



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

V. Anwendung der Theorie auf die im Bauwesen vielverwendeten
Stabwerke

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

V. Anwendung der Theorie auf die im Bauwesen viel verwendeten Stabwerke.

45. Das Tragwerk als Gegenstand der baustatischen Untersuchung.

Die allgemeine Anordnung eines Bauwerks richtet sich nach dem Zweck der Anlage und nach der Größe und Lage der Lasten. Das Tragwerk übernimmt die äußeren Kräfte und vermittelt zwischen ihnen und den Stützkraften Gleichgewicht. Dabei verändert sich die Form des Tragwerks infolge der elastischen und plastischen Eigenschaften des Baustoffs.

Das System des Tragwerks und die Abmessungen der Teile werden, abgesehen von seltenen Ausnahmen, stets derart gewählt, daß der Formänderungszustand bei der vorgeschriebenen Belastung stabil ist und nur verschwindend kleine Verschiebungen entstehen. Ihre Größe ist neben den Baukosten und den betrieblichen Eigenschaften der Maßstab für die Güte des Tragwerks.

Die Formänderung wird als die Folge von inneren Kräften angesehen, die mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht stehen. Spannung und Verzerrung sind erfahrungsgemäß miteinander verknüpft und im elastischen Bereich wechselweise eindeutig bestimmt. Die Zusammenhänge gelten hinreichend genau als linear, die Verschiebungen als verschwindend klein, so daß zunächst die kleinen Größen zweiter Ordnung und darauf die Verschiebungen selbst im Vergleich zu den Abmessungen der Bauteile vernachlässigt werden. Auf diese Weise entstehen Approximationsstufen der rationellen Lösung, welche durch das Experiment für technische Bedürfnisse als brauchbar bestätigt werden. Sie bilden die Baumechanik, die stets Wissenschaft bleibt, solange der Grad der Annäherung abgeschätzt und an einfachen Beispielen zahlenmäßig festgestellt werden kann.

• Das Tragwerk besteht im allgemeinen aus einer Verbindung von Platten, Schalen, Scheiben und biegungssteifen oder biegungs- und drillungssteifen Stäben, die als Träger bezeichnet werden. Dazu treten meist auch Stäbe, die allein Längskräfte erhalten und daher nur die zur Stabilität des Formänderungszustandes notwendige Steifigkeit besitzen. Außerdem werden oft noch Bauteile verwendet, die nur Zugkräfte aufnehmen, dagegen unter Druckkräften ausschalten, so daß Tragwerke mit veränderlicher Gliederung entstehen. Die Kennzeichnung der Bauteile ist durch ausgezeichnete Annahmen über den Formänderungs- und Spannungszustand bestimmt (Abschn. 8). Dasselbe gilt von der Verbindung der Bauteile, die biegungs- und drillungssteif, in Führungen beweglich oder um Achsen und Punkte frei drehbar angenommen wird.

Die analytischen Beziehungen des Verschiebungs- und Spannungszustandes werden am undeformierten Tragwerk und in der Regel getrennt für jeden einzelnen Bauteil abgeleitet. Hierzu müssen die Verschiebungen und die inneren Kräfte an den Rändern der Schalen, Scheiben und Platten oder an den Enden der Träger bekannt sein. Dieser Teil der Lösung gelingt jedoch nur selten streng. Man begnügt sich zumeist mit wahrscheinlichen Annahmen über die Formänderung an den Unstetigkeitsstellen und rechnet streng nur bei Stabwerken, deren Bauglieder starr oder in reibungslosen Gelenken frei drehbar verbunden sind. Die Fläche der Knotenscheiben ist im Vergleich zu den Abmessungen der Träger in der Regel

klein, so daß die Stablängen bei der Untersuchung des Tragwerks auf die geometrischen Schnittpunkte der Stabachsen bezogen und nur die Trägheitsmomente im Bereich der Knoten unendlich groß eingesetzt werden, um den Formänderungszustand des Tragwerks richtig zu beurteilen. Die Untersuchung läßt sich dann nachträglich durch Sonderbetrachtungen an Scheiben mit vorgeschriebenen Randwerten ergänzen, falls nicht experimentell gewonnene Ergebnisse oder einfache statische Ansätze zwischen den äußeren und inneren Kräften zur Beurteilung der Sicherheit und Gestaltung dieser Bauteile ausreichen. Die Approximationsstufen der Theorie werden daher für baustatische Betrachtungen stets mit den Näherungsfolgen einer Idealisierung des Tragwerks verbunden. Diese behandelt die geometrische Form der Achsen und Querschnitte der Stäbe nach S. 25 und die Art ihrer Verbindung. Sie enthält außerdem Angaben zur angenäherten Beurteilung der Bieigungs- und Drillungssteifigkeit durch Funktionen ζ , ϱ nach S. 97, ohne dabei auf besondere konstruktive Eigenschaften von örtlicher Bedeutung Rücksicht zu nehmen. Geeignete Annahmen über die Bieigungs- und Drillungssteifigkeit ausgezeichneter Bauteile durch unendlich große Trägheitsmomente oder durch Vernachlässigung des Bieigungs- und Drillungswiderstandes und damit Substitution starrer Stabanschlüsse durch Gelenke führen oft zu brauchbaren, zur Abschätzung geeigneten Näherungsrechnungen.

Jedes Stabwerk gilt bei der Untersuchung der Stabilität der Formänderung als räumliches Gebilde. Sie läßt sich am einfachsten nachweisen, wenn jeder Stabknoten kinematisch festliegt. Die Berechnung der Schnittkräfte und Verschiebungen räumlicher Tragwerke ist jedoch nur bei Idealisierung der Stabknoten durch reibungslose Gelenke einfach, die zwar bei ebenen Stabwerken in vielen Fällen zulässig, aber keinesfalls mit der Ausbildung räumlicher Stabknoten verträglich ist. Die statische Untersuchung der räumlichen Stabwerke mit bieigungs- und drillungssteifen Knoten gelingt meist nur bei mehrfacher Symmetrie und ausgezeichneten Belastungsannahmen, welche durch Umordnung aus der vorgeschriebenen Belastung entstanden sind. Zahlreiche Aufgaben können auf diese Weise teils streng, teils angenähert auf die Berechnung ebener Stabwerke zurückgeführt werden. In anderen Fällen können auch Messungen an ausgeführten Bauwerken oder Modellen die räumliche Tragwirkung erschließen und damit die baustatische Untersuchung vorbereiten. Dabei werden stets Verschiebungen beobachtet und miteinander verglichen. Sie führen daher hier ebenso zur Spannungsberechnung wie in den klassischen Ansätzen der Elastizitätstheorie. Diese liefern beim ebenen oder räumlichen Stabwerk mit bieigungssteifen oder bieigungs- und drillungssteifen Gliedern die Komponenten für die Bewegung der Knoten und damit die geometrischen Randbedingungen für die Stäbe. Wird diese Rechnung durch wahrscheinliche Annahmen ersetzt, so entstehen oft brauchbare Näherungslösungen, die zur Abschätzung der Festigkeit und der Abmessungen der Bauteile oder zur Aufteilung eines mehrfach zusammenhängenden ebenen oder räumlichen elastischen Gebildes ausreichen. Unter Umständen wird die wahrscheinliche Formänderung auch in Grenzen eingeschlossen, für welche sich Ansatz und Zahlenrechnung vereinfachen. Der Nachweis der Sicherheit für Grenzbetrachtungen enthält auch die wirkliche Lösung, die unter Umständen vielleicht nur auf schwierigem Wege erhalten wird.

Die Anschlußkräfte der Stäbe lassen sich oft auch unmittelbar als Funktion der Belastung und der statisch überzähligen Größen des Tragwerks anschreiben, wenn ihre Anzahl und ihre wechselseitige Abhängigkeit gering sind. Die Abschätzung der statisch unbestimmten Größen und damit die Vorbereitung von angenäherten Lösungen ist allerdings auf diesem Wege schwieriger.

Während zur Berechnung der unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes des Stabwerks nach Abschn. 38 statische Bedingungsgleichungen verwendet werden (Lösung B), erhalten diese zur Berechnung der statisch unbestimmten Größen

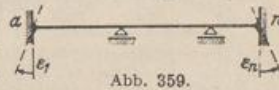
nach Abschn. 24 geometrischen Inhalt (Lösung A). Je kleiner die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes ist, um so eher wird man zur Lösung B greifen, dagegen werden die Schnittkräfte aus den statisch überzähligen Größen berechnet, wenn die Lösung A übersichtlich ist und nicht durch ungünstige Fehlerfortpflanzung leidet. Die zahlreichen Untersuchungen der folgenden Abschnitte bieten ausreichende Gelegenheit, die Brauchbarkeit der beiden Ansätze kritisch zu beurteilen.

Das Ergebnis beschreibt die Formänderung der Stäbe und ihre Schnittkräfte, aus denen die Spannungen des Querschnitts je nach der Ausführung des Tragwerks in Stahl oder Eisenbeton abgeleitet werden. Die Verteilung der Schnittkräfte auf die Bestandteile des Querschnitts ist dabei ebenso wie die Berechnung der Spannungen nur soweit behandelt worden, als dies für die Baustatik notwendig ist. Die vollständige Lösung der Aufgabe und die Untersuchung der Stabilität der Formänderung bleiben in der Regel der Festigkeitslehre vorbehalten. Damit ist das Ziel der Statik des Stabwerks umrissen, nachdem als Voraussetzung für die Brauchbarkeit ihrer Methoden die klare, durch physikalische und statische Erkenntnis bestimmte Konstruktion hervorgehoben worden ist.

Rieckhof: Experimentelle Statik für statisch unbestimmte Systeme. Selbstverlag Beton u. Eisen 1925 Heft 11 S. 260; 1926 S. 73; Beton u. Eisen 1926 Heft 8. — Hofacker, K.: Mechanostatische Untersuchungen hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke. Schweiz. Bauztg. 1926 S. 153. — Gottschalk: Lösung statischer Aufgaben mittels Modellgerät. Z. VDI 1926 S. 261. — Derselbe: Lösung statischer Aufgaben mittels Kontinuität. Beton u. Eisen 1927 Heft 15; 1929 S. 113. — Tillmann, R.: Der Modellversuch in der Baustatik. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1929 Heft 27—30. — Ritter, M.: Experimentelle Methoden der Baustatik. Schweiz. Bauztg. Bd. 96 (1930) Heft 18. — Kann, F.: Fortschritte in der experimentellen Statik vielfach statisch unbestimmter Rahmensysteme. Abh. Int. Kongreß Lüttich 1930. — Derselbe: Drehwinkelverfahren in der experimentellen Statik des Rahmensystems. Z. d. B. 1931 Heft 30. — Beaufoy: Grundsätzliche Schwierigkeiten bei mech. Bemessungsverfahren. Engineering Heft 3491. London 1932. — Schächterle: Modellverfahren zur Ermittlung der inneren Kräfte von beliebig belasteten statisch unbestimmten Tragwerken mit Hilfe der Drehwinkel-Verformungslehre. Org. Fortschr. Eisenbahnwes. 1933 Heft 2.

46. Balkenträger mit statisch unbestimmter Stützung.

Die Trägerenden a und n sind frei drehbar, elastisch drehbar oder starr eingespannt. Die elastische Verdrehung der Endstützen wird durch den EJ_c -fachen Betrag $\varepsilon_1, \varepsilon_n$ des Winkels bestimmt, um den sich diese durch ein Kräftepaar von 1 mt drehen (Abb. 359). Bei starrer Einspannung ist $\varepsilon = 0$. Zur Berechnung der Schnittkräfte werden die negativen Einspannungs- und Stützenmomente $-M_k$ als überzählige Größen X_k verwendet (Abb. 360). Das Hauptsystem besteht dann aus einer Reihe einfacher Träger, die in den gestützten Gelenken k zusammenhängen. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte werden nach den Abschnitten 23 ff. aus geometrischen Bedingungsgleichungen berechnet. Die Vorzeichen δ_{kk}, δ_{ik} und die Belastungszahlen $\delta_{k\infty}$ bedeuten dann die gegenseitige Verdrehung der Stützenquerschnitte k des Hauptsystems infolge von $-X_k = 1$ oder vorgeschriebenen äußeren Ursachen. Sie werden bei beliebig veränderlichem Querschnitt nach Abschn. 18, bei Approximation der Veränderlichkeit der Trägerquerschnitte nach S. 97 ff. aus den Angaben der Tabellen 13 bis 15 entwickelt. Die auf den Stab l_k entfallenden Anteile der Formänderungen $\delta_{(k-1)(k-1)}, \delta_{kk}$ sind bei symmetrischer Ausbildung



$$\left. \begin{aligned} \delta_{(k-1)(k-1),2} = \delta_{kk,1} &= 2\mu_k l_k/6, & \mu_k &= 3 \int_0^1 \xi^2 \zeta_k d\xi, \\ \delta_{k(k-1)} &= \lambda_k l_k/6, & \lambda_k &= 6 \int_0^1 \xi \xi' \zeta_k d\xi, \\ l_k &= l_k J_c/J_k, & \zeta_k &= J_k/J; \end{aligned} \right\} \quad (634)$$

bei unsymmetrischer Ausbildung in den Endfeldern

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11,1} &= 2\bar{\mu}_1 l'_1/6, & \bar{\mu}_1 &= 3 \int_0^1 \xi^2 \zeta_1 d\xi, \\ \delta_{nn,2} &= 2\bar{\mu}_n l'_{n+1}/6, & \bar{\mu}_n &= 3 \int_0^1 \xi'^2 \zeta_{n+1} d\xi'. \end{aligned} \right\} \quad (635)$$

Die Beiwerte $\mu_k, \lambda_k, \bar{\mu}$ werden für die Approximation der Querschnittsfunktion ζ_k nach (634) berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 29 eingetragen.

Tabelle 29. Beiwerte μ_k, λ_k und $\bar{\mu}$ für verschiedene Funktionen $\zeta_k = J_k/J$;

reduzierte Biegelinien $\bar{\omega}_D = \frac{6}{l_k l'_k} \delta_{km}, \bar{\omega}'_D = \frac{6}{l_k l'_k} \delta_{(k-1)m}$.

$\xi = x/l, \xi' = x'/l = 1 - \xi, \xi'' = \frac{1}{2} - \xi'; v = v/l, v' = 1 - v$.

a) Symmetrische Funktionen ζ_k ($\zeta_k = \text{const}$: $\mu = \lambda = 1$). ω_D nach Tab. 22 S. 116.

1		$\begin{aligned} \mu_k &= (1 - 2v)(1 - vv') \\ &= v'^3 - v^3 \\ \lambda_k &= (1 - 2v)(1 + 2vv') \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{\omega}_D &= \omega_D - v^2 \{3\xi - 2v(2\xi - 1)\} \\ \bar{\omega}'_D &= \omega'_D - v^2 \{3\xi' - 2v(2\xi' - 1)\} \end{aligned} \quad *$
2		<p>(angenähert)</p> $\begin{aligned} \mu_k &= 1 - (1-n) \left[2vv' + \frac{v}{3} \right] \\ \lambda_k &= 1 - 3(1-n)v^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{\omega}_D &= \omega_D - (1-n)v^2 \left[\frac{9}{5}\xi - v(2\xi - 1) \right] \\ \bar{\omega}'_D &= \omega'_D - (1-n)v^2 \left[\frac{9}{5}\xi' - v(2\xi' - 1) \right] \end{aligned} \quad *$
3		$\begin{aligned} \mu_k &= 1 - \frac{1-n}{2} v(2 + v'^2) \\ \lambda_k &= 1 - (1-n)v^2(2 - v) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{\omega}_D &= \omega_D - \frac{1-n}{2} v^2(v + 2v'\xi) \\ \bar{\omega}'_D &= \omega'_D - \frac{1-n}{2} v^2(v + 2v'\xi') \end{aligned} \quad *$
4		$\begin{aligned} \zeta_k &= 1 - 4(1-n)\xi''^2 \\ \mu_k &= \frac{2n+3}{5} \\ \lambda_k &= \frac{n+4}{5} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{\omega}_D &= \omega_D - \frac{1-n}{5} \{ \omega_D - 2\omega_R \xi^2 (3\xi' - 1) \} \\ \bar{\omega}'_D &= \omega'_D - \frac{1-n}{5} \{ \omega'_D - 2\omega_R \xi'^2 (3\xi - 1) \} \end{aligned}$
5		$\begin{aligned} \zeta_k &= 1 - (1-n)(2\xi''^2)^{2r} \\ \mu_k &= \frac{3n(r+1) + r(4r+5)}{(2r+1)(2r+3)} \\ \lambda_k &= \frac{3n+4r(r+2)}{(2r+1)(2r+3)} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \bar{\omega}_D &= \omega_D - \frac{3}{2}(1-n)\Phi \\ \bar{\omega}'_D &= \omega'_D - \frac{3}{2}(1-n)\Psi \end{aligned}$ $\begin{aligned} \Phi &= \frac{\{1 + (2r+1)\xi\} \{1 - (2\xi - 1)^{2(r+1)}\}}{(2r+1)(2r+2)(2r+3)} \\ \Psi &= \frac{\{1 + (2r+1)\xi'\} \{1 - (2\xi' - 1)^{2(r+1)}\}}{(2r+1)(2r+2)(2r+3)} \end{aligned}$

* $\bar{\omega}_D$ und $\bar{\omega}'_D$ für den Bereich zwischen den Vouten.

