



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Zahlenbeispiel

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Einflußlinien der Anschlußmomente  $M_J^{(i)}$  lassen sich auf Grund einer Zerlegung des Anteils  $M_{J*}^{(i)}$  nach (552) oft noch einfacher angeben.

$$M_J^{(i)} = M_{J_0}^{(i)} + \frac{2}{l_i} (2\varphi_{J_0} + \varphi_{(J-1)0}) + \frac{2}{l_i} (2\varphi_{J1} + \varphi_{(J-1)1}) \psi_1. \quad (574)$$

Für  $\psi_1 = 0$  ist

$$M_{J_0,*}^{(i)} = M_{J_0}^{(i)} + \frac{2}{l_i} (2\varphi_{J_0} + \varphi_{(J-1)0}) \quad (575)$$

das Anschlußmoment des durchgehenden Trägers mit elastisch drehbaren Stützen, dessen Einflußlinien auch in anderer Weise bestimmt werden können (S. 240). Die Ordinaten der Einflußlinie des zweiten Anteils von  $M_J^{(i)}$  sind ein Vielfaches der Ordinaten der Einflußlinie von  $\psi_1$ , die Vorzahl von  $\psi_1$  ist das Anschlußmoment  $M_{J_1}^{(i)}$  für  $\psi_1 = 1$ . Es ist nach (568) mit  $\varphi_{J1}, \varphi_{(J-1)1}$ , oft aber auch durch andere Rechnungen bekannt.

Die Einflußlinie  $M_{J_0,*}^{(i)}$  kann selbstverständlich aber ebenso wie die Einflußlinie von  $M_J^{(i)}$  auf S. 333 als Biegelinie einer ausgezeichneten Belastung ( $J_i$ ) mit  $M_J = 4/l_i, M_{J-1} = 2/l_i$  aufgetragen werden. Sie betrifft hier jedoch die Riegel  $(H-1), \bar{H} \equiv l_h$  des geometrisch unbestimmten Hauptsystems ( $\psi_1 = 0$ ). Die Belastung ( $J_i$ ) erzeugt die Knotendrehwinkel  $\varphi_{(H-1),J_i}^{**}, \varphi_{H,J_i}^{**}$ , die unmittelbar mit den Vorzahlen der konjugierten Matrix der ersten Stufe des Ansatzes  $\delta A_J = 0, \psi_1 = 0$  angeschrieben werden können.

$$\left. \begin{aligned} -\varphi_{(H-1),J_i}^{**} &= \frac{2}{l_i} (\beta_{(H-1)(J-1)} + 2\beta_{(H-1)J}^2), \\ -\varphi_{H,J_i}^{**} &= \frac{2}{l_i} (\beta_{H(J-1)} + 2\beta_{HJ}). \end{aligned} \right\} \quad (576)$$

Die Gleichung der Einflußlinie  $M_{J_0,*}^{(i)}$  lautet darnach im Bereich  $l_h$  folgendermaßen:

$$M_{J_0,*}^{(i)} = l_h (\varphi_{(H-1),J_i}^{**} \omega_i - \varphi_{H,J_i}^{**} \omega_i). \quad (577)$$

**Durchgehender Rahmen mit verschiedener Lagerung der Pfosten.**

1. Geometrische Grundlagen.

Stablängen und Trägheitsmomente siehe Abb. 315.

Alle Größen beziehen sich auf die Einheiten t und m.

Reduzierte Stablängen ( $J_c = 0,138 \text{ m}^4$ ):

$$\begin{aligned} l'_a &= 24,0, & l'_b &= 24,0, & l'_c &= 24,0, & l'_d &= 49,68, & l'_e &= 33,12, \\ h'_a &= 48,14, & h'_b &= 48,14, & h'_c &= 150,54, & h'_d &= 150,54. \end{aligned}$$

2. Überzählige Größen und statische Bedingungen.

