



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Zahlenbeispiel

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Stabendmomente  $M_J^{(h)}, M_K^{(h)}$ . Diese sind nach (606) zunächst Funktionen der unbekanntenen Komponenten  $\tau_{JM}^{(h)}, \tau_{KM}^{(h)}, \psi_c$  des Verschiebungszustandes und werden mit den Kontinuitätsbedingungen (603) als Funktionen der ausgezeichneten Komponenten  $\tau_{JM}^{(j)}, \psi_c$  des Verschiebungszustandes und der bekannten, durch  $\mathfrak{P}_h, t, \Delta_e$  bestimmten Drehwinkel  $\tau_{J_0}^{(h)}, \vartheta_{h,0}$  entwickelt. Die unbekanntenen Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(j)}$  treten in diesem Ansatz an die Stelle der Knotendrehwinkel  $\varphi_J$ . Die Gleichungen sind symmetrisch und werden ebenso wie auf S. 330 aufgelöst. Die übrigen Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(h)}$  und  $\vartheta_h$  ergeben sich durch Rekursion aus den Kontinuitätsbedingungen. Damit sind auch die Winkel  $\tau^{(j)} = \tau_{J_0}^{(h)} + \tau_{JM}^{(h)}, \varphi_J = \tau^{(j)} + \vartheta_h$  des Verschiebungszustandes bekannt. Die Anschlußmomente werden aus dem Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(h)}$  nach (606) berechnet. Das Ergebnis läßt sich ebenso wie auf S. 331 durch geeignete statische Bedingungen nachprüfen.

Die beiden Ansätze  $(\varphi_J, \psi_c)$  und  $(\tau_{JM}^{(h)}, \psi_c)$  führen zu dem gleichen Ziel. Die einfachere Beschreibung des Verschiebungszustandes der Knotenkette durch die Komponenten  $\varphi_J$  und  $\psi_c$  wird durch die längere Entwicklung der Schnittkräfte als Funktion von  $M_{J_0}^{(h)}, \varphi_J, \varphi_K, \vartheta_h$  ausgeglichen.

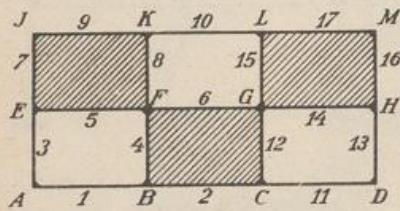


Abb. 339.

**Berechnung eines Silorahmens mit der in Abb. 339 angegebenen Belastung.**

$\overline{JM} = 3l, \overline{AJ} = 2h, l/h = \lambda$ . Das Trägheitsmoment  $J$  der Stäbe ist konstant. System und Belastung sind zur senkrechten Mittellinie symmetrisch, die Stabdrehwinkel durch die Art der Stützung Null.

1. Bedingungen für die winkeltreue Verformung der Stäbe am Knoten:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{AM}^{(1)} &= \tau_{AM}^{(3)} & \tau_{BM}^{(1)} &= \tau_{B_0}^{(2)} + \tau_{BM}^{(2)} & \tau_{F_0}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)} &= \tau_{F_0}^{(8)} + \tau_{FM}^{(8)} \\ \tau_{EM}^{(3)} &= \tau_{E_0}^{(5)} + \tau_{EM}^{(5)} & \tau_{BM}^{(1)} &= \tau_{B_0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} & \tau_{K_0}^{(8)} + \tau_{KM}^{(8)} &= \tau_{K_0}^{(9)} + \tau_{KM}^{(9)} \\ \tau_{EM}^{(3)} &= \tau_{E_0}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)} & \tau_{F_0}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)} &= \tau_{F_0}^{(5)} + \tau_{FM}^{(5)} & \tau_{K_0}^{(8)} + \tau_{KM}^{(8)} &= \tau_{KM}^{(10)} \\ \tau_{J_0}^{(7)} + \tau_{JM}^{(7)} &= \tau_{J_0}^{(9)} + \tau_{JM}^{(9)} & \tau_{F_0}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)} &= \tau_{F_0}^{(6)} + \tau_{FM}^{(6)} & & \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

2. Bedingungen für das Gleichgewicht der Anschlußmomente an den 6 Knotenpunkten der linken Hälfte des Stabwerks:

$$\left. \begin{aligned} (2\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{BM}^{(1)}) + (2\tau_{AM}^{(3)} + \tau_{EM}^{(3)})\lambda &= 0 \\ (2\tau_{EM}^{(3)} + \tau_{AM}^{(3)})\lambda + (2\tau_{EM}^{(5)} + \tau_{FM}^{(5)}) + (2\tau_{EM}^{(7)} + \tau_{JM}^{(7)})\lambda &= 0 \\ (2\tau_{JM}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)})\lambda + (2\tau_{JM}^{(9)} + \tau_{KM}^{(9)}) &= 0 \\ (2\tau_{BM}^{(1)} + \tau_{AM}^{(1)}) + (2\tau_{BM}^{(4)} + \tau_{FM}^{(4)})\lambda + \tau_{BM}^{(2)} &= 0 \\ (2\tau_{FM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)})\lambda + (2\tau_{FM}^{(8)} + \tau_{KM}^{(8)})\lambda + (2\tau_{FM}^{(5)} + \tau_{EM}^{(5)}) + \tau_{FM}^{(6)} &= 0 \\ (2\tau_{KM}^{(8)} + \tau_{JM}^{(8)}) + \tau_{KM}^{(10)} + (2\tau_{KM}^{(9)} + \tau_{FM}^{(9)})\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Aus der Symmetrie der Belastung der einzelnen Zellen folgt

