



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Ansatz

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Verwendung der Drehwinkel  $\tau_J^{(h)}$  kann daher auch als algebraische Transformation des Ansatzes  $\varphi_J, \psi_c$  auf S. 320 angesehen werden.

Die äußeren Kräfte der Abschnitte ( $h$ ) sind auf S. 307 in die Belastung  $\mathfrak{B}$  und in die statisch unbestimmten Anschlußkräfte  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_K^{(h)}$  zerlegt worden. Jede Gruppe steht mit den ihr zugeordneten statisch bestimmten Anschlußkräften im Gleichgewicht und ändert die Form des Stabes. Die Gruppe  $\mathfrak{B}$  erzeugt die Anteile  $\tau_{J_0}^{(h)}, \tau_{K_0}^{(h)}$ , die Gruppe der statisch unbestimmten Kräfte die Anteile  $\tau_{JM}^{(h)}, \tau_{KM}^{(h)}$ .

$$\tau_J^{(h)} = \tau_{J_0}^{(h)} + \tau_{JM}^{(h)}, \quad \tau_K^{(h)} = \tau_{K_0}^{(h)} + \tau_{KM}^{(h)}. \quad (604)$$

Die Drehwinkel  $\tau_{J_0}^{(h)}$  sind für jede Belastung  $\mathfrak{B}_h$  des Stabes bekannt (Tabelle 17). Die Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(h)}, \tau_{KM}^{(h)}$  können nach Abschn. 18 als Funktionen der Anschlußkräfte  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}, N_K^{(h)}$  angegeben werden. Ihr  $EJ_c$  facher Beitrag ist bei geraden Stäben ( $h$ ) mit konstantem Trägheitsmoment  $J_h$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{JM}^{(h)} &= \frac{l_h}{6} (2 M_J^{(h)} - M_K^{(h)}), \\ \tau_{KM}^{(h)} &= \frac{l_h}{6} (2 M_K^{(h)} - M_J^{(h)}), \end{aligned} \right\} \quad (605)$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(h)} &= \frac{2}{l_h} (2 \tau_{JM}^{(h)} + \tau_{KM}^{(h)}), \\ M_K^{(h)} &= \frac{2}{l_h} (2 \tau_{KM}^{(h)} + \tau_{JM}^{(h)}), \\ M^{(h)} &= M_J^{(h)} + M_K^{(h)} \\ &= \frac{6}{l_h} (\tau_{JM}^{(h)} + \tau_{KM}^{(h)}). \end{aligned} \right\} \quad (606)$$

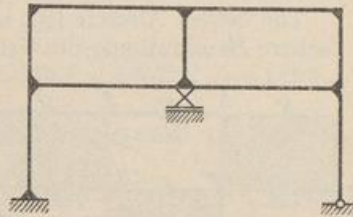


Abb. 338.

$s=9, r=6, t=2, f=f_1=2, m=0,$   
 $2s+f=20$  Unbekannte,  
 $2s-r-t-m=10$  Kontinuitätsbedingungen,  
 $t=2$  Randbedingungen,  
 $r=6$  Gleichungen  $\delta A_J=0,$   
 $f=f_1=2$  Gleichungen  $\delta A_c=0.$

Der Drehsinn der Anschlußmomente und Drehwinkel ist dabei nach S. 306 in der Uhrzeigerbewegung positiv gerechnet worden.

Bei Stäben mit zwei Gelenken in  $J$  und  $K$  ist

$$\tau_{JM}^{(g)} = \tau_{KM}^{(g)} = 0 \quad \text{und} \quad \tau_J^{(g)} = \tau_{J_0}^{(g)}, \quad \tau_K^{(g)} = \tau_{K_0}^{(g)},$$

bei einem steifen Anschluß  $J$  und einem gelenkigen Anschluß  $G$  ist mit  $J_g = \text{const}$

$$\tau_{GM}^{(g)} = -\frac{1}{2} \tau_{JM}^{(g)}, \quad \tau_{JM}^{(g)} = \frac{l_g}{3} M_J^{(g)}, \quad M_J^{(g)} = \frac{3}{l_g} \tau_{JM}^{(g)}. \quad (607)$$

Daher sind  $(2s+f)$  unabhängige Komponenten  $\tau_{JM}^{(h)}, \psi_c$  aus  $(2s-r-t)$  Kontinuitätsbedingungen (603),  $t$  Randbedingungen und  $(r+f)$  Gleichgewichtsbedingungen  $\delta A_J = 0, \delta A_c = 0$ , also aus ebenso vielen Gleichungen auszurechnen.

