



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Die Anschlußmomente am Knoten J durch äußere Kräfte am Stab JK

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Anschlußmoment  $M_{HJ}^{(h)}$ , dessen Größe von der  $EJ_c$ -fachen elastischen Verdrehung  $\varphi_H$  des Knotens  $H$  durch ein Kräftepaar 1 abhängt und aus der Kontinuitätsbedingung am Anschluß  $H$  berechnet wird.

$$\left. \begin{aligned} M_{HJ}^{(h)} (\alpha_{HH}^{(h)} - \bar{\varphi}_H) + \alpha_{HJ}^{(h)} &= 0, & M_{HJ}^{(h)} &= -\frac{\alpha_{HJ}^{(h)}}{\alpha_{HH}^{(h)} - \bar{\varphi}_H}, \\ \bar{\tau}_J^{(h)} &= \alpha_{JJ}^{(h)} + M_{HJ}^{(h)} \alpha_{JH}^{(h)} = \alpha_{JJ}^{(h)} - \frac{\alpha_{HJ}^{(h)2}}{\alpha_{HH}^{(h)} - \bar{\varphi}_H} = \frac{1}{\varrho_J^{(h)}}. \end{aligned} \right\} \quad (611)$$

Bei gelenkigem Anschluß des Stabes ( $h$ ) am Knoten  $H$  ist  $M_{HJ}^{(h)} = 0$ , also  $\bar{\varphi}_H = \infty$  und  $\bar{\tau}_J^{(h)} = \alpha_{JJ}^{(h)}$ , bei starrer Einspannung ist  $\bar{\varphi}_H = 0$ . Für Stäbe mit konstantem Querschnitt ist

$$\text{bei } \bar{\varphi}_H = \infty: \bar{\tau}_J^{(h)} = l_h/3, \quad \text{bei } \bar{\varphi}_H = 0: \bar{\tau}_J^{(h)} = l_h/4. \quad (612)$$

Die Anschlußzahl  $\varrho_H^{(h)}$  des Stabes ( $h$ ) am Knoten  $H$  kann ebenso festgestellt werden:

$$\bar{\tau}_H^{(h)} = \alpha_{HH}^{(h)} - \frac{\alpha_{HJ}^{(h)2}}{\alpha_{JJ}^{(h)} - \bar{\varphi}_J} = \frac{1}{\varrho_H^{(h)}}. \quad (613)$$

### Die Anschlußmomente am Knoten $J$ durch äußere Kräfte am Stabe $JK$ .

a) Die Belastung des Stabes besteht aus dem Anschlußmoment  $M_J^{(j)} = 1$  des Stabwerks als äußerer Kraft (Abb. 343c). Sie erzeugt an den übrigen in  $J$  angeschlossenen Stäben ( $h$ ) die Anschlußmomente  $M_J^{(h)} = \mu_{hk}$ . Diese stehen mit  $M_J^{(j)} = 1$  im Gleichgewicht.

$$\sum_J \mu_{hk} + 1^{(j)} = 0. \quad (614)$$

Ihre Größe ergibt sich aus der winkeltreuen Verformung der im Knoten  $J$  angeschlossenen Stäbe ( $h$ ).

$$\left. \begin{aligned} \mu_{1k} \bar{\tau}_J^{(1)} &= \mu_{2k} \bar{\tau}_J^{(2)} = \dots = \mu_{hk} \bar{\tau}_J^{(h)} = \dots = \bar{\varphi}_J, \\ \frac{\mu_{1k}}{\varrho_J^{(1)}} &= \frac{\mu_{2k}}{\varrho_J^{(2)}} = \dots = \frac{\mu_{hk}}{\varrho_J^{(h)}} = \dots = \bar{\varphi}_J. \end{aligned} \right\} \quad (615)$$