Tabelle 29 (Fortsetzung). b) Unsymmetrische Funktionen ζ_k .

6		$\bar{\mu} = v'^2 \approx \mu_k$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \xi v^2 (1 + 2v')$ Feld n + 1 $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \xi' v^2 (1 + 2v')$	*
7		(angenähert) $\bar{\mu} = 1 - (1-n) \left[2vv' + \frac{v}{3} \right]$ $= \mu_k$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \xi v^2 (1-n) \left(\frac{9}{5} - v \right)$ Feld n + 1 $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \xi' v^2 (1-n) \left(\frac{9}{5} - v \right)$	*
8		$\bar{\mu} = 1 - \frac{1-n}{4} v [(2-v)^2 + 2]$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{1-n}{2} v^2 (2-v) \xi$ Feld n + 1 $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \frac{1-n}{2} v^2 (2-v) \xi'$	*
9		$\zeta_k = 1 - (1-n) \xi'^2$ $\bar{\mu} = \frac{3n+2}{5}$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{3}{10} (1-n) (\xi - \xi^5)$ Feld n + 1 $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \frac{3}{10} (1-n) (\xi' - \xi'^5)$	
10		$\zeta_k = 1 - (1-n) \xi'^r$ $\bar{\mu} = \frac{3n+r}{3+r}$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{6(1-n)}{(r+2)(r+3)} (\xi - \xi^{r+3})$ Feld n + 1 $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \frac{6(1-n)}{(r+2)(r+3)} (\xi' - \xi'^{r+3})$	

Die Beiwerte λ sind bei der Verstärkung des Trägers nächst den Stützen durch Vouten mit $v \leq 0,2$ angenähert gleich 1.

Die Belastungszahlen $\delta_{(k-1)0}$, δ_{k0} werden trotz der Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften der Träger in den Vorzahlen des Ansatzes nach einer der Funktionen ζ_k in der Regel nur mit konstantem Trägheitsmoment angegeben. Die Fehler sind bei der Unsicherheit in der Bemessung und Eintragung der Lasten meist ohne Bedeutung. Sie werden aber trotzdem in den Einflußlinien δ_{mk} , d. h. also in den Biegelinien δ_{mk} des Hauptsystems besser vermieden, um für die Einflußlinien stetige Linien zu erhalten.

Die genauen Belastungszahlen entstehen durch numerische Integration von (300) und bei der Einführung einer der ausgezeichneten Funktionen ζ_k durch Anwendung der Tabellen 12 bis 21. In diesen sind auch die Ordinaten der Biegelinien δ_{mk} für Träger mit Vouten angeschrieben. In der Regel genügt jedoch die Berechnung der Biegelinien für den Bereich des Trägers zwischen den Vouten mit $J = J_k$ und die geradlinige Verlängerung bis zum Stützpunkt, da hier die Krümmung infolge des größeren Trägheitsmomentes der Vouten klein ist. Die Ordinaten des mittleren Abschnitts werden nach

$$\delta_{mk} = \frac{l_k l'_k}{6} \bar{\omega}_D \quad (636)$$

* $\bar{\omega}_D$ und $\bar{\omega}'_D$ für den Bereich zwischen den Vouten.

mit den Angaben der Tabelle 29 für die Funktion $\bar{\omega}_D$ berechnet. Bei annähernd konstantem Trägheitsmoment der einzelnen Träger k des Hauptsystems gelten die Vorzeichen und die Belastungszahlen der Tabelle 12. $\bar{\omega}_D$ wird dann gleich ω_D . Ist außerdem noch das mittlere Trägheitsmoment des Trägers k zur Stützweite l_k verhältnismäßig und damit $l_k J_c / J_k = l'_k = l'$, so erhalten die überzähligen Größen der Bedingungengleichungen (297) konstante Koeffizienten, die Ansatz und Lösung vereinfachen.

Die Schnittkräfte des Trägers aus einer Belastung \mathfrak{P} und den ihr zugeordneten überzähligen Größen X_{k-1}, X_k, X_{k+1} sind aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte oder durch die formale Superposition nach (332) bestimmt (Abb. 360).

$$\left. \begin{aligned} \text{Stützenmomente:} & \quad -M_{k-1} = X_{k-1}, \quad -M_k = X_k, \\ \text{Momente im Felde } l_k: & \quad M = M_0 - X_{k-1} \xi' - X_k \xi, \\ \text{,, ,, ,, } l_{k+1}: & \quad M = M_0 - X_k \xi' - X_{k+1} \xi, \\ \text{Querkraften im Felde } l_k: & \quad Q = Q_0 - \frac{1}{l_k} (X_k - X_{k-1}), \\ \text{,, ,, ,, } l_{k+1}: & \quad Q = Q_0 - \frac{1}{l_{k+1}} (X_{k+1} - X_k), \\ \text{Stützkraft:} & \quad A_k = A_0 + \frac{1}{l_k} (X_k - X_{k-1}) - \frac{1}{l_{k+1}} (X_{k+1} - X_k). \end{aligned} \right\} \quad (637)$$

Die Ansätze gelten auch für die Bildung der Einflußlinien. Die Buchstaben A_0, M_0, Q_0 bezeichnen daher entweder die Stütz- und Schnittkräfte des einfachen Trägers oder deren Einflußlinien. Die Grenzwerte der Stützenmomente und der Biegemomente in Querschnitten zwischen dem Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ (S. 255) aus gleichförmiger Belastung p treten stets bei feldweiser Belastung ein. In dem benachbarten Bereiche genügt in der Regel eine lineare Funktion, welche durch die

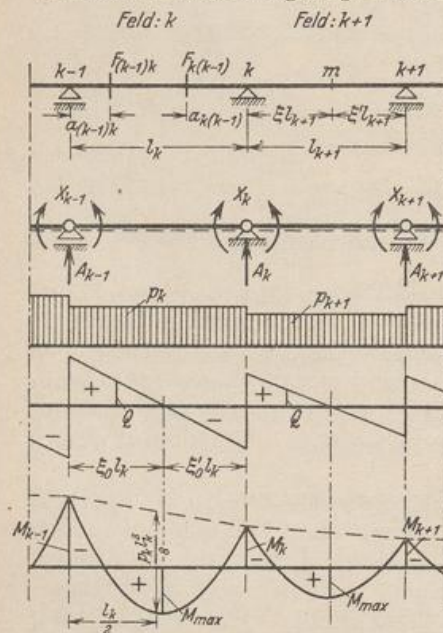


Abb. 360.

Grenzwerte der Biegemomente in den Stütz- und Festpunkten bestimmt ist. (Abb. 374i.) Aus diesem Grunde sind auch die Festpunkte F_{1a} und F_{nb} für die Randfelder l_1, l_{n+1} mit frei drehbaren Endstützen notwendig. Sie werden außerdem noch verwendet, um die Schnittkräfte des durchgehenden Trägers aus einem statisch bestimmten Biegemoment M_a oder M_b über einer Endstütze, z. B. durch Belastung eines Kragarmes, graphisch zu verfolgen. Die Abstände der Festpunkte sind nach (435) durch $\alpha_{1a} = \delta_{1a} / \delta_{11}^{(n-1)} = \delta_{1a} \beta_{11}$ und $\alpha_{nb} = \delta_{nb} / \delta_{nn}^{(n-1)} = \delta_{nb} \beta_{nn}$ bestimmt.

$$\alpha_{1a} = \frac{\alpha_{1a} l_1}{1 + \alpha_{1a}}, \quad \alpha_{nb} = \frac{\alpha_{nb} l_{n+1}}{1 + \alpha_{nb}}. \quad (638)$$

Mit M_p^* und Q_p^* als Biegemoment und Querkraft für gleichförmig verteilte volle Belastung des ganzen Trägers ist

$$\left. \begin{aligned} \max M_p + \min M_p &= M_p^*, \\ \max Q_p + \min Q_p &= Q_p^*. \end{aligned} \right\} \quad (639)$$

Daher kann oft zur Vereinfachung der Rechnung der eine Grenzwert aus M_p^*, Q_p^* und dem anderen berechnet werden.

Die Biegemomente des Trägers l_k sind bei gleichförmiger Belastung p_k (Abb. 360)

$$M = \frac{p_k l_k^2}{2} \omega_R - X_{k-1} \xi' - X_k \xi. \quad (640)$$

Die Abszissen $\xi_0 l_k, \xi'_0 l_k$ des Grenzwertes M_{\max} werden nach S. 42 aus der Bedingung $dM/d\xi = 0$ bestimmt. Mit

$$X_k - X_{k-1} = \Delta X_k \quad \text{ist} \quad \xi_0 = \frac{1}{2} - \frac{\Delta X_k}{p_k l_k^2}, \quad \xi'_0 = \frac{1}{2} + \frac{\Delta X_k}{p_k l_k^2} \quad (641)$$

und

$$M_{\max} = \frac{p_k l_k^2}{2} \xi_0^2 - X_{k-1} = \frac{p_k l_k^2}{2} \xi'_0{}^2 - X_k. \quad (642)$$

1. Träger über einem Feld. a) Einfach statisch unbestimmte Anordnung. Der Träger ist links eingespannt, rechts frei drehbar gelagert. Als statisch überzählige Größe X_1 dient das Einspannungsmoment $-M_a$ (Abb. 361).

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11} + \varepsilon_1} \quad (\text{starre Einspannung: } \varepsilon_1 = 0). \quad (643)$$

Zahlenrechnung bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment nach Abschn. 18,

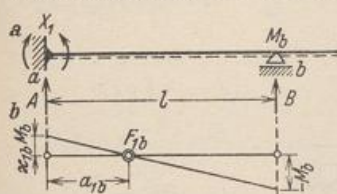


Abb. 361.

bei Approximation der elastischen Eigenschaften nach (635). Darnach ist für $\varepsilon_1 = 0$ (starre Einspannung) $\delta_{11} = \bar{\mu} 2l/6$, bei gleichbleibendem Querschnitt $\delta_{11} = l/3$ und δ_{10} nach Tabelle 12 einzusetzen. Der Festpunkt

F_{1b} wird mit $\delta_{1b} = \lambda l/6$ nach (437) durch

$$\frac{X_1}{M_b} = \kappa_{1b} = \frac{\lambda}{2\bar{\mu}}, \quad a_{1b} = \frac{\lambda l}{\lambda + 2\bar{\mu}} \quad (644)$$

bestimmt; für $J = \text{const}$ ist $\lambda = \bar{\mu} = 1$, $\kappa_{1b} = 1/2$, $a_{1b} = l/3$.

Bei Belastung des Kragträgers ist das Stützmoment M_b statisch bestimmt und daher $X_1 = \kappa_{1b} \cdot M_b$ (Abb. 361). Stütz- und Schnittkräfte für Träger mit konstantem Trägheitsmoment und $\varepsilon_1 = 0$ sind in Tabelle 30 eingetragen.

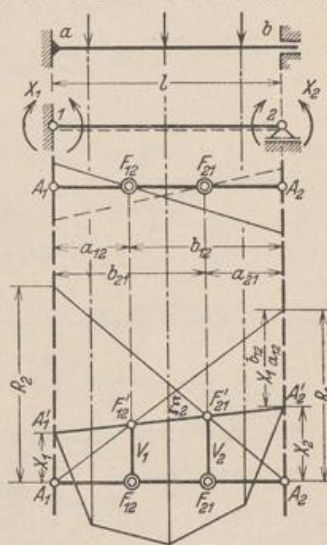


Abb. 362.

b) Zweifach statisch unbestimmte Anordnung. Der Träger ist auf der einen Seite starr, auf der anderen beweglich eingespannt (Abb. 362). Als statisch überzählige Größen werden die Einspannungsmomente $-M_a = X_1, -M_b = X_2$ verwendet und nach (345) für elastische Verdrehung der Stützen berechnet. Der EJ_e -fache Betrag der gegenseitigen Verdrehung der Stützenquerschnitte durch $-X_1 = 1$ oder $-X_2 = 1$ ist dann

$$\delta_{11} + \varepsilon_1 = \delta_{11}^*, \quad \delta_{22} + \varepsilon_2 = \delta_{22}^*, \quad (645)$$

so daß die folgenden geometrischen Bedingungsgleichungen entstehen:

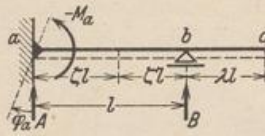
$$X_1 \delta_{11}^* + X_2 \delta_{12} = \delta_{10}, \quad X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}^* = \delta_{20}.$$

Die Vorzeichen und Belastungszahlen ergeben sich bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment nach Abschn. 18, bei Approximation der Funktion ζ nach Tabelle 29. Darnach ist $\delta_{11} = \delta_{22} = 2\bar{\mu} l/6$, $\delta_{12} = \lambda l/6$. Die algebraische Auflösung der Gleichungen steht auf S. 172, die Verwendung der Ergebnisse auf S. 396.

Zur graphischen Auflösung des Ansatzes dient folgende Umformung:

$$X_1 \frac{\delta_{11} + \varepsilon_1}{\delta_{12}} + X_2 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{12}}, \quad X_1 + X_2 \frac{\delta_{22} + \varepsilon_2}{\delta_{12}} = \frac{\delta_{20}}{\delta_{12}}.$$

Tabelle 30. Links eingespannter, rechts frei gelagerter Träger, $J = \text{const.}$



Abszissen der Belastung: $\xi l, \xi' l$

Abszissen der Stabquerschnitte: $\zeta l, \zeta' l$

$-M_a = X_1$; Schnittkräfte zwischen a und b:

$$M = M_0 - X_1 \zeta'; \quad Q = Q_0 + X_1/l;$$

$$A = A_0 + X_1/l; \quad B = B_0 - X_1/l.$$

$A = \frac{1}{2}(2 - 3\xi^2 + \xi^3)$ $B = \frac{1}{2}\xi^2(3 - \xi)$ $M_a = -\frac{l}{2}(\xi' - \xi'^3) = -\frac{l}{2}\omega_D'$ <p>$\zeta = \xi: M_m = \frac{l}{2}\xi^2\xi'(3 - \xi)$</p>	$A = \frac{5}{8}pl$ $B = \frac{3}{8}pl$ $M_a = -\frac{pl^2}{8}$ <p>$\zeta = \frac{5}{8}: \max M = \frac{9pl^2}{128}$</p>
$A = -\frac{3}{2}\xi'$ $B = \frac{1}{2}(3\xi - 1)$ $M_a = +\frac{l}{2}\xi'$ $M_b = -l\xi'$	$A = -\frac{3}{4}pl\lambda^2$ $B = \frac{pl}{4}\lambda(4 + 3\lambda)$ $M_a = \frac{pl^2}{4}\lambda^2$ $M_b = -\frac{pl^2}{2}\lambda^2$
$A = \frac{pl}{2}\alpha(2 - \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{4})$ $B = \frac{pl}{2}\alpha^3(1 - \frac{\alpha}{4})$ $M_a = -\frac{pl^2}{2}\alpha^2(1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{4})$	$A = \frac{pl}{8}\alpha'^2(6 - \alpha'^2)$ $B = \frac{pl}{8}\alpha'(8 - 6\alpha' + \alpha'^3)$ $M_a = -\frac{pl^2}{8}\alpha'^2(2 - \alpha'^2)$
$A = \frac{pl}{40}\alpha(20 - 5\alpha^2 + \alpha^3)$ $B = \frac{pl}{40}\alpha^3(5 - \alpha)$ $M_a = -\frac{pl^2}{120}\alpha^2(20 - 15\alpha + 3\alpha^2)$ <p>Sonderfall: $\alpha = 1$</p> $A = \frac{2}{5}pl; \quad B = \frac{1}{15}pl; \quad M_a = -\frac{1}{15}pl^2$	$A = \frac{pl}{40}\alpha'^2(10 - \alpha'^2)$ $B = \frac{pl}{40}\alpha'(20 - 10\alpha' + \alpha'^3)$ $M_a = -\frac{pl^2}{120}\alpha'^2(10 - 3\alpha'^2)$ <p>Sonderfall: $\alpha' = 1$</p> $A = \frac{1}{10}pl; \quad B = \frac{1}{10}pl; \quad M_a = -\frac{1}{15}pl^2$
$A = -\frac{3}{2l}M\xi(2 - \xi) = -B; \quad M_a = +\frac{1}{2}M(1 - 3\xi'^2) = +\frac{1}{2}M\omega_M'$ <p>Sonderfall: $\xi = 1; \quad A = -\frac{3}{2l}M = -B; \quad M_a = +\frac{1}{2}M$</p>	

Ungleichförmige Temperaturänderung $t_o - t_u = \Delta t$: $M_a = \frac{3}{8}EJ_c \alpha_t \Delta t/h$

Stützenverschiebungen Δ_a, Δ_b und φ_a : $M_a = EJ_c \frac{3}{l} \left(\varphi_a + \frac{\Delta_a}{l} - \frac{\Delta_b}{l} \right)$

Tabelle 31. Beiderseits eingespannter Träger, $J = \text{const}^*$.



