Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

42. Symmetrie des Tragwerks

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

und mit einer einfachen Umrechnung zu

$$M_{A0}^{(c)} = \frac{c_3}{l^2}\,\eta_1 - \frac{c_1}{l}\,\eta_2' - \frac{c_2}{l}\,\eta_2$$
$$= 0{,}062858\,\eta_1 - 0\;379051\,\eta_2' + 0{,}144567\,\eta_2\,.$$

Die Ordinaten der Einflußlinie $M_A^{(c)}$ sind in Abb. 327 aufgetragen.

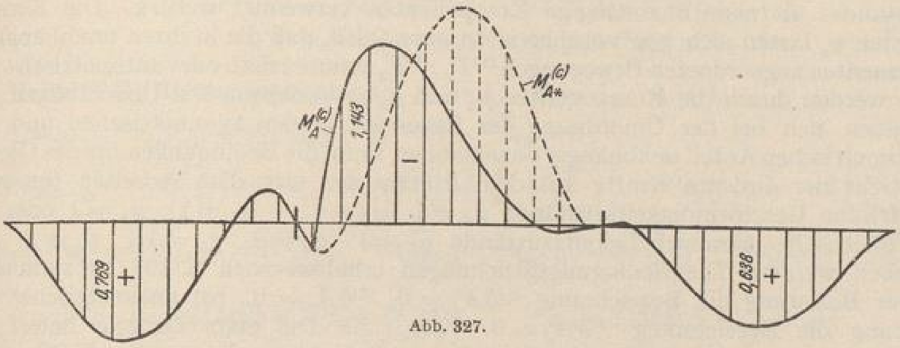


Abb. 327.

42. Symmetrie des Tragwerks.

Die geometrischen und elastischen Eigenschaften zahlreicher Tragwerke können auf Symmetrieachsen bezogen werden, so daß symmetrische Kraftwirkungen auch symmetrische Verschiebungszustände, antimetrische Kraftwirkungen antimetrische Verschiebungszustände erzeugen. Die Anzahl der unbekannten unabhängigen Komponenten ist dann wesentlich kleiner, so daß die Rechnung vereinfacht und abgekürzt wird (Abschn. 27).

Die symmetrisch zugeordneten Knoten- und Stabdrehwinkel sind bei Antimetrie der Belastung gleich groß, bei Symmetrie entgegengesetzt gleich. Die Symmetriepunkte des Tragwerks erfahren bei Antimetrie der Belastung keine Verschiebung in Richtung der Symmetrieachse, während bei Symmetrie der Belastung nicht nur die Knotendrehwinkel und die waagerechten Verschiebungen der Querschnitte der Symmetrieachse Null sind, sondern auch die Drehwinkel derjenigen Stäbe, welche die Symmetrieachse unter 90° schneiden oder mit ihr zusammenfallen. Sind die Längenänderungen der Stäbe Null, so gilt das gleiche oft auch von allen anderen Stabdrehwinkeln. Das geometrische Bild ist daher bei Symmetrie der Belastung durch eine kleinere Anzahl von unbekannten Komponenten bestimmt als bei Antimetrie. Für den Spannungszustand gilt das Gegenteil, so daß die Untersuchung je nach der Belastungsform mit der Berechnung der unabhängigen Verschiebungen φ_J, ψ_c oder der statisch unbestimmten Schnittkräfte eingeleitet werden kann.

Eine beliebige Belastung darf nach dem Superpositionsgesetz in zwei oder vier Anteile zerlegt werden, wenn eine oder mehrere Symmetrieachsen vorhanden sind. Jeder Anteil ist zu den Achsen symmetrisch oder antimetrisch, so daß die Verschiebungszustände aus der Spiegelung eines Teilbildes entwickelt werden können. In diesem Falle genügt die Berechnung der unabhängigen Komponenten dieses Abschnittes. Damit ist ein Weg zur vereinfachten Anwendung der Ansätze $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ gezeigt worden.

Die Symmetrie des Tragwerks zu einer oder mehreren Achsen kann bei Umordnung der vorgeschriebenen Belastung zur Bildung von Gruppen unabhängiger, geometrisch zugeordneter Komponenten des Verschiebungszustandes ebenso verwendet werden, wie dies in Abschnitt 28 für statisch unbestimmte Schnittkräfte angegeben worden ist. Der Ansatz entsteht auch hier durch Addition und Subtraktion symmetrisch zugeordneter Bedingungsgleichungen unter Einführung neuer Unbekannter.

Sind in einem Tragwerk mit **einer** Symmetrieachse die Knotendrehwinkel φ_J, χ_J symmetrisch zugeordnet, so lassen sich diese zu Gruppenbewegungen

$$\mu_J = \frac{\varphi_J - \chi_J}{2}, \qquad \varrho_J = \frac{\varphi_J + \chi_J}{2} \tag{588}$$

zusammenfassen, die bei der Entwicklung des Spannungs- und Verschiebungszustandes als neue unabhängige Komponenten verwendet werden. Die Komponenten ψ_c lassen sich von vornherein so auswählen, daß die in ihren unabhängigen Elementen zugeordneten Bewegungen ${}^{(1)}\Gamma_c$, ${}^{(2)}\Gamma_c$ symmetrisch oder antimetrisch sind. Sie werden durch die Komponenten μ_c und ϱ_c beschrieben. Die Überzähligen μ, ϱ ergeben sich bei der Umordnung der Belastung in den symmetrischen und den antimetrischen Anteil unabhängig voneinander, wenn die Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten für symmetrische Geschwindigkeitszustände $\dot{\mu}_J = 1$ $(\dot{\varphi}_J = 1,\ -\dot{\chi}_J = 1)$, $\dot{\mu}_c = 1$ oder für antimetrische Geschwindigkeitszustände $\dot{\varrho}_J = 1$ $(\dot{\varphi}_J = 1,\ \dot{\chi}_J = 1)$, $\dot{\varrho}_c = 1$ entwickelt werden. Die Bedingungsgleichungen erhalten nach S. 194 bei symmetrischer Belastung die Bezeichnung ${}^{(1)}\delta A_J = 0$, ${}^{(1)}\delta A_c = 0$, bei antimetrischer Belastung die Bezeichnung ${}^{(2)}\delta A_J = 0$, ${}^{(2)}\delta A_c = 0$. Die erste Gruppe liefert die Überzähligen μ_J, μ_c infolge symmetrischer Belastung, die zweite Gruppe die Überzähligen ϱ_J, ϱ_c infolge antimetrischer Belastung. Die Lösung zerfällt daher in zwei voneinander unabhängige Teile. Bei Symmetrie der Belastung ist

$$\mu_J = {}^{(1)}\varphi_J = -{}^{(1)}\chi_J, \tag{589}$$

bei Antimetrie der Belastung

$$\varrho_J = {}^{(2)}\varphi_J = {}^{(2)}\chi_J. \tag{590}$$

Schließlich wird ebenso wie auf S. 195

$$\varphi_J = {}^{(1)}\varphi_J + {}^{(2)}\varphi_J = \mu_J + \varrho_J, \qquad \chi_J = {}^{(1)}\chi_J + {}^{(2)}\chi_J = -\mu_J + \varrho_J. \tag{591}$$

Die Rechenvorschrift stimmt nach Ansatz und Lösung mit Abschnitt 28 überein und kann bei Symmetrie des Tragwerks nach zwei Achsen ebenso wie dort erweitert werden. Selbstverständlich besteht auch die Möglichkeit, durch eine algebraische Transformation der unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes allgemeine Gruppenbewegungen nach Abschnitt 36 zu bilden, die unabhängig voneinander berechnet werden. Die Transformation wird dabei derart festgesetzt, daß die virtuellen Arbeiten a_{JK}, a_{Jc}, a_{bc} Null sind.