Die Stabdrehwinkel  $\vartheta_h$  zerfallen nach (526) in einen Anteil  $\vartheta_{h_0}$  und in eine lineare Funktion der unabhängigen Komponenten  $\psi_c$ . Der Beitrag  $\vartheta_{h_0}$  bezeichnet ebenso wie auf S. 318 den Stabdrehwinkel des geometrisch bestimmten Hauptsystems infolge der Änderung  $\varepsilon_{h_0} l_h$  der Stablängen durch Längskräfte  $N_{h_0}$  und Temperaturwechsel  $t$ .

$$\vartheta_h = \vartheta_{h_0} + \sum \psi_c \vartheta_{hc}. \quad (608)$$

**Ansatz.** Zur Berechnung der  $2s+f$  unbekanntenen unabhängigen Komponenten  $\tau_{JM}^{(h)}, \psi_c$  werden die  $r+f$  statischen Bedingungen  $\delta A_J = 0, \delta A_c = 0$  durch  $(2s-r)$  Bedingungen für die winkeltreue Verformung ergänzt.

$$\tau_{JM}^{(h)} + \tau_{J_0}^{(h)} + \vartheta_{h_0} + \sum \psi_c \vartheta_{hc} = \tau_{JM}^{(h+1)} + \tau_{J_0}^{(h+1)} + \vartheta_{(h+1)0} + \sum \psi_c \vartheta_{(h+1)c}. \quad (609)$$

Mit diesen werden die  $2s$  unabhängigen Komponenten  $\tau_{JM}^{(h)}$  zuerst auf  $r$  ausgezeichnete Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(r)}$  bezogen, von denen jeder einem der  $r$  Knoten  $J$  zugeordnet ist. Die statischen Bedingungen  $\delta A_J = 0, \delta A_c = 0$  gelten für die Belastung  $\mathfrak{B}_h$  und die

Stabendmomente  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$ . Diese sind nach (606) zunächst Funktionen der unbekanntenen Komponenten  $\tau_{JM}^{(h)}, \tau_{KM}^{(h)}, \psi_c$  des Verschiebungszustandes und werden mit den Kontinuitätsbedingungen (603) als Funktionen der ausgezeichneten Komponenten  $\tau_{JM}^{(j)}, \psi_c$  des Verschiebungszustandes und der bekannten, durch  $\mathfrak{P}_h, t, \Delta_e$  bestimmten Drehwinkel  $\tau_{J_0}^{(h)}, \vartheta_{h_0}$  entwickelt. Die unbekanntenen Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(j)}$  treten in diesem Ansatz an die Stelle der Knotendrehwinkel  $\varphi_J$ . Die Gleichungen sind symmetrisch und werden ebenso wie auf S. 330 aufgelöst. Die übrigen Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(h)}$  und  $\vartheta_h$  ergeben sich durch Rekursion aus den Kontinuitätsbedingungen. Damit sind auch die Winkel  $\tau^{(j)} = \tau_{J_0}^{(j)} + \tau_{JM}^{(j)}, \varphi_J = \tau^{(j)} + \vartheta_h$  des Verschiebungszustandes bekannt. Die Anschlußmomente werden aus dem Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(h)}$  nach (606) berechnet. Das Ergebnis läßt sich ebenso wie auf S. 331 durch geeignete statische Bedingungen nachprüfen.

Die beiden Ansätze  $(\varphi_J, \psi_c)$  und  $(\tau_{JM}^{(h)}, \psi_c)$  führen zu dem gleichen Ziel. Die einfachere Beschreibung des Verschiebungszustandes der Knotenkette durch die Komponenten  $\varphi_J$  und  $\psi_c$  wird durch die längere Entwicklung der Schnittkräfte als Funktion von  $M_{J_0}^{(h)}, \varphi_J, \varphi_K, \vartheta_h$  ausgeglichen.

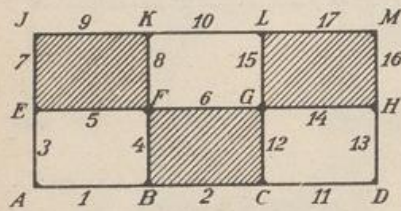


Abb. 339.

**Berechnung eines Silorahmens mit der in Abb. 339 angegebenen Belastung.**

$\overline{JM} = 3l, \overline{AJ} = 2h, l/h = \lambda$ . Das Trägheitsmoment  $J$  der Stäbe ist konstant. System und Belastung sind zur senkrechten Mittellinie symmetrisch, die Stabdrehwinkel durch die Art der Stützung Null.