$$\begin{aligned} a_{AA} &= -\left(\frac{3}{l'_a} + \frac{4}{h'_a} + \frac{4}{l'_b}\right) = -0,374758, & a_{AB} &= -\frac{2}{l'_b} = -0,083333, \\ a_{A1} &= \frac{6}{h'_a} = +0,124636, & a_{BB} &= -\left(\frac{4}{l'_b} + \frac{4}{h'_b} + \frac{4}{l'_c}\right) = -0,416424, \\ a_{B0} &= -\frac{2}{l'_c} = -0,083333, & a_{B1} &= \frac{6}{h'_b} \frac{h'_a}{h'_b} = +0,124636, \\ a_{00} &= -\left(\frac{4}{l'_c} + \frac{3}{h'_c} + \frac{4}{l'_d}\right) = -0,267110, & a_{0D} &= -\frac{2}{l'_d} = -0,040258, \\ a_{01} &= \frac{3}{h'_c} \frac{h'_a}{h'_c} = +0,049821, & a_{DD} &= -\left(\frac{4}{l'_d} + \frac{3}{h'_d} + \frac{3}{l'_e}\right) = -0,191023, \\ a_{D1} &= \frac{3}{h'_d} \frac{h'_a}{h'_d} = +0,049821, \\ a_{11} &= -12\left(\frac{1}{h'_a} + \frac{h'_a}{h'_b h'_b}\right) - 3\left(\frac{h'_a}{h'_c h'_c} + \frac{h'_a}{h'_d h'_d}\right) = -0,747649. \end{aligned}$$

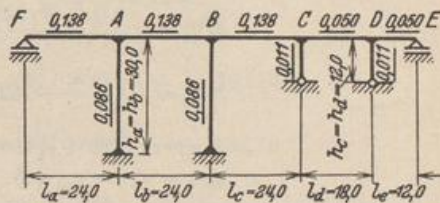


Abb. 315. Die unterstrichenen Zahlen geben die Trägheitsmomente an.



Matrix der statischen Bedingungen.

	$\varphi_A$	$\varphi_B$	$\varphi_C$	$\varphi_D$	$\psi_1$
A	-0,374758	-0,083333			+0,124636
B	-0,083333	-0,416424	-0,083333		+0,124636
C		-0,083333	-0,267110	-0,040258	+0,049821
D			-0,040258	-0,191023	+0,049821
I	+0,124636	+0,124636	+0,049821	+0,049821	-0,747649

## A. Berechnung mit dem Gaußschen Algorithmus (Abschn. 29).

3. Vorzahlen  $\beta_{JK}$ 

	$a_{A0}$	$a_{B0}$	$a_{C0}$	$a_{D0}$	$a_{10}$
$\varphi_A$	-2,920756	+0,503428	-0,226407	-0,062405	-0,422223
$\varphi_B$	+0,503428	-2,772280	+0,841600	-0,266009	-0,339870
$\varphi_C$	-0,226407	+0,841600	-4,155719	+0,845025	-0,118059
$\varphi_D$	-0,062405	-0,266009	+0,845025	-5,508394	-0,365497
$\psi_1$	-0,422223	-0,339870	-0,118059	-0,365497	-1,496793

4. Belastung der Felder (a) und (b) durch  $p = 4$  t/m. (Abb. 316a).

$$M_{A0}^{(a)} = + \frac{p l_a^2}{8} = \frac{4 \cdot 24^2}{8} = 288, \quad M_{A0}^{(b)} = - \frac{p l_b^2}{12} = - \frac{4 \cdot 24^2}{12} = -192,$$

$$M_{B0}^{(b)} = + \frac{p l_b^2}{12} = +192 \text{ mt.}$$

$$a_{A0} = -(288 - 192) = -96, \quad a_{B0} = -(+192) = -192,$$

$$a_{C0} = a_{D0} = a_{10} = 0.$$

Berechnung der überzähligen Größen nach (542):

$$\varphi_A = -183,734, \quad \varphi_C = +139,852, \quad \psi_1 = -105,788,$$

$$\varphi_B = -483,949, \quad \varphi_D = -57,065,$$

$$\vartheta_a = \vartheta_b = \psi_1 = -105,788, \quad \vartheta_c = \vartheta_d = \frac{h_a}{h_c} \psi_1 = -264,470.$$