Symmetrischer Stockwerkrahmen mit zwei Pfosten. Symmetrisch zugeordnete Knotendrehwinkel φ_J, χ_J; symmetrisch zugeordnete Stabdrehwinkel ϑ_i, ν_i (Abb. 328).

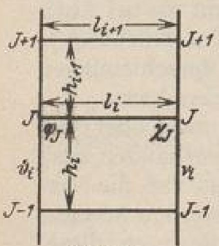


Abb. 328.

Belastung von Pfosten und Riegel; Umordnung der Belastung in den symmetrischen und den antimetrischen Anteil:

$$\left.\begin{aligned} \mu_J &= \frac{\varphi_J - \chi_J}{2}, & \mu_i &= \frac{\vartheta_i - \nu_i}{2} = 0, \\ \varrho_J &= \frac{\varphi_J + \chi_J}{2}, & \varrho_i &= \frac{\vartheta_i + \nu_i}{2} = \psi_i. \end{aligned}\right\} \tag{592}$$

Symmetrischer Anteil:

$$\varrho_J = 0; \qquad \mu_J = {}^{(1)}\varphi_J = -{}^{(1)}\chi_J \neq 0, \qquad \psi_i = {}^{(1)}\vartheta_i = {}^{(1)}\nu_i = 0.$$

Statische Bedingung: Kette ${}^{(1)}\Gamma_J$, Bewegungszustand $\dot{\mu}_J = 1$: $\dot{\varphi}_J = 1$, $-\dot{\chi}_J = 1$.

$${}^{(1)}\delta A_J = \mu_{J-1}\,{}^{(1)}a_{J(J-1)} + \mu_J\,{}^{(1)}a_{JJ} + \mu_{J+1}\,{}^{(1)}a_{J(J+1)} + {}^{(1)}a_{J0} = 0, \tag{593}$$

$${}^{(1)}a_{J(J-1)} = -2\left(\frac{2}{h_i'}\right), \quad {}^{(1)}a_{JJ} = -2\left(\frac{2}{l_i'} + \frac{4}{h_i'} + \frac{4}{h_{i+1}'}\right), \quad {}^{(1)}a_{J(J+1)} = -2\left(\frac{2}{h_{i+1}'}\right),$$

$${}^{(1)}a_{J0} = -2\left(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(\bar{i})} + M_{J0}^{(\overline{i+1})}\right).$$

Antimetrischer Anteil:

$$\mu_J = 0, \qquad \rho_J = {}^{(2)}\varphi_J = {}^{(2)}\chi_J \neq 0, \qquad \psi_i = {}^{(2)}\vartheta_i = {}^{(2)}\nu_i \neq 0.$$

Statische Bedingungen: Kette ${}^{(2)}\Gamma_J$, Bewegungszustand $\varrho_J = 1$: $\dot\varphi_J = 1$, $\dot\chi_J = 1$.

$$\left.\begin{aligned} {}^{(2)}\delta A_J = \varrho_{J-1}\,{}^{(2)}a_{J(J-1)} + \varrho_J\,{}^{(2)}a_{JJ} + \varrho_{J+1}\,{}^{(2)}a_{J(J+1)} \\ + \psi_i\,{}^{(2)}a_{Ji} + \psi_{i+1}\,{}^{(2)}a_{J(i+1)} + {}^{(2)}a_{J0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{594}$$

Kette ${}^{(2)}\Gamma_i$, Bewegungszustand: $\dot\psi_i = 1$, $\dot\vartheta_i = 1$, $\dot\nu_i = 1$.

$${}^{(2)}\delta A_i = \varrho_{J-1}\,{}^{(2)}a_{i(J-1)} + \varrho_J\,{}^{(2)}a_{iJ} + \psi_i\,{}^{(2)}a_{ii} + {}^{(2)}a_{i0} = 0, \tag{595}$$

$${}^{(2)}a_{J(J-1)} = -2\left(\frac{2}{h_i'}\right), \quad {}^{(2)}a_{JJ} = -2\left(\frac{6}{l_i'} + \frac{4}{h_i'} + \frac{4}{h_{i+1}'}\right), \quad {}^{(2)}a_{J(J+1)} = -2\left(\frac{2}{h_{i+1}'}\right),$$

$${}^{(2)}a_{Ji} = {}^{(2)}a_{iJ} = {}^{(2)}a_{i(J-1)} = 2\left(\frac{6}{h_i'}\right), \quad {}^{(2)}a_{J(i+1)} = {}^{(2)}a_{(i+1)J} = 2\left(\frac{6}{h_{i+1}'}\right), \quad {}^{(2)}a_{ii} = -2\left(\frac{12}{h_i'}\right),$$

$${}^{(2)}a_{J0} = -2\left(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(j)} + M_{J0}^{(\overline{i+1})}\right), \qquad {}^{(2)}a_{i0} = 2\left(M_0^{(i)} + h_i \sum_J^N W_K\right).$$

(Die Indizes $(\bar{i})$, $(\overline{i+1})$ bezeichnen die Pfosten, der Index N den obersten Riegel.)

Die Gl. (593) zur Berechnung der Gruppenverschiebungen μ_J sind dreigliedrig. Die Gl. (594) mit den Unbekannten ϱ_J erhalten nach Substitution der unbekannten Komponenten ψ_i aus den Ansätzen (595) für ${}^{(2)}\delta A_i = 0$ dieselbe Form. Sie werden nach Abschnitt 29 aufgelöst. Die Ergebnisse dienen zunächst zur Berechnung von ψ_i, so daß sich die Anschlußmomente für den symmetrischen und für den antimetrischen Belastungsanteil und daraus diejenigen für die vorgeschriebene Belastung angeben lassen.

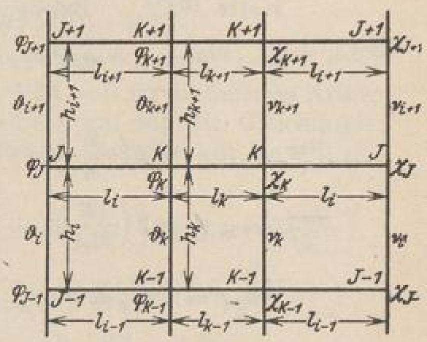


Abb. 329.