$$\begin{aligned} +\tau_{J_0}^{(7)} &= -\tau_{E_0}^{(7)} = -\tau_{K_0}^{(8)} = +\tau_{F_0}^{(8)} = +\tau_{F_0}^{(4)} = -\tau_{B_0}^{(4)} = \frac{p h^3}{24 E J} = \beta, \\ -\tau_{J_0}^{(9)} &= +\tau_{K_0}^{(9)} = +\tau_{B_0}^{(5)} = -\tau_{F_0}^{(5)} = -\tau_{F_0}^{(6)} = +\tau_{E_0}^{(6)} = \frac{p l^3}{24 E J} = \alpha. \end{aligned}$$

3. Die Gleichgewichtsbedingungen (b) enthalten in Verbindung mit (a) 6 ausgezeichnete Drehwinkel, von denen jeder einem der 6 Stabknoten zugeordnet ist.

$$\begin{aligned} \tau_{AM}^{(1)}(2 + 2\lambda) + \tau_{BM}^{(1)} + \tau_{EM}^{(5)}\lambda + \lambda\alpha &= 0, \\ \tau_{AM}^{(1)}\lambda + \tau_{EM}^{(5)}(4\lambda + 2) + \tau_{FM}^{(5)} + \tau_{JM}^{(9)}\lambda + 3\lambda\alpha + \lambda\beta &= 0, \\ \tau_{JM}^{(9)}(2 + 2\lambda) + \tau_{EM}^{(5)}\lambda + \tau_{KM}^{(10)} - \alpha(\lambda + 1) - \lambda\beta &= 0, \\ \tau_{AM}^{(1)} + \tau_{BM}^{(1)}(3 + 2\lambda) + \tau_{FM}^{(5)}\lambda - \alpha(\lambda + 1) + \lambda\beta &= 0, \\ \tau_{FM}^{(5)}(4\lambda + 3) + \tau_{BM}^{(1)}\lambda + \tau_{EM}^{(5)} + \tau_{KM}^{(10)}\lambda - 4\lambda\alpha - 3\lambda\beta &= 0, \\ \tau_{KM}^{(10)}(2\lambda + 3) + \tau_{JM}^{(9)} + \tau_{FM}^{(5)}\lambda - \alpha(2 + \lambda) + \lambda\beta &= 0. \end{aligned}$$



Ergebnis der Elimination mit  $l/h = \lambda = 2$ ,  $\alpha = 8\beta$  nach Umordnung der Gleichungen in eine symmetrische Matrix:

$$\begin{aligned} \tau_{KM}^{(10)} &= +1,6\beta, & \tau_{EM}^{(1)} &= +1,453589\beta, & \tau_{FM}^{(5)} &= +6,204838\beta, \\ \tau_{EM}^{(5)} &= -6,754972\beta, & \tau_{JM}^{(9)} &= +6,318324\beta, & \tau_{AM}^{(1)} &= -0,657274\beta. \end{aligned}$$

Durch Rekursion ist:

$$\begin{aligned} \tau_{AM}^{(3)} &= +0,657274\beta, & \tau_{EM}^{(7)} &= -6,754972\beta + 8\beta + 1 = +2,245028\beta, \\ \tau_{EM}^{(3)} &= +1,245028\beta, & \tau_{JM}^{(7)} &= +6,318324\beta - 8\beta - \beta = -2,681676\beta, \\ & & \tau_{EM}^{(2)} &= -0,546411\beta. \end{aligned}$$

Die Beziehung (606)  $M_A^{(1)} = \frac{2}{\nu} (2\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{EM}^{(1)})$  liefert folgende Schnittkräfte:

Multiplikator:  $\rho h^2/12$

$$M_J^{(7)} = -(2 \cdot 2,681676 - 2,245028) = -3,1183, \quad M_B^{(1)} = \frac{h}{l} (2 \cdot 1,453589 - 0,657274) = +1,1250,$$

$$M_A^{(3)} = -(2 \cdot 0,657274 - 1,245028) = -0,0695, \quad M_E^{(2)} = -\frac{h}{l} (2 \cdot 6,546411 - 6,546411) = -3,2732,$$

$$M_J^{(9)} = \frac{h}{l} (2 \cdot 6,318324 - 7,4) = +3,1183, \quad M_B^{(4)} = (2 \cdot 2,453589 - 2,759162) = +2,1480,$$

$$M_A^{(1)} = +0,0695, \quad M_E^{(3)} = +1,8328, \quad M_K^{(9)} = -3,2408, \quad M_F^{(6)} = +3,1204,$$

$$M_E^{(7)} = +1,8084, \quad M_J^{(4)} = -3,0647, \quad M_K^{(8)} = +2,4408, \quad M_F^{(8)} = -2,9183,$$

$$M_E^{(5)} = -3,6346, \quad M_F^{(5)} = +2,8634,$$

$$M_K^{(10)} = +0,8000.$$

**Berechnung eines zur Mittellinie symmetrischen Stockwerkrahmens (Abb. 340).**

Belastung durch Nutzlast und waagerechten Winddruck. Die Anzahl der unbekanntenen Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(h)}$  ist  $2s = 30$ , die Anzahl der unbekanntenen Komponenten  $\psi_e$  ist  $f = 3$ .

