



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

41. Stabwerke mit geraden und gekrümmten Stabachsen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

$$\begin{aligned} \psi_c a_{cc} + \sum \varphi_J a_{cJ} + a_{c0} &= 0, \\ \psi_c &= -\frac{a_{c0}}{a_{cc}} - \frac{\sum \varphi_J a_{cJ}}{a_{cc}} = \psi_{c,0} + \psi'_c, \end{aligned} \quad (580)$$

$$\begin{aligned} \varphi_J a_{JJ} + \sum \varphi_K a_{JK} + \sum \psi_c a_{Jc} + a_{J0} &= 0, \\ \varphi_J a_{JJ} + \sum \varphi_K a_{JK} + \sum \psi_{c,0} a_{Jc} + \sum \psi'_c a_{Jc} + a_{J0} &= 0, \\ \varphi_J &= -\frac{a_{J0} + \sum \psi_{c,0} a_{Jc}}{a_{JJ}} - \frac{\sum \varphi_K a_{JK}}{a_{JJ}} - \frac{\sum \psi'_c a_{Jc}}{a_{JJ}} \left. \right\} \\ &= \varphi_{J,0} + \varphi'_J + \varphi''_J. \end{aligned} \quad (581)$$

Die Stabdrehwinkel ψ_c setzen sich aus zwei, die Knotendrehwinkel φ_J aus drei Anteilen zusammen. Die Anteile $\psi_{c,0}$ sind unabhängig voneinander und durch bekannte Größen bestimmt. Dasselbe gilt von den Anteilen $\varphi_{J,0}$. Sie bilden einen Teil der ersten Näherung ψ_c, φ_J , welche aus $\psi_{c,0}, \varphi_{J,0}$ und geschätzten oder angenommenen Werten φ_J entsteht und zu neuen Werten ψ_c, φ_J führt. Die Reihenfolge der einzelnen Schritte ist nach der Bestimmung der Konstanten $\psi_{c,0} = -a_{c0}/a_{cc}$, $\varphi_{J,0} = -(a_{J0} + \sum \psi_{c,0} a_{Jc})/a_{JJ}$ durch die folgenden vier Bedingungen vorge-schrieben:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_c &= -\frac{\sum \varphi_J a_{cJ}}{a_{cc}}, & \varphi'_J &= -\frac{\sum \varphi_K a_{JK}}{a_{JJ}}, & \varphi''_J &= -\frac{\sum \psi'_c a_{Jc}}{a_{JJ}}, \\ \varphi_J &= \varphi_{J,0} + \varphi'_J + \varphi''_J. \end{aligned} \right\} \quad (582)$$

Bei der Iteration ist der Abschnitt 30 zu beachten. Die Ergebnisse für die unabhängigen Komponenten ψ_c, φ_J aus der letzten Näherungsfolge müssen die statischen Bedingungen (578), (579) oder gleichwertige Ansätze für das Gleichgewicht von Schnittkräften erfüllen.

Bei symmetrischer Belastung sind die Stabdrehwinkel ψ_c und daher auch die Anteile φ''_J der Knotendrehwinkel Null. Sie sind aber auch bei unsymmetrischer senkrechter Belastung so klein, daß sie vernachlässigt werden können.

Die Belastung durch Wind darf bei der Unsicherheit der Druckverteilung stets durch Einzellasten ersetzt werden, die an den Stabknoten des luvseitigen Pfostens oder der luv- und leeseitigen Pfosten angreifen. Die Momente M_{j0}^{ψ} sind in diesem Falle Null. Bei symmetrischer Temperaturänderung eines symmetrischen Tragwerks ist die waagerechte Verschiebung der Querschnitte der Symmetrieachse Null. Die Berechnung bleibt daher auf die Knotendrehwinkel beschränkt. Ähnliche Vereinfachungen verkürzen auch die umfangreiche Berechnung der waagrecht liegenden, mehrreihigen Silorahmen, da die Stabdrehwinkel hier durch die Belastung entweder Null sind oder mit großer Annäherung zu Null angenommen werden können (Abschn. 53).

Mann, L.: Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. Berlin 1927. — Takabeya, F.: Rahmentafeln. Berlin 1930. — Engesser, F.: Der Stockwerkrahmen. Eisenbau 1920, S. 81.

41. Stabwerke mit geraden und gekrümmten Stabachsen.

Der Ansatz wird auf symmetrische, beiderseits eingespannte Stabbogen beschränkt, um das Wesentliche der Rechnung hervorheben zu können. Die Erweiterung auf andere Stabformen bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