$$\begin{aligned} M_A^{(\bar{a})} &= \frac{2}{h'_a} (\varphi_A - 3 \vartheta_a) = + 5,552 \text{ mt}, & M_B^{(\bar{b})} &= \frac{2}{h'_b} (\varphi_B - 3 \vartheta_b) = - 6,921 \text{ mt.} \\ M_A^{(a)} &= M_{A0}^{(a)} + \frac{3}{l'_a} \varphi_A = + 265,033 \text{ mt}, & M_C^{(c)} &= \frac{2}{l'_c} (2 \varphi_C + \varphi_B) = - 17,020 \text{ mt}, \\ M_A^{(\bar{a})} &= \frac{2}{h'_a} (2 \varphi_A - 3 \vartheta_a) = - 2,082 \text{ mt}, & M_C^{(\bar{c})} &= \frac{3}{h'_c} (\varphi_C - \vartheta_c) = + 8,057 \text{ mt}, \\ M_A^{(b)} &= M_{A0}^{(b)} + \frac{2}{l'_b} (2 \varphi_A + \varphi_B) = - 262,951 \text{ mt}, & M_D^{(d)} &= \frac{2}{l'_d} (2 \varphi_C + \varphi_D) = + 8,963 \text{ mt}, \\ M_B^{(b)} &= M_{B0}^{(b)} + \frac{2}{l'_b} (2 \varphi_B + \varphi_A) = + 96,031 \text{ mt}, & M_D^{(d)} &= \frac{2}{l'_d} (2 \varphi_D + \varphi_C) = + 1,036 \text{ mt}, \\ M_B^{(\bar{b})} &= \frac{2}{h'_b} (2 \varphi_B - 3 \vartheta_b) = - 27,027 \text{ mt}, & M_D^{(\bar{d})} &= \frac{3}{h'_d} (\varphi_D - \vartheta_d) = + 4,133 \text{ mt}, \\ M_B^{(c)} &= \frac{2}{l'_c} (2 \varphi_B + \varphi_C) = - 69,004 \text{ mt}, & M_D^{(e)} &= \frac{3}{l'_c} \varphi_D = - 5,169 \text{ mt.} \end{aligned}$$



5. Temperaturerhöhung des Riegels um  $t = 15^\circ$  (Abb. 316 b).

$$E J_c \alpha_t t = 2100000 \cdot 0,138 \cdot 10^{-5} \cdot 15 = 43,4700,$$

$$\vartheta_{at} = 0, \quad \vartheta_{bt} = E J_c \alpha_t t \frac{L_b}{h_b} = 43,47 \frac{24,0}{30,0} = 34,776,$$

$$\vartheta_{ct} = E J_c \alpha_t t \frac{L_c}{h_c} = 43,47 \frac{48,0}{12,0} = 173,880, \quad \vartheta_{dt} = E J_c \alpha_t t \frac{L_d}{h_d} = 43,47 \frac{66,0}{12,0} = 239,085,$$

$$a_{At} = 0; \quad a_{Bt} = 6 E J_c \alpha_t t \frac{L_b}{h_b h'_b} = +4,33436,$$

$$a_{Ot} = 3 E J_c \alpha_t t \frac{L_c}{h_c h'_c} = +3,46513, \quad a_{Dt} = 3 E J_c \alpha_t t \frac{L_d}{h_d h'_d} = +4,76455,$$

$$a_{1t} = -E J_c \alpha_t t \left( \frac{12 L_b h_a}{h'_b h_b^2} + \frac{3 L_c h_a}{h'_c h_c^2} + \frac{3 L_d h_a}{h'_d h_d^2} \right) = -29,2429.$$

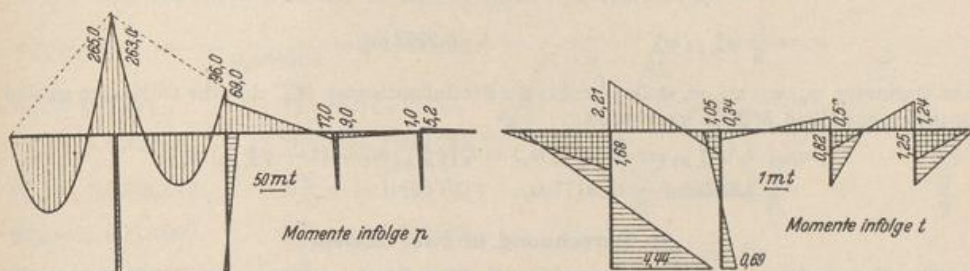


Abb. 316 a und b.