$$\psi_1 = \vartheta_1, \quad \psi_2 = \vartheta_6, \quad \psi_3 = \vartheta_{11}.$$

Ansatz der  $(2s - r - t) = 18$  Bedingungen (603) für die winkeltreue Verformung der Stäbe am Knoten und der  $t = 3$  Bedingungen  $\varphi_K = \varphi_L = \varphi_M = 0$ :

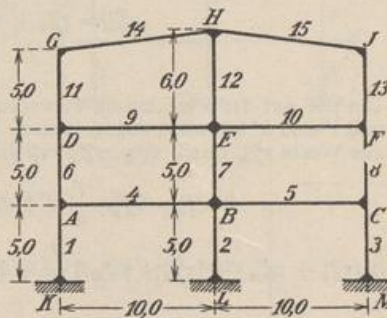


Abb. 340.

$\tau_{E0}^{(1)} + \tau_{KM}^{(1)} + \psi_1 = 0$	$\tau_{L0}^{(2)} + \tau_{EM}^{(2)} + \psi_1 = 0$	$\tau_{M0}^{(3)} + \tau_{MM}^{(3)} + \psi_1 = 0$
$\tau_{A0}^{(1)} + \tau_{AM}^{(1)} + \psi_1 = \tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)}$	$\tau_{B0}^{(2)} + \tau_{BM}^{(2)} + \psi_1 = \tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)}$	$\tau_{C0}^{(3)} + \tau_{CM}^{(3)} + \psi_1 = \tau_{C0}^{(5)} + \tau_{CM}^{(5)}$
$\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} = \tau_{A0}^{(6)} + \tau_{AM}^{(6)} + \psi_2$	$\tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} = \tau_{B0}^{(7)} + \tau_{BM}^{(7)} + \psi_2$	$\tau_{C0}^{(5)} + \tau_{CM}^{(5)} = \tau_{C0}^{(8)} + \tau_{CM}^{(8)} + \psi_2$
$\tau_{D0}^{(6)} + \tau_{DM}^{(6)} + \psi_2 = \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)}$	$\tau_{B0}^{(7)} + \tau_{BM}^{(7)} = \tau_{B0}^{(5)} + \tau_{BM}^{(5)}$	$\tau_{F0}^{(8)} + \tau_{FM}^{(8)} + \psi_2 = \tau_{F0}^{(10)} + \tau_{FM}^{(10)}$
$\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} = \tau_{D0}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)} + \psi_3$	$\tau_{E0}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)} + \psi_2 = \tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)}$	$\tau_{F0}^{(10)} + \tau_{FM}^{(10)} = \tau_{F0}^{(13)} + \tau_{FM}^{(13)} + \psi_3$
$\tau_{D0}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)} + \psi_3 = \tau_{D0}^{(14)} + \tau_{DM}^{(14)}$	$\tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} = \tau_{E0}^{(10)} + \tau_{EM}^{(10)}$	$\tau_{J0}^{(13)} + \tau_{JM}^{(13)} + \psi_3 = \tau_{J0}^{(15)} + \tau_{JM}^{(15)}$
	$\tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} = \tau_{E0}^{(12)} + \tau_{EM}^{(12)} + h_{11}/h_{12} \cdot \psi_3$	
	$\tau_{H0}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} = \tau_{H0}^{(12)} + \tau_{HM}^{(12)} + h_{11}/h_{12} \cdot \psi_3$	
	$\tau_{H0}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} = \tau_{H0}^{(15)} + \tau_{HM}^{(15)}$	

Das Stabwerk ist symmetrisch. Daher wird jede Belastung in den symmetrischen und in den antisymmetrischen Anteil zerlegt.

a) Verschiebungszustand bei Symmetrie der Belastung. Die Stabdrehwinkel  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  und die in der Symmetrieachse liegenden Drehwinkel sind Null, symmetrisch liegende Drehwinkel  $\tau_{JM}^{(h)}$  sind entgegengesetzt gleich.