Symmetrischer Stockwerkrahmen mit vier Pfosten. Symmetrisch zugeordnete Knotendrehwinkel φ_J, χ_J und φ_K, χ_K, symmetrisch zugeordnete Stabdrehwinkel $\vartheta_i = \vartheta_k$ und $\nu_i = \nu_k$ (Abb. 329).

Belastung der äußeren Pfosten und der Riegel; Umordnung der Belastung in den symmetrischen und den antimetrischen Anteil.

$$\left.\begin{aligned} \mu_J &= \frac{\varphi_J - \chi_J}{2}, & \mu_K &= \frac{\varphi_K - \chi_K}{2}, & \mu_i &= \frac{\vartheta_i - \nu_i}{2} = 0, \\ \varrho_J &= \frac{\varphi_J + \chi_J}{2}, & \varrho_K &= \frac{\varphi_K + \chi_K}{2}, & \varrho_i &= \frac{\vartheta_i + \nu_i}{2} = \psi_i. \end{aligned}\right\} \tag{596}$$

Symmetrischer Anteil: $\varrho_J = 0$, $\quad \mu_J = {}^{(1)}\varphi_J = -{}^{(1)}\chi_J \neq 0$;

$$\varrho_K = 0, \qquad \mu_K = {}^{(1)}\varphi_K = -{}^{(1)}\chi_K \neq 0; \qquad \psi_i = {}^{(1)}\vartheta_i = {}^{(1)}\nu_i = 0.$$

Statische Bedingungen: Kette ${}^{(1)}\Gamma_J$, Bewegungszustand $\dot\mu_J = 1$: $\dot\varphi_J = 1$, $-\dot\chi_J = 1$.

$$\left.\begin{aligned} {}^{(1)}\delta A_J = \mu_{J-1}\,{}^{(1)}a_{J(J-1)} + \mu_J\,{}^{(1)}a_{JJ} + \mu_{J+1}\,{}^{(1)}a_{J(J+1)} \\ + \mu_K\,{}^{(1)}a_{JK} + {}^{(1)}a_{J0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{597}$$

Kette ${}^{(1)}\Gamma_K$, Bewegungszustand $\dot\mu_K = 1$: $\dot\varphi_K = 1$, $-\dot\chi_K = 1$,

$$\left.\begin{aligned} {}^{(1)}\delta A_K = \mu_J\,{}^{(1)}a_{KJ} + \mu_{K-1}\,{}^{(1)}a_{K(K-1)} + \mu_K\,{}^{(1)}a_{KK} \\ + \mu_{K+1}\,{}^{(1)}a_{K(K+1)} + {}^{(1)}a_{K0} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{598}$$

$$ {}^{(1)}a_{JJ} = -2\left(\frac{4}{l_i'} + \frac{4}{h_i'} + \frac{4}{h_{i+1}'}\right), \qquad {}^{(1)}a_{KK} = -2\left(\frac{2}{l_k'} + \frac{4}{l_i'} + \frac{4}{h_k'} + \frac{4}{h_{k+1}'}\right), $$

$$ {}^{(1)}a_{JK} = -2\left(\frac{2}{l_i'}\right), \qquad {}^{(1)}a_{J0} = -2\,(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(\bar{i})} + M_{J0}^{(\overline{i+1})}), $$

$$ a_{K0}^{(1)} = -2\,(M_{K0}^{(i)} + M_{K0}^{(k)} + M_{K0}^{(\bar{k})} + M_{K0}^{(\overline{k+1})}). $$

Die übrigen Vorzahlen erhalten denselben Betrag wie beim Stockwerkrahmen mit zwei Pfosten.

Antimetrischer Anteil: $\mu_J = 0, \quad \varrho_J = {}^{(2)}\varphi_J = {}^{(2)}\chi_J \neq 0;$

$$ \mu_K = 0, \qquad \varrho_K = {}^{(2)}\varphi_K = {}^{(2)}\chi_K \neq 0; \qquad \psi_i = {}^{(2)}\vartheta_i = {}^{(2)}\nu_i \neq 0. $$

Statische Bedingungen: Kette ${}^{(2)}\Gamma_J$, Bewegungszustand $\dot{\varrho}_J = 1$: $\dot{\varphi}_J = 1$, $\dot{\chi}_J = 1$.

$$ \left.\begin{aligned} {}^{(2)}\delta A_J = \varrho_{J-1}\,{}^{(2)}a_{J(J-1)} + \varrho_J\,{}^{(2)}a_{JJ} + \varrho_{J+1}\,{}^{(2)}a_{J(J+1)} + \varrho_K\,{}^{(2)}a_{JK} \\ + \psi_i\,{}^{(2)}a_{Ji} + \psi_{i+1}\,{}^{(2)}a_{J(i+1)} + {}^{(2)}a_{J0} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (599) $$

Kette ${}^{(2)}\Gamma_K$, Bewegungszustand $\dot{\varrho}_K = 1$, $\dot{\varphi}_K = 1$, $\dot{\chi}_K = 1$,

$$ \left.\begin{aligned} {}^{(2)}\delta A_K = \varrho_J\,{}^{(2)}a_{KJ} + \varrho_{K-1}\,{}^{(2)}a_{K(K-1)} + \varrho_K\,{}^{(2)}a_{KK} + \varrho_{K+1}\,{}^{(2)}a_{K(K+1)} \\ + \psi_i\,{}^{(2)}a_{Ki} + \psi_{i+1}\,{}^{(2)}a_{K(i+1)} + {}^{(2)}a_{K0} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (600) $$

Kette ${}^{(2)}\Gamma_i$, Bewegungszustand $\dot{\psi}_i = 1$: $\vartheta_i = 1$, $\nu_i = 1$.

$$ \left.\begin{aligned} {}^{(2)}\delta A_i = \varrho_{J-1}\,{}^{(2)}a_{i(J-1)} + \varrho_J\,{}^{(2)}a_{iJ} + \varrho_{K-1}\,{}^{(2)}a_{i(K-1)} + \varrho_K\,{}^{(2)}a_{iK} \\ + \psi_i\,{}^{(2)}a_{ii} + {}^{(2)}a_{i0} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (601) $$

$$ {}^{(2)}a_{J(J-1)} = -2\left(\frac{2}{h_i'}\right), \qquad {}^{(2)}a_{JJ} = -2\left(\frac{4}{l_i'} + \frac{4}{h_i'} + \frac{4}{h_{i+1}'}\right), $$

$$ {}^{(2)}a_{J(J+1)} = -2\left(\frac{2}{h_{i+1}'}\right), \qquad {}^{(2)}a_{JK} = {}^{(2)}a_{KJ} = -2\left(\frac{2}{l_i'}\right), $$

$$ {}^{(2)}a_{Ji} = {}^{(2)}a_{iJ} = {}^{(2)}a_{i(J-1)} = 2\left(\frac{6}{h_i'}\right), \qquad {}^{(2)}a_{J(i+1)} = \cdot 2\left(\frac{6}{h_{i+1}'}\right), $$

$$ {}^{(2)}a_{J0} = -2\,(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(\bar{i})} + M_{J0}^{(\overline{i+1})}), \qquad {}^{(2)}a_{K(K-1)} = -2\left(\frac{2}{h_k'}\right), $$