Aus dieser laufenden Proportion entsteht

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_{hk}}{\sum \mu_{hk}} &= \frac{\varrho_J^{(h)}}{\sum \varrho_J^{(h)}}, & \mu_{hk} &= -1^{(j)} \frac{\varrho_J^{(h)}}{\sum \varrho_J^{(h)}} = -\frac{\varrho_J^{(h)}}{\Phi_J^{(k)}}, & \bar{\varphi}_J &= \frac{\mu_{hk}}{\varrho_J^{(h)}} = -\frac{1}{\Phi_J^{(k)}}, \\ & & \Phi_J^{(k)} &= \sum \varrho_J^{(h)}. \end{aligned} \right\} \quad (616)$$

Dabei ist  $\bar{\varphi}_J$  der  $EJ_c$ -fache Betrag des Drehwinkels des Stabknotens  $J$  aus einem Anschlußmoment  $M_J^{(j)} = 1$ . Die Anschlußmomente  $M_J^{(h)} = \mu_{hk} M_J^{(j)}$  sind bis auf eine Konstante allein durch die elastischen Eigenschaften des Stabwerks bestimmt, die  $\mu_{hk}$  sind also Kennbeziehungen zwischen den Anschlußmomenten am Stabknoten. Sie werden in der Literatur Übergangszahlen genannt. Da  $M_J^{(j)}$  in diesem Zusammenhang als äußere Kraft, der Anschluß des Stabes ( $k$ ) in  $J$  daher als Gelenk anzusehen ist, bezeichnet  $\Phi_J^{(k)}$  die Summe der Anschlußzahlen aller in  $J$  steif angeschlossenen Stäbe  $l_h$ .

b) Die Belastung des Stabes ( $k$ ) besteht aus dem Anschlußmoment  $M_K^{(k)} = 1$  als äußerer Kraft.  $\mathfrak{P}_k = 0$  (Abb. 343d). Daher ist nach (611)

$$\left. \begin{aligned} M_J^{(k)} &= -\frac{\alpha_{JK}^{(k)}}{\alpha_{JJ}^{(k)} - \bar{\varphi}_J} M_K^{(k)} \quad \text{und} \quad \frac{M_J^{(k)}}{M_K^{(k)}} = \kappa_{JK} = \frac{a_{JK}}{b_{JK}}, \\ \nu_{JK} &= \frac{a_{JK}}{l_k} = \frac{\kappa_{JK}}{1 + \kappa_{JK}} = -\frac{\alpha_{JK}^{(k)}}{\alpha_{JJ}^{(k)} - \bar{\varphi}_J - \alpha_{JK}^{(k)}}. \end{aligned} \right\} \quad (617)$$

Mit  $M_J^{(j)}$  als äußerer Kraft und  $\mathfrak{P}_k = 0$  ist

$$\left. \begin{aligned} M_K^{(k)} &= -\frac{\alpha_{KJ}^{(k)}}{\alpha_{KK}^{(k)} - \bar{\varphi}_K} M_J^{(k)} \quad \text{und} \quad \frac{M_K^{(k)}}{M_J^{(k)}} = \kappa_{KJ} = \frac{a_{KJ}}{b_{KJ}}, \\ \nu_{KJ} &= \frac{a_{KJ}}{l_k} = \frac{\kappa_{KJ}}{1 + \kappa_{KJ}} = -\frac{\alpha_{KJ}^{(k)}}{\alpha_{KK}^{(k)} - \bar{\varphi}_K - \alpha_{KJ}^{(k)}}. \end{aligned} \right\} \quad (618)$$

Bei geraden Stäben mit konstantem Stabquerschnitt wird

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{JK} &= \frac{1}{2 + \frac{6}{l'_k \Phi_J^{(k)}}}; & \nu_{JK} &= \frac{1}{3 + \frac{6}{l'_k \Phi_J^{(k)}}} = \frac{a_{JK}}{l_k}; \\ \kappa_{KJ} &= \frac{1}{2 + \frac{6}{l'_k \Phi_K^{(k)}}}; & \nu_{KJ} &= \frac{1}{3 + \frac{6}{l'_k \Phi_K^{(k)}}} = \frac{a_{KJ}}{l_k}. \end{aligned} \right\} \quad (619)$$