1. Bedingungen für die winkeltreue Verformung der Stäbe am Knoten.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{K0}^{(1)} + \tau_{KM}^{(1)} &= 0 & \tau_{D0}^{(6)} + \tau_{DM}^{(6)} &= \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} \\ \tau_{A0}^{(1)} + \tau_{AM}^{(1)} &= \tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} & \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} &= \tau_{D0}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)} \\ \tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} &= \tau_{A0}^{(6)} + \tau_{AM}^{(6)} & \tau_{G0}^{(11)} + \tau_{GM}^{(11)} &= \tau_{G0}^{(14)} + \tau_{GM}^{(14)} \\ \tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} &= 0, & \tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} &= 0, & \tau_{H0}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

2. Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte an den Knoten A, D, G :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_A = 0 &= 2 \left( \frac{2\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{KM}^{(1)}}{h_1'} + \frac{2\tau_{AM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)}}{l_4'} + \frac{2\tau_{AM}^{(6)} + \tau_{DM}^{(6)}}{h_6'} \right) \\ \Sigma M_D = 0 &= 2 \left( \frac{2\tau_{DM}^{(6)} + \tau_{AM}^{(6)}}{h_6'} + \frac{2\tau_{DM}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)}}{l_9'} + \frac{2\tau_{DM}^{(11)} + \tau_{GM}^{(11)}}{h_{11}'} \right) \\ \Sigma M_G = 0 &= 2 \left( \frac{2\tau_{GM}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)}}{h_{11}'} + \frac{2\tau_{GM}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)}}{l_{14}'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Die den Pfosten zugeordneten Werte  $\tau_{E0}^{(6)}$  sind bei Belastung der Riegelzüge des Rahmens Null und damit die Bedingungen (a)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{E0}^{(6)} = \tau_{A0}^{(1)} = \tau_{A0}^{(6)} = \tau_{D0}^{(6)} = \tau_{D0}^{(11)} = \tau_{G0}^{(11)} &= 0 \\ \tau_{KM}^{(1)} &= 0 & \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} &= \tau_{D0}^{(11)} \\ \tau_{AM}^{(1)} = \tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} & & \tau_{GM}^{(11)} &= \tau_{GM}^{(14)} + \tau_{GM}^{(14)} \\ \tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)} = \tau_{A0}^{(6)} & & \tau_{B0}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} &= 0 \\ \tau_{DM}^{(6)} = \tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)} & & \tau_{E0}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} &= 0 \\ & & \tau_{H0}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Um die Art der Berechnung hervortreten zu lassen, werden auch die Riegel 14, 15 waagrecht und  $l'$  und  $h'$  konstant angenommen. Unter Verwendung der Gln. (c) werden in dem Ansatz (b) alle Werte  $\tau_{jM}^{(h)}$  durch  $\tau_{AM}^{(4)}$ ,  $\tau_{DM}^{(9)}$ ,  $\tau_{GM}^{(14)}$  ausgedrückt:

$$\begin{aligned} 2(\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)}) \frac{l'}{h'} + 2\tau_{AM}^{(4)} - \tau_{B0}^{(4)} + [2(\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)}) + (\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)})] \frac{l'}{h'} &= 0, \\ [2(\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)}) + (\tau_{A0}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)})] \frac{l'}{h'} + 2\tau_{DM}^{(9)} - \tau_{E0}^{(9)} + [2(\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)}) + (\tau_{G0}^{(14)} + \tau_{GM}^{(14)})] &= 0, \\ [2(\tau_{GM}^{(14)} + \tau_{G0}^{(14)}) + (\tau_{D0}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)})] \frac{l'}{h'} + (2\tau_{GM}^{(14)} - \tau_{H0}^{(14)}) &= 0. \end{aligned}$$

Mit  $l'/h' = \lambda$  lautet der Ansatz (b) nunmehr folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \tau_{AM}^{(4)} (2\lambda + 2 + 2\lambda) + \tau_{DM}^{(9)} \lambda &= -\tau_{A0}^{(4)} (2\lambda + 2\lambda) & + \tau_{B0}^{(4)} - \tau_{D0}^{(9)} \lambda, \\ \tau_{AM}^{(4)} \lambda &+ \tau_{DM}^{(9)} (2\lambda + 2 + 2\lambda) + \tau_{GM}^{(14)} \lambda &= -\tau_{A0}^{(4)} \lambda - \tau_{D0}^{(9)} (2\lambda + 2\lambda) + \tau_{E0}^{(9)} - \tau_{G0}^{(14)} \lambda, \\ \tau_{DM}^{(9)} \lambda &+ \tau_{GM}^{(14)} (2\lambda + 2) &= -\tau_{D0}^{(9)} \lambda + \tau_{H0}^{(14)} - 2\tau_{G0}^{(14)} \lambda. \end{aligned}$$

Die symmetrische Belastung der einzelnen Riegel und  $\lambda = 2$  führen zu

$$\begin{aligned} \tau_{A0}^{(4)} &= -\tau_{B0}^{(4)}, & \tau_{D0}^{(9)} &= -\tau_{E0}^{(9)}, & \tau_{G0}^{(14)} &= -\tau_{H0}^{(14)}. \\ 10\tau_{AM}^{(4)} + 2\tau_{DM}^{(9)} & & &= -9\tau_{A0}^{(4)} - 2\tau_{D0}^{(9)}, \\ 2\tau_{AM}^{(4)} + 10\tau_{DM}^{(9)} + 2\tau_{GM}^{(14)} & & &= -2\tau_{A0}^{(4)} - 9\tau_{D0}^{(9)} - 2\tau_{G0}^{(14)}, \\ 2\tau_{DM}^{(9)} + 6\tau_{GM}^{(14)} & & &= -2\tau_{D0}^{(9)} - 5\tau_{G0}^{(14)}. \end{aligned}$$