Abszissen der Belastung: $\xi l, \xi' l$
 Abszissen der Stabquerschnitte: $\zeta l, \zeta' l$
 $-M_a = X_1; -M_b = X_2.$

$$M = M_0 - X_1 \xi' - X_2 \xi; \quad A = A_0 - \frac{X_2 - X_1}{l}$$

$$Q = Q_0 - \frac{X_2 - X_1}{l}; \quad B = B_0 + \frac{X_2 - X_1}{l}$$

$A = \xi'^2 (1 + 2 \xi)$
 $B = \xi^2 (1 + 2 \xi')$
 $M_a = -l \xi \xi'^2; M_b = -l \xi^2 \xi'$
 $\zeta = \xi; M_m = 2 l \xi^2 \xi'^2$

$A = B = \frac{p l}{2}$
 $M_a = M_b = -\frac{p l^2}{12}$
 $\zeta = 0,2113$ und $\zeta = 0,7887; M = 0$
 $\zeta = 0,5; \max M = +\frac{p l^2}{24}$

$A = -6 M \xi (1 - \xi) 1/l$
 $B = +6 M \xi' (1 - \xi') 1/l$
 $M_a = -M (1 - 4 \xi + 3 \xi^2)$
 $M_b = -M \xi' (2 - 3 \xi')$

$A = \frac{p l}{20} \alpha'^3 (15 - 8 \alpha')$
 $B = \frac{p l}{20} \alpha' [10 - \alpha'^2 (15 - 8 \alpha')]$
 $M_a = -\frac{p l^2}{20} \alpha'^3 (5 - 4 \alpha')$
 $M_b = -\frac{p l^2}{30} \alpha'^2 (10 - 15 \alpha' + 6 \alpha'^2)$

$A = 2 p l \gamma [\xi'^2 (3 - 2 \xi') - \gamma^2 (2 \xi' - 1)]$
 $B = 2 p l \gamma [\xi^2 (3 - 2 \xi) - \gamma^2 (2 \xi - 1)]$
 $M_a = -\frac{2}{3} p l^2 \gamma [3 \xi'^2 \xi - \gamma^2 (3 \xi' - 1)]$
 $M_b = -\frac{2}{3} p l^2 \gamma [3 \xi^2 \xi' - \gamma^2 (3 \xi - 1)]$
 Sonderfall: $\gamma = \xi \leq 0,5$
 $A = 2 p l \xi [1 - 4 \xi^2 \xi']; B = 8 p l \xi^3 \xi'$
 $M_a = -\frac{2}{3} p l^2 \xi^2 [1 - 4 \xi' + 6 \xi'^2]$
 $M_b = -\frac{2}{3} p l^2 \xi^3 (2 - 3 \xi)$
 Sonderfall $\xi = 0,5: A = B = p l \gamma$
 $M_a = M_b = -\frac{p l^2}{12} \gamma [3 - 4 \gamma^2]$

$A = \frac{p l}{20} \alpha'^3 (5 - 2 \alpha')$
 $B = \frac{p l}{20} \alpha' [10 - \alpha'^2 (5 - 2 \alpha')]$
 $M_a = -\frac{p l^2}{60} \alpha'^3 (5 - 3 \alpha')$
 $M_b = -\frac{p l^2}{60} \alpha'^2 [10 (1 - \alpha') + 3 \alpha'^2]$
 Sonderfall: $\alpha' = 1$
 $A = \frac{p}{10} p l, B = \frac{p}{10} p l$
 $M_a = -\frac{1}{10} p l^2, M_b = -\frac{1}{10} p l^2$
 $\zeta = 0,237$ und $\zeta = 0,808; M = 0$
 $\zeta = 0,548; \max M = \frac{p l^2}{46,6}$

Ungleichförmige Temperaturänderung $t_0 - t_u = \Delta t: M_a = M_b = -E J_c \alpha_t \Delta t / h$

Stützenverschiebungen $\Delta_a, \Delta_b: M_a = -\frac{6}{l^2} (\Delta_b - \Delta_a) E J; M_b = -\frac{6}{l^2} (\Delta_a - \Delta_b) E J$

Stützenverdrehungen $\varphi_a, \varphi_b: M_a = +\frac{2}{l} (2 \varphi_a - \varphi_b) E J; M_b = \frac{2}{l} (2 \varphi_b - \varphi_a) E J$

* Weitere Belastungsfälle siehe Tabelle 17 Seite 112.

In dieser sind die reziproken Vorzahlen nach S. 255 Kennbeziehungen zwischen den Einspannungsmomenten. Sie bestimmen die Festpunkte F_{12}, F_{21} der Untersuchung (Abb. 362).

$$\delta_{10} = 0: \left. \begin{aligned} -\frac{X_1}{X_2} &= \frac{a_{12}}{b_{12}} = \kappa_{12} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} + \varepsilon_1} = \frac{\lambda}{2\mu + 6\varepsilon_1/l}, \\ \delta_{20} = 0: -\frac{X_2}{X_1} &= \frac{a_{21}}{b_{21}} = \kappa_{21} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22} + \varepsilon_2} = \frac{\lambda}{2\mu + 6\varepsilon_2/l}. \end{aligned} \right\} \quad (646)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} + \delta_{12} + \varepsilon_1} l = \frac{\lambda l}{2\mu + \lambda + 6\varepsilon_1/l}, \\ a_{21} &= \frac{\delta_{12}}{\delta_{22} + \delta_{12} + \varepsilon_2} l = \frac{\lambda l}{2\mu + \lambda + 6\varepsilon_2/l}. \end{aligned} \right\} \quad (647)$$

Je mehr sich die Endquerschnitte bei der Belastung des Trägers drehen, je größer also ε_1 und ε_2 vorgeschrieben werden, um so kleiner sind die Strecken a_{12}, a_{21} .

$$X_1 \frac{b_{12}}{a_{12}} + X_2 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{12}} = R_1, \quad X_1 + X_2 \frac{b_{21}}{a_{21}} = \frac{\delta_{20}}{\delta_{12}} = R_2.$$

Die Quotienten R_1, R_2 besitzen die Dimension der unbekanntenen Einspannungsmomente. Sie sind unabhängig von den statisch unbestimmten Größen und erhalten durch die Art der graphischen Auflösung die Bezeichnung Kreuzlinienabschnitte. In der Regel werden die den Festpunkten F_{12}, F_{21} zugeordneten Ordinaten V_1, V_2 verwendet.

$$V_1 = \frac{a_{12}}{l} R_1 = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda + 6\varepsilon_1/l} R_1, \quad V_2 = \frac{a_{21}}{l} R_2 = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda + 6\varepsilon_2/l} R_2. \quad (648)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment und $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ ist $a_{12} = a_{21} = l/3, \kappa_{12} = \kappa_{21} = 1/2,$

$$R_1 = \frac{6\delta_{10}}{l}, \quad R_2 = \frac{6\delta_{20}}{l}; \quad V_1 = \frac{2\delta_{10}}{l}, \quad V_2 = \frac{2\delta_{20}}{l}. \quad (649)$$

Die Belastungszahlen δ_{10}, δ_{20} sind in Abschn. 18 als Verdrehung der Endtangente eines einfachen Balkenträgers angegeben, so daß sich besondere Tabellen für die Kreuzlinienabschnitte R_1, R_2 erübrigen. Die Abb. 362 zeigt neben der graphischen Ermittlung von X_1, X_2 aus R_1, R_2 oder V_1, V_2 außerdem noch die der Biegemomente des ganzen Trägers nach (637).

Bei konstantem Trägheitsmoment und $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ entstehen Stütz- und Schnittkräfte nach Tabelle 31 (S. 399).

Die Anwendung der Tabellen 30 u. 31 läßt sich an der Berechnung einer Kranbahnstütze zeigen, deren Enden nach Abb. 363 frei, frei drehbar oder starr eingespannt sind.

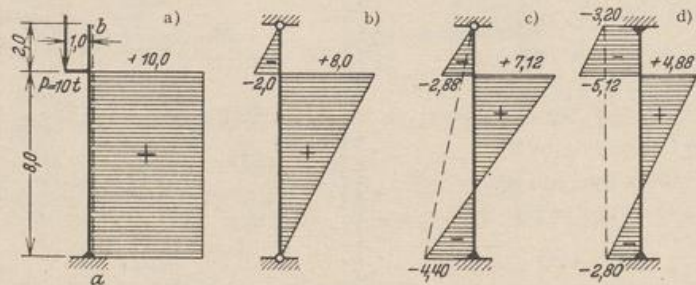


Abb. 363.

Abb. 363a: Kragträger und Abb. 363b: Balkenträger, Schnittkräfte nach Tabelle 6 u. 7.

Abb. 363c: Einseitig eingespannter und gelenkig gestützter Stab.

Tabelle 30 liefert für $M = -10,0 \text{ mt}, l = 10,0 \text{ m}, \xi = 0,8$

$$A = -B = + \frac{3}{2 \cdot 10,0} 10,0 \cdot 0,8 (2 - 0,8) = 1,44 \text{ t},$$

$$M_a = -\frac{1}{2} 10,0 [1 - 3 \cdot 0,2^2] = -4,4 \text{ mt}.$$

Abb. 363d: Beiderseits eingespannte Stütze.

Nach Tabelle 31 wird für $M = -10,0$ mt, $l = 10,0$ m, $\xi = 0,8$

$$A = -B = +6 \cdot 10,0 \cdot 0,8 (1 - 0,8) \frac{1}{10,0} = 0,96 \text{ t.}$$

$$M_a = +10,0 [1 - 4 \cdot 0,8 + 3 \cdot 0,8^2] = -2,8 \text{ mt.}$$

$$M_b = +10,0 \cdot 0,8 (2 - 3 \cdot 0,8) = -3,2 \text{ mt.}$$

2. Träger über zwei Feldern. Allgemeine Anordnung nach Abb. 364. Hauptsystem: Zwei einfache Träger (I), (II). Statisch überzählige Größen: Einspannungsmomente $-M_a = X_1$, $-M_c = X_3$, Stützenmoment $-M_b = X_2$. Berechnung bei allgemeiner Anordnung nach Abschn. 26, bei feldweise konstantem Trägheitsmoment mit Tabelle 32, Teil A. Teil B enthält Angaben bei veränderlichem Trägheitsmoment.



Abb. 364.

Tabelle 32. Träger über zwei Feldern.

A. Das Trägheitsmoment ist feldweise konstant.

Abkürzungen: 1) $\alpha = l_2/l_3$, 2) $\alpha' = l_2'/l_3'$, 3) $\varphi = 2(1 + \alpha')$,
 4) $\psi = \frac{4 + 3\alpha'}{2}$, 5) $\eta = \frac{3 + 4\alpha'}{2}$.

Klammerwerte $[\omega_D' - \kappa_{k(k-1)} \omega_D]$ und $[\omega_D - \kappa_{k(k-1)} \omega_D']$ sind für $0,200 < \kappa < 0,380$ in Tabelle 34 Seite 410 angegeben.

Formeln zur Ermittlung der Festpunktabstände aus den Kennbezeichnungen:

$$a_{(k-1)k} = \frac{\kappa_{k(k-1)} l_k}{1 + \kappa_{k(k-1)}}, \quad a_{k(k-1)} = \frac{\kappa_{k(k-1)} l_k}{1 + \kappa_{k(k-1)}}.$$

Berechnung der Stützkräfte: vgl. Seite 396 und 424.

a) Anordnung Abb. 365.

$$-M_b = X_2$$

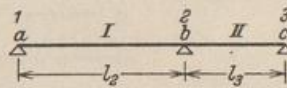


Abb. 365.

Kennbeziehungen:

$$\begin{aligned} \kappa_{a2} &= 0, & \kappa_{c2} &= 0, \\ \kappa_{2c} &= \frac{1}{\varphi}, & \kappa_{2a} &= \frac{\alpha'}{\varphi}. \end{aligned}$$

$$X_2 = \frac{1}{\varphi l_3'} 6 \delta_{20}.$$

Einflusslinien:

Bereich	I	II
φX_2	$l_2 \alpha' \omega_D$	$l_3 \omega_D'$

Schnittkräfte für feldweise Belastung:

Belastung			
X_2	$\frac{p l_2^3 \alpha'}{4 \varphi}$	$\frac{p l_3^3}{4 \varphi}$	$\frac{p l_3^3}{4 \varphi} (1 + \alpha'^2)$
I	max M	$\frac{p l_2^3}{2} \xi_0^2$	$\frac{p l_3^3}{2} \xi_0^2$
	ξ_0	$\frac{\psi}{2 \varphi}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4 \alpha'^2} \frac{1 + \alpha'^2}{\varphi}$
II	max M	$\frac{p l_2^3}{2} \xi_0'^2$	$\frac{p l_3^3}{2} \xi_0'^2$
	ξ_0'	$\frac{\eta}{2 \varphi}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{1 + \alpha'^2}{\varphi}$

Überzählige Schnittkraft X_2 für besondere Belastungen:

Belastung		
X_2	$\frac{p l_2^3}{4} \frac{\alpha'}{\psi} [2(\beta^2 - \alpha^2) - (\beta^4 - \alpha^4)]$	$-\frac{1}{\psi} [\omega_M M_I \alpha' - \omega'_M M_{II}]$

Ungleichförmige Erwärmung $t_u - t_o = \Delta t$: $X_2 = \frac{3}{2} E J_o \frac{\alpha' \Delta t}{d} \frac{l_2 + l_3}{l_2 + l_3}$.

Stützensenkungen $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$: $X_2 = \frac{3 E J_o}{l_2 + l_3} \left[\frac{\Delta_a}{l_2} - \Delta_b \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) + \frac{\Delta_c}{l_3} \right]$.

b) Anordnung Abb. 366.

$-M_a = X_1, \quad -M_b = X_2.$

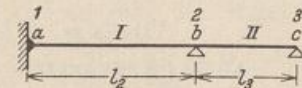


Abb. 366.