Berechnung der überzähligen Größen nach (542):

$$\varphi_A = -13,4472, \quad \varphi_O = +3,2738, \quad \psi_1 = -40,1469,$$

$$\varphi_B = +0,4284, \quad \varphi_D = +13,7817.$$

$$\vartheta_{\bar{a}} = \vartheta_{at} + \psi_1 = -40,147, \quad \vartheta_{\bar{c}} = \vartheta_{ct} + \psi_1 \frac{h_a}{h_c} = +73,513,$$

$$\vartheta_{\bar{b}} = \vartheta_{bt} + \psi_1 = -5,371, \quad \vartheta_{\bar{d}} = \vartheta_{dt} + \psi_1 \frac{h_a}{h_d} = +138,718.$$

$$M_A^{(a)} = -1,681, \quad M_B^{(b)} = -1,049, \quad M_O^{(c)} = +0,581, \quad M_D^{(d)} = +1,241 \text{ mt},$$

$$M_A^{(a)} = +3,886, \quad M_B^{(b)} = +0,705, \quad M_O^{(c)} = -1,400, \quad M_D^{(d)} = -2,490 \text{ mt},$$

$$M_A^{(b)} = -2,206, \quad M_B^{(c)} = +0,344, \quad M_O^{(d)} = +0,818, \quad M_D^{(e)} = +1,248 \text{ mt},$$

$$M_A^{(a)} = +4,445 \text{ mt},$$

$$M_B^{(b)} = +0,687 \text{ mt}.$$

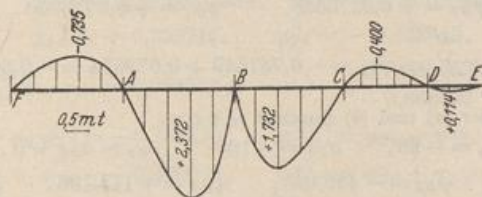


Abb. 317. Einflußlinie  $M_B^{(b)}$ .

6. Einflußlinie  $M_B^{(b)}$  (Abb. 317).

$$M_B^{(b)} = M_{B0}^{(b)} + \frac{2}{l'_b} (2 \varphi_B + \varphi_A) = M_{B0}^{(b)} + M_{B*}^{(b)},$$

$$M_{B0}^{(b)} = l_b \omega_r \text{ im Bereich } (b), \text{ sonst ist } M_{B0}^{(b)} = 0.$$

$M_{B*}^{(b)}$  wird als Biegelinie zu der Belastung  $M_B = 4/l'_b$ ,  $M_A = 2/l'_b$  aufgezeichnet.



Belastungsglieder :

$$a_{A0} = \frac{2}{l'_b} = +0,083333, \quad a_{B0} = \frac{4}{l'_b} = +0,166667.$$

Berechnung der überzähligen Größen nach (542):

$$\varphi_{A,Bb}^* = +0,159491, \quad \varphi_{B,Bb}^* = +0,420095, \quad \varphi_{C,Bb}^* = -0,121400,$$

$$\varphi_{D,Bb}^* = +0,049535, \quad \psi_{1,Bb}^* = +0,091830.$$

$$w_a = -\frac{l_a}{2} \varphi_{A,Bb}^* \omega_D = -1,9139 \omega_D,$$

$$w_b = l_b (\varphi_{A,Bb}^* \omega'_t - \varphi_{B,Bb}^* \omega_t) = +3,8278 \omega'_t - 10,0823 \omega_t,$$

$$w_c = l_c (\varphi_{B,Bb}^* \omega'_t - \varphi_{C,Bb}^* \omega_t) = +10,0823 \omega'_t + 2,9136 \omega_t,$$

$$w_d = l_d (\varphi_{C,Bb}^* \omega'_t - \varphi_{D,Bb}^* \omega_t) = -2,1852 \omega'_t - 0,8916 \omega_t,$$

$$w_e = \frac{l_e}{2} \varphi_{D,Bb}^* \omega'_D = +0,2972 \omega'_D.$$

Die Ordinaten  $w_a, w_c, w_d, w_e$  stellen bereits die Einflußordinaten  $M_B^{(b)}$  dar, die Ordinaten  $w_b$  sind noch um das Glied  $M_{B0}^{(b)}$  zu vermehren:

$$l_b \omega_t + l_b (\varphi_{A,Bb}^* \omega'_t - \varphi_{B,Bb}^* \omega_t) = l_b [\varphi_{A,Bb}^* \omega'_t + (1 - \varphi_{B,Bb}^*) \omega_t]$$

$$= 3,8278 \omega'_t + 13,9177 \omega_t.$$

**B. Berechnung in zwei Stufen.**

Die Matrix der statischen Bedingungen für  $\varphi_A \dots \varphi_D$  ist in dem allgemeinen Ansatz auf S. 342 enthalten.