Auflösung des Ansatzes und Rekursion nach (c) liefert bei der Belastung der Riegelstäbe (4, 5) mit  $p_1$ , der Riegelstäbe (9, 10) mit  $p_2$  und der Riegelstäbe (14, 15) mit  $p_3$  unter Verwendung von  $\frac{p \cdot l^2 \cdot l'}{134 \cdot 24} = c$  als Multiplikator



	$\tau_{KM}^{(1)}$	$\tau_{AM}^{(1)}$	$\tau_{AM}^{(4)}$	$\tau_{AM}^{(6)}$	$\tau_{DM}^{(6)}$	$\tau_{DM}^{(9)}$	$\tau_{DM}^{(11)}$	$\tau_{GM}^{(11)}$	$\tau_{GM}^{(14)}$	$\tau_{EM}^{(4)}$	$\tau_{EM}^{(9)}$	$\tau_{HM}^{(14)}$	
Riegel 4, 5	0	+14	-120	+14	-3	-3	-3	+1	+1	+134	0	0	$c_1$
„ 9, 10	0	-3	-3	-3	+15	-119	+15	-5	-5	0	+134	0	$c_2$
„ 14, 15	0	+1	+1	+1	-5	-5	-5	+24	-110	0	0	+134	$c_3$

Die Stabendmomente werden nach  $M_A^{(4)} = \frac{2}{l} (2\tau_{AM}^{(4)} + \tau_{EM}^{(4)})$  bestimmt. Bei  $l = 2h$  und Belastung des unteren Riegels ist

$$M_A^{(4)} = \frac{2}{l} \frac{p_1 l^2 l'}{134 \cdot 24} (-240 + 134) = -\frac{106}{134} \frac{p_1 l^2}{12},$$

$$M_A^{(1)} = \frac{2}{l} \frac{p_1 l^2 l'}{134 \cdot 24} (+28) = +\frac{56}{134} \frac{p_1 l^2}{12}; \quad M_A^{(9)} = +\frac{50}{134} \frac{p_1 l^2}{12}.$$

Die Bedingung  $\sum M_A = 0$  ist erfüllt.

b) Verschiebungszustand bei Antimetrie der Belastung. Die Windkräfte werden in den Stabknoten eingetragen, so daß die Drehwinkel  $\tau_{F_0}^{(9)}$  Null sind. Symmetrisch liegende Drehwinkel sind gleich.

1. Bedingungen für die winkeltreue Verformung am Stabknoten:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{EM}^{(1)} + \psi_1 &= 0, & \tau_{LM}^{(2)} + \psi_1 &= 0, \\ \tau_{AM}^{(1)} + \psi_1 &= \tau_{AM}^{(4)}, & \tau_{BM}^{(2)} + \psi_1 &= \tau_{BM}^{(4)}, \\ \tau_{AM}^{(4)} &= \tau_{AM}^{(6)} + \psi_2, & \tau_{BM}^{(4)} &= \tau_{BM}^{(7)} + \psi_2, \\ \tau_{DM}^{(6)} + \psi_2 &= \tau_{DM}^{(9)}, & \tau_{EM}^{(7)} + \psi_2 &= \tau_{EM}^{(9)}, \\ \tau_{DM}^{(9)} &= \tau_{DM}^{(11)} + \psi_3, & \tau_{EM}^{(9)} &= \tau_{EM}^{(12)} + h_{11}/h_{12} \cdot \psi_3, \\ \tau_{GM}^{(11)} + \psi_3 &= \tau_{GM}^{(14)}, & \tau_{HM}^{(14)} &= \tau_{HM}^{(12)} + h_{11}/h_{12} \cdot \psi_3. \end{aligned} \right\} (d)$$

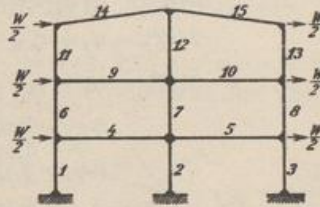


Abb. 341.

2. Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte am Knoten:

$$\left. \begin{aligned} (2\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{KM}^{(1)}) \frac{l'_4}{h'_1} + 2\tau_{AM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} + (2\tau_{AM}^{(6)} + \tau_{DM}^{(6)}) \frac{l'_4}{h'_6} &= 0, \\ (2\tau_{DM}^{(6)} + \tau_{AM}^{(6)}) \frac{l'_9}{h'_6} + 2\tau_{DM}^{(9)} + \tau_{EM}^{(9)} + (2\tau_{DM}^{(11)} + \tau_{GM}^{(11)}) \frac{l'_9}{h'_{11}} &= 0, \\ (2\tau_{GM}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)}) \frac{l'_{14}}{h'_{11}} + 2\tau_{GM}^{(14)} + \tau_{HM}^{(14)} &= 0, \\ 2(2\tau_{HM}^{(14)} + \tau_{GM}^{(14)}) + (2\tau_{HM}^{(12)} + \tau_{EM}^{(12)}) \frac{l'_{14}}{h'_6} &= 0, \\ 2(2\tau_{EM}^{(9)} + \tau_{DM}^{(9)}) + (2\tau_{EM}^{(12)} + \tau_{HM}^{(12)}) \frac{l'_9}{h'_{12}} + (2\tau_{EM}^{(7)} + \tau_{BM}^{(7)}) \frac{l'_9}{h'_7} &= 0, \\ 2(2\tau_{BM}^{(4)} + \tau_{AM}^{(4)}) + (2\tau_{BM}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)}) \frac{l'_4}{h'_7} + (2\tau_{BM}^{(2)} + \tau_{LM}^{(2)}) \frac{l'_4}{h'_2} &= 0. \end{aligned} \right\} (e)$$