Kennbeziehungen:

$$\begin{aligned} \kappa_{12} &= \frac{1}{2}, & \kappa_{c2} &= 0, \\ \kappa_{2c} &= \frac{1}{\psi}, & \kappa_{21} &= \frac{\alpha'}{\psi}. \end{aligned}$$

Konjugierte Matrix der β_{ik} :

	δ_{10}	δ_{20}
$\frac{1}{3} l_2 \psi \cdot X_1$	φ/α'	-1
$\frac{1}{3} l_3 \psi \cdot X_2$	-1	2

Einflußlinien:

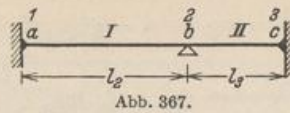
Bereich	I	II
$\psi \cdot X_1$	$\frac{l_2}{2} \varphi [\omega'_D - \kappa_{21} \omega_D]$	$-\frac{l_3}{2} \omega'_D$
$\psi \cdot X_2$	$l_2 \alpha' [\omega_D - \kappa_{12} \omega'_D]$	$l_3 \omega_D$

Schnittkräfte für feldweise Belastung:

Belastung			
X_1	$\frac{p l_2^3}{16} \frac{2 + \varphi}{\psi}$	$-\frac{p l_2^3}{8} \frac{1}{\psi}$	$\frac{p l_2^3}{16} \frac{\alpha^2 (2 + \varphi) - 2}{\psi}$
X_2	$\frac{p l_2^3}{8} \frac{\alpha'}{\psi}$	$\frac{p l_2^3}{4} \frac{1}{\psi}$	
I	max M	$\frac{p l_2^3}{8} \left(4 \xi_0'^2 - \frac{\alpha'}{\psi} \right)$	$\frac{p l_2^3}{8} \left(4 \xi_0^2 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{2 + \alpha' \alpha^2}{\psi} \right)$
	ξ_0	$\frac{3 \varphi}{8 \psi}$	$\frac{1}{2} + \frac{3 - 2 \alpha^2}{8 \psi \alpha^2}$
II	max M		$\frac{p l_2^3}{2} \xi_0'^2$
	ξ_0'		$\frac{3 \varphi}{8 \psi}$
			$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{2 + \alpha' \alpha^2}{\psi}$

c) Anordnung Abb. 367.

$-M_a = X_1, \quad -M_b = X_2, \quad -M_c = X_3.$



Kennbeziehungen:

$$\begin{aligned} \kappa_{12} &= \frac{1}{2}, & \kappa_{32} &= \frac{1}{2}, \\ \kappa_{23} &= \frac{1}{\psi}, & \kappa_{21} &= \frac{\alpha'}{\eta}. \end{aligned}$$

Konjugierte Matrix der β_{ik} :

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}
$\frac{1}{2} l_2^3 \varphi \cdot X_1$	$2 \eta / \alpha'$	-2	1
$\frac{1}{2} l_3^3 \varphi \cdot X_2$	-2	4	-2
$\frac{1}{2} l_3^3 \varphi \cdot X_3$	1	-2	2ψ

Einflußlinien:

Bereich:	I	II
$\frac{3}{4} \varphi \cdot X_1$	$\frac{l_2}{2} \eta [\omega_D' - \kappa_{21} \omega_D]$	$-\frac{l_3}{2} [\omega_D' - \kappa_{32} \omega_D]$
$\frac{3}{4} \varphi \cdot X_2$	$l_2 \alpha' [\omega_D' - \kappa_{12} \omega_D']$	$l_3 [\omega_D' - \kappa_{32} \omega_D]$
$\frac{3}{4} \varphi \cdot X_3$	$-\frac{l_2}{2} \alpha' [\omega_D' - \kappa_{12} \omega_D']$	$\frac{l_3}{2} \psi [\omega_D' - \kappa_{23} \omega_D']$

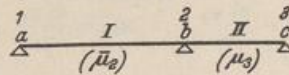
Schnittkräfte für feldweise Belastung:

Belastung			
X_1	$\frac{p l_2^3}{12} \frac{\varphi + 1}{\varphi}$	$-\frac{p l_3^3}{12} \frac{1}{\varphi}$	$\frac{p l_3^3}{12} \frac{\alpha^2 (\varphi + 1) - 1}{\varphi}$
X_2	$\frac{p l_2^3}{6} \frac{\alpha'}{\varphi}$	$\frac{p l_3^3}{6} \frac{1}{\varphi}$	$\frac{p l_3^3}{6} \frac{1 + \alpha' \alpha^2}{\varphi}$
X_3	$-\frac{p l_2^3}{12} \frac{\alpha'}{\varphi}$	$\frac{p l_3^3}{6} \frac{\psi - 1}{\varphi}$	$\frac{p l_3^3}{12} \frac{\alpha' (3 - \alpha^2) + 2}{\varphi}$
I	max M	$\frac{p l_2^3}{6} \left(3 \xi_0'^2 - \frac{\alpha'}{\varphi} \right)$	$\frac{p l_3^3}{6} \left(3 \xi_0'^2 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{1 + \alpha' \alpha^2}{\varphi} \right)$
	ξ_0	$\frac{\eta}{2 \varphi}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{1 - \alpha^2}{4 \varphi}$
II	max M	$\frac{p l_3^3}{6} \left(3 \xi_0'^2 - \frac{1}{\varphi} \right)$	$\frac{p l_3^3}{6} \left(3 \xi_0'^2 - \frac{1 + \alpha' \alpha^2}{\varphi} \right)$
	ξ_0'	$\frac{\psi}{2 \varphi}$	$\frac{1}{2} - \alpha' \frac{1 - \alpha^2}{4 \varphi}$

B. Das Trägheitsmoment ist veränderlich.

Anordnung nach Abb. 368

$-M_b = X_2$



Unsymmetrischer Verlauf* der Funktionen ζ_k .

Abb. 368*.

Approximation von $\zeta_k = J_k/J$ und Beiwert $\bar{\mu}$: Tabelle 29b, S. 395.

Die Belastungszahlen können nach S. 395 mit hinreichender Genauigkeit für feldweise konstantes Trägheitsmoment berechnet werden.

* Für symmetrischen Verlauf von ζ_k tritt an die Stelle von $\bar{\mu}$ der entsprechende Wert μ der Tabelle 29. (In Abb. 368 ist $\mu_3 = \bar{\mu}_3$.)

Abkürzungen: $\alpha = l_2/l_3$; $\alpha' = l'_2/l'_3$; $\varphi' = 2(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_2 \alpha')$.

$$X_2 = \frac{1}{\psi' l'_3} 6 \delta_{20}$$

Einflußlinien:		
Bereich:	I	II
$\varphi' \cdot X_2$	$l_2 \alpha' \bar{\omega}_D$	$l_3 \bar{\omega}'_D$

Reduzierte Biegelinien $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$ nach Tabelle 29, S. 395.

Schnittkräfte für feldweise Belastung:

Belastung			
X_2	$\frac{p l_2^3 \alpha'}{4 \varphi'}$	$\frac{p l_3^3}{4 \varphi'}$	$\frac{p l_3^3}{4} \frac{1 + \alpha' \alpha^2}{\varphi'}$

3. Träger über drei Feldern. Allgemeine Anordnung nach Abb. 369. Hauptsystem: Drei einfache Träger. Statisch überzählige Größen: Einspannungsmomente $-M_a = X_1, -M_d = X_4$, Stützenmomente $-M_b = X_2, -M_c = X_3$. Berechnung bei allgemeiner Anordnung nach Abschn. 26, bei feldweise konstantem Trägheitsmoment mit den Werten der Tabelle 33, Teil A. Teil B enthält Angaben bei veränderlichem Trägheitsmoment.



Abb. 369.

Tabelle 33. Träger über drei Feldern.

A. Das Trägheitsmoment ist feldweise konstant.

- Abkürzungen: 1) $\alpha'_1 = l'_2/l'_3$, 3) $\varphi_1 = 2(1 + \alpha'_1)$, 5) $\psi_1 = 2(1 + \frac{2}{3} \alpha'_1)$,
 2) $\alpha'_2 = l'_4/l'_3$, 4) $\varphi_2 = 2(1 + \alpha'_2)$, 6) $\psi_2 = 2(1 + \frac{2}{3} \alpha'_2)$,
 7) $\eta_1 = \varphi_1 \varphi_2 - 1$, 9) $\eta_3 = \psi_1 \psi_2 - 1$,
 8) $\eta_2 = \psi_1 \varphi_2 - 1$, 10) $\eta_4 = \varphi_1 \psi_2 - 1$.

Klammerwerte $[\omega'_D - \kappa_{k(k-1)} \omega_D]$ und $[\omega_D - \kappa_{(k-1)k} \omega'_D]$ sind für $0,200 < \kappa < 0,380$ in der Tabelle 34 Seite 410 angegeben.

Formeln zur Ermittlung der Festpunktabstände aus den Kennbeziehungen:

$$a_{(k-1)k} = \frac{\kappa_{(k-1)k} l_k}{1 + \kappa_{(k-1)k}}; \quad a_{k(k-1)} = \frac{\kappa_{k(k-1)} l_k}{1 + \kappa_{k(k-1)}}$$

Berechnung der Stützkräfte und der maximalen Momente: vgl. S. 396.

a) Anordnung Abb. 370.

$$-M_b = X_2, \quad -M_c = X_3,$$

Abkürzungen: 1 bis 4 und 7.

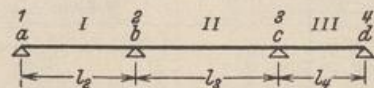


Abb. 370.

Kennbeziehungen:

$$\begin{aligned} \kappa_{a2} &= 0, & \kappa_{a3} &= 0 \\ \kappa_{23} &= \frac{1}{\varphi_1}, & \kappa_{32} &= \frac{1}{\varphi_2} \\ \kappa_{34} &= \frac{\alpha'_2 \varphi_1}{\eta_1}, & \kappa_{2a} &= \frac{\alpha'_1 \varphi_2}{\eta_1} \end{aligned}$$

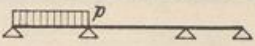
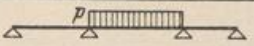
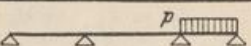
Konjugierte Matrix der β_{ik}

$$\begin{matrix} \delta_{20} & \delta_{30} \\ \frac{1}{6} l'_3 \eta_1 \cdot X_2 & \begin{bmatrix} \varphi_2 & -1 \\ -1 & \varphi_1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{6} l'_3 \eta_1 \cdot X_3 & \end{matrix}$$

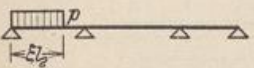
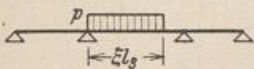
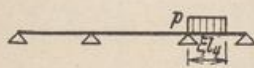
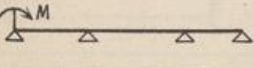
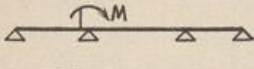
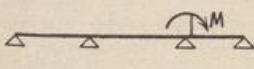
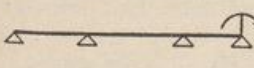
Einflußlinien:

Bereich:	I	II	III
$\eta_1 \cdot X_2$	$l_2 \alpha'_1 \varphi_2 \omega_D$	$l_3 \varphi_2 [\omega'_D - \kappa_{32} \omega_D]$	$-l_4 \alpha'_2 \omega'_D$
$\eta_1 \cdot X_3$	$-l_2 \alpha'_1 \omega_D$	$l_3 \varphi_1 [\omega_D - \kappa_{23} \omega'_D]$	$l_4 \alpha'_2 \varphi_1 \omega'_D$

Überzählige Größen für feldweise Belastung:

Belastung			
$\eta_1 \cdot X_2$	$\frac{p l_2^3}{4} \alpha'_1 \varphi_2$	$\frac{p l_3^3}{4} (\varphi_2 - 1)$	$-\frac{p l_4^3}{4} \alpha'_2$
$\eta_1 \cdot X_3$	$-\frac{p l_2^3}{4} \alpha'_1$	$\frac{p l_3^3}{4} (\varphi_1 - 1)$	$\frac{p l_4^3}{4} \alpha'_2 \varphi_1$

Überzählige Größen für besondere Belastungen:

	$X_2 = \frac{1}{\eta_1} \frac{p l_2^2}{4} \alpha'_1 \varphi_2 \xi^2 (2 - \xi^2)$ $X_3 = -\frac{1}{\eta_1} \frac{p l_2^2}{4} \alpha'_1 \xi^2 (2 - \xi^2)$
	$X_2 = \frac{1}{\eta_1} \frac{p l_3^2}{4} \xi^2 [2(2\varphi_2 - 1) - 4\xi\varphi_2 + \xi^2(\varphi_2 + 1)]$ $X_3 = \frac{1}{\eta_1} \frac{p l_3^2}{4} \xi^2 [4\alpha'_1 + 4\xi - \xi^2(\varphi_1 + 1)]$
	$X_2 = -\frac{1}{\eta_1} \frac{p l_4^2}{4} \alpha'_2 \xi^2 (4 - 4\xi + \xi^2)$ $X_3 = \frac{1}{\eta_1} \frac{p l_4^2}{4} \alpha'_2 \varphi_1 \xi^2 (4 - 4\xi + \xi^2)$
	$X_2 = \frac{1}{\eta_1} M \alpha'_1 \varphi_2; \quad X_3 = -\frac{1}{\eta_1} M \alpha'_1$
	$X_2 = -\frac{1}{\eta_1} 2 M \alpha'_1 \varphi_2; \quad X_3 = \frac{1}{\eta_1} 2 M \alpha'_1$
	$X_2 = -\frac{1}{\eta_1} 2 M \alpha'_2; \quad X_3 = \frac{1}{\eta_1} 2 M \alpha'_2 \varphi_1$
	$X_2 = \frac{1}{\eta_1} M \alpha'_2; \quad X_3 = -\frac{1}{\eta_1} M \alpha'_2 \varphi_1$

Ungleichförmige Erwärmung $t_u - t_o = \Delta t$:

$$X_2 = E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{d} \frac{3}{l_3^2 \eta_1} [\varphi_2 (l_2 + l_3) - (l_3 + l_4)]$$

$$X_3 = E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{d} \frac{3}{l_3^2 \eta_1} [\varphi_1 (l_3 + l_4) - (l_2 + l_3)].$$

Stützenverschiebungen $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ und Δ_d :

$$X_2 = E J_c \frac{6}{l_3^2 \eta_1} \left[\frac{1}{l_2} (\Delta_a - \Delta_b) \varphi_2 - \frac{1}{l_3} (\Delta_b - \Delta_c) (\varphi_2 + 1) + \frac{1}{l_4} (\Delta_c - \Delta_d) \right]$$

$$X_3 = E J_c \frac{6}{l_3^2 \eta_1} \left[\frac{1}{l_4} (\Delta_d - \Delta_c) \varphi_1 - \frac{1}{l_3} (\Delta_c - \Delta_b) (\varphi_1 + 1) + \frac{1}{l_2} (\Delta_b - \Delta_a) \right].$$

b) Anordnung Abb. 371.

$$-M_a = X_1, \quad -M_b = X_2, \quad -M_c = X_3$$

Abkürzungen 1 bis 5, 7 und 8.

Kennbeziehungen:

$$\begin{aligned} \kappa_{12} &= \frac{1}{2}, & \kappa_{43} &= 0, \\ \kappa_{23} &= \frac{1}{\psi_1}, & \kappa_{32} &= \frac{1}{\varphi_2}, \\ \kappa_{34} &= \frac{\alpha'_3 \psi_1}{\eta_3}, & \kappa_{21} &= \frac{\alpha'_1 \varphi_2}{\eta_1}. \end{aligned}$$

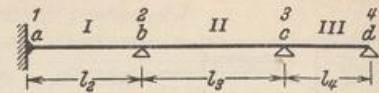


Abb. 371.