3. Vorzahlen  $\beta_{JK}$  des dreigliedrigen Ansatzes für  $\psi_1 = 0$  nach S. 230 ff.

	$a_{A0}$	$a_{B0}$	$a_{C0}$	$a_{D0}$
$\varphi_A$	-2,801651	+0,599297	-0,193102	+0,040696
$\varphi_B$	+0,599297	-2,695109	+0,868404	-0,183016
$\varphi_C$	-0,193102	+0,868404	-4,146405	+0,873853
$\varphi_D$	+0,040696	-0,183016	+0,873853	-5,419136

4. Knotendrehwinkel  $\varphi_{J1}$ .

Belastungsglieder:  $a_{A1} = +0,124636, \quad a_{C1} = +0,049821,$   
 $a_{B1} = +0,124636, \quad a_{D1} = +0,049821,$   
 $\varphi_{A1} = +0,2820856, \quad \varphi_{B1} = +0,2270668, \quad \varphi_{C1} = +0,0788750, \quad \varphi_{D1} = +0,2441887,$

$$a_{11}^{(r)} = a_{11} + \sum_A^D \varphi_{J1} a_{1J} = -0,747649 + 0,079554 = -0,668095.$$

5. Belastung der Felder (a) und (b) durch  $p = 4 \text{ t/m}$ .

$$a_{A0} = -96, \quad a_{B0} = -192, \quad a_{C0} = a_{D0} = 0,$$

$$\varphi_{A0} = -153,893, \quad \varphi_{B0} = -459,928, \quad \varphi_{C0} = +148,196, \quad \varphi_{D0} = -31,232,$$

$$a_{10}^{(r)} = a_{10} + \sum_A^D \varphi_{J0} a_{1J} = 0 - 70,6769,$$

$$\psi_1 = -\frac{a_{10}^{(r)}}{a_{11}^{(r)}} = -\frac{-70,6769}{-0,668095} = -105,789,$$

$$\varphi_A = \varphi_{A0} + \psi_1 \varphi_{A1} = -183,735, \quad \varphi_C = \varphi_{C0} + \psi_1 \varphi_{C1} = +139,851,$$

$$\varphi_B = \varphi_{B0} + \psi_1 \varphi_{B1} = -483,947, \quad \varphi_D = \varphi_{D0} + \psi_1 \varphi_{D1} = -57,064.$$

Die Superposition verläuft wie bei A und unterbleibt daher.



6. Temperaturerhöhung des Riegels um  $15^\circ$ .

$$a_{A1} = 0, \quad a_{B1} = +4,33436, \quad a_{C1} = +3,46513, \quad a_{D1} = +4,76455,$$

$$\varphi_{A1} = -2,122345, \quad \varphi_{B1} = +9,544428, \quad \varphi_{C1} = +6,440343, \quad \varphi_{D1} = +23,584985.$$

$$a_{11}^{(r)} = a_{11} + \sum_A^D \varphi_{J1} a_{1J} = -29,2429 + 2,420951 = -26,8219,$$

$$\psi_1 = -\frac{a_{11}^{(r)}}{a_{11}^{(r)}} = -\frac{-26,8219}{-0,668095} = -40,1468,$$

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \psi_1 \varphi_{A1} = -13,4472, \quad \varphi_C = \varphi_{C1} + \psi_1 \varphi_{C1} = +3,2737,$$

$$\varphi_B = \varphi_{B1} + \psi_1 \varphi_{B1} = +0,4284, \quad \varphi_D = \varphi_{D1} + \psi_1 \varphi_{D1} = +13,7816.$$