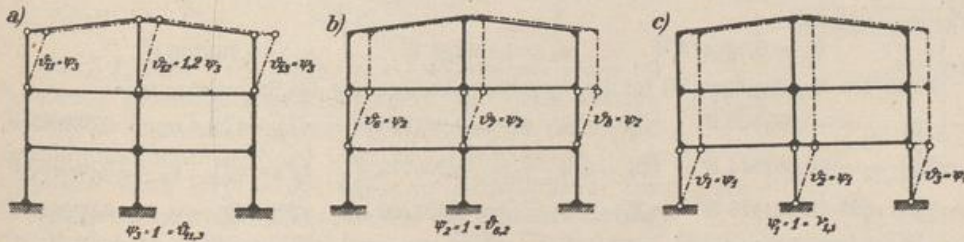


Abb. 342.



3. Bedingungen für das Gleichgewicht der Anschlußkräfte an drei Stabketten  $\dot{\psi}_3 = 1, \dot{\psi}_2 = 1, \dot{\psi}_1 = 1$  (Abb. 342). Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{6}{h'_{11}} (\tau_{DM}^{(11)} + \tau_{GM}^{(11)}) \cdot 1 + \frac{6}{h'_{12}} (\tau_{EM}^{(12)} + \tau_{HM}^{(12)}) \frac{h_{11}}{h_{12}} + \frac{6}{h'_{13}} (\tau_{FM}^{(13)} + \tau_{JM}^{(13)}) \cdot 1 + W \cdot h &= 0, \\ \frac{6}{h'_6} (\tau_{AM}^{(6)} + \tau_{DM}^{(6)}) \cdot 1 + \frac{6}{h'_7} (\tau_{BM}^{(7)} + \tau_{EM}^{(7)}) \cdot 1 + \frac{6}{h'_8} (\tau_{GM}^{(8)} + \tau_{FM}^{(8)}) \cdot 1 + 2 W \cdot h &= 0, \\ \frac{6}{h'_1} (\tau_{KM}^{(1)} + \tau_{AM}^{(1)}) \cdot 1 + \frac{6}{h'_2} (\tau_{LM}^{(2)} + \tau_{BM}^{(2)}) \cdot 1 + \frac{6}{h'_3} (\tau_{MM}^{(3)} + \tau_{OM}^{(3)}) \cdot 1 + 3 W \cdot h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Um die Entwicklung der Rechnung hervortreten zu lassen, wird  $h_{11} = h_{12} = h_{13}$  und das Verhältnis  $l' : h' = \lambda = 2$  angenommen. Der Ansatz (f) erhält dann folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{6}{h'} (\tau_{GM}^{(11)} + \tau_{DM}^{(11)}) + \frac{6}{h'} (\tau_{HM}^{(12)} + \tau_{EM}^{(12)}) + W h &= 0, \\ 2 \frac{6}{h'} (\tau_{DM}^{(6)} + \tau_{AM}^{(6)}) + \frac{6}{h'} (\tau_{EM}^{(7)} + \tau_{BM}^{(7)}) + 2 W h &= 0, \\ 2 \frac{6}{h'} (\tau_{AM}^{(1)} + \tau_{KM}^{(1)}) + \frac{6}{h'} (\tau_{BM}^{(2)} + \tau_{LM}^{(2)}) + 3 W h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Mit den Beziehungen (d) über die winkeltreue Verformung und  $\bar{W} = \frac{W h h'}{6}$  ist