Konjugierte Matrix der β_{ik} :

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}
$\frac{1}{3} l'_3 \eta_2 \cdot X_1$	η_1/α'_1	$-\varphi_2$	1
$\frac{1}{3} l'_3 \eta_2 \cdot X_2$	$-\varphi_2$	$2 \varphi_2$	-2
$\frac{1}{3} l'_3 \eta_2 \cdot X_3$	1	-2	$2 \psi_1$

Einflußlinien:

Bereich:	I	II	III
$\eta_2 \cdot X_1$	$\frac{l_2}{2} \eta_1 [\omega'_D - \kappa_{21} \omega_D]$	$-\frac{l_3}{2} \varphi_2 [\omega'_D - \kappa_{32} \omega_D]$	$\frac{l_4}{2} \alpha'_2 \omega'_D$
$\eta_2 \cdot X_2$	$l_2 \alpha'_1 \varphi_2 [\omega_D - \kappa_{12} \omega'_D]$	$l_3 \varphi_2 [\omega'_D - \kappa_{32} \omega_D]$	$-l_4 \alpha'_2 \omega'_D$
$\eta_2 \cdot X_3$	$-l_2 \alpha'_1 [\omega_D - \kappa_{12} \omega'_D]$	$l_3 \psi_1 [\omega_D - \kappa_{23} \omega'_D]$	$l_4 \alpha'_3 \psi_1 \omega'_D$

Überzählige Größen für feldweise Belastung:

Belastung			
$\eta_2 \cdot X_1$	$\frac{p l_2^3}{16} [\varphi_2 (2 + \varphi_1) - 2]$	$-\frac{p l_3^3}{8} (\varphi_2 - 1)$	$\frac{p l_4^3}{8} \alpha'_2$
$\eta_2 \cdot X_2$	$\frac{p l_2^3}{8} \alpha'_1 \varphi_2$	$\frac{p l_3^3}{4} (\varphi_2 - 1)$	$-\frac{p l_4^3}{4} \alpha'_2$
$\eta_2 \cdot X_3$	$-\frac{p l_2^3}{8} \alpha'_1$	$\frac{p l_3^3}{4} (\psi_1 - 1)$	$\frac{p l_4^3}{4} \alpha'_2 \psi_1$

c) Anordnung Abb. 372

$$-M_a = X_1, \quad -M_b = X_2,$$

$$-M_c = X_3, \quad -M_d = X_4$$

Abkürzungen 1 bis 6, 8 bis 10.

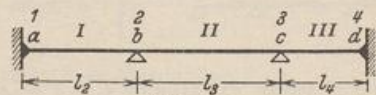


Abb. 372.

Kennbeziehungen:

$$\begin{aligned} \kappa_{12} &= \frac{1}{2}, & \kappa_{43} &= \frac{1}{2}, \\ \kappa_{23} &= \frac{1}{\psi_1}, & \kappa_{32} &= \frac{1}{\psi_2}, \\ \kappa_{34} &= \frac{\alpha'_3 \psi_1}{\eta_2}, & \kappa_{21} &= \frac{\alpha'_1 \psi_2}{\eta_4}. \end{aligned}$$

Konjugierte Matrix der β_{ik} :

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}
$\frac{2}{3} l'_3 \eta_3 \cdot X_1$	$2 \eta_4/\alpha'_1$	$-2 \psi_2$	2	-1
$\frac{2}{3} l'_3 \eta_3 \cdot X_2$	$-2 \psi_2$	$4 \psi_2$	-4	2
$\frac{2}{3} l'_3 \eta_3 \cdot X_3$	2	-4	$4 \psi_1$	$-2 \psi_1$
$\frac{2}{3} l'_3 \eta_3 \cdot X_4$	-1	2	$-2 \psi_1$	$2 \eta_2/\alpha'_2$

Einflußlinien:

Bereich:	I	II	III
$\eta_3 \cdot X_1$	$\frac{l_2}{2} \eta_4 [\omega'_D - \kappa_{21} \omega_D]$	$-\frac{l_3}{2} \psi_3 [\omega'_D - \kappa_{32} \omega_D]$	$\frac{l_4}{2} \alpha'_2 [\omega'_D - \kappa_{43} \omega_D]$
$\eta_3 \cdot X_2$	$l_2 \alpha'_1 \psi_2 [\omega_D - \kappa_{12} \omega'_D]$	$l_3 \psi_2 [\omega'_D - \kappa_{32} \omega_D]$	$-l_4 \alpha'_2 [\omega'_D - \kappa_{43} \omega_D]$
$\eta_3 \cdot X_3$	$-l_2 \alpha'_1 [\omega_D - \kappa_{12} \omega'_D]$	$l_3 \psi_1 [\omega_D - \kappa_{23} \omega'_D]$	$l_4 \alpha'_2 \psi_1 [\omega'_D - \kappa_{43} \omega_D]$
$\eta_3 \cdot X_4$	$\frac{l_2}{2} \alpha'_1 [\omega_D - \kappa_{12} \omega'_D]$	$-\frac{l_3}{2} \psi_1 [\omega_D - \kappa_{23} \omega'_D]$	$\frac{l_4}{2} \eta_2 [\omega_D - \kappa_{34} \omega'_D]$

Überzählige Größen für feldweise Belastung:

Belastung			
$\eta_3 \cdot X_1$	$\frac{p l_2^3}{16} [\psi_2 (2 + \varphi_1) - 2]$	$-\frac{p l_3^3}{8} (\psi_2 - 1)$	$\frac{p l_4^3}{16} \alpha'_2$
$\eta_3 \cdot X_2$	$\frac{p l_2^3}{8} \alpha'_1 \psi_2$	$\frac{p l_3^3}{4} (\psi_2 - 1)$	$-\frac{p l_4^3}{8} \alpha'_2$
$\eta_3 \cdot X_3$	$-\frac{p l_2^3}{8} \alpha'_1$	$\frac{p l_3^3}{4} (\psi_1 - 1)$	$\frac{p l_4^3}{8} \alpha'_2 \psi_1$
$\eta_3 \cdot X_4$	$\frac{p l_2^3}{16} \alpha'_1$	$-\frac{p l_3^3}{8} (\psi_1 - 1)$	$\frac{p l_4^3}{16} [\psi_1 (2 + \varphi_2) - 2]$

B. Das Trägheitsmoment ist veränderlich.

Anordnung Abb. 373

$-M_b = X_2, -M_c = X_3.$

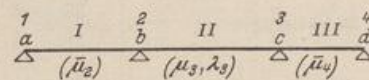


Abb. 373.

Unsymmetrischer Verlauf* von ζ_k im Feld I und III, symmetrischer Verlauf von ζ_k im Felde II. Approximation von $\zeta_k = J_k/J$ und Beiwerte $\mu, \bar{\mu}$ und λ : Tabelle 29 S. 394 [$\lambda_2 \approx \lambda_4 \approx 1$, oder numerisch nach (634)].

Die Belastungszahlen können nach Seite 395 mit hinreichender Genauigkeit für feldweise konstantes Trägheitsmoment berechnet werden.

Abkürzungen: $\alpha'_1 = l'_2/l'_3, \varphi'_1 = \frac{2}{\lambda_3} (\mu_3 + \bar{\mu}_2 \alpha'_1),$
 $\alpha'_2 = l'_4/l'_3, \varphi'_2 = \frac{2}{\lambda_3} (\mu_3 + \bar{\mu}_4 \alpha'_2),$
 $\eta'_1 = \lambda_3 (\varphi'_1 \varphi'_2 - 1).$

Kennbeziehungen:

$\kappa_{a2} = 0, \kappa_{d3} = 0,$
 $\kappa_{23} = \frac{1}{\varphi'_1}, \kappa_{32} = \frac{1}{\varphi'_2},$
 $\kappa_{3d} = \frac{\alpha'_2 \varphi'_1}{\eta'_1} \lambda_4, \kappa_{2a} = \frac{\alpha'_1 \varphi'_2}{\eta'_2} \lambda_2.$

Konjugierte Matrix der β_{ik} :

	δ_{20}	δ_{30}
$\frac{1}{6} l'_3 \eta'_1 \cdot X_2$	φ'_2	-1
$\frac{1}{6} l'_3 \eta'_1 \cdot X_3$	-1	φ'_1

* Für symmetrischen Verlauf von ζ_k im Felde I und III sind die Werte $\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_4$ durch die entsprechenden Werte μ_2, μ_4 der Tabelle 29 zu ersetzen.

Einflußlinien:

Bereich	I	II	III
$\eta'_1 \cdot X_2$	$l_2 \alpha'_1 \varphi'_2 \bar{\omega}_D$	$l_3 \varphi'_2 [\bar{\omega}_D - \alpha_{32} \bar{\omega}_D]$	$-l_4 \alpha'_2 \bar{\omega}_D$
$\eta'_1 \cdot X_3$	$-l_2 \alpha'_1 \bar{\omega}_D$	$l_3 \varphi'_1 [\bar{\omega}_D - \alpha_{31} \bar{\omega}_D]$	$l_4 \alpha'_2 \varphi'_1 \bar{\omega}_D$

Reduzierte Biegelinien $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$ nach Tabelle 29 S. 394.

Überzählige Größen für feldweise Belastung:

Belastung			
$\eta'_1 \cdot X_2$	$\frac{p l_2^3}{4} \alpha'_1 \varphi'_2$	$\frac{p l_3^3}{4} (\varphi'_2 - 1)$	$-\frac{p l_4^3}{4} \alpha'_2$
$\eta'_1 \cdot X_3$	$-\frac{p l_2^3}{4} \alpha'_1$	$\frac{p l_3^3}{4} (\varphi'_1 - 1)$	$\frac{p l_4^3}{4} \alpha'_2 \varphi'_1$

Durchgehender Träger über vier Stützen (Abb. 374 auf Seite 412).

Berechnung mit den Werten der Tabelle 33, Teil A a).

$l_2 = 12,0 \text{ m}, \quad J_c/J_2 = 2,5, \quad l'_2 = 30,0 \text{ m}$

$l_3 = 18,0 \text{ m}, \quad J_c/J_3 = 1,0, \quad l'_3 = 18,0 \text{ m}$

$l_4 = 9,0 \text{ m}, \quad J_c/J_4 = 4,0, \quad l'_4 = 36,0 \text{ m}$

$J_c = \frac{1,4^3}{12} \cdot 0,5 = 0,11433 \text{ m}^4; \quad E = 2100000 \text{ t/m}^2; \quad \alpha_1 = 0,00001.$

Abkürzungen: $\alpha'_1 = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}, \quad \varphi_1 = 2 \left(1 + \frac{5}{3} \right) = \frac{16}{3},$

$\alpha'_2 = \frac{36}{18} = 2, \quad \varphi_2 = 2(1 + 2) = 6,$

$\eta_1 = \frac{16}{3} \cdot 6 - 1 = 31.$

Kennbeziehungen:

$\alpha_{a2} = 0, \quad \alpha_{d3} = 0,$

$\alpha_{23} = \frac{3}{16}, \quad \alpha_{32} = \frac{1}{6},$

$\alpha_{3d} = \frac{2 \cdot 16}{31 \cdot 3} = \frac{32}{93}, \quad \alpha_{2a} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 31} = \frac{30}{93}.$

Konjugierte Matrix der β_{ik} :

$-M_b = X_2; \quad -M_c = X_3$

$\frac{1}{6} l'_3 \eta_1 = \frac{1}{6} 18,0 \cdot 31 = 93;$

	δ_{20}	δ_{30}
$93 \cdot X_2$	6	-1
$93 \cdot X_3$	-1	16/3

Festpunktabstände: (Abb. 374i) $a_{a2} = a_{d3} = 0$

$a_{23} = \frac{3 \cdot 18,0}{16 \left(1 + \frac{3}{16} \right)} = 2,84 \text{ m}; \quad a_{32} = \frac{1 \cdot 18,0}{6 \left(1 + \frac{1}{6} \right)} = 2,57 \text{ m};$

$a_{3d} = \frac{32 \cdot 9}{93 \left(1 + \frac{32}{93} \right)} = 2,30 \text{ m}; \quad a_{2a} = \frac{30 \cdot 12}{93 \left(1 + \frac{30}{93} \right)} = 2,93 \text{ m}.$

Einflußlinien: Werte $[\omega'_D - \kappa_{32} \omega_D]$ und $[\omega_D - \kappa_{23} \omega'_D]$ vgl. Tabelle 34 S. 410.

Bereich:	I	II	III
$31 \cdot X_2$ (Abb. 374b)	$12,0 \cdot \frac{5}{3} \cdot 6 \omega_D = 120 \omega_D$	$18,0 \cdot 6 \cdot [\omega'_D - \kappa_{32} \omega_D]$ $= 108 [\omega'_D - \kappa_{32} \omega_D]$	$-9,0 \cdot 2 \cdot \omega'_D = -18 \omega'_D$
$31 \cdot X_3$ (Abb. 374c)	$-12,0 \cdot \frac{5}{3} \cdot \omega_D = -20 \omega_D$	$18,0 \cdot \frac{16}{3} [\omega_D - \kappa_{23} \omega'_D]$ $= 96 [\omega_D - \kappa_{23} \omega'_D]$	$9,0 \cdot 2 \cdot \frac{16}{3} \cdot \omega'_D = 96 \omega'_D$

Einflußlinien der Stütz- und Schnittkräfte.

a) Stützendruck A (Abb. 374d)

$$A = A_0 - \frac{X_2}{l_2} = A_0 - \frac{X_2}{12,0};$$

b) Querkraft Q im Felde 2 (Abb. 374e)

$$Q = Q_0 + \frac{X_2 - X_3}{l_3} = Q_0 + \frac{X_2 - X_3}{18,0};$$

c) Stützendruck B : (Abb. 374f)

$$B = B_0 + \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right) X_2 - \frac{1}{l_3} X_3$$

$$= B_0 + \left(\frac{1}{12,0} + \frac{1}{18,0}\right) X_2 - \frac{1}{18,0} X_3;$$

d) Moment M_m im Felde 1 (Abb. 374g)

$$M_m = M_{m0} - \xi_m X_2 = M_{m0} - \frac{X_2}{2};$$

e) Moment M_n im Felde 2 (Abb. 374h)

$$M_n = M_{n0} - \xi'_n X_2 - \xi_n X_3 = M_{n0} - \frac{X_2 + X_3}{2}$$

Schnittkräfte für gleichförmige Streckenlast $p = 1,0 \text{ t/m}$.

a) feldweise Belastung:

Belastung			
$31 \cdot X_2$	$\frac{12,0^2}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot 6 = 360$	$\frac{18,0^2}{4} (6 - 1) = 405$	$-\frac{9,0^2}{4} \cdot 2 = -40,5$
$31 \cdot X_3$	$-\frac{12,0^2}{4} \cdot \frac{5}{3} = -60$	$\frac{18,0^2}{4} \left(\frac{16}{3} - 1\right) = 351$	$\frac{9,0^2}{4} \cdot 2 \cdot \frac{16}{3} = 216$

b) Streckenlasten:

	$X_2 = \frac{1}{31} \frac{12,0^2}{4} \frac{5}{3} 6 \xi^2 (2 - \xi^2) = \frac{360}{31} \xi^2 (2 - \xi^2)$ $X_3 = -\frac{1}{31} \frac{12,0^2}{4} \frac{5}{3} \xi^2 (2 - \xi^2) = -\frac{60}{31} \xi^2 (2 - \xi^2)$
	$X_2 = \frac{1}{31} \frac{18,0^2}{4} \xi^2 [2(2 \cdot 6,0 - 1) - 4 \xi 6,0 + \xi^2 (6,0 + 1)]$ $= \frac{81}{31} \xi^2 [22 - 24 \xi + 7 \xi^2]$ $X_3 = \frac{1}{31} \frac{18,0^2}{4} \xi^2 \left[4 \cdot \frac{5}{3} + 4 \xi - \xi^2 \left(\frac{16}{3} + 1\right)\right]$ $= \frac{27}{31} \xi^2 [20 + 12 \xi - 19 \xi^2]$
	$X_2 = -\frac{1}{31} \frac{9,0^2}{4} 2 \xi^2 (4 - 4 \xi + \xi^2) = -\frac{40,5}{31} \xi^2 (4 - 4 \xi + \xi^2)$ $X_3 = \frac{1}{31} \frac{9,0^2}{4} 2 \frac{16}{3} \xi^2 (4 - 4 \xi + \xi^2) = \frac{216}{31} \xi^2 (4 - 4 \xi + \xi^2)$

Tabelle 34. $\omega'_D - \kappa_{(k-1)} \omega_D$.