Diese Verhältniszahlen sind durch die elastischen Eigenschaften des Stabwerks vollständig bestimmt und daher Kennbeziehungen für die Anschlußmomente des unbelasteten Stabes ( $k$ ). Beim Vorwärtsschreiten in Richtung  $\vec{JK}$  werden aus gegebenen Anschlußzahlen  $\varrho_J^{(h)}$  die Kennbeziehungen  $\kappa_{JK}$ ,  $\nu_{JK}$  und die Festpunktabstände  $a_{JK}$  für die zeichnerische Untersuchung berechnet. Damit ist dann auch die Anschlußzahl  $\varrho_K^{(k)}$  des Stabes ( $k$ ) bestimmt.

$$\bar{\tau}_K^{(k)} = \frac{1}{\varrho_K^{(k)}} = \alpha_{KK}^{(k)} + \kappa_{JK} \alpha_{KJ}^{(k)}. \quad (620)$$

Umgekehrt wird die Anschlußzahl  $\varrho_J^{(h)}$  aus  $\kappa_{KJ}$  gefunden.

$$\bar{\tau}_J^{(k)} = \frac{1}{\varrho_J^{(h)}} = \alpha_{JJ}^{(k)} + \kappa_{KJ} \alpha_{JK}^{(k)}. \quad (621)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment können nach (619) folgende Ergebnisse angeschrieben werden:

$$\varrho_K^{(k)} = \frac{2}{l'_k} \frac{1 - \nu_{JK}}{2/3 - \nu_{JK}}; \quad \varrho_J^{(k)} = \frac{2}{l'_k} \frac{1 - \nu_{KJ}}{2/3 - \nu_{KJ}}. \quad (622)$$

c) Der  $EJ_c$ -fache Betrag der relativen Verschiebung der Anschlußquerschnitte  $J, K$  eines Stabes  $l_k$  winkelrecht zur Stabachse ist  $w_K - w_J = l_k \vartheta_k$ , unter  $\vartheta_k$  den  $EJ_c$ -fachen Betrag des Stabdrehwinkels verstanden (Abb. 344). Die Anschlußmomente für  $\vartheta_k = 1$  und  $\mathfrak{P}_k = 0$  werden mit  $M_{J\vartheta, k}^{(k)}$ ,  $M_{K\vartheta, k}^{(k)}$  bezeichnet. Sie ergeben sich aus einem Ansatz für die Kontinuität der Verbindung zwischen Stab und Stabknoten.

$$\begin{aligned} \vartheta_k + M_{J\vartheta, k}^{(k)} (\alpha_{JJ}^{(k)} - \bar{\varphi}_J) + M_{K\vartheta, k}^{(k)} \alpha_{JK}^{(k)} &= 0, \\ \vartheta_k + M_{K\vartheta, k}^{(k)} (\alpha_{KK}^{(k)} - \bar{\varphi}_K) + M_{J\vartheta, k}^{(k)} \alpha_{KJ}^{(k)} &= 0. \end{aligned}$$

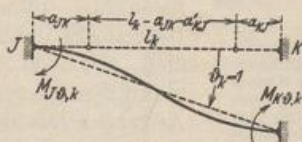


Abb. 344.

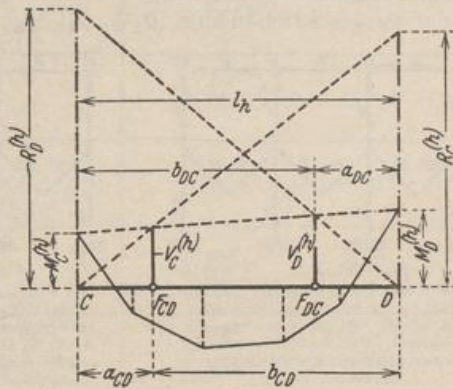


Abb. 345.