$$ {}^{(2)}a_{KK} = -2\left(\frac{4}{l_i'} + \frac{4}{h_k'} + \frac{4}{h_{k+1}'} + \frac{6}{l_k'}\right), \qquad {}^{(2)}a_{K(K+1)} = -2\left(\frac{2}{h_{k+1}'}\right), $$

$$ {}^{(2)}a_{Ki} = {}^{(2)}a_{iK} = {}^{(2)}a_{i(K-1)} = 2\left(\frac{6}{h_k'}\right), \qquad {}^{(2)}a_{K(i+1)} = 2\left(\frac{6}{h_{k+1}'}\right), $$

$$ {}^{(2)}a_{K0} = -2\,(M_{K0}^{(i)} + M_{K0}^{(k)}), \qquad {}^{(2)}a_{ii} = -2\left(\frac{12}{h_i'} + \frac{12}{h_k'}\right), $$

$$ {}^{(2)}a_{i0} = 2\,(M_0^{(\bar{i})} + h_i \sum_J^N W_K). $$

(Die Indizes $(\bar{i})$ $(\overline{i+1})$ bezeichnen die Pfosten, der Index N den obersten Riegel.)

Die Gleichungen (601) werden zur Substitution der unabhängigen Komponenten ψ_i, ψ_{i+1} in den Gleichungen (599) und (600) verwendet. Diese enthalten dann dieselben sechs Gruppenverschiebungen $\varrho_{J-1} \cdots \varrho_{K+1}$. Der antimetrische Teil des Ansatzes besteht also aus sechsgliedrigen Bedingungsgleichungen. Die Gleichungen (597), (598) des symmetrischen Teils verknüpfen vier unbekannte Gruppenverschiebungen μ.

Symmetrischer Stockwerkrahmen mit drei Pfosten. Symmetrisch zugeordnete Knotendrehwinkel φ_J, χ_J, symmetrisch zugeordnete Stabdrehwinkel ϑ_i, ν_i (Abb. 330).

Belastung der äußeren Pfosten und der Riegel. Umordnung der Belastung in den symmetrischen und den antimetrischen Anteil.

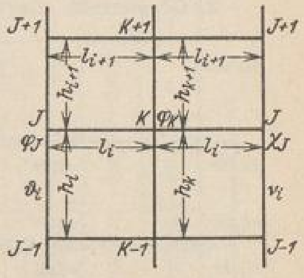


Abb. 330.

$$\left.\begin{aligned} \mu_J &= \frac{\varphi_J - \chi_J}{2}, & \mu_K &= 0, \\ \varrho_J &= \frac{\varphi_J + \chi_J}{2}, & \varrho_K &= 2\,\frac{\varphi_K}{2}, \\ \mu_i &= \frac{\vartheta_i - \nu_i}{2} = 0, & \varrho_i &= \frac{\vartheta_i + \nu_i}{2} = \psi_i. \end{aligned}\right\} \qquad (602)$$

Symmetrischer Anteil: $\varrho_J = 0, \quad \mu_J = {}^{(1)}\varphi_J = -{}^{(1)}\chi_J \neq 0;$

$$\varrho_K = {}^{(1)}\varphi_K = 0, \qquad \psi_i = {}^{(1)}\vartheta_i = {}^{(1)}\nu_i = 0.$$

Die statischen Bedingungen für die äußeren Kräfte an der Kette ${}^{(1)}\Gamma_J$ und den Bewegungszustand $\dot\mu_J = 1$ mit $\dot\varphi_J = 1$, $-\dot\chi_J = 1$ werden nach (597) auf S. 357 angeschrieben.

$${}^{(1)}a_{J(J-1)} = -2\left(\frac{2}{h_i'}\right), \quad {}^{(1)}a_{JJ} = -2\left(\frac{4}{l_i'} + \frac{4}{h_i'} + \frac{4}{h_{i+1}'}\right), \quad {}^{(1)}a_{J(J+1)} = -2\left(\frac{2}{h_{i+1}'}\right),$$

$${}^{(1)}a_{J0} = -2\,(M_{J0}^{(i)} + M_{J0}^{(\bar i)} + M_{J0}^{(i+1)}).$$

Antimetrischer Anteil: $\mu_J = 0, \quad \varrho_J = {}^{(2)}\varphi_J = {}^{(2)}\chi_J \neq 0;$

$$\varrho_K = {}^{(2)}\varphi_K \neq 0, \qquad \psi_i = {}^{(2)}\vartheta_i = {}^{(2)}\nu_i \neq 0.$$

Die statischen Bedingungen ${}^{(2)}\delta A_J = 0$, ${}^{(2)}\delta A_K = 0$, ${}^{(2)}\delta A_i = 0$ für die äußeren Kräfte an den Stabketten ${}^{(2)}\Gamma_J$, ${}^{(2)}\Gamma_K$, ${}^{(2)}\Gamma_i$ erhalten dieselbe Form wie die Gleichungen (599) bis (601) beim Stockwerkrahmen mit vier Pfosten. Dasselbe gilt bis auf die folgenden Angaben auch von deren Vorzahlen:

$${}^{(2)}a_{KK} = -2\left(\frac{4}{l_i'} + \frac{2}{h_k'} + \frac{2}{h_{k+1}'}\right), \quad {}^{(2)}a_{Ki} = {}^{(2)}a_{(K-1)i} = 2\left(\frac{3}{h_k'}\right), \quad a_{K(i+1)} = 2\left(\frac{3}{h_{k+1}'}\right),$$

$${}^{(2)}a_{ii} = -2\left(\frac{12}{h_i'} + \frac{6}{h_k'}\right), \quad {}^{(2)}a_{K0} = -2\,M_{K0}^{(i)}, \quad {}^{(2)}a_{i0} = 2\,(M_0^{(i)} + h_i \sum_J^N W_K).$$

Der Ansatz für den symmetrischen Anteil ist wiederum dreigliedrig, der Ansatz für den antimetrischen Anteil wird nach S. 357 aufgelöst.

Statische Untersuchung eines symmetrischen Stockwerkrahmens mit vier Pfosten (Abb. 331); Binderabstand: 5,20 m.

1. Geometrische Grundlagen. Die Stablängen und die Trägheitsmomente der Querschnitte sind in Abb. 331 eingetragen. $J_c = 38{,}2$ dm^4. Die auf drei Stellen abgerundeten reziproken Werte der reduzierten Stablängen gelten als fehlerfreie geometrische Grundlage der Untersuchung.