Die bezogenen Längenänderungen ϵ_k der geraden Stäbe l_k sind wie in Abschn. 39 Null oder geometrisch bestimmt (ϵ_{k0}), dagegen ändern die Stabzugsehnen l_h durch Belastung und andere Ursachen ihre Länge um den Betrag $\epsilon_h l_h = \Delta l_h^*$. Er besteht aus einem geometrisch bestimmten Teil Δl_{h0} und einem geometrisch unbestimmten, von den Anschlußkräften abhängigen Teile Δl_h ($\Delta l_h^* = \Delta l_{h0} + \Delta l_h$). Der Verschiebungszustand des Stabwerks enthält daher $(3r + 2r_1 - s_1)$ voneinander unab-

hängige unbekannte Komponenten. Dasselbe gilt von der kinematisch äquivalenten Knotenpunktfigur. Diese zählt $(3r + 2r_1 - s_1)$ Freiheitsgrade und wird zur Untersuchung wiederum durch eine kinematisch äquivalente Knotenkette ersetzt, deren Stablängen $l_h (1 + \varepsilon_h)$ ebenso wie deren Knoten- und Stabdrehwinkel φ_J, ϑ_h beliebige Größen annehmen können. Um der Knotenkette diese kinematischen Eigenschaften beizulegen, werden nicht nur die Anschlußmomente $M_J^{(h)}$, sondern auch die Längskräfte N_h der s_2 gekrümmten Stäbe im Symmetriepunkt T_h als äußere Kräfte betrachtet, so daß nicht nur der Stabanschluß am Knoten unabhängig vom Gleichgewicht der äußeren Kräfte frei drehbar sein, sondern auch der stetige Zusammenhang des Stabes im Scheitel nach Abb. 322 durch eine Führung ersetzt werden kann. Die Knotenkette besitzt dann $r + f_1 + s_2^* = r + f$ Freiheitsgrade. Der Verschiebungszustand ist durch r Knotendrehwinkel φ_J und f voneinander unabhängige Komponenten ψ_c bestimmt. Hierfür lassen sich einzelne Stabdrehwinkel ϑ_h , die Längenänderungen Δl_h einzelner Stabzugsehn (h) und Punktverschiebungen u_J verwenden. Sie werden aus $(r + f)$ statischen Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte $M_J, \mathfrak{P}_h, M_J^{(h)}, N_h$ der Knotenkette berechnet.

Die Knotenkette vermag $(r + f)$ voneinander unabhängige Bewegungen Γ_J, Γ_c auszuführen. Sie wird dabei mit den Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_J = 1$ oder $\dot{\psi}_c = 1$ usw. angetrieben. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten gelten dann r Gleichungen von der Form

$$\delta A_J = 0 = \sum a_{JK} \varphi_K + \sum a_{Jc} \psi_c + a_{J0}, \quad (J = A \dots N) \quad (583)$$

und f Gleichungen von der Form

$$\delta A_c = 0 = \sum a_{cJ} \varphi_J + \sum a_{cb} \psi_b + a_{c0}, \quad (c = 1 \dots f). \quad (584)$$

Die Vorzahlen a_{JK}, a_{Jc}, a_{cb} der unbekanntenen Komponenten φ_J, ψ_c und die Belastungszahlen a_{J0}, a_{c0} bedeuten virtuelle Arbeiten. Der erste Index bezeichnet die Art des zwangläufigen Gebildes und dessen Geschwindigkeitszustand $\dot{\varphi}_J = 1, \dot{\psi}_c = 1$, der zweite die Ursache der Anschlußkräfte, welche in jedem Summanden virtuelle Arbeit leisten. Demnach sind a_{J0}, a_{c0} die virtuellen Arbeiten bei der Bewegung $\dot{\varphi}_J = 1$ oder $\dot{\psi}_c = 1$ der Knotenkette aus der Belastung \mathfrak{P} und den Anschlußkräften $M_{J0}^{(h)}, N_{h0}$ des geometrisch bestimmten Hauptsystems ($\varphi_J = 0, \psi_c = 0$) aus den äußeren Ursachen. Diese bestehen aus der Belastung \mathfrak{P}_h der Stäbe, den Stabdrehwinkeln ϑ_{h0} und den Längenänderungen Δl_{h0} der Stabzugsehn durch Temperaturwechsel ($\alpha_t l_h$) und vorgeschriebene Stützenverschiebungen Δ_E . Die virtuellen Arbeiten a_{JK}, a_{Jc} entstehen bei der Bewegung $\dot{\varphi}_J = 1$ aus den Anschlußkräften des Hauptsystems $M_{JK}^{(h)}, N_{hK}$ durch $\varphi_K = 1$ oder $M_{Jc}^{(h)}, N_{hc}$ durch $\psi_c = 1$. Ebenso werden a_{cJ}, a_{cb} aus dem Bewegungszustand $\dot{\psi}_c = 1$ und den Anschlußkräften des Hauptsystems $M_{cJ}^{(h)}, N_{hJ}$ aus $\varphi_J = 1$ oder $M_{c0}^{(h)}, N_{hc}$ aus $\psi_c = 1$ gebildet. Die Anschlußkräfte aus den verschiedenen Ursachen $\mathfrak{P}_h, \varphi_J, \psi_c$ sind auf S. 310 entwickelt und für l_h in der folgenden Superposition zusammengefaßt worden:

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} + \varphi_J M_{JJ}^{(h)} + \varphi_K M_{JK}^{(h)} + \vartheta_h M_{J\vartheta}^{(h)} + \Delta l_h M_{JA}^{(h)}, \\ M_J^{(h)} &= M_{J0}^{(h)} - \Delta l_{h0} \frac{y_0}{\delta_{11}} - \vartheta_{h0} \frac{l_h^2}{2\delta_{22}} + \varphi_J \left(\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}} \right) \\ &\quad + \varphi_K \left(-\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}} \right) - \sum \psi_c \left(\vartheta_{hc} \frac{l_h^2}{2\delta_{22}} + \Delta l_{hc} \frac{y_0}{\delta_{11}} \right), \end{aligned} \right\} (585)$$

$$\left. \begin{aligned} M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \varphi_J M_{KJ}^{(h)} + \varphi_K M_{KK}^{(h)} + \vartheta_h M_{K\vartheta}^{(h)} + \Delta l_h M_{KA}^{(h)}, \\ M_K^{(h)} &= M_{K0}^{(h)} + \Delta l_{h0} \frac{y_0}{\delta_{11}} - \vartheta_{h0} \frac{l_h^2}{2\delta_{22}} + \varphi_J \left(-\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}} \right) \\ &\quad + \varphi_K \left(\frac{y_0^2}{\delta_{11}} + \frac{l_h^2}{4\delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}} \right) - \sum \psi_c \left(\vartheta_{hc} \frac{l_h^2}{2\delta_{22}} - \Delta l_{hc} \frac{y_0}{\delta_{11}} \right), \end{aligned} \right\} (586)$$

$$\left. \begin{aligned} N_h &= N_{h0} + \varphi_J N_{hJ} + \varphi_K N_{hK} + \Delta l_h N_{hd}, \\ N_h &= -X_1 = N_{h0} + \frac{\Delta l_{h0}}{\delta_{11}} - \varphi_J \frac{y_0}{\delta_{11}} + \varphi_K \frac{y_0}{\delta_{11}} + \sum \psi_c \Delta l_{hc} \frac{1}{\delta_{11}}, \\ \Delta l_{h0} &= \bar{\Delta} l_{h0} - E J_c \alpha_t t l_h. \end{aligned} \right\} \quad (587)$$

Unsymmetrische Bogenstellung. Die Stabendmomente $M^{(h)}$ und die Längskräfte N_h im Scheitel der gekrümmten Stäbe (Abb. 322) werden als äußere Kräfte angesehen, so daß eine Knötenkette mit 11 Stabelementen entsteht. Dieser wird das geometrisch bestimmte Hauptsystem zugeordnet.

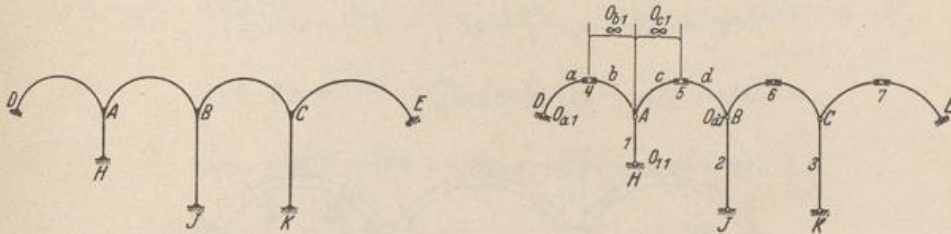


Abb. 322.

Anzahl der Knoten und Stäbe $r = 3, r_1 = 0, s = 7, s_1 = 3, s_2 = 4$. Geometrisch überzählige Stäbe $m = 1$, daher $f_1 = 2 \cdot 3 - (7 - 1) = 0, s_2^* = 4 - 1 = 3$ (vgl. S. 314). Anzahl der Unbekannten $r = 3, f = s_2^* + f_1 = 3$.

Als unabhängige Komponenten des Verschiebungszustandes werden neben den Knotendrehwinkeln $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ die Stabdrehwinkel der drei Pfosten $\psi_1 = \vartheta_1, \psi_2 = \vartheta_2, \psi_3 = \vartheta_3$ ausgewählt. Die sechs statischen Bedingungen, welche diese erfüllen müssen, ergeben sich mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen aus $\delta A_J = 0, \delta A_C = 0$ für $\varphi_A = 1, \varphi_B = 1, \varphi_C = 1, \psi_1 = 1, \psi_2 = 1, \psi_3 = 1$. Die Kette Γ_1 besteht aus den Stäben 1, a, b, c, d, deren Hauptpole (b), (c) im Unendlichen liegen und deren Hauptpole (a), (1), (d) mit den Punkten D, H und B zusammenfallen. Dabei verschieben sich die Stabelemente b, c waagrecht mit der Geschwindigkeit \dot{h}_1 . Die Stäbe a und d bleiben in Ruhe. Der Bewegungszustand der Ketten Γ_2 mit $\dot{\psi}_2 = 1$ und Γ_3 mit $\dot{\psi}_3 = 1$ ist ähnlich. Die Gleichgewichtsbedingungen bilden die folgende Matrix:

	φ_A	φ_B	φ_C	ψ_1	ψ_2	ψ_3	a_0
$\dot{\varphi}_A$	a_{AA}	a_{AB}		a_{A1}	a_{A2}		a_{A0}
$\dot{\varphi}_B$	a_{BA}	a_{BB}	a_{B0}	a_{B1}	a_{B2}	a_{B3}	a_{B0}
$\dot{\varphi}_C$		a_{CB}	a_{CC}		a_{C2}	a_{C3}	a_{C0}
$\dot{\psi}_1$	a_{1A}	a_{1B}		a_{11}	a_{12}		a_{10}
$\dot{\psi}_2$	a_{2A}	a_{2B}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{20}
$\dot{\psi}_3$		a_{3B}	a_{30}		a_{32}	a_{33}	a_{30}

Bogenstellung mit drei Öffnungen nach Abb. 323.