$$\left. \begin{aligned} 2 (\tau_{GM}^{(14)} - \psi_3 + \tau_{DM}^{(9)} - \psi_3) + (\tau_{HM}^{(14)} - \psi_3 + \tau_{EM}^{(9)} - \psi_3) + \bar{W} &= 0, \\ 2 (\tau_{DM}^{(9)} - \psi_2 + \tau_{AM}^{(4)} - \psi_2) + (\tau_{EM}^{(9)} - \psi_2 + \tau_{BM}^{(4)} - \psi_2) + 2 \bar{W} &= 0, \\ 2 (\tau_{AM}^{(4)} - \psi_1 + \psi_1) + (\tau_{BM}^{(4)} - \psi_1 - \psi_1) + 3 \bar{W} &= 0, \\ \left. \begin{aligned} 6 \psi_3 &= 2 \tau_{GM}^{(14)} + 2 \tau_{DM}^{(9)} + \tau_{HM}^{(14)} + \tau_{EM}^{(9)} + \bar{W}, \\ 6 \psi_2 &= 2 \tau_{DM}^{(9)} + 2 \tau_{AM}^{(4)} + \tau_{EM}^{(9)} + \tau_{BM}^{(4)} + 2 \bar{W}, \\ 6 \psi_1 &= 2 \tau_{AM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)} + 3 \bar{W}. \end{aligned} \right\} \quad (h) \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (e) werden mit Hilfe von (d) derart zusammengezogen, daß in ihnen außer den drei Komponenten  $\psi$  nur sechs ausgezeichnete Winkel  $\tau_{KM}^{(h)}$  enthalten sind, von denen jeder einem der sechs Stabwerksknoten zugeordnet ist. Das Ergebnis lautet:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{AM}^{(4)} (2 \lambda + 2 + 2 \lambda) + \tau_{BM}^{(4)} + \tau_{DM}^{(9)} \lambda - 3 \psi_1 \lambda - \psi_2 (2 \lambda + \lambda) &= 0, \\ \tau_{DM}^{(9)} (2 \lambda + 2 + 2 \lambda) + \tau_{AM}^{(4)} \lambda + \tau_{EM}^{(9)} + \tau_{GM}^{(14)} \lambda - 3 \psi_2 \lambda - 3 \psi_3 \lambda &= 0, \\ \tau_{GM}^{(14)} (2 \lambda + 2) + \tau_{DM}^{(9)} \lambda + \tau_{HM}^{(14)} - 3 \psi_3 \lambda &= 0, \\ \tau_{HM}^{(14)} (4 + 2 \lambda) + 2 \tau_{GM}^{(14)} + \tau_{EM}^{(9)} \lambda - (2 + 1) \psi_3 \lambda &= 0, \\ \tau_{EM}^{(9)} (4 + 4 + 2 \lambda) + 2 \tau_{DM}^{(9)} + 2 \tau_{HM}^{(14)} + \tau_{BM}^{(4)} \lambda - (4 + 2) \psi_3 - 3 \psi_2 \lambda &= 0, \\ \tau_{BM}^{(4)} (4 + 2 \lambda + 2 \lambda) + 2 \tau_{AM}^{(4)} + \tau_{EM}^{(9)} \lambda - 3 \psi_1 \lambda - 3 \psi_2 \lambda &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Die Elimination der Komponenten  $\psi$  mit (h) liefert den Ansatz für die sechs ausgezeichneten Winkel  $\tau_{KM}^{(h)}$  mit der folgenden Lösung:

$$\begin{aligned} \tau_{DM}^{(9)} &= 0,788452 \bar{W}, & \tau_{EM}^{(9)} &= 0,646808 \bar{W}, & \tau_{GM}^{(14)} &= 0,411702 \bar{W}, \\ \tau_{BM}^{(4)} &= 0,808175 \bar{W}, & \tau_{HM}^{(14)} &= 0,275728 \bar{W}, & \tau_{AM}^{(4)} &= 1,075830 \bar{W} \end{aligned}$$

Aus (h) folgt damit:

$$\psi_3 = 0,720474 \bar{W}, \quad \psi_2 = 1,197258 \bar{W}, \quad \psi_1 = 0,993306 \bar{W}.$$

Nach den Bedingungen (d) für die winkeltreue Verformung des Stabwerkes ist

$$\begin{array}{|l} \tau_{KM}^{(1)} = -\psi_1 = -0,993306 \bar{W} \\ \tau_{AM}^{(1)} = \tau_{AM}^{(4)} - \psi_1 = +0,082524 \bar{W} \\ \tau_{AM}^{(6)} = \tau_{AM}^{(4)} - \psi_2 = -0,121428 \bar{W} \\ \tau_{DM}^{(6)} = \tau_{DM}^{(9)} - \psi_2 = -0,408806 \bar{W} \end{array} \quad \begin{array}{|l} \tau_{DM}^{(11)} = \tau_{DM}^{(9)} - \psi_3 = +0,067978 \bar{W} \\ \tau_{GM}^{(11)} = \tau_{GM}^{(14)} - \psi_3 = -0,308772 \bar{W} \\ \tau_{LM}^{(2)} = -\psi_1 = -0,993306 \bar{W} \\ \tau_{BM}^{(2)} = \tau_{BM}^{(4)} - \psi_1 = -0,185131 \bar{W} \end{array} \quad \begin{array}{|l} \tau_{BM}^{(7)} = \tau_{BM}^{(4)} - \psi_2 = -0,389083 \bar{W} \\ \tau_{EM}^{(7)} = \tau_{EM}^{(9)} - \psi_2 = -0,550450 \bar{W} \\ \tau_{EM}^{(8)} = \tau_{EM}^{(9)} - \psi_3 = -0,079666 \bar{W} \\ \tau_{HM}^{(8)} = \tau_{HM}^{(14)} - \psi_3 = -0,444746 \bar{W} \end{array}$$