κ	$\xi = x : l =$													κ
	0,1	0,2	$\frac{1}{4}$	0,30	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5	0,6	$\frac{2}{3}$	0,7	$\frac{3}{4}$	0,8	0,9	
0,200	0,15120	0,24960	0,28125	0,30240	0,31111	0,31680	0,30000	0,25920	0,22222	0,20160	0,16875	0,13440	0,06480	0,200
02	100	922	078	185	052	613	0,29925	843	148	089	809	382	446	02
04	080	883	031	131	0,30993	546	850	766	074	017	744	325	412	04
06	061	845	0,27984	076	933	478	775	690	000	0,19946	678	267	377	06
08	041	806	938	022	874	411	700	613	0,21926	874	613	210	343	08
0,210	0,15021	0,24768	0,27891	0,29967	0,30815	0,31344	0,29625	0,25536	0,21852	0,19803	0,16547	0,13152	0,06309	0,210
12	012	730	844	912	756	277	550	459	778	732	481	094	275	12
14	0,14981	691	797	858	696	210	475	382	704	660	416	037	241	14
16	962	653	750	803	637	142	400	306	630	589	350	0,12979	206	16
18	942	614	703	749	578	075	325	229	556	517	284	922	172	18
0,220	0,14922	0,24576	0,27656	0,29694	0,30519	0,31008	0,29250	0,25152	0,21482	0,19446	0,16219	0,12864	0,06138	0,220
22	902	538	609	639	459	0,30941	175	075	407	375	153	806	104	22
24	882	499	563	585	400	874	100	0,24998	333	303	088	749	070	24
26	863	467	516	530	341	806	025	922	259	232	022	691	035	26
28	843	422	469	476	282	739	0,28950	845	185	160	0,15956	634	001	28
0,230	0,14823	0,24384	0,27422	0,29421	0,30222	0,30672	0,28875	0,24768	0,21111	0,19089	0,15891	0,12576	0,05967	0,230
32	803	346	375	366	163	605	800	691	037	018	825	518	933	32
34	783	307	328	312	104	538	725	614	0,20963	0,18946	759	461	899	34
36	764	269	281	257	045	470	650	538	889	875	694	403	864	36
38	744	230	234	203	0,29985	403	575	461	815	803	628	346	830	38
0,240	0,14724	0,24192	0,27188	0,29148	0,29926	0,30336	0,28500	0,24384	0,20741	0,18732	0,15563	0,12288	0,05796	0,240
42	704	154	141	093	867	269	425	307	667	661	497	230	762	42
44	684	115	094	039	807	202	350	230	593	589	431	173	728	44
46	664	077	047	0,28984	748	134	275	154	519	518	366	115	693	46
48	645	038	000	930	689	067	200	077	444	446	300	058	659	48
0,250	0,14625	0,24000	0,26953	0,28875	0,29630	0,30000	0,28125	0,24000	0,20370	0,18375	0,15234	0,12000	0,05625	0,250
52	605	0,23962	906	820	570	0,29933	050	0,23923	296	304	169	0,11942	591	52
54	585	923	859	766	511	866	0,27975	846	222	232	103	885	557	54
56	566	885	813	711	452	798	900	770	148	161	038	827	522	56
58	546	846	766	657	393	731	825	693	074	089	0,14972	770	488	58
0,260	0,14526	0,23808	0,26719	0,28602	0,29333	0,29664	0,27750	0,23616	0,20000	0,18018	0,14906	0,11712	0,05454	0,260
62	506	770	672	547	274	597	675	539	0,19926	0,17947	841	654	420	62
64	486	731	625	493	215	530	600	462	852	875	775	597	386	64
66	467	693	578	438	156	462	525	386	777	804	709	539	351	66
68	447	654	531	384	096	395	450	309	703	732	644	482	317	68
0,270	0,14427	0,23616	0,26484	0,28329	0,29037	0,29328	0,27375	0,23232	0,19629	0,17661	0,14578	0,11424	0,05283	0,270
72	407	578	438	274	0,28978	261	300	155	555	590	513	366	249	72
74	387	539	391	220	919	194	225	078	481	518	447	309	215	74
76	368	501	344	165	859	126	150	002	407	447	381	251	180	76
78	348	462	297	111	800	059	075	0,22925	333	375	316	194	146	78
0,280	0,14328	0,23424	0,26250	0,28056	0,28741	0,28992	0,27000	0,22848	0,19259	0,17304	0,14250	0,11136	0,05112	0,280
82	308	386	203	001	682	925	0,26925	771	185	233	184	078	078	82
84	288	347	156	0,27947	622	858	850	694	111	161	119	021	044	84
86	269	309	109	892	563	790	775	618	037	090	053	0,10963	009	86
88	249	270	063	838	504	723	700	541	0,18963	018	0,13988	906	0,04975	88
	0,9	0,8	$\frac{3}{4}$	0,7	$\frac{2}{3}$	0,6	0,5	0,4	$\frac{1}{3}$	0,3	$\frac{1}{4}$	0,2	0,1	κ

$\omega_D - \kappa_{(k-1)} \omega'_D$.

Tabelle 34. $\omega_D' - \alpha_{k(k-1)} \omega_D$.

x	$\xi = x:l =$													x
	0,1	0,2	¼	0,3	½	0,4	0,5	0,6	¾	0,7	¾	0,8	0,9	
0,290	0,14229	0,23232	0,26016	0,27783	0,28444	0,28656	0,26625	0,22464	0,18889	0,16947	0,13922	0,10848	0,04941	0,290
02	209	194	0,25969	728	385	589	550	387	814	876	856	790	907	92
04	189	155	922	674	326	522	475	310	740	804	791	733	873	94
06	170	117	875	619	267	454	400	234	666	733	725	675	838	96
08	150	078	828	565	207	387	325	157	592	661	659	618	804	98
0,300	0,14130	0,23040	0,25781	0,27510	0,28148	0,28320	0,26250	0,22080	0,18518	0,16590	0,13594	0,10560	0,04770	0,300
02	110	002	734	455	089	253	175	003	444	519	528	502	736	02
04	090	0,22063	688	401	030	186	100	0,21926	370	447	463	445	702	04
06	071	925	641	346	0,27970	118	025	850	296	376	397	387	667	06
08	051	886	594	292	911	051	0,25950	773	222	304	331	330	633	08
0,310	0,14031	0,22848	0,25547	0,27237	0,27852	0,27984	0,25875	0,21696	0,18148	0,16233	0,13266	0,10272	0,04599	0,310
02	011	810	500	182	793	917	800	619	074	162	200	214	565	12
04	0,13991	771	453	128	733	850	725	542	000	090	134	157	531	14
06	972	733	406	073	674	782	650	466	0,17925	019	069	099	496	16
08	952	694	359	019	615	715	575	389	851	0,15947	003	042	462	18
0,320	0,13932	0,22656	0,25313	0,26964	0,27556	0,27648	0,25500	0,21312	0,17777	0,15876	0,12938	0,09984	0,04428	0,320
02	912	618	266	909	496	581	425	235	703	805	872	926	394	22
04	892	579	219	855	437	514	350	158	629	733	806	869	360	24
06	873	541	172	800	378	446	275	082	555	662	741	811	325	26
08	853	502	125	746	319	379	200	005	481	590	675	754	291	28
0,330	0,13833	0,22464	0,25078	0,26691	0,27259	0,27312	0,25125	0,20928	0,17407	0,15519	0,12609	0,09696	0,04257	0,330
02	813	426	031	636	200	245	050	851	333	448	544	638	223	32
04	793	387	0,24984	582	141	178	0,24975	774	259	376	478	581	189	34
06	774	349	938	527	082	110	900	698	185	305	413	523	154	36
08	754	310	891	473	022	043	825	621	111	233	347	466	120	38
0,340	0,13734	0,22272	0,24844	0,26418	0,26963	0,26976	0,24750	0,20544	0,17037	0,15162	0,12281	0,09408	0,04086	0,340
02	714	234	797	363	904	909	675	467	0,16962	091	216	350	052	42
04	694	195	750	309	847	842	600	390	888	019	150	293	018	44
06	675	157	703	254	785	774	525	314	814	0,14948	084	235	0,03983	46
08	655	118	656	200	726	707	450	237	740	876	019	178	949	48
0,350	0,13635	0,22080	0,24609	0,26145	0,26667	0,26640	0,24375	0,20160	0,16666	0,14805	0,11953	0,09120	0,03915	0,350
02	615	042	563	090	607	573	300	083	592	734	888	062	881	52
04	595	003	516	036	548	506	225	006	518	662	822	005	847	54
06	576	0,21965	469	0,25981	489	438	150	0,19930	444	591	756	0,08947	812	56
08	556	926	422	927	430	371	075	853	370	519	691	890	778	58
0,360	0,13536	0,21888	0,24375	0,25872	0,26370	0,26304	0,24000	0,19776	0,16296	0,14448	0,11625	0,08832	0,03744	0,360
02	516	850	328	817	311	237	0,23925	699	222	377	559	774	710	62
04	496	811	281	763	252	170	850	622	148	305	494	717	676	64
06	477	773	234	708	193	102	775	546	073	234	428	659	641	66
08	457	734	188	654	133	035	700	469	0,15999	162	363	602	607	68
0,370	0,13437	0,21696	0,24141	0,25599	0,26074	0,25963	0,23625	0,19392	0,15925	0,14091	0,11297	0,08544	0,03573	0,370
02	417	658	093	544	015	901	550	315	852	020	232	486	539	72
04	397	619	046	490	0,25955	834	475	238	778	0,13948	166	429	505	74
06	378	581	0,23999	435	896	766	400	162	704	877	101	371	470	76
08	358	542	952	381	837	699	325	085	630	805	035	314	436	78
0,380	0,13338	0,21504	0,23906	0,25326	0,25778	0,25632	0,23250	0,19008	0,15556	0,13734	0,10969	0,08256	0,03402	0,380
	0,9	0,8	¾	0,7	¾	0,6	0,5	0,4	¾	0,3	¼	0,2	0,1	x

$\omega_D - \alpha_{(k-1)k} \omega_D'$

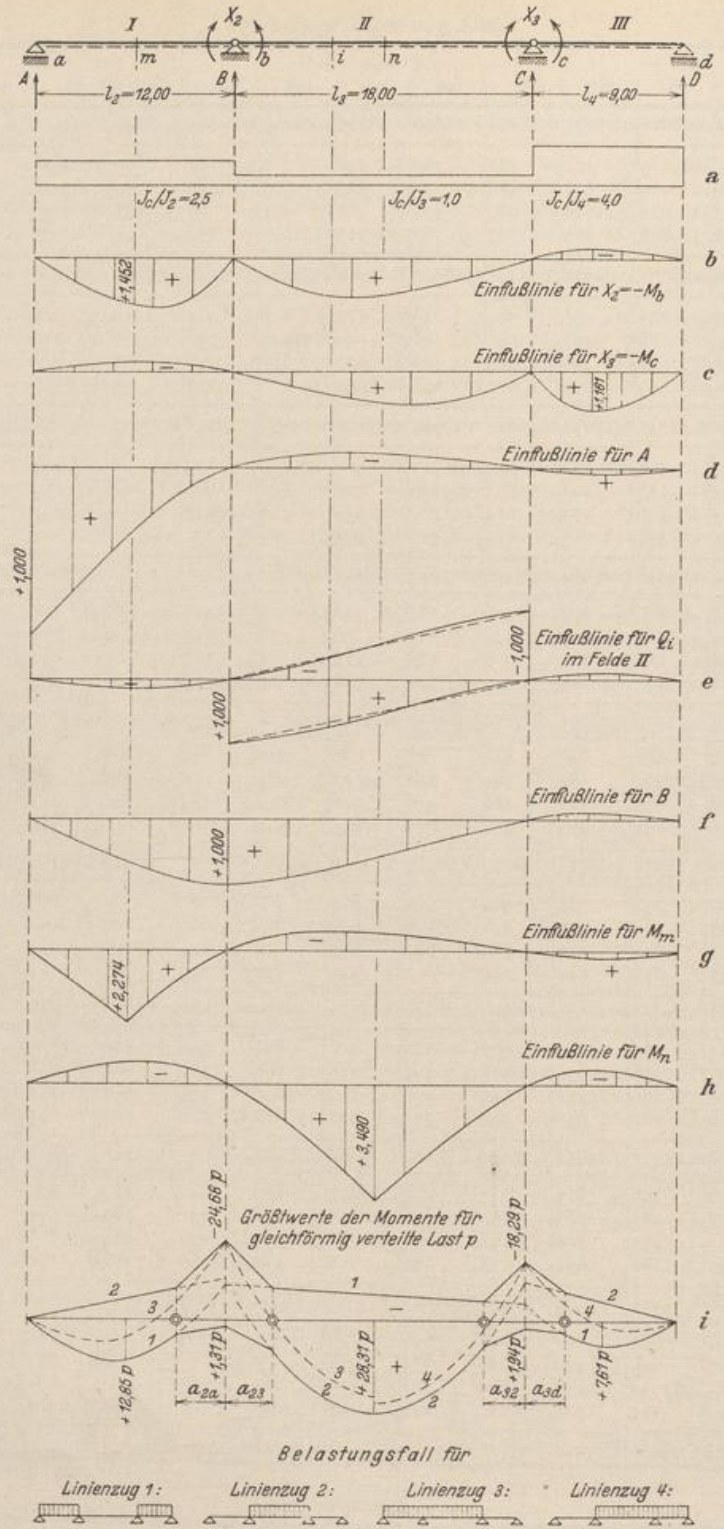
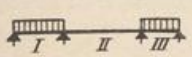
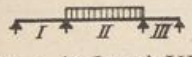


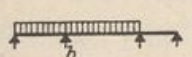
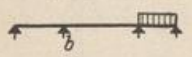
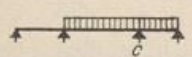
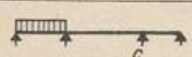
Abb. 374.

Grenzwerte der Momente bei gleichförmiger Streckenlast $p = 1,0 \text{ t/m}$ (Abb. 374i).

a) Feldmomente: Überzählige Größen für ungünstigste Laststellung.

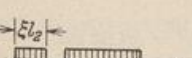
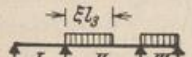
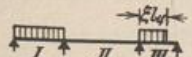
 <p>M_{\max} in I und III M_{\min} in II</p>	$X_2 = \frac{1}{31} (360 - 40,5) = 10,30 \text{ mt},$ $X_3 = \frac{1}{31} (216 - 60,0) = 5,03 \text{ mt}.$
 <p>M_{\min} in I und III M_{\max} in II</p>	$X_2 = \frac{40,5}{31} = 13,06 \text{ mt}, \quad X_3 = \frac{351}{31} = 11,32 \text{ mt}.$

b) Stützenmomente: $-M_b = X_2, \quad -M_c = X_3.$

 <p>$M_b \text{ min}$</p>	$X_2 \text{ max} = \frac{1}{31} (360 + 40,5) = 24,68 \text{ mt},$ $X_3 = \frac{1}{31} (351 - 60) = 9,40 \text{ mt}.$
 <p>$M_b \text{ max}$</p>	$X_2 \text{ min} = -\frac{40,5}{31} = -1,31 \text{ mt}, \quad X_3 = \frac{216}{31} = 6,96 \text{ mt}.$
 <p>$M_c \text{ min}$</p>	$X_2 = \frac{1}{31} (40,5 - 40,5) = 11,75 \text{ mt},$ $X_3 \text{ max} = \frac{1}{31} (351 + 216) = 18,29 \text{ mt}.$
 <p>$M_c \text{ max}$</p>	$X_2 = \frac{1}{31} 360 = 11,6 \text{ mt}, \quad X_3 \text{ min} = -\frac{60}{31} = -1,94 \text{ mt}.$

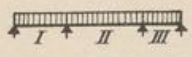
Grenzwerte der Querkräfte bei gleichförmiger Streckenlast $p = 1,0 \text{ t/m}$ (Abb. 375).

a) Q_{\min} :