1. Überzählige Größen. Der den Pfeilerköpfen benachbarte Bereich der Gewölbe wird wegen seiner großen Steifigkeit als starr angenommen, so daß die Scheibenkette (Abb. 324) mit den Parametern $\varphi_A, \varphi_B, \psi_1 = \vartheta_1, \psi_2 = \vartheta_2$ und das ihr zugeordnete Hauptsystem B nach S. 311 der Berechnung zugrunde gelegt wird.

$$M_K^{(h)} = M_{K0}^{(h)} - \vartheta_{h0} \frac{c_4}{l} + \Delta l_{h0} \frac{c_3}{l^2} + \varphi_J \left(\frac{c_2}{l} - \vartheta_{hJ} \frac{c_4}{l} + \Delta l_{hJ} \frac{c_3}{l^2} \right) + \varphi_K \left(\frac{c_1}{l} - \vartheta_{hK} \frac{c_4}{l} + \Delta l_{hK} \frac{c_3}{l^2} \right) + \sum \psi_c \left(-\vartheta_{hc} \frac{c_4}{l} + \Delta l_{hc} \frac{c_3}{l^2} \right) \quad (b)$$

$$N_h = N_{h0} + \Delta l_{h0} \frac{c_5}{l^3} + \varphi_J \left(-\frac{c_3}{l^2} + \Delta l_{hJ} \frac{c_5}{l^3} \right) + \varphi_K \left(\frac{c_3}{l^2} + \Delta l_{hK} \frac{c_5}{l^3} \right) + \sum \psi_c \cdot \Delta l_{hc} \frac{c_5}{l^3} \quad (c)$$

Berechnung der Koeffizienten c mit Hilfe der Tabelle 16

$$l = 17,8 \text{ m}, \quad f = 5,25 \text{ m}, \quad r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = 10,168810 \text{ m}, \quad e = r - f = 4,918810 \text{ m},$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{l}{2r} = 0,875225, \quad \varphi_0 = 61^\circ 04' 17,8'', \quad b = 2 \varphi_0 \cdot r = 21,6777 \text{ m} = b',$$

$$y_0 = \int_0^b y \frac{J_c}{J} ds : \int_0^b \frac{J_c}{J} ds = r \left(\frac{l}{b} - \frac{e}{r} \right) = 3,43101 \text{ m},$$

$$\delta_{11} = y_0^2 b' - 2 y_0 r \left(\frac{l}{b} - \frac{e}{r} \right) b' + \frac{r^2}{2} \left(1 + 2 \frac{e^2}{r^2} - 3 \frac{e}{r} \frac{l}{b} \right) = b' \left[\frac{r^2}{2} \left(1 + 2 \frac{e^2}{r^2} - 3 \frac{e}{r} \frac{l}{b} \right) - y_0^2 \right] = 54,584,$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{r^2}{l^2} - 2 \frac{e r}{b l} \right) b' - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \left(1 - 2 \frac{r^2}{l^2} + 2 \frac{e r}{b l} \right) b' = \frac{r l}{2} \left(\frac{r}{l} - \frac{e}{b} \right) b' = 675,62,$$

$$\delta_{33} = b' = 21,678,$$

$$c_1 = +6,7471, \quad c_2 = -2,5733, \quad c_3 = +19,916, \quad c_4 = +4,1738, \quad c_5 = 103,32.$$

3. Anschlußkräfte der Pfeiler (Abb. 325.) Nach S. 308 ist

$$M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)} + \beta_{11} \varphi_J + \beta_{12} \varphi_K - (\beta_{11} + \beta_{12}) \vartheta_h,$$

$$M_K^{(h)} = M_{K0}^{(h)} + \beta_{21} \varphi_J + \beta_{22} \varphi_K - (\beta_{21} + \beta_{12}) \vartheta_h.$$

Die Vorzeichen β_{ik} werden durch numerische Integration nach Simpson berechnet.

$$\beta_{11} = \frac{\delta_{22}}{D}, \quad \beta_{12} = -\frac{\delta_{12}}{D}, \quad \beta_{22} = \frac{\delta_{11}}{D}, \quad D = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2.$$

a) Linker Pfeiler

$$\delta_{11} = l_\sigma \int_0^1 \xi'^2 \frac{J_c}{J} d\xi, \quad \delta_{12} = -l_\sigma \int_0^1 \xi \xi' \frac{J_c}{J} d\xi, \quad \delta_{22} = l_\sigma \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi, \quad J_c = 0,144 \text{ m}^4.$$

$$J = J_1 \left[1 + \left(\sqrt[3]{J_2/J_1} - 1 \right) \xi \right]^3 = 0,2287 (1 + 1,104 \xi)^3.$$

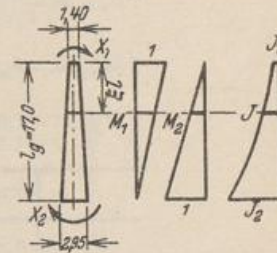


Abb. 325.