Index	1/red. Länge		Index	1/red. Länge	
	Riegel	Pfosten		Riegel	Pfosten
a	0,167	0,562	h	0,314	0,787
b	0,167	0,340	i	0,314	0,455
c	0,167	0,254	k	0,314	0,341
d	0,167	0,254	l	0,314	0,341
e	0,167	0,198	m	0,314	0,254
f	0,167	0,085	n	0,314	0,106
g	0,105	0,059	r	0,211	0,059

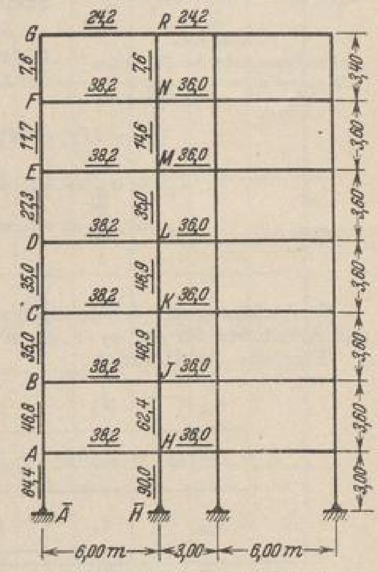


Abb. 331. Die unterstrichenen Zahlen bedeuten die Trägheitsmomente in dm^4.

A. Symmetrie der Belastung.

Lösung nach S. 357 mit $\varphi_J = -\chi_J$, $\varphi_K = -\chi_K$, $\vartheta_i = 0$, $\nu_i = 0$ (Abb. 329).

2. Geometrisch überzählige Größen des Ansatzes.

$$\mu_J = \tfrac{1}{2}(\varphi_J - \chi_J)\,, \qquad \mu_K = \tfrac{1}{2}(\varphi_K - \chi_K)\,,$$

so daß

$$\varphi_J = -\chi_J = \mu_J\,, \qquad \varphi_K = -\chi_K = \mu_K\,.$$

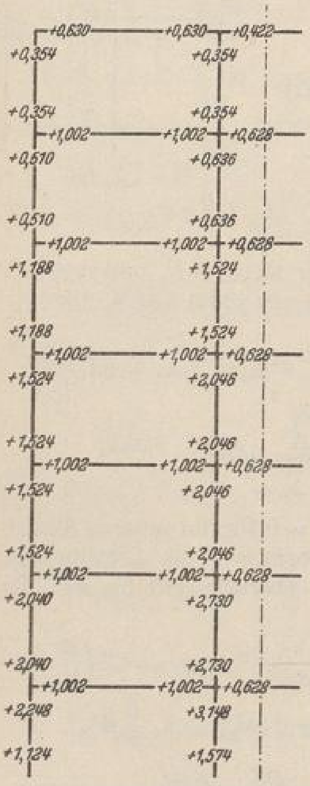


Abb. 332.
Anschlußmomente des Zustandes Σ_1 ($\mu_A = \mu_B = \cdots = \mu_R = 1$).

3. Matrix der statischen Bedingungen (597) u. (598). Entwicklung der Vorzahlen der Gleichungen:

$$a_{AA} = -2\left(\frac{4}{h'_a} + \frac{4}{l'_a} + \frac{4}{h'_b}\right) = -8{,}552\,;$$

$$a_{AB} = -2\left(\frac{2}{h'_b}\right) = -1{,}360\,; \qquad a_{AH} = -2\left(\frac{2}{l'_a}\right) = -0{,}668\,;$$

$$a_{KC} = -2\left(\frac{2}{l'_c}\right) = -0{,}668\,; \qquad a_{KJ} = -2\left(\frac{2}{h'_k}\right) = -1{,}364\,;$$

$$a_{KL} = -2\left(\frac{2}{h'_l}\right) = -1{,}364\,;$$

$$a_{KK} = -2\left(\frac{2}{l'_k} + \frac{4}{h'_k} + \frac{4}{h'_l} + \frac{4}{l'_c}\right) = -8{,}048\,.$$

Ergebnis der vollständigen Rechnung auf S. 361.

4. Nachprüfung der Vorzahlen der Matrix. Die Summe der Vorzahlen einer Gleichung $\delta A_J = 0$

$$a_{J\Sigma} = \sum_{K=A}^{K=R} a_{JK}$$

kann als virtuelle Arbeit der Anschlußmomente aus $\mu_A = \mu_B = \cdots = \mu_R = 1$ (Zustand Σ_1, vgl. Abb. 332) an der mit $\dot{\mu}_J = 1$ angetriebenen kinematischen Kette Γ_J nachgeprüft werden, z. B.

$$a_{L\Sigma} = -2\,(M_L^{(\bar{l})} + M_L^{(d)} + M_L^{(l)} + M_{L'}^{(\bar{m})}) = -10{,}400\,.$$

Die Summe $a_{\Sigma\Sigma}$ aller Vorzahlen der Matrix kann ebenfalls als virtuelle Arbeit der Stabendmomente des Zustandes Σ_1 an der mit $\dot{\mu}_A = \dot{\mu}_B = \cdots = \dot{\mu}_R = 1$ angetriebenen kinematischen Kette geprüft werden. Sie ist demnach gleich der negativen Summe der Stabendmomente an den Knoten.

5. Belastungsglieder a_{J0} für senkrechte Belastung der Seitenfelder mit $q = 2{,}08$ t/m. Der geometrisch bestimmte Anteil $M_{J0}^{(h)}$ der Anschlußmomente ist bei allen belasteten Riegelstäben gleich.

$$-M_{A0}^{(a)} = M_{H0}^{(a)} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{2{,}08 \cdot 6{,}0^2}{12} = 6{,}24 \text{ mt}\,,$$

$$a_{A0} = a_{B0} = a_{C0} = a_{D0} = a_{E0} = a_{F0} = +2 \cdot 6{,}24 = +12{,}48\,,$$

$$a_{H0} = a_{J0} = a_{K0} = a_{L0} = a_{M0} = a_{N0} = -2 \cdot 6{,}24 = -12{,}48\,,$$

$$a_{G0} = a_{R0} = 0\,.$$

6. Auflösung der Gleichungen durch Iteration nach Abschn. 30. Die Iteration stützt sich auf Annahmen für $\mu_B, \mu_C \ldots \mu_R$ in $\delta A_A = 0$, z. B. $\mu_B = 0, \mu_C = 0 \ldots \mu_R = 0$.

Ergebnis der Iteration:

μ_A	μ_B	μ_C	μ_D	μ_E	μ_F	μ_G
+ 1,2775	+ 1,5850	+ 1,8206	+ 1,8652	+ 2,8981	+ 5,8147	− 1,2650

μ_H	μ_J	μ_K	μ_L	μ_M	μ_N	μ_R
− 0,8997	− 1,1331	− 1,2823	− 1,3424	− 2,0746	− 3,9995	+ 0,6842

	μ_A	μ_B	μ_C	μ_D	μ_E	μ_F	μ_G	μ_H	μ_J	μ_K	μ_L	μ_M	μ_N	μ_R	a_{J0}	$\sum a_{JK}$
A	− 8,552	− 1,360						− 0,668							+ 12,48	− 10,580
B	− 1,360	− 6,088	− 1,016						− 0,668						+ 12,48	− 9,132
C		− 1,016	− 5,400	− 1,016						− 0,668					+ 12,48	− 8,100
D			− 1,016	− 4,952	− 0,792						− 0,668				+ 12,48	− 7,428
E				− 0,792	− 3,600	− 0,340						− 0,668			+ 12,48	− 5,400
F					− 0,340	− 2,488	− 0,236						− 0,668		+ 12,48	− 3,732
G						− 0,236	− 1,312							− 0,420	0	− 1,968
H	− 0,668							− 12,528	− 1,820						− 12,48	− 15,016
J		− 0,668						− 1,820	− 8,960	− 1,364					− 12,48	− 12,812
K			− 0,668						− 1,364	− 8,048	− 1,364				− 12,48	− 11,444
L				− 0,668						− 1,364	− 7,352	− 1,016			− 12,48	− 10,400
M					− 0,668						− 1,016	− 5,472	− 0,424		− 12,48	− 7,580
N						− 0,668						− 0,424	− 3,912	− 0,236	− 12,48	− 5,240
R							− 0,420						− 0,236	− 2,156	0	− 2,812