$$\left. \begin{aligned} M_{J\vartheta, k}^{(k)} &= \frac{\vartheta_k \kappa_{JK} (1 + \kappa_{KJ})}{\alpha_{JK}^{(k)} (1 - \kappa_{JK} \kappa_{KJ})} = \frac{\vartheta_k}{\alpha_{JK}^{(k)}} \frac{a_{JK}}{l_k - a_{JK} - a_{KJ}}, \\ M_{K\vartheta, k}^{(k)} &= \frac{\vartheta_k \kappa_{KJ} (1 + \kappa_{JK})}{\alpha_{KJ}^{(k)} (1 - \kappa_{JK} \kappa_{KJ})} = \frac{\vartheta_k}{\alpha_{KJ}^{(k)}} \frac{a_{KJ}}{l_k - a_{JK} - a_{KJ}}. \end{aligned} \right\} \quad (623)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment im Bereiche des Stabes ( $k$ ) ist für  $\vartheta_k = 1$

$$M_{J\vartheta, k}^{(k)} = -\frac{6}{l'_k} \frac{a_{JK}}{l_k - a_{JK} - a_{KJ}}, \quad M_{K\vartheta, k}^{(k)} = -\frac{6}{l'_k} \frac{a_{KJ}}{l_k - a_{JK} - a_{KJ}}. \quad (624)$$

d) Die Anschlußmomente  $M_{C0}^{(h)}$ ,  $M_{D0}^{(h)}$  des beiderseits elastisch eingespannten Stabes  $l_h = \overline{CD}$  aus der Belastung  $\mathfrak{P}_h$  werden ebenfalls aus den Kontinuitätsbedingungen an den Stabknoten bestimmt (Abb. 345).

$$\begin{aligned} M_{C0}^{(h)} (\alpha_{C0}^{(h)} - \bar{\varphi}_C) + M_{D0}^{(h)} \alpha_{C0}^{(h)} + \alpha_{C0}^{(h)} &= 0, \\ M_{C0}^{(h)} \alpha_{D0}^{(h)} + M_{D0}^{(h)} (\alpha_{D0}^{(h)} - \bar{\varphi}_D) + \alpha_{D0}^{(h)} &= 0. \end{aligned}$$

Mit den Kennbeziehungen  $\kappa_{CD}$  und  $\kappa_{DC}$  ist dann nach (617), (618)

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\kappa_{CD}} M_{C0}^{(h)} + M_{D0}^{(h)} &= -\frac{\alpha_{C0}^{(h)}}{\alpha_{D0}^{(h)}} = +R_C^{(h)}, \\ M_{C0}^{(h)} - \frac{1}{\kappa_{DC}} M_{D0}^{(h)} &= -\frac{\alpha_{D0}^{(h)}}{\alpha_{C0}^{(h)}} = +R_D^{(h)}. \end{aligned} \right\} \quad (625)$$

$R_C^{(h)}, R_D^{(h)}$  werden in ihrer Bedeutung als Momente ebenfalls im Uhrzeiger positiv gerechnet. Sie sind aus der Belastung des Stabes bekannt und dienen bei der zeichnerischen Bestimmung der Anschlußmomente  $M_{C0}^{(h)}, M_{D0}^{(h)}$  nach Abb. 345 als Kreuzlinienabschnitte. Die Festpunkte  $F_{CD}, F_{DC}$  sind bereits vorher mit  $a_{CD}$  und  $a_{DC}$  eingerechnet worden. Die Konstruktion ist nach Abb. 345 ohne besondere Erklärung verständlich. Sie wird durch die Verwendung der Momente

$$V_{C0}^{(h)} = \frac{a_{CD}}{l_h} R_C^{(h)} = v_{CD} R_C^{(h)}, \quad V_{D0}^{(h)} = \frac{a_{DC}}{l_h} R_D^{(h)} = v_{DC} R_D^{(h)} \quad (626)$$

noch übersichtlicher. Die algebraische Auflösung der beiden Gl. (625) liefert

$$M_{C0}^{(h)} = -\frac{R_C^{(h)}}{\frac{1}{\kappa_{CD}} - \kappa_{DC}} - \frac{R_D^{(h)}}{\frac{1}{\kappa_{CD}} \frac{1}{\kappa_{DC}} - 1}, \quad M_{D0}^{(h)} = -\frac{R_D^{(h)}}{\frac{1}{\kappa_{DC}} - \kappa_{CD}} - \frac{R_C^{(h)}}{\frac{1}{\kappa_{DC}} \frac{1}{\kappa_{CD}} - 1} \quad (627)$$