ξ	J	J_c/J	k	$\xi \xi' J_c/J$	$k \xi \xi' J_c/J$	$\xi^2 J_c/J$	$k \cdot \xi^2 J_c/J$	$\xi'^2 J_c/J$	$k \cdot \xi'^2 J_c/J$
0,0	0,2287	0,6296	1	0	0	0	0	0,6296	0,6296
1	0,3131	0,4599	4	0,04139	0,1656	0,00460	0,0184	0,3725	1,4900
2	0,4161	0,3461	2	0,05538	0,1107	0,01384	0,0277	0,2215	0,4430
3	0,5395	0,2691	4	0,05651	0,2260	0,02422	0,0969	0,1319	0,5276
4	0,6852	0,2101	2	0,05042	0,1008	0,03362	0,0672	0,0756	0,1512
5	0,8550	0,1684	4	0,04210	0,1684	0,04210	0,1684	0,0421	0,1684
6	1,0507	0,1371	2	0,03290	0,0658	0,04936	0,0987	0,0219	0,0438
7	1,2742	0,1130	4	0,02373	0,0949	0,05537	0,2215	0,0102	0,0408
8	1,5274	0,0943	2	0,01509	0,0302	0,06035	0,1207	0,0038	0,0076
0,9	1,8121	0,0795	4	0,00716	0,0286	0,06440	0,2576	0,0008	0,0032
1,0	2,1301	0,0676	1	0	0	0,06760	0,0676	0	0
					0,9910		1,1447		3,5052

$$\delta_{11} = + \frac{l_g/10}{3} 3,5052 = +1,986, \quad \delta_{22} = + \frac{l_g/10}{3} 1,1447 = +0,649,$$

$$\delta_{12} = - \frac{l_g/10}{3} 0,9910 = -0,561,$$

$$\beta_{11} = +0,666, \quad \beta_{12} = +0,576, \quad \beta_{22} = +2,039,$$

$$\beta_{11} + \beta_{12} = +1,242, \quad \beta_{22} + \beta_{12} = +2,615.$$

Damit wird

$$M_A^{(g)} = M_{A0}^{(g)} + 0,666 \varphi_A + 0,576 \varphi_E - 1,242 \vartheta_g,$$

$$M_E^{(g)} = M_{E0}^{(g)} + 2,039 \varphi_E + 0,576 \varphi_A - 2,615 \vartheta_g.$$

b) Rechter Pfeiler. Auf gleiche Weise ergibt sich für den rechten Pfeiler

$$M_B^{(h)} = M_{B0}^{(h)} + 0,567 \varphi_B + 0,555 \varphi_F - 1,122 \vartheta_h,$$

$$M_F^{(h)} = M_{F0}^{(h)} + 2,253 \varphi_F + 0,555 \varphi_B - 2,808 \vartheta_h.$$

4. Anschlußkräfte infolge der Überzähligen. In der folgenden Tabelle sind die Werte ϑ und $\Delta l/l$, ferner die Anschlußkräfte infolge $\varphi_A = 1$, $\varphi_B = 1$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 1$ zusammengestellt. Sie ergeben sich unmittelbar aus den Formeln (a) bis (c). Z. B. ist:

$$\vartheta_{3A} = -1_A \frac{d}{l} = -0,061798, \quad \frac{\Delta l_{4A}}{l} = -1_A \frac{h}{l} = -0,182584,$$

$$\frac{\Delta l_{31}}{l} = 1_1 \frac{h_g}{l} = +0,955056.$$

$$l M_{AA}^{(b)} = c_1 - \vartheta_{3A} c_4 + \frac{\Delta l_{3A}}{l} c_3 = c_1 + \frac{d}{l} c_4 + \frac{h}{l} c_3 = +10,6413,$$

$$l N_{5B} = \frac{1}{l} \left(-c_3 + \frac{\Delta l_{5B}}{l} c_5 \right) = \frac{1}{l} \left(-c_3 - \frac{h}{l} c_5 \right) = -2,1787,$$

$$l M_{A1}^{(c)} = -\vartheta_{41} c_4 - \frac{\Delta l_{41}}{l} c_3 = + \frac{h_g}{l} c_3 = +19,0209,$$

