus  $\psi_c = 1$  an einer mit  $\psi_b = 1$  angetriebenen Kette  $\Gamma_b$ . Die Knoten- und Stabdrehwinkel  $\varphi_J, \vartheta_h$  ergeben sich aus  $\psi_c$  durch Superposition nach (552), (553).

**Rahmenstellung mit waagerechtem Riegel und senkrechten Pfosten.**

Die Pfosten des Riegels zweigen je nach der Verwendung des Tragwerks nach einer oder auch nach beiden Seiten ab. Die Enden sind frei drehbar gelagert oder starr eingespannt. Die Rahmenstellung mit horizontaler Abstützung des Riegels wird als durchgehender Träger mit elastisch drehbaren Pfosten bezeichnet.

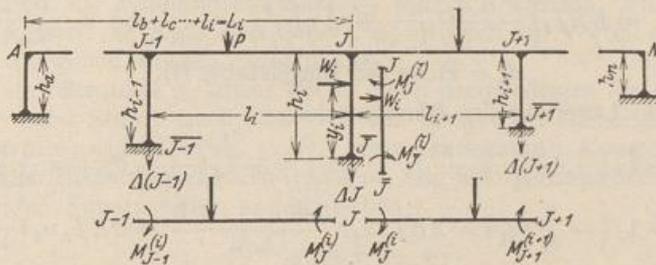


Abb. 313

Der Verschiebungszustand der Rahmenstellung ist durch  $r$  Knotendrehwinkel  $\varphi_J$  ( $J = A \dots N$ ) und durch eine unabhängige Komponente  $\psi_c = \psi_1$  der Stabkette bestimmt (Abb. 313). Hierfür kann einer der Pfostendrehwinkel oder die horizontale Verschiebung des Riegels gewählt werden. Bei Symmetrie des Tragwerks ist  $\psi_1$  der Drehwinkel des mittleren Pfostens oder die waagerechte Verschiebung des Symmetriepunktes. In der folgenden Untersuchung wird der Stabdrehwinkel des linken Endpfostens  $h_a$  als  $\psi_1$  angenommen (Abb. 314). Demnach ist der Drehwinkel einer Zwischenstütze ( $i$ )

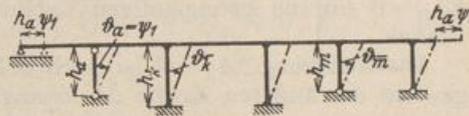


Abb. 314.

$$\vartheta_i = \vartheta_{i0} + \psi_1 \frac{h_a}{h_i}$$

Die Stabdrehwinkel  $\vartheta_{h1}$  der Riegelstäbe sind bei senkrechten Pfosten Null.

Zur Berechnung der  $(r + 1)$  unbekanntnen Komponenten  $\varphi_J, \psi_1$  werden  $r$  statische Bedingungen  $\delta A_J = 0$  ( $J = A \dots N$ ) und eine statische Bedingung  $\delta A_1 = 0$  nach S. 320 verwendet. Jede mittlere Bedingungsgleichung  $\delta A_J = 0$  verknüpft drei Knotendrehwinkel  $\varphi_{J-1}, \varphi_J, \varphi_{J+1}$  mit  $\psi_1$ . Sie ist der Ausdruck für die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte eines mit  $\varphi_J = 1$  angetriebenen zwangsläufigen Gebildes  $\Gamma_J$ .

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{J-1} a_{J(J-1)} + \varphi_J a_{JJ} + \varphi_{J+1} a_{J(J+1)} + a_{J1} \psi_1 + a_{J\otimes} &= 0, \\ a_{J\otimes} &= a_{J0} + a_{Jt} + a_{J\Delta t} + a_{Js}. \end{aligned} \right\} \quad (556)$$

Das absolute Glied  $a_{J\otimes}$  des Ansatzes ist die virtuelle Arbeit der Anschlußkräfte des geometrisch bestimmten Systems aus dessen Belastung  $\mathfrak{P}$ , der gleichförmigen und ungleichförmigen Temperaturänderung  $t, \Delta t$  der Stäbe und aus den Stützenverschiebungen  $\Delta_J$ . Die Vorzahlen und Belastungszahlen werden nach (533) ff. entwickelt und für konstanten Querschnitt im Bereiche jedes Stabes angegeben.

Beyer, Baustatik, 2. Aufl., 2. Neudruck.