	ϱ_A	ϱ_B	ϱ_C	ϱ_D	ϱ_E	ϱ_F	ϱ_G	ϱ_H	ϱ_J	ϱ_K	ϱ_L	ϱ_M
A	−8,552	−1,360						−0,668				
B	−1,360	−6,088	−1,016						−0,668			
C		−1,016	−5,400	−1,016						−0,668		
D			−1,016	−4,952	−0,792						−0,66	
E				−0,792	−3,600	−0,340						−0,66
F					−0,340	−2,488	−0,236					
G						−0,236	−1,312					
H	−0,668							−15,040	−1,820			
J		−0,668						−1,820	−11,472	−1,364		
K			−0,668						−1,364	−10,560	−1,36	
L				−0,668						−1,364	−9,86	−1,01
M					−0,668						−1,01	−7,98
N						−0,668						−0,42
R							−0,420					
a	+6,744							+9,444				
b	+4,080	+4,080						+5,460	+5,460			
c		+3,048	+3,048						+4,092	+4,092		
d			+3,048	+3,048						+4,092	+4,09	
e				+2,376	+2,376						+3,04	+3,04
f					+1,020	+1,020						+1,2
g						+0,708	+0,708					

7. Superposition der Anteile der Stabendmomente aus Belastung und Formänderung nach (530)

$$M_C^{(\bar{c})} = \quad 1/h'_c \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_B) = \quad 0{,}254 \cdot 10{,}4524 \quad = +2{,}655 \text{ mt},$$

$$M_C^{(c)} = M_{C0}^{(c)} + 1/l'_c \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_K) = -6{,}24 + 0{,}167 \cdot \ 4{,}7178 \quad = -5{,}452 \text{ mt},$$

$$M_C^{(\bar{d})} = \quad 1/h'_d \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_D) = \quad 0{,}254 \cdot 11{,}0128 \quad = +2{,}797 \text{ mt},$$

$$M_N^{(\bar{n})} = \quad 1/h'_n \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_M) = \quad 0{,}106\,(-20{,}1472) = -2{,}136 \text{ mt},$$

$$M_N^{(f)} = M_{N0}^{(f)} + 1/l'_f \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_F) = +6{,}24 + 0{,}167\,(-\ 4{,}3686) = +5{,}510 \text{ mt},$$

$$M_N^{(n)} = \quad 1/l'_n \cdot 2\,\varphi_N \quad = \quad 0{,}314\,(-\ 7{,}9990) = -2{,}512 \text{ mt},$$

$$M_N^{(\bar{r})} = \quad 1/h'_r \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_R) = \quad 0{,}059\,(-14{,}6296) = -0{,}863 \text{ mt}.$$

Die Rechnung wird für alle Stabknoten durchgeführt und das Ergebnis in der linken Hälfte der Abb. 333 eingetragen. Der Betrag für $pl^2/8 = 9{,}36$ mt und $pl^2/12 = 6{,}24$ mt dient als Vergleich.

ϱ_M	ϱ_N	ϱ_R	ψ_a	ψ_b	ψ_c	ψ_d	ψ_e	ψ_f	ψ_g	a_{J0}	$\sum a_{JK}$
			+ 6,744	+ 4,080							+ 0,244
				+ 4,080	+ 3,048						− 2,004
					+ 3,048	+ 3,048					− 2,004
						+ 3,048	+ 2,376				− 2,004
−0,668							+ 2,376	+1,020			− 2,004
	−0,668							+1,020	+0,708		− 2,004
		−0,420							+0,708		− 1,260
			+ 9,444	+ 5,460							− 2,624
				+ 5,460	+ 4,092						− 5,772
					+ 4,092	+ 4,092					− 5,772
−1,016						+ 4,092	+ 3,048				− 5,772
−7,984	−0,424						+ 3,048	+1,272			− 5,772
−0,424	−6,424	−0,236						+1,272	+0,708		− 5,772
	−0,236	−3,844							+0,708		− 3,792
			−32,376							+68,70	−16,188
				−19,080						+70,56	0
					−14,280					+57,60	0
						−14,280				+44,64	0
+3,048							−10,848			+31,68	0
+1,272	+1,272							−4,584		+18,72	0
	+0,708	+0,708							−2,832	+ 5,78	0

Die Anschlußmomente, bei belasteten Stäben unter Berücksichtigung der äußeren Kräfte, führen durch die Momentengleichungen der Stäbe zu den Querkräften. Diese liefern die Längskräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten. In Abb. 333 sind auf der rechten Seite die Längs- und Querkräfte angegeben.

8. Nachprüfung der Rechnung nach S. 331. Die Summe der Stabendmomente ist an jedem Knotenpunkt Null, z. B. am Knotenpunkt N

$$\sum M_N = -2{,}136 + 5{,}510 - 2{,}512 - 0{,}863 = -0{,}001 \approx 0 .$$

B. Antimetrie der Belastung.

Lösung nach S. 358 mit $\varphi_J = \chi_J$, $\varphi_K = \chi_K$, $\vartheta_i = \nu_i$ (Abb. 329).

2. Geometrisch überzählige Größen.

$$\varrho_J = \tfrac{1}{2}(\varphi_J + \chi_J), \qquad \varrho_K = \tfrac{1}{2}(\varphi_K + \chi_K), \qquad \psi_i = \tfrac{1}{2}(\vartheta_i + \nu_i),$$

so daß

$$\varphi_J = \chi_J = \varrho_J, \qquad \varphi_K = \chi_K = \varrho_K, \qquad \vartheta_i = \nu_i = \psi_i .$$

3. Matrix der statischen Bedingungen (599) bis (601). Entwicklung der Vorzahlen der Gleichungen $\delta A_A = 0$, $\delta A_K = 0$.

$$a_{AA} = -2\left(\frac{4}{l'_a} + \frac{4}{h'_a} + \frac{4}{h'_b}\right) = -8{,}552\,,$$

$$a_{AB} = -2\left(\frac{2}{h'_b}\right) = -1{,}360\,; \qquad a_{AH} = -2\left(\frac{2}{l'_a}\right) = -0{,}668\,,$$

$$a_{Aa} = 2\left(\frac{6}{h'_a}\right) = +6{,}744\,, \qquad a_{Ab} = 2\left(\frac{6}{h'_b}\right) = 4{,}080\,,$$