$$l M_{A1}^{(g)} = -1,242 l = -22,1076.$$

	$\varphi_A = 1$	$\varphi_B = 1$	$\psi_1 = 1$	$\psi_2 = 1$
ϑ_g	0	0	1	0
ϑ_h	0	0	0	1
ϑ_3	- 0,061798	0	0	0
ϑ_4	- 0,061798	- 0,061798	0	0
ϑ_5	0	- 0,061798	0	0
$\Delta l_3/l$	+ 0,182584	0	+ 0,955056	0
$\Delta l_4/l$	- 0,182584	+ 0,182584	- 0,955056	+ 1,292135
$\Delta l_5/l$	0	- 0,182584	0	- 1,292135
$l M_D^{(a)}$	5,9517	0	- 19,0209	0
$l N_3$	+ 2,1787	0	+ 5,5436	0
$l M_A^{(b)}$	+ 10,6413	0	+ 19,0209	0
$l M_A^{(g)}$	+ 11,8548	0	- 22,1076	0
$l M_E^{(g)}$	+ 10,2528	0	- 46,5470	0
$l M_A^{(c)}$	+ 10,6413	- 5,9517	+ 19,0209	- 25,7342
$l N_4$	- 2,1787	+ 2,1787	- 5,5436	+ 7,5002
$l M_B^{(d)}$	- 5,9517	+ 10,6413	- 19,0209	+ 25,7342
$l M_B^{(h)}$	0	+ 10,0926	0	- 19,9716
$l M_F^{(h)}$	0	+ 9,8790	0	- 49,824
$l M_E^{(e)}$	0	+ 10,6413	0	+ 25,7342
$l N_5$	0	- 2,1787	0	- 7,5000
$l M_D^{(f)}$	0	- 5,9517	0	- 25,7342

5. Vorzahlen der Bedingungsgleichungen und β -Vorzahlen

$$l a_{AA} = -\dot{i}_A (l M_{AA}^{(b)} + l M_{AA}^{(g)} + l M_{AA}^{(c)}) - 0,061798 (l M_{0A}^{(c)} + l M_{AA}^{(b)} + l M_{AA}^{(c)} + l M_B^{(d)}) + 0,182584 \cdot 17,8 (-l N_{3A} + l N_{4A})$$

$$= -33,137 - 0,580 - 14,161 = -47,88,$$

$$l a_{AB} = +12,74, \quad l a_{A1} = -51,97, \quad l a_{A2} = +50,11,$$

$$l a_{BB} = -\dot{i}_B (l M_{BB}^{(d)} + l M_{BB}^{(h)} + l M_{BB}^{(e)}) - 0,061798 (l M_{AB}^{(c)} + l M_{BB}^{(d)} + l M_{BB}^{(e)} + l M_{DB}^{(f)}) + 0,182584 \cdot 17,8 (-l N_{4B} + l N_{5B})$$

$$= -31,375 - 0,580 - 14,161 = -46,12,$$

$$l a_{B1} = +37,04, \quad l a_{B2} = -80,25,$$

$$l a_{11} = \dot{i}_1 (l M_{A1}^{(g)} + l M_{B1}^{(g)}) + 0,955056 \cdot 17,8 (-l N_{31} + l N_{41})$$

$$= -68,655 - 188,482 = -257,14,$$

$$l a_{12} = +127,50, \quad l a_{22} = -414,97.$$

l fache Vorzahlen der Bedingungsgleichungen

	φ_A	φ_B	ψ_1	ψ_2
A	- 47,88	+ 12,74	- 51,97	+ 50,11
B	+ 12,74	- 46,12	+ 37,04	- 80,25
1	- 51,97	+ 37,04	- 257,14	+ 127,50
2	+ 50,11	- 80,25	+ 127,50	- 414,97

$$\text{Vorzahlen } \beta' = \frac{1000}{l} \beta$$

	A	B	1	2
φ_A	- 28,04226	- 0,91125	+ 4,65360	- 1,78022
φ_B	- 0,91125	- 33,47763	- 1,74904	+ 5,82672
ψ_1	+ 4,65360	- 1,74904	- 5,46810	- 0,77989
ψ_2	- 1,78022	+ 5,82672	- 0,77989	- 3,99122

Eine beliebige Belastung führt mit den Absolutgliedern a_{K0} zu den Überzähligen $\varphi_A, \varphi_B, \psi_1, \psi_2$ z. B.

$$\varphi_A = -\frac{l}{1000} (\beta'_{AA} \cdot a_{A0} + \beta'_{AB} \cdot a_{B0} + \beta'_{A1} \cdot a_{10} + \beta'_{A2} \cdot a_{20}).$$

Die Stabendmomente und die Längskräfte in den Bogenscheiteln werden mit den Angaben der Tabelle auf S. 352 aus

$$M_J^{(h)} = M_{J0}^{(h)} + \varphi_A M_{JA}^{(h)} + \varphi_B M_{JB}^{(h)} + \psi_1 M_{J1}^{(h)} + \psi_2 M_{J2}^{(h)}$$

erhalten.