 <p>Q_{\min} im Feld I</p>	$Q_{0 \min} = -\frac{l_2}{2} \xi^2 = -\frac{12,0}{2} \xi^2 = -6,0 \xi^2,$ $X_2 = \frac{360}{31} \xi^2 (2 - \xi^2) + \frac{40,5}{31},$ $Q_{\min} = Q_{0 \min} - \frac{X_2}{l_2} = Q_{0 \min} - \frac{X_2}{12,0}.$
 <p>Q_{\min} im Feld II</p>	$Q_{0 \min} = -\frac{l_3}{2} \xi^2 = -\frac{18,0}{2} \xi^2 = -9,0 \xi^2,$ $X_2 = \frac{81}{31} \xi^2 [22 - 24 \xi + 7 \xi^2] - \frac{40,5}{31},$ $X_3 = \frac{27}{31} \xi^2 [20 + 12 \xi - 19 \xi^2] + \frac{216}{31},$ $Q_{\min} = Q_{0 \min} + \frac{X_2 - X_3}{l_3} = Q_{0 \min} + \frac{X_2 - X_3}{18,0}.$
 <p>Q_{\min} im Feld III</p>	$Q_{0 \min} = -\frac{l_4}{2} \xi^2 = -\frac{9,0}{2} \xi^2 = -4,5 \xi^2,$ $X_3 = \frac{216}{31} \xi^2 (4 - 4 \xi + \xi^2) - \frac{60}{31},$ $Q_{\min} = Q_{0 \min} + \frac{X_3}{l_4} = Q_{0 \min} + \frac{X_3}{9,0}.$

b) Q_{\max} : Nach (639) ist

$$Q_{\max} = Q^* - Q_{\min}.$$

Vollbelastung:		$X_2^* = \frac{1}{31} (360 + 405 - 40,5) = 23,35 \text{ mt}$	
		$X_3^* = \frac{1}{31} (-60 + 351 + 216) = 16,36 \text{ mt}$	
Bereich:	I	II	III
Q_0^*	$\left(\frac{1}{2} - \xi\right) l_2 = (0,5 - \xi) 12,0$	$\left(\frac{1}{2} - \xi\right) l_3 = (0,5 - \xi) 18,0$	$\left(\frac{1}{2} - \xi\right) l_4 = (0,5 - \xi) 9,0$
Q^*	$Q_0^* - X_2^*/l_2 = (0,5 - \xi) 12,0 - \frac{23,35}{12,0} = 12,0 (0,338 - \xi)$	$Q_0^* + (X_2^* - X_3^*)/l_3 = (0,5 - \xi) 18,0 + \frac{23,35 - 16,36}{18,0} = 18,0 (0,522 - \xi)$	$Q_0^* + X_3^*/l_4 = (0,5 - \xi) 9,0 + \frac{16,36}{9,0} = 9,0 (0,702 - \xi)$

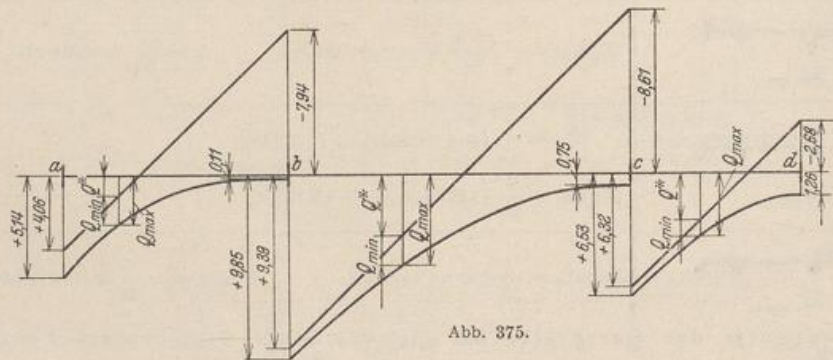


Abb. 375.

Überzählige Größen aus ungleichförmiger Erwärmung:

$$t_u - t_0 = \Delta t = 15^\circ; \quad d = 1,0 \text{ m}; \quad E J_e = 240\,100 \text{ tm}^2;$$

$$X_2 = 240\,100 \frac{0,00001 \cdot 15}{1,0} \cdot \frac{3}{18,0 \cdot 31} [6(12,0 + 18,0) - (18,0 + 9,0)] = 29,60 \text{ mt},$$

$$X_3 = 240\,100 \frac{0,00001 \cdot 15}{1,0} \cdot \frac{3}{18,0 \cdot 31} \left[\frac{16}{3} (18,0 + 9,0) - (12,0 + 18,0) \right] = 22,08 \text{ mt}.$$

Überzählige Größen aus Stützenverschiebungen:

$$\Delta_a = 0; \quad \Delta_b = 0,010 \text{ m}; \quad \Delta_c = 0,015 \text{ m}; \quad \Delta_d = 0; \quad E J_e = 240\,100 \text{ tm}^2;$$

$$X_2 = 240\,100 \frac{6}{18,0 \cdot 31} \left[\frac{1}{12,0} (-0,01) 6 - \frac{1}{18,0} (0,01 - 0,015) (6 + 1) + \frac{1}{9,0} 0,015 \right],$$

$$X_3 = 240\,100 \frac{6}{18,0 \cdot 31} \left[\frac{1}{9,0} (-0,015) \frac{16}{3} - \frac{1}{18,0} (0,015 - 0,01) \left(\frac{16}{3} + 1 \right) + \frac{1}{12,0} 0,01 \right],$$

$$X_2 = -3,58 \text{ mt}; \quad X_3 = -25,4 \text{ mt}.$$

47. Der durchlaufende Balkenträger auf beliebig vielen frei drehbaren Zwischenstützen.

Die Endstützen des Tragwerks sind frei drehbar aufgelagert oder starr eingespannt. Elastische Einspannung der Endstützen kann nach S. 397 berücksichtigt werden. Die Verwendung der Einspannungs- und Stützenmomente $-M_k$ ($k = 1 \dots n$)

Tabelle 35¹. Belastungszahlen.

	$6 \delta_{k0} = l_k l'_k \sum_k P \omega_D + l_{k+1} l'_{k+1} \sum_{k+1} P \omega'_D$ <p>Ergebnisse für vorgeschriebene Lastengruppen vgl. S. 112.</p>
	$6 \delta_{k0} = l'_k \sum_k M \omega_M - l'_{k+1} \sum_{k+1} M \omega'_M$
<p>Streckenbelastung:</p>	
	$c_k = c'_{k+1} = \frac{1}{4}$ $c_k = c'_{k+1} = \frac{2}{15}$
	$c_k = c'_{k+1} = \frac{5}{32}$ $c_k = c'_{k+1} = \frac{7}{60}$
	$c_k = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2)^2, \quad c'_{k+1} = \frac{1}{4} (1 - \zeta'^2)^2$
	$c_k = \frac{1}{4} \zeta^2 (2 - \zeta^2), \quad c'_{k+1} = \frac{1}{4} \zeta'^2 (2 - \zeta'^2)$
	$c_k = \frac{1}{4} [\zeta_0^2 (2 - \zeta_0^2) - \zeta_1^2 (2 - \zeta_1^2)],$ $c'_{k+1} = \frac{1}{4} [\zeta_1'^2 (2 - \zeta_1'^2) - \zeta_0'^2 (2 - \zeta_0'^2)].$

Diese Angaben können nach Tabelle 12 für zahlreiche andere Belastungsfälle ergänzt und nach Tabellen 13 bis 15 auch für veränderliches Trägheitsmoment im Bereiche eines Trägerabschnitts angeschrieben werden.

Ungleichförmige Temperaturänderung Δt_k im Bereiche von l_k mit der mittleren Trägerhöhe d_k liefert

$$6 \delta_{kt} = 3 E J_c \alpha_t \left(\frac{\Delta t_k l_k}{d_k} + \frac{\Delta t_{k+1} l_{k+1}}{d_{k+1}} \right) \approx 3 E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{d} (l_k + l_{k+1}). \quad (655)$$

Werden senkrechte Stützenverschiebungen $\Delta_{k-1}, \Delta_k, \Delta_{k+1}$ und Verdrehungen φ_1, φ_n der Endquerschnitte bei starr angenommener Einspannung der Trägerenden im Sinne von X_1, X_n gemessen oder geschätzt (Abb. 376), so entsteht

$$6 \delta_{ks} = 6 E J_c \left[\frac{\Delta_{k-1}}{l_k} - \Delta_k \left(\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) + \frac{\Delta_{k+1}}{l_{k+1}} \right],$$

$$6 \delta_{1s} = -E J_c \left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{l_2} + \varphi_1 \right); \quad 6 \delta_{ns} = -6 E J_c \left(\frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{l_n} + \varphi_n \right). \quad (656)$$

Auflösung des Ansatzes. Die dreigliedrige Matrix (650) der Vorzahlen (651) wird unter Einbeziehung der Belastungsglieder nach der Rechenvorschrift S. 230ff. aufgelöst. Die konjugierte Matrix mit den Vorzahlen $\beta'_{ik} = \beta_{ik}/6$ entsteht entweder aus zwei Kettenbrüchen nach (394), (404) oder durch Vorwärts- und Rückwärtselimination nach Gauß. Da die 6fachen Vorzahlen δ_{ik} verwendet werden,

¹ Funktionswerte ω auf S. 116ff.

ist (vgl. Abschnitt 24)

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta'_{ki} 6 \delta_i \otimes, \quad k = 1, \dots, n.$$

Damit sind nach (637) auch die Stütz- und Schnittkräfte des ganzen Trägers bestimmt.

Kennbeziehungen und Teillösungen. Bei der algebraischen Auflösung des Ansatzes mit $6\delta_{n0} = 1$ u. $6\delta_{10} = 1$ durch Kettenbrüche oder durch Elimination nach Gauß entstehen neben den Vorzahlen β'_{nn} und β'_{11} auch die für den dreigliedrigen Ansatz charakteristischen Kennbeziehungen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten.

$$-\frac{X_{k-1}}{X_k} = \varkappa_{(k-1)k}, \quad -\frac{X_r}{X_{r-1}} = \varkappa_{r(r-1)}.$$

Sie werden zu deren Berechnung bei der Belastung eines einzelnen Feldes l_k verwendet (Abb. 378c). Die l_k benachbarten Stützenmomente X_{k-1} , X_k ergeben sich nach (415) aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$X_{k-1} = \frac{\varkappa_{(k-1)k} \delta_{(k-1)0} - \varkappa_{(k-1)k} \delta_{k0}}{\delta_{(k-1)k} - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}, \quad X_k = \frac{\varkappa_{k(k-1)} \delta_{k0} - \varkappa_{(k-1)k} \delta_{(k-1)0}}{\delta_{k(k-1)} - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}. \quad (657)$$

Für $6\delta_{(k-1)k} = \lambda_k l'_k$ und gleichförmige Belastung des Feldes l_k mit p_k ist

$$6\delta_{k0} = 6\delta_{(k-1)0} = \frac{1}{4} p_k l_k^2 l'_k, \quad (658)$$

$$X_{k-1} = \frac{p_k l_k^2}{4 \lambda_k} \frac{\varkappa_{(k-1)k} - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}{1 - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}, \quad X_k = \frac{p_k l_k^2}{4 \lambda_k} \frac{\varkappa_{k(k-1)} - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}{1 - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}.$$

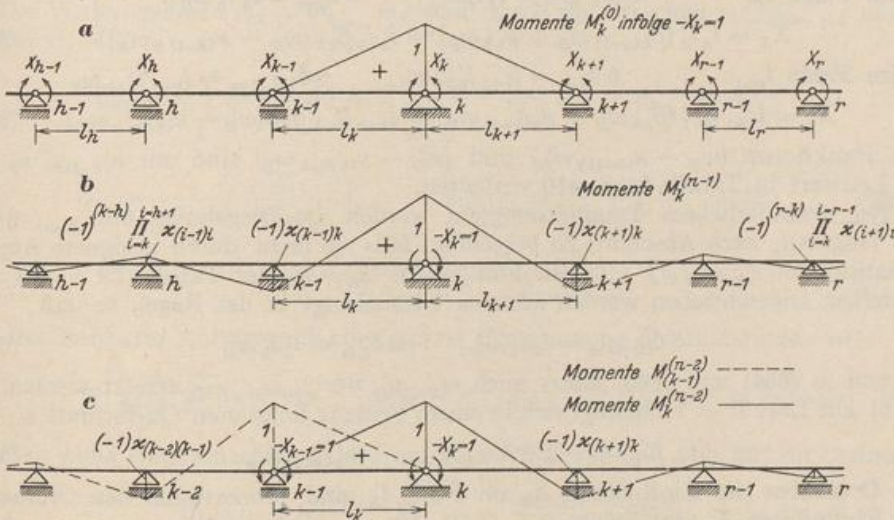


Abb. 378. Biegemomente eines durchlaufenden Trägers infolge $-X_k = 1$ in einem statisch bestimmten, einem $n-1$ und $n-2$ fach statisch unbestimmten Hauptsystem.

Die Stützenmomente X_h [$h < (k-1)$] sind dann durch die Kennbeziehungen $\varkappa_{(h-1)h}$, die Stützenmomente X_r ($r > k$) durch die Kennbeziehungen $\varkappa_{r(r-1)}$ bestimmt (Abb. 378c). Da eine beliebige Belastung des Stabzugs nach den einzelnen Feldern zerlegt werden kann, so läßt sich die Lösung durch Superposition der Teilergebnisse auch auf den allgemeinen Fall anwenden.

Die Hauptglieder β'_{kk} der konjugierten Matrix werden für $6\delta_{k0} = 1$ erhalten und in Verbindung mit den Kennbeziehungen $X_{k-1}/X_k = -\varkappa_{(k-1)k}$, $X_{(k+1)}/X_k = -\varkappa_{(k+1)k}$ aus (410) folgendermaßen angeschrieben:

$$\beta'_{kk} = \frac{1}{-\varkappa_{(k-1)k} 6 \delta_{k(k-1)} + 6 \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k} 6 \delta_{k(k+1)}}. \quad (659)$$

Sie lassen sich außerdem mit dem Ansatz (657) ableiten.

$$\left. \begin{aligned} \beta'_{kk} &= \frac{\alpha_{k(k-1)}}{6 \delta_{k(k-1)} (1 - \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)})} = \frac{\alpha_{k(k+1)}}{6 \delta_{k(k+1)} (1 - \alpha_{k(k+1)} \alpha_{(k+1)k})}, \\ \beta'_{(k-1)(k-1)} &= \frac{\alpha_{(k-1)k}}{6 \delta_{k(k-1)} (1 - \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)})}; \quad \beta'_{(k+1)(k+1)} = \frac{\alpha_{(k+1)k}}{6 \delta_{k(k+1)} (1 - \alpha_{k(k+1)} \alpha_{(k+1)k})} \end{aligned} \right\} \quad (660)$$

Daher kann die Hauptdiagonale der konjugierten Matrix dreigliedriger Bedingungs-
gleichungen auch nach

$$\frac{\beta'_{(k-1)(k-1)}}{\beta'_{kk}} = \frac{\alpha_{(k-1)k}}{\alpha_{k(k-1)}}, \quad \frac{\beta'_{kk}}{\beta'_{(k+1)(k+1)}} = \frac{\alpha_{k(k+1)}}{\alpha_{(k+1)k}} \quad (661)$$

entwickelt werden, wenn beide Kettenbrüche oder beide Eliminationen ausge-
rechnet worden sind. Die Nebenglieder β'_{hk} der konjugierten Matrix ergeben sich
aus den Hauptgliedern β'_{kk} für $h < k$:

$$\beta'_{(k-1)k} = -\alpha_{(k-1)k} \beta'_{kk}, \quad \beta'_{hk} = (-1)^{(k-h)} \beta'_{kk} \prod_{i=k}^{i=h+1} \alpha_{(i-1)i}. \quad (662)$$

Die Nebenglieder β'_{rk} für $r > k$ sind

$$\beta'_{(k+1)k} = -\alpha_{(k+1)k} \beta'_{kk}, \quad \beta'_{rk} = (-1)^{(r-k)} \beta'_{kk} \prod_{i=k}^{i=r-1} \alpha_{(i+1)i}. \quad (663)$$

Einflußlinien der Stützenmomente X_k . a) Die wandernde Last $P = 1 t$
bewegt sich in den beiden, dem Stützpunkte k benachbarten Feldern l_k und l_{k+1} .
Bei konstantem Trägheitsmoment J_k, J_{k+1} der Träger ist für

$$P \text{ im Felde } l_k: \quad 6 \delta_{(k-1)m} = l_k l'_k \omega'_D, \quad 6 \delta_{km} = l_k l'_k \omega_D, \\ X_k = l_k l'_k (\beta'_{(k-1)k} \omega'_D + \beta'_{kk} \omega_D) = l_k l'_k \beta'_{kk} (\omega_D - \alpha_{(k-1)k} \omega'_D), \quad (664)$$

$$P \text{ im Felde } l_{k+1}: \quad 6 \delta_{km} = l_{k+1} l'_{k+1} \omega'_D, \quad 6 \delta_{(k+1)m} = l_{k+1} l'_{k+1} \omega_D \\ X_k = l_{k+1} l'_{k+1} (\beta'_{kk} \omega'_D + \beta'_{(k+1)k} \omega_D) = l_{k+1} l'_{k+1} \beta'_{kk} (\omega'_D - \alpha_{(k+1)k} \omega_D). \quad (665)$$

Die Funktionen $(\omega_D - \alpha_{(k-1)k} \omega'_D)$ und $(\omega'_D - \alpha_{(k+1)k} \omega_D)$ sind mit $\alpha_{(k-1)k}, \alpha_{(k+1)k}$
als Leitwert in Tabelle 34 S. 410 enthalten.