Die Stabendmomente können nunmehr nach (606) angegeben werden. Danach ist

$$M_A^{(4)} = \frac{2}{l_k'} (2 \tau_{AM}^{(4)} + \tau_{BM}^{(4)}) \quad \text{und mit} \quad \frac{Wk}{3} = c$$

$$M_G^{(14)} = + \frac{2}{l'} (2 \cdot 0,411702 + 0,275728) \bar{W} = + 0,5496 c,$$

$$M_G^{(11)} = - \frac{2}{l'} (2 \cdot 0,308772 - 0,067978) \bar{W} = - 0,5496 c,$$

$$M_B^{(11)} = + \frac{2}{l'} (2 \cdot 0,067978 - 0,308772) \bar{W} = - 0,1728 c,$$

$$\begin{aligned} M_G^{(9)} &= +1,1119 c, & M_A^{(1)} &= -0,8283 c, & M_B^{(9)} &= M_B^{(10)} = +1,0410 c, & M_B^{(4)} &= M_B^{(5)} = +1,3461 c, \\ M_B^{(6)} &= -0,9390 c, & M_K^{(1)} &= -1,9041 c, & M_B^{(12)} &= -0,5921 c, & M_B^{(8)} &= -1,3636 c, \\ M_A^{(6)} &= -0,6517 c, & M_H^{(14)} &= M_H^{(15)} = +0,9632 c, & M_B^{(7)} &= -1,4900 c, & M_L^{(9)} &= -2,1717 c, \\ M_A^{(4)} &= +1,4799 c, & M_H^{(2)} &= -0,9631 c, & M_B^{(2)} &= -1,3286 c, \end{aligned}$$

Hartmann, F.: Die statisch unbestimmten Systeme des Eisen- und Eisenbetonbaues 2. Aufl. Berlin 1922. — Bleich, F.: Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes 2. Aufl. Berlin 1925.

#### 44. Kennbeziehungen bei unverschieblichem Knotennetz.

Die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen  $\delta A_J = 0$  (S. 320) zur Berechnung der unbekannt Knotendrehwinkel  $\varphi_{J0}$  und  $\tau_{JM}$  für  $\psi_c = 0$  mit Hilfe der konjugierten Matrix liefert nach S. 247 Kennbeziehungen zwischen den unbekannt Drehwinkeln und daher auch Kennbeziehungen zwischen den hiervon abhängigen Anschlußmomenten. Sie können unter Umständen mit Vorteil zur unmittelbaren Berechnung des Spannungszustandes verwendet werden. Der analytische Zusammenhang wird an einem Ausschnitt des Stabwerks geklärt (Abb. 343).

Die  $EJ_c$ -fachen Verdrehungen der Endtangente eines geraden, in den Knotenpunkten  $J, K$  mit Gelenken angeschlossenen Stabes ( $k$ ) durch das Anschlußmoment  $M_J^{(k)} = 1$  sind  $\alpha_{JJ}^{(k)}, \alpha_{KK}^{(k)}$  (Abb. 343 a). Die  $EJ_c$ -fachen Drehwinkel aus dem Anschlußmoment  $M_K^{(k)} = 1$  werden mit  $\alpha_{JK}^{(k)}, \alpha_{KJ}^{(k)}$ , die  $EJ_c$ -fachen Drehwinkel aus der Belastung  $\mathfrak{P}_h$  des Stabes mit  $\alpha_{J0}^{(k)}, \alpha_{K0}^{(k)}$  bezeichnet. Die Bewegung im Urzeigersinn ist positiv. Bei gerader Stabachse und konstantem Querschnitt ist mit  $l_k J_c / J_k = l_k'$  und (625)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{JJ}^{(k)} &= \frac{l_k'}{3} = \alpha_{KK}^{(k)}, & \alpha_{JK}^{(k)} &= \alpha_{KJ}^{(k)} = - \frac{l_k'}{6}, \\ \alpha_{J0}^{(k)} &= \frac{l_k'}{6} R_K^{(k)}, & \alpha_{K0}^{(k)} &= \frac{l_k'}{6} R_J^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (610)$$

Die  $EJ_c$ -fache Verdrehung der Endtangente eines im Knoten  $J$  gelenkig angeschlossenen, im benachbarten Knoten  $H$  elastisch eingespannten Stabes ( $h$ ) durch ein Anschlußmoment  $M_J^{(h)} = 1$  ist  $\bar{\tau}_J^{(h)}$  (Abb. 343 b). Der reziproke Wert  $1/\bar{\tau}_J^{(h)} = \rho_J^{(h)}$  wird als Anschlußzahl des Stabes ( $h$ ) am Knoten  $J$  bezeichnet. Sie gibt den Betrag des Momentes  $M_J^{(h)}$  an, welches zu einer Verdrehung der Endtangente  $\bar{\tau}_J^{(h)} = 1$  notwendig ist. Das Anschlußmoment  $M_J^{(h)} = 1$  erzeugt am Stabende  $H$  das

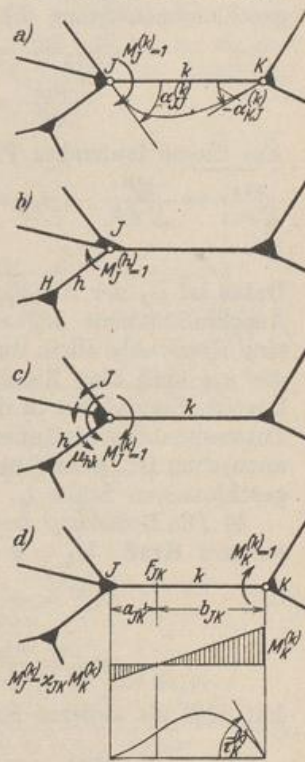


Abb. 343.