6. Einflußlinie des Momentes $M_A^{(e)}$

$$M_A^{(e)} = M_{A0}^{(e)} + \varphi_A \cdot M_{AA}^{(e)} + \varphi_B \cdot M_{AB}^{(e)} + \psi_1 \cdot M_{A1}^{(e)} + \psi_2 \cdot M_{A2}^{(e)} = M_{A0}^{(e)} + M_{A*}^{(e)}.$$

Abgesehen von dem ersten Glied, der Einflußlinie im geometrisch bestimmten Hauptsystem, stellen die einzelnen Glieder die mit konstanten Zahlenwerten erweiterten Einflußlinien der Überzähligen dar. Die Einflußlinie φ_A ist die Biegelinie infolge $M_A = 1$, die Einflußlinie ψ_1 ist die Biegelinie infolge zweier Kräfte $1/l_g$ an den Knoten A und E. Der Anteil $M_{A*}^{(e)}$ ergibt sich also

als die Biegelinie des Lastgurtes infolge der Lasten $M_A = M_{AA}^{(e)}$, $M_B = M_{AB}^{(e)}$, $M_D = M_{AD}^{(e)}$, $M_h = M_{A2}^{(e)}$. Belastungsglieder hierfür:

$$l a_{A0} = l M_A = +10,6413, \quad l a_{B0} = l M_B = -5,9517, \\ l a_{10} = l M_D = +19,0209, \quad l a_{20} = l M_h = -25,7342.$$

Überzählige:

$$\varphi_{A,Ae}^* = -\frac{1}{1000} (-28,04226 \cdot 10,6413 + 0,91125 \cdot 5,9517 + 4,65360 \cdot 19,0209 \\ + 1,78022 \cdot 25,7342) = +0,158654,$$

$$\varphi_{B,Ae}^* = -0,006338, \quad \varphi_{1,Ae}^* = +0,024008, \quad \varphi_{2,Ae}^* = -0,034253$$

Anschlußkräfte

$M_{C,Ae}^{(e)}$	- 0,0787031	$M_{A,Ae}^{(e)}$	+ 0,1721424	$M_{B,Ae}^{(e)}$	- 0,0533119
$N_{3,Ae}$	+ 0,0268961	$N_{4,Ae}$	- 0,0421047	$N_{5,Ae}$	+ 0,0152086
$M_{A,Ae}^{(b)}$	+ 0,1205022	$M_{B,Ae}^{(d)}$	- 0,1320131	$M_{D,Ae}^{(f)}$	+ 0,0516402

Die Biegelinie $M_{A*}^{(e)}$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Verschiebung der Bogensehnen und Verschiebungen relativ zu den Bogensehnen. Diese werden durch Verwendung der Biegelinien η_1 , η_2' , η_2 infolge der in Abb. 326 angegebenen Belastungen erhalten. Die Biegelinien sind mit den Formeln der Tabelle 16 berechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

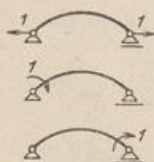


Abb. 326.

x	η_1	η_2'	η_2
0	0	0	0
1,78	+ 64,340	+ 10,7037	- 5,6918
3,56	+ 117,744	+ 17,3690	- 11,0942
5,34	+ 157,898	+ 20,9931	- 15,6826
7,12	+ 182,540	+ 22,2356	- 19,2557
8,90	+ 190,834	+ 21,5398	- 21,5398
10,68	+ 182,540	+ 19,2557	- 22,2356
12,46	+ 157,898	+ 15,6826	- 20,9931
14,24	+ 117,744	+ 11,0942	- 17,3690
16,02	+ 64,340	+ 5,6918	- 10,7037
17,80	0	0	0

Bereich 3:

$$M_{A*}^{(e)} = -d \varphi_{A,Ae}^* \cdot \xi + M_{C,Ae}^{(e)} \cdot \eta_2' + M_{A,Ae}^{(b)} \cdot \eta_2 + N_{3,Ae} \cdot \eta_1 \\ = -0,174519 \xi - 0,078703 \eta_2' + 0,120502 \eta_2 + 0,026896 \eta_1.$$

Bereich 4:

$$M_{A*}^{(e)} = +d \varphi_{A,Ae}^* \cdot \xi' - d \varphi_{B,Ae}^* \cdot \xi + M_{A,Ae}^{(e)} \cdot \eta_2' + M_{B,Ae}^{(d)} \cdot \eta_2 + N_{4,Ae} \cdot \eta_1 \\ = +0,174519 \xi' + 0,006972 \xi + 0,172142 \eta_2' - 0,130013 \eta_2 - 0,042105 \eta_1.$$

Bereich 5:

$$M_{A*}^{(e)} = +d \varphi_{B,Ae}^* \cdot \xi' + M_{B,Ae}^{(e)} \cdot \eta_2' + M_{D,Ae}^{(f)} \cdot \eta_2 + N_{5,Ae} \cdot \eta_1 \\ = -0,006972 \xi' - 0,053312 \eta_2' + 0,051640 \eta_2 + 0,015209 \eta_1.$$