1. Bedingungen für die winkeltreue Verformung der Stäbe am Knoten:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{AM}^{(1)} &= \tau_{AM}^{(3)} & \tau_{BM}^{(1)} &= \tau_{B_0}^{(2)} + \tau_{BM}^{(2)} & \tau_{F_0}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)} &= \tau_{F_0}^{(8)} + \tau_{FM}^{(8)} \\ \tau_{EM}^{(3)} &= \tau_{E_0}^{(5)} + \tau_{EM}^{(5)} & \tau_{BM}^{(1)} &= \tau_{B_0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} & \tau_{K_0}^{(8)} + \tau_{KM}^{(8)} &= \tau_{K_0}^{(9)} + \tau_{KM}^{(9)} \\ \tau_{EM}^{(3)} &= \tau_{E_0}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)} & \tau_{F_0}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)} &= \tau_{F_0}^{(5)} + \tau_{FM}^{(5)} & \tau_{K_0}^{(8)} + \tau_{KM}^{(8)} &= \tau_{KM}^{(10)} \\ \tau_{J_0}^{(7)} + \tau_{JM}^{(7)} &= \tau_{J_0}^{(9)} + \tau_{JM}^{(9)} & \tau_{F_0}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)} &= \tau_{F_0}^{(6)} + \tau_{FM}^{(6)} & & \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

2. Bedingungen für das Gleichgewicht der Anschlußmomente an den 6 Knotenpunkten der linken Hälfte des Stabwerks:

$$\left. \begin{aligned} (2\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{BM}^{(1)}) + (2\tau_{AM}^{(3)} + \tau_{EM}^{(3)})\lambda &= 0 \\ (2\tau_{EM}^{(3)} + \tau_{AM}^{(3)})\lambda + (2\tau_{EM}^{(5)} + \tau_{FM}^{(5)}) + (2\tau_{EM}^{(7)} + \tau_{JM}^{(7)})\lambda &= 0 \\ (2\tau_{JM}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)})\lambda + (2\tau_{JM}^{(9)} + \tau_{KM}^{(9)}) &= 0 \\ (2\tau_{BM}^{(1)} + \tau_{AM}^{(1)}) + (2\tau_{BM}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)})\lambda + \tau_{BM}^{(2)} &= 0 \\ (2\tau_{FM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)})\lambda + (2\tau_{FM}^{(8)} + \tau_{KM}^{(8)})\lambda + (2\tau_{FM}^{(5)} + \tau_{EM}^{(5)}) + \tau_{FM}^{(6)} &= 0 \\ (2\tau_{KM}^{(8)} + \tau_{JM}^{(8)}) + \tau_{KM}^{(10)} + (2\tau_{KM}^{(9)} + \tau_{FM}^{(9)})\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Aus der Symmetrie der Belastung der einzelnen Zellen folgt

$$\begin{aligned} +\tau_{J_0}^{(7)} &= -\tau_{E_0}^{(7)} = -\tau_{K_0}^{(8)} = +\tau_{F_0}^{(8)} = +\tau_{F_0}^{(4)} = -\tau_{B_0}^{(4)} = \frac{p h^3}{24 E J} = \beta, \\ -\tau_{J_0}^{(9)} &= +\tau_{K_0}^{(9)} = +\tau_{B_0}^{(5)} = -\tau_{F_0}^{(5)} = -\tau_{F_0}^{(6)} = +\tau_{E_0}^{(6)} = \frac{p l^3}{24 E J} = \alpha. \end{aligned}$$

3. Die Gleichgewichtsbedingungen (b) enthalten in Verbindung mit (a) 6 ausgezeichnete Drehwinkel, von denen jeder einem der 6 Stabknoten zugeordnet ist.

$$\begin{aligned} \tau_{AM}^{(1)}(2 + 2\lambda) + \tau_{BM}^{(1)} + \tau_{EM}^{(5)}\lambda + \lambda\alpha &= 0, \\ \tau_{AM}^{(1)}\lambda + \tau_{EM}^{(5)}(4\lambda + 2) + \tau_{FM}^{(5)} + \tau_{JM}^{(9)}\lambda + 3\lambda\alpha + \lambda\beta &= 0, \\ \tau_{JM}^{(9)}(2 + 2\lambda) + \tau_{EM}^{(5)}\lambda + \tau_{KM}^{(10)} - \alpha(\lambda + 1) - \lambda\beta &= 0, \\ \tau_{AM}^{(1)} + \tau_{BM}^{(1)}(3 + 2\lambda) + \tau_{FM}^{(5)}\lambda - \alpha(\lambda + 1) + \lambda\beta &= 0, \\ \tau_{FM}^{(5)}(4\lambda + 3) + \tau_{BM}^{(1)}\lambda + \tau_{EM}^{(5)} + \tau_{KM}^{(10)}\lambda - 4\lambda\alpha - 3\lambda\beta &= 0, \\ \tau_{KM}^{(10)}(2\lambda + 3) + \tau_{JM}^{(9)} + \tau_{FM}^{(5)}\lambda - \alpha(2 + \lambda) + \lambda\beta &= 0. \end{aligned}$$