7. Einflußlinie  $\psi_1$  (Abb. 318).

Die Belastung  $M_a = 1$  mt am Pfosten  $h_a$  (Abb. 314) führt zu

$$\psi_{1,a}^* = -\frac{1}{a_{11}^{(r)}} = -\frac{1}{-0,668095} = +1,496793.$$

$$\varphi_{J,a}^* = \psi_{1,a}^* \varphi_{J1}, \quad \vartheta_{h,a}^* = \psi_{1,a}^* \vartheta_{h1},$$

$$\varphi_{A,a}^* = +0,422224, \quad \vartheta_{a,a}^* = +1,496793,$$

$$\varphi_{B,a}^* = +0,339872, \quad \vartheta_{b,a}^* = +1,496793,$$

$$\varphi_{C,a}^* = +0,118060, \quad \vartheta_{c,a}^* = +3,741983,$$

$$\varphi_{D,a}^* = +0,365500, \quad \vartheta_{d,a}^* = +3,741983.$$

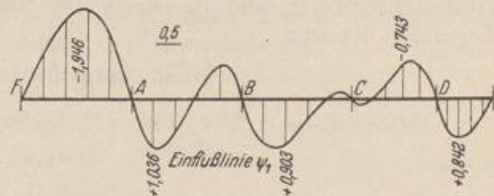


Abb. 318.

$$\text{Feld a: } \psi_1 = -\frac{l_a}{2} \varphi_{A,a}^* \omega_D = -5,0667 \omega_D,$$

$$\text{Feld b: } \psi_1 = l_b (\varphi_{A,a}^* \omega'_r - \varphi_{B,a}^* \omega_r) = +10,1334 \omega'_r - 8,1569 \omega_r,$$

$$\text{Feld c: } \psi_1 = l_c (\varphi_{B,a}^* \omega'_r - \varphi_{C,a}^* \omega_r) = +8,1569 \omega'_r - 2,8334 \omega_r,$$

$$\text{Feld d: } \psi_1 = l_d (\varphi_{C,a}^* \omega'_r - \varphi_{D,a}^* \omega_r) = +2,1251 \omega'_r - 6,5790 \omega_r,$$

$$\text{Feld e: } \psi_1 = \frac{l_e}{2} \varphi_{D,a}^* \omega'_D = +2,1930 \omega'_D.$$

8. Einflußlinie  $M_B^{(b)}$ .

$$M_B^{(b)} = M_{B0}^{(b)} + \frac{2}{l'_b} (2\varphi_B + \varphi_A) = M_{B0}^{(b)} + M_{B*}^{(b)},$$

$$M_{B*}^{(b)} = \text{Biegelinie infolge } M_A = 2/l'_b, \quad M_B = 4/l'_b.$$

$$\text{Belastungsglieder: } a_{A0} = 2/l'_b = 0,083333, \quad a_{B0} = 4/l'_b = 0,166667,$$

$$\varphi_{A0} = +0,133587, \quad \varphi_{B0} = +0,399245, \quad \varphi_{C0} = -0,128643, \quad \varphi_{D0} = +0,027111,$$

$$a_{10}^{(r)} = a_{10} + \sum \varphi_{J0} a_{1J} = 0,061352, \quad \psi_1 = -\frac{+0,061352}{-0,668095} = +0,091831,$$

$$\varphi_{A,Bb}^* = \varphi_{A0} + \psi_1 \varphi_{A1} = +0,159490, \quad \varphi_{C,Bb}^* = \varphi_{C0} + \psi_1 \varphi_{C1} = -0,121400,$$

$$\varphi_{B,Bb}^* = \varphi_{B0} + \psi_1 \varphi_{B1} = +0,420097, \quad \varphi_{D,Bb}^* = \varphi_{D0} + \psi_1 \varphi_{D1} = +0,049535.$$

**Allgemeiner Ansatz zur Untersuchung des Stockwerkrahmens.** Der Verschiebungszustand eines Stockwerkrahmens mit  $n$  Pfosten und  $v$  durchgehenden Riegelstäben (Abb. 319) wird durch  $v \cdot n$  Knotendrehwinkel  $\varphi_J$  und  $f = v$  unabhängige Komponenten  $\psi_c$  beschrieben. Hierfür eignen sich die waagerechten Verschiebungen  $u_1 \dots u_v$  der Riegel und die Drehwinkel  $\vartheta_1 \dots \vartheta_v$  der Abschnitte eines aufgehenden Pfostens. Die Pfostendrehwinkel eines Stockwerks sind bei waagerechten Riegelzügen mit  $\varepsilon_{h0} = 0$  und senkrechten Pfosten gleich groß, die Drehwinkel der Riegel Null.