Die Einflußlinie $M_{A0}^{(e)}$ ist die Einflußlinie für das starr eingespannte Gewölbe, erstreckt sich also nur über den Bereich 4. Für das Hauptssystem Abb. 288 ($J \equiv A$) ist

$$M_{A0}^{(e)} = X_1 \cdot y_0 - X_2 \cdot l/2 + X_3 \\ = \frac{\delta_{1m}}{\delta_{11}} y_0 - \frac{\delta_{2m}}{\delta_{22}} \frac{l}{2} + \frac{\delta_{3m}}{\delta_{33}}.$$

Die Verwendung der Funktionen η_1 , η_2 , η_2' führt zu

$$\delta_{1m} = \eta_1 - y_0 (\eta_2' - \eta_2), \quad \delta_{2m} = \frac{l}{2} (\eta_2' + \eta_2), \quad \delta_{3m} = -(\eta_2' - \eta_2),$$

und mit einer einfachen Umrechnung zu

$$\begin{aligned} M_{A0}^{(c)} &= \frac{c_3}{l^2} \eta_1 - \frac{c_1}{l} \eta_2' - \frac{c_2}{l} \eta_2 \\ &= 0,062858 \eta_1 - 0,379051 \eta_2' + 0,144567 \eta_2. \end{aligned}$$

Die Ordinaten der Einflußlinie $M_A^{(c)}$ sind in Abb. 327 aufgetragen.

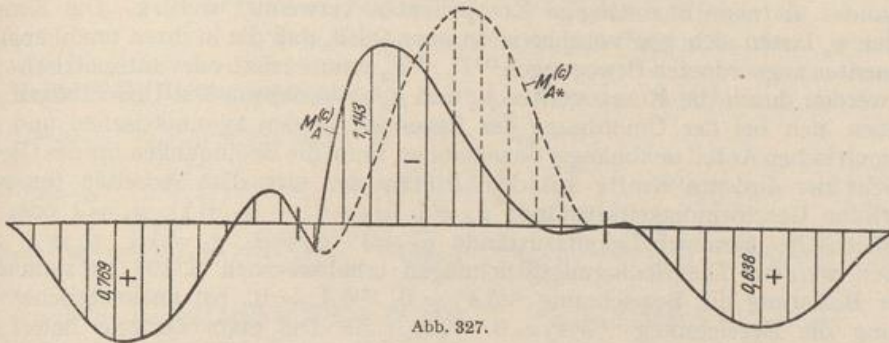


Abb. 327.

42. Symmetrie des Tragwerks.

Die geometrischen und elastischen Eigenschaften zahlreicher Tragwerke können auf Symmetrieachsen bezogen werden, so daß symmetrische Kraftwirkungen auch symmetrische Verschiebungszustände, antimetrische Kraftwirkungen antimetrische Verschiebungszustände erzeugen. Die Anzahl der unbekannteren unabhängigen Komponenten ist dann wesentlich kleiner, so daß die Rechnung vereinfacht und abgekürzt wird (Abschn. 27).

Die symmetrisch zugeordneten Knoten- und Stabdrehwinkel sind bei Antimetrie der Belastung gleich groß, bei Symmetrie entgegengesetzt gleich. Die Symmetriepunkte des Tragwerks erfahren bei Antimetrie der Belastung keine Verschiebung in Richtung der Symmetrieachse, während bei Symmetrie der Belastung nicht nur die Knotendrehwinkel und die waagerechten Verschiebungen der Querschnitte der Symmetrieachse Null sind, sondern auch die Drehwinkel derjenigen Stäbe, welche die Symmetrieachse unter 90° schneiden oder mit ihr zusammenfallen. Sind die Längenänderungen der Stäbe Null, so gilt das gleiche oft auch von allen anderen Stabdrehwinkeln. Das geometrische Bild ist daher bei Symmetrie der Belastung durch eine kleinere Anzahl von unbekannteren Komponenten bestimmt als bei Antimetrie. Für den Spannungszustand gilt das Gegenteil, so daß die Untersuchung je nach der Belastungsform mit der Berechnung der unabhängigen Verschiebungen φ_J , ψ_c oder der statisch unbestimmten Schnittkräfte eingeleitet werden kann.

Eine beliebige Belastung darf nach dem Superpositionsgesetz in zwei oder vier Anteile zerlegt werden, wenn eine oder mehrere Symmetrieachsen vorhanden sind. Jeder Anteil ist zu den Achsen symmetrisch oder antimetrisch, so daß die Verschiebungszustände aus der Spiegelung eines Teilbildes entwickelt werden können. In diesem Falle genügt die Berechnung der unabhängigen Komponenten dieses Abschnittes. Damit ist ein Weg zur vereinfachten Anwendung der Ansätze $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ gezeigt worden.

Die Symmetrie des Tragwerks zu einer oder mehreren Achsen kann bei Umordnung der vorgeschriebenen Belastung zur Bildung von Gruppen unabhängiger, geometrisch zugeordneter Komponenten des Verschiebungszustandes ebenso verwendet werden, wie dies in Abschnitt 28 für statisch unbestimmte Schnittkräfte angegeben worden ist. Der Ansatz entsteht auch hier durch Addition und Subtraktion symmetrisch zugeordneter Bedingungsgleichungen unter Einführung neuer Unbekannter.