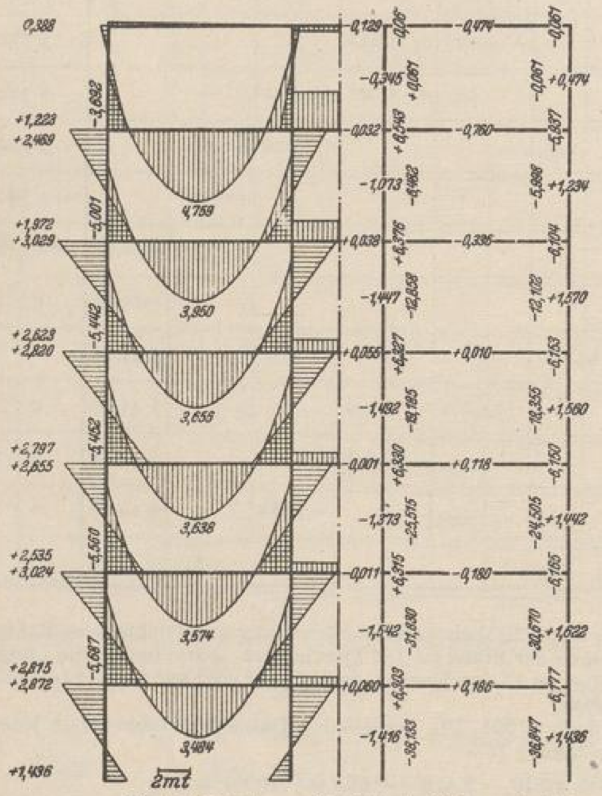
$$a_{KK} = -2\left(\frac{4}{l'_c} + \frac{4}{h'_k} + \frac{4}{h'_l} + \frac{6}{l'_k}\right) = -10{,}560\,,$$

$$a_{KC} = -2\left(\frac{2}{l'_c}\right) = -0{,}668\,, \qquad a_{KJ} = -2\left(\frac{2}{h'_k}\right) = -1{,}364\,,$$

$$a_{KL} = -2\left(\frac{2}{h'_l}\right) = -1{,}364$$

$$a_{Kc} = 2\left(\frac{6}{h'_k}\right) = +4{,}092\,, \qquad a_{Kd} = 2\left(\frac{6}{h'_l}\right) = +4{,}092\,.$$

Ergebnis der vollständigen Rechnung auf S. 362/3.



Biegungsmomente. Die Zahlen in Richtung der Stäbe bedeuten die Längskräfte, die quergestellten Zahlen die Querkräfte.

Abb. 333.

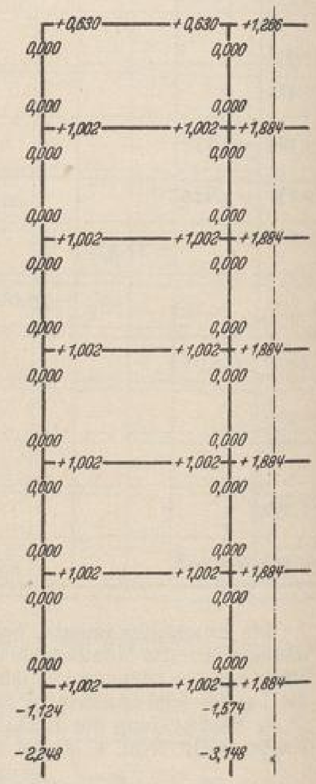


Abb. 334.
Anschlußmomente des Zustandes Σ_1
$(\varrho_A = \varrho_B = \cdots = \varrho_R = \psi_a = \psi_b = \cdots = \psi_g = 1)$.

4. Nachprüfung der Vorzahlen der Matrix. Die Summe der Vorzahlen einer Gleichung $\delta A_J = 0$ oder $\delta A_b = 0$

$$a_{J\Sigma} = \sum_{K=A}^{K=N} a_{JK} \quad \text{oder} \quad a_{b\Sigma} = \sum_{K=A}^{K=N} a_{bK}$$

kann als virtuelle Arbeit der Anschlußmomente aus $\varrho_A = \varrho_B = \cdots \varrho_R = \psi_a = \psi_b = \cdots \psi_g = 1$ (Zustand Σ_2, vgl. Abb. 334) an der mit $\dot{\varrho}_J = 1$ oder $\dot{\psi}_b = 1$ angetriebenen kinematischen Kette Γ_J oder Γ_b nachgeprüft werden, z. B.

$$a_{L\Sigma} = -2\,(M_L^{(\bar{l})} + M_L^{(d)} + M_L^{(l)} + M_L^{(\bar{m})}) = -5{,}772\,,$$

$$a_{a\Sigma} = +2\,(M_{\bar{A}}^{(\bar{a})} + M_A^{(\bar{a})} + M_{\bar{H}}^{(\bar{h})} + M_H^{(\bar{h})}) = -16{,}188\,.$$

Die Zeilensummen $a_{b\Sigma} \cdots a_{g\Sigma}$ sind Null, da der Zustand Σ_2 Pfostenendmomente nur an den Pfosten $\bar{a}$ und $\bar{h}$ erzeugt. Die Summe $a_{\Sigma\Sigma}$ aller Vorzahlen der Matrix besteht daher auch nur aus der negativen Summe der Riegelanschlußmomente und der positiven Summe der Pfostenendmomente bei $\bar{a}$ und $\bar{h}$.

$$a_{\Sigma\Sigma} = 62{,}500 = -2\,(-25{,}854) - 2\,(-5{,}396) = 62{,}500\,.$$

5. Belastungsglieder bei Eintragung einer waagerechten Belastung aus Wind $w = 1$ t/m in den Randknoten.

Knotenlasten in t:

W_A	W_B	W_C	W_D	W_E	W_F	W_G
3,3	3,6	3,6	3,6	3,6	3,5	1,7

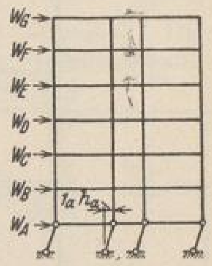


Abb. 335.
Kinematische Kette Γ_a.

$$a_{A0} = a_{B0} = \cdots = a_{R0} = 0\,.$$

$$a_{a0} = \mathrm{i}_a\, h_a \sum_A^G W_K = 3{,}0 \cdot 22{,}9 = 68{,}70\,; \qquad a_{b0} = \mathrm{i}_b \cdot h_b \sum_B^G W_K = 3{,}6 \cdot 19{,}6 = 70{,}56\,.$$

$$a_{c0} = 57{,}60\,; \qquad a_{d0} = 44{,}64\,; \qquad a_{e0} = 31{,}68\,; \qquad a_{f0} = 18{,}72\,.$$

$$a_{g0} = \mathrm{i}_g \cdot h_g\, W_G = 3{,}4 \cdot 1{,}7 = 5{,}78 \text{ (Abb. 335).}$$

6. Auflösung der Gleichungen. Nach der Anweisung auf S. 357 können zunächst die unbekannten Stabdrehwinkel ψ aus den Gleichungen $\delta A_J = 0$ eliminiert werden, so daß 14 Gleichungen mit 14 Unbekannten entstehen. Diese werden durch Iteration gelöst. Die Anfangswerte ergeben sich durch Auflösung der voneinander unabhängigen dreigliedrigen Ansätze, die bei Vernachlässigung der äußeren Glieder erhalten werden.