Die Belastungsglieder  $R_C^{(h)}, R_D^{(h)}$  können unter Beachtung der Vorzeichenregel dieses Abschnitts aus den Tabellen 12ff. angegeben werden. Sie sind für die wichtigsten Belastungsannahmen  $\mathfrak{F}_h$  und Stäbe  $(h)$  mit gleichbleibendem Querschnitt, also mit  $\alpha_{C0}^{(h)} = -l_h/6$  in Tabelle 27 zur unmittelbaren Verwendung vorbereitet.

**Die Verwendung der Ansätze.** Die Ansätze unter a bis d gelten für einen Verschiebungszustand mit  $\psi_c = 0$  oder  $\psi_c = 1$ , dessen Stabdrehwinkel damit Null oder vorgeschrieben sind ( $\vartheta_h = \vartheta_{h0}, \vartheta_{ht}, \vartheta_{hs}, \vartheta_{hc}$ ). Das Kräftebild wird für die Belastung eines einzelnen Stabes entwickelt, dessen Anschlußmomente bei bekannter elastischer Einspannung angeschrieben werden können. Die Anschlußmomente der benachbarten Stäbe ergeben sich aus den Kennbeziehungen  $\mu_{hk}, \kappa_{JK}$  des Ansatzes. Die eindeutige Existenz dieser elastischen Konstanten des

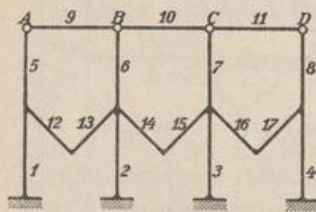


Abb. 346a.

Die Knotendrehwinkel der geometrisch bestimmten Stabkette werden aus einem dreigliedrigen Ansatz berechnet. Die Anschlußmomente können daher mit Kennbeziehungen berechnet werden.

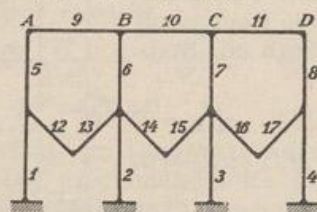


Abb. 346b.

Die Elimination der Knotendrehwinkel führt zu dreigliedrigen Kennbeziehungen, so daß in den Knoten A, B, C, D statische oder geometrische Randbedingungen für den Anschluß der Posten 5 bis 8 vorgeschrieben werden müssen.

Tragwerks wird dabei vorausgesetzt. Sie ist jedoch nur vorhanden, wenn die Knotendrehwinkel in einen dreigliedrigen Ansatz eingehen, so daß Kennbeziehungen  $\kappa_{JK}, \kappa_{KJ}$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotendrehwinkeln  $\varphi_J, \varphi_K$  entstehen, welche von der Lage des belasteten Stabes unabhängig sind. In den anderen Fällen sind die Ansätze für die Klärung des theoretischen Zusammenhanges ohne Bedeutung. Sie können daher zur Berechnung von durchgehenden Trägern mit beliebiger Abstützung nach S. 378 verwendet werden, sie sind dagegen zur theoretisch einwandfreien Untersuchung von steifen Vierecksnetzen (Abb. 346b) unbrauchbar. In diesem Falle entstehen zwar bei der Belastung eines Stabes ebenfalls nur zwei Belastungsglieder, in jeder Gleichung sind aber vier oder fünf Knotendrehwinkel miteinander verknüpft, so daß bei der Auflösung nach (423) dreigliedrige Kennbeziehungen entstehen.