Die Iteration kann sich aber auch auf eine erste Näherungslösung des vollständigen Ansatzes mit 21 Gleichungen stützen, um die langwierige Elimination zu umgehen. Dabei wird mit Vorteil das Ergebnis der angenäherten Berechnung der ψ_i nach Abschn. 51 verwendet.

Ergebnis der Iteration:

ϱ_A	ϱ_B	ϱ_C	ϱ_D	ϱ_E	ϱ_F	ϱ_G
7,810	9,482	8,015	6,191	4,669	2,706	1,238
ϱ_H	ϱ_J	ϱ_K	ϱ_L	ϱ_M	ϱ_N	ϱ_R
6,408	7,215	6,011	4,544	2,878	1,253	0,423
ψ_a	ψ_b	ψ_c	ψ_d	ψ_e	ψ_f	ψ_g
5,618	11,294	11,558	9,183	7,385	6,871	3,446

7. Superposition der Anteile der Stabendmomente aus Belastung und Formänderung nach (530):

$$M_C^{(\bar{c})} = 1/h'_c \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_B - 6\,\psi_c) = -4{,}654 \text{ mt}\,,$$
$$M_C^{(c)} = 1/l'_c \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_K \qquad\qquad) = +7{,}362 \text{ mt}\,,$$
$$M_C^{(\bar{d})} = 1/h'_d \cdot (4\,\varphi_C + 2\,\varphi_D - 6\,\psi_d) = -2{,}707 \text{ mt}\,,$$
$$M_N^{(\bar{n})} = 1/h'_n \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_M - 6\,\psi_f) = -3{,}229 \text{ mt}\,,$$
$$M_N^{(f)} = 1/l'_f \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_F \qquad\qquad) = +1{,}741 \text{ mt}\,,$$
$$M_n^{(n)} = 1/l'_n \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_N \qquad\qquad) = +2{,}361 \text{ mt}\,,$$
$$M_n^{(\bar{r})} = 1/h'_r \cdot (4\,\varphi_N + 2\,\varphi_R - 6\,\psi_e) = -0{,}874 \text{ mt}\,.$$

Bei einer Windbelastung von 0,125 t/m² und einem Binderabstand von 5,2 m ist $w = 5{,}2 \cdot 0{,}125 = 0{,}65$ t/m. Dabei entstehen die Stabendmomente der Abb. 336. Diese bestimmen die für jeden Pfosten oder Riegel konstanten Querkräfte, aus denen dann die Längskräfte in Verbindung mit den Lasten W_K durch die Bedingungen für das Gleichgewicht am Stabknoten (522) berechnet werden. Die Längskräfte der Riegel im Mittelfeld sind infolge Antimetrie der Belastung Null.

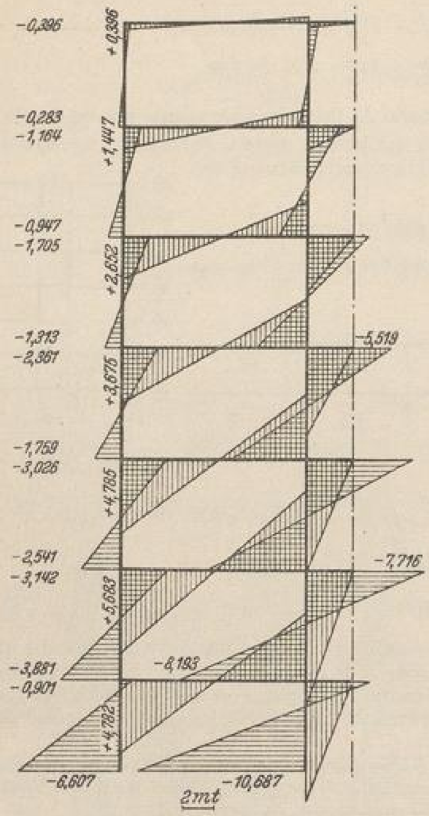


Abb. 336.

8. Nachprüfung der Rechnung. Die Richtigkeit der Ergebnisse ist bewiesen, wenn die Bedingungen $\delta A_J = 0$ und $\delta A_c = 0$ durch die Stabendmomente erfüllt sind.

$$\delta A_N = -2{,}098 + 1{,}132 + 1{,}535 - 0{,}568 = -0{,}001 \approx 0,$$

$$\delta A_b = \mathfrak{i}_b \cdot 2\,(M_A^{(b)} + M_B^{(b)} + M_H^{(i)} + M_J^{(i)}) + \mathfrak{i}_b h_b \sum_B^G W_k, \text{ (Abb. 337)}$$

$$= 2(-3{,}881 - 3{,}142 - 8{,}193 - 7{,}716) + 3{,}6 \cdot 0{,}65 \cdot 19{,}6$$

$$= -45{,}864 + 45{,}864 = 0\,.$$

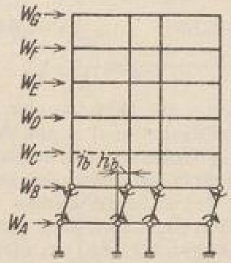


Abb. 337.

43. Die Berechnung der Anschlußkräfte aus den Drehwinkeln τ der Endtangenten.

Der Verschiebungszustand eines Stabwerks mit r freien Knoten und t abgestützten Stabenden kann nach S. 306 auch durch die Verdrehung $\tau_J^{(h)}$ der Endtangenten der Stäbe (h) am Knoten J relativ zu dem verformten Stabnetz $\overline{J'K'}$ beschrieben werden (Abb. 285). Die unbekannten Winkel $\tau_J^{(h)}$ treten im Ansatz an die Stelle der Knotendrehwinkel φ_J, so daß darin $f = f_1 + s_2$ (vgl. S. 313) unabhängige Komponenten ψ_c und $2\,s$ Drehwinkel $\tau_J^{(h)}$, zusammen also $2\,s + f$ unbekannte Komponenten auftreten. Sie sind an den r Stabknoten durch $(2\,s - r - t)$ Kontinuitätsbedingungen

$$\tau_J^{(h)} + \vartheta_h = \tau_J^{(h+1)} + \vartheta_{h+1}\,, \tag{603}$$

an den abgestützten Stabenden durch t geometrische oder statische Randbedingungen $\varphi_A = 0$ oder $M_A = 0$ verknüpft und müssen $r + f$ Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ erfüllen, welche für die Komponenten φ_J, ψ_c gelten. Zur Berechnung der $2\,s + f$ unbekannten Komponenten stehen ebenso viele Gleichungen zur Verfügung. Die Lösung ist eindeutig (Abb. 338). Dasselbe gilt auch für Stabwerke, deren Elemente (g) durch reibungslose Gelenke mit den Stabknoten G verbunden sind. An die Stelle der Kontinuitätsbedingungen (603) treten hier statische Bedingungen $M_G^{(g)} = 0$. Die