Bei veränderlichem Trägheitsmoment werden die Biegelinien $6 \delta_{(k-1)m}, 6 \delta_{km}$
des Trägers l_k nach Abschnitt 20 berechnet, falls sie nicht durch geeignete Appro-
ximation von $\zeta_k = J_k/J$ mit den Funktionen $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$ der Tabelle 29 S. 394 un-
mittelbar angeschrieben werden können. Dies genügt in der Regel, so daß

$$6 \delta_{(k-1)m} = l_k l'_k \bar{\omega}'_D, \quad 6 \delta_{km} = l_k l'_k \bar{\omega}_D \quad (666)$$

ist und in (664) und (665) daher auch ω_D, ω'_D durch $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$ ersetzt werden.

b) Die Last $P = 1 t$ bewegt sich in einem Felde l_h links vom Querschnitt $k - 1$.

$$X_k = (-1)^{k-h} \alpha_{(h+1)h} \dots \alpha_{k(k-1)} X_h. \quad (667)$$

Die Ordinaten der Einflußlinie X_k im Felde l_h sind proportional den Ordinaten
der Einflußlinie X_h des Feldes l_h .

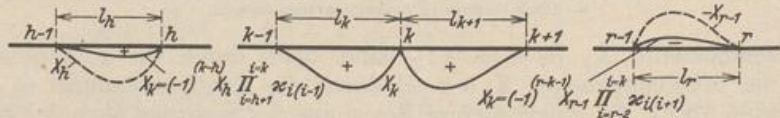


Abb. 379.

c) Die Last $P = 1 t$ bewegt sich in einem Felde l_r rechts vom Querschnitt $k + 1$.

$$X_k = (-1)^{r-k-1} \alpha_{(r-2)(r-1)} \dots \alpha_{k(k+1)} X_{r-1}. \quad (668)$$

Die Ordinaten der Einflußlinie im Felde l_r sind proportional den Ordinaten der
Einflußlinie X_{r-1} im Felde l_r . Daher wird jede Einflußlinie X_k in allen Feldern
 l_h, l_r aus den Einflußlinien der ihnen benachbarten Stützenmomente X_h, X_{r-1}
gebildet (Abb. 379).

Zeichnerische Untersuchung. Um das Ergebnis der zeichnerischen Auflösung dreigliedriger Gleichungen nach Abschnitt 32 bei der Untersuchung des durchgehenden Trägers auf starren und frei drehbaren Stützen mit der zeichnerischen Darstellung der Biegemomente übersichtlich zu verbinden, werden die Punkte A_k der Achse den Stützenpunkten zugeordnet und daher die Abschnitte $\overline{A_{k-1}A_k} = \Delta_k$ in einem geeigneten Längenmaßstab nach den Feldweiten l_k bemessen.

Die zeichnerische Auflösung stützt sich auf die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ im Felde l_k der Achse, die durch die Abschnitte $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$ bestimmt sind, auf die Ordinaten $V_{(k-1)k}, V_{k(k-1)}$, die aus den Kreuzlinienabschnitten $R_{(k-1)k}, R_{k(k-1)}$ berechnet werden oder auf die Koordinaten e_k, T_k der einem vorgeschriebenen Belastungsfall zugeordneten Punkte E'_k .

Die Nebenglieder δ_{ik} der Matrix des Ansatzes (650) sind positiv, so daß die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ nach S. 255 innerhalb des zugeordneten Intervalles l_k liegen. Die Abschnitte $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$ werden aus den Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}, \varkappa_{k(k-1)}$ berechnet oder nach S. 256 mit Hilfe der Wirkungslinien elastischer Gewichte $w'_{k,1}, w'_{k,2}, w_k$ zeichnerisch bestimmt. Nach Abschnitt 32 ist

$$a_{(k-1)k} = \frac{\varkappa_{(k-1)k}}{1 + \varkappa_{(k-1)k}} l_k, \quad a_{k(k-1)} = \frac{\varkappa_{k(k-1)}}{1 + \varkappa_{k(k-1)}} l_k. \quad (669)$$

Die Kennbeziehungen müssen also bekannt, die Kettenbrüche (394), (404) daher ausgewertet sein, um die Festpunkte einrechnen zu können.

Die Wirkungslinien $w'_{k,1}, w'_{k,2}, w_k$ sind durch die Strecken $c_{kk}, c_{(k+1)k}$ und e_k bestimmt. Mit

$$\delta_{kk} = l'_k \int_k \xi^2 \frac{J_k}{J} d\xi + l'_{k+1} \int_{k+1} \xi'^2 \frac{J_{k+1}}{J} d\xi' = \delta_{kk,1} + \delta_{kk,2}$$

ist

$$c_{kk} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} l_k, \quad c_{(k+1)k} = \frac{\delta_{k(k+1)}}{\delta_{kk,2} + \delta_{k(k+1)}} l_{k+1}, \quad (670)$$

$$e_k = \frac{\delta_{k(k+1)} l_{k+1} - \delta_{k(k-1)} l_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}.$$

Bei frei drehbarer Auflagerung oder starrer Einspannung der Endstützen ist

$$e_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} + \delta_{12}} l_2 = a_{12}, \quad e_n = - \frac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn} + \delta_{n(n-1)}} l_n = -a_{n(n-1)}. \quad (671)$$

Bei Belastung eines einzelnen Feldes werden nach S. 258 und Abb. 227 die Ordinaten

$$\left. \begin{aligned} V_{(k-1)k} &= \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} R_{(k-1)k} = \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} \frac{\delta_{(k-1)k} \otimes}{\delta_{k(k-1)}}, \\ V_{kk} &= \frac{a_{k(k-1)}}{l_k} R_{kk} = \frac{a_{k(k-1)}}{l_k} \frac{\delta_k \otimes}{\delta_{k(k-1)}} \end{aligned} \right\} \quad (672)$$

verwendet.

Die Ordinaten T_k der Punkte E'_k (Abb. 230) zur Untersuchung eines beliebigen Belastungsfalles sind

$$T_1 = \frac{\delta_{1\otimes}}{\delta_{11} + \delta_{12}}, \quad T_k = \frac{\delta_k \otimes}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}, \quad T_n = \frac{\delta_n \otimes}{\delta_{n(n-1)} + \delta_{nn}}. \quad (673)$$

Diese nach einem vorgeschriebenen Längen- oder Momentenmaßstab aufzutragenden Strecken sind durch die Vorzeichen des Ansatzes bekannt. Sie lassen sich unmittelbar anschreiben, wenn die Veränderlichkeit des Querschnitts im Bereiche eines jeden Feldes nach Tabelle 29 approximiert oder vernachlässigt, also mit feldweise kon-

stantem Trägheitsmoment J_k gerechnet wird. In diesen Fällen werden nach S. 393 die folgenden Strecken verwendet:

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 2\mu_k} l_k, & c_{(k+1)k} &= \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} + 2\mu_{k+1}} l_{k+1}, \\ e_k &= \frac{\lambda_{k+1} l_{k+1} l'_k - \lambda_k l_k l'_{k+1}}{(\lambda_k + 2\mu_k) l'_k + (\lambda_{k+1} + 2\mu_{k+1}) l'_{k+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (674)$$

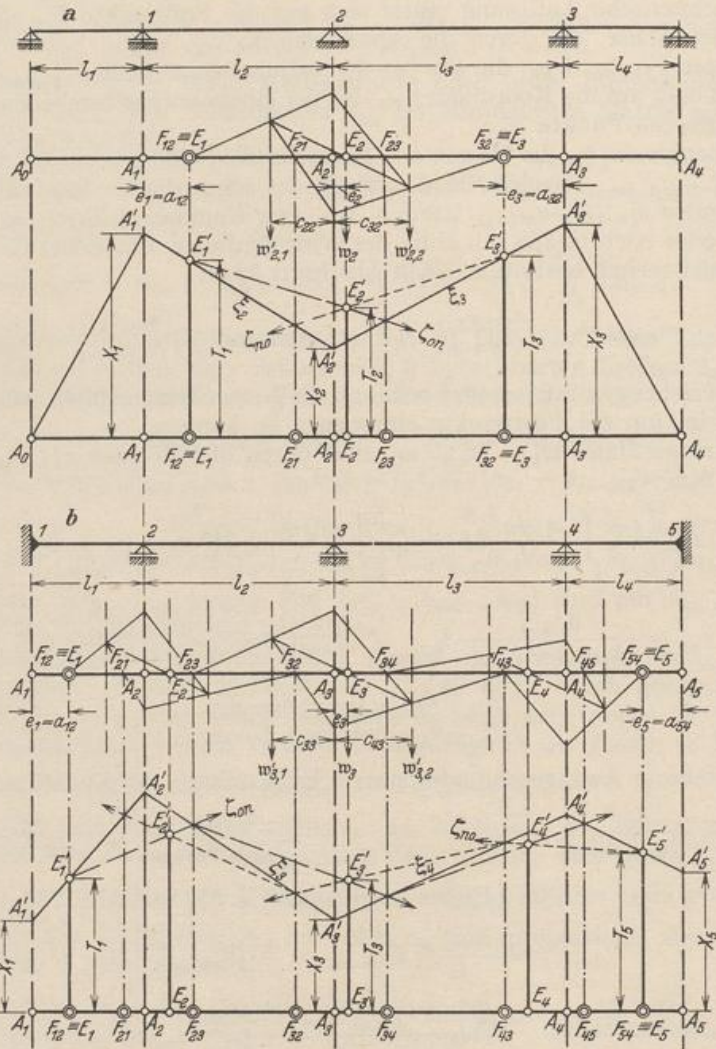


Abb. 380.

1. Einrechnung der Schwerlinien $w'_{k,1}, w'_{k,2}, w'_k$ mit den Abständen $c_{kk}, c_{k(k+1)}, e_k$.
2. Konstruktion der Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$.
3. Auftragen der Ordinaten $T_k = E_k E'_k$ für jede Gruppe äußerer Ursachen $\mathfrak{P}, \Delta t, \Delta k$.
4. Linienzüge ξ_{0n}, ξ_{n0} .
5. Linienzug ξ_k ; Kontrolle: Die Geraden ξ_k, ξ_{k+1} schneiden sich auf der Senkrechten durch A_k im Punkte A'_k ; $\overline{A_k A'_k} = X_k$

Konstantes Trägheitsmoment im Bereich des Stabes l_k, l_{k+1} : $\lambda = \mu = 1$

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{l_k}{3}, & c_{(k+1)k} &= \frac{l_{k+1}}{3}, & e_k &= \frac{l_{k+1} l'_{k+1} - l_k l'_k}{3(l'_k + l'_{k+1})}, \\ V_{(k-1)k} &= \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} \frac{6 \delta_{(k-1)k} \otimes}{l'_k}, & V_{kk} &= \frac{a_{k(k-1)}}{l_k} \frac{6 \delta_{kk} \otimes}{l'_k}. \end{aligned} \right\} \quad (675)$$

Die Schwerlinien $w'_{k,1}$, $w'_{k,2}$ in den Abständen c_{kk} , $c_{(k+1)k}$ sind daher Drittelslinien. Ist das Trägheitsmoment im Bereich des ganzen Trägers konstant, so wird $c_k = (l_{k+1} - l_k)/3$ und daher die Schwerlinie w_k im Abstände e_k die verschränkte Drittelslinie.

Allgemeiner Belastungsfall:

$$T_k = \frac{6 \delta_k \otimes}{(\lambda_k + 2 \mu_k) l'_k + (\lambda_{k+1} + 2 \mu_{k+1}) l'_{k+1}}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{für } \mu = \lambda = 1 \text{ ist} \end{array} \right\} \quad (676)$$

$$T_k = \frac{6 \delta_k \otimes}{3 (l'_k + l'_{k+1})}$$

Für eine Temperaturänderung Δt des Trägers mit der mittleren Höhe d und für Stützensenkungen Δ_{k-1} , Δ_k , Δ_{k+1} ist

$$T_k = \frac{6 E J_c \left[\frac{\alpha_1 \Delta t}{2 d} (l_k + l_{k+1}) + \frac{\Delta_{k-1}}{l_k} - \Delta_k \left(\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) + \frac{\Delta_{k+1}}{l_{k+1}} \right]}{(\lambda_k + 2 \mu_k) l'_k + (\lambda_{k+1} + 2 \mu_{k+1}) l'_{k+1}}. \quad (677)$$

Bei frei drehbaren Endstützen ist

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = \frac{\lambda_2 l_2 l'_2}{2 \bar{\mu}_1 l'_1 + (\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2} = a_{12}, \quad -e_n = \frac{\lambda_n l_n l'_n}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n + 2 \bar{\mu}_{n+1} l'_{n+1}} = a_{n(n-1)}, \\ T_1 = \frac{6 \delta_1 \otimes}{2 \bar{\mu}_1 l'_1 + (\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2}, \quad T_n = \frac{6 \delta_n \otimes}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n + 2 \bar{\mu}_{n+1} l'_{n+1}}, \end{array} \right\} \quad (678)$$

bei starrer Einspannung der Endquerschnitte (1) und (n)

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = \frac{\lambda_2 l_2 l'_2}{(\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2} = a_{12}, \quad -e_n = \frac{\lambda_n l_n l'_n}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n} = a_{n(n-1)}, \\ T_1 = \frac{6 \delta_1 \otimes}{(\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2}, \quad T_n = \frac{6 \delta_n \otimes}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n}. \end{array} \right\} \quad (679)$$

Bei Belastung eines einzelnen Feldes l_k werden die benachbarten Stützenmomente X_{k-1} , X_k nach Abb. 227 mit den den Festpunkten zugeordneten Ordinaten $V_{(k-1)k}$,

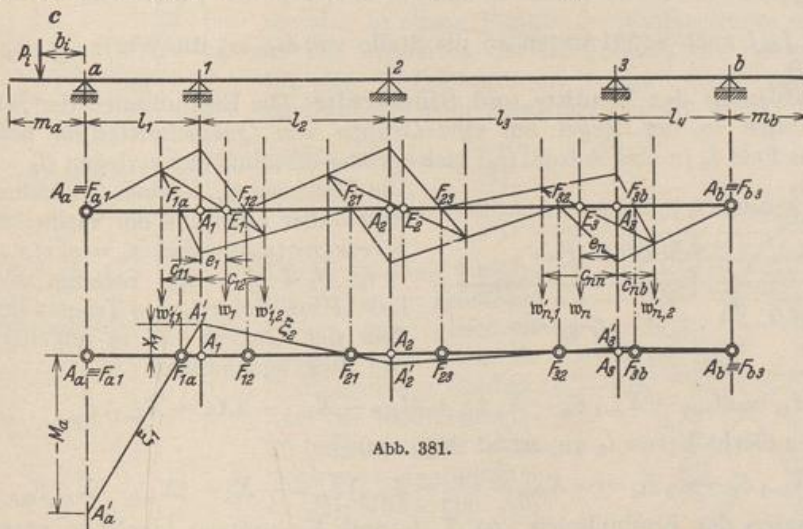


Abb. 381.

Belastung des linken Kragarmes. $M_a = -\sum P_i b_i$. Festpunkte zeichnerisch nach Abschn. 32. Die Schwerlinien in den

Randfeldern werden nach (670) mit $(\delta_k(k-1))_{k-1} = \delta_{1a} = \frac{\lambda_1 l'_1}{6}$, $(\delta_k(k+1))_{k=n} = \delta_{nb} = \frac{\lambda_{n+1} l'_{n+1}}{6}$ eingerechnet.

V_{kk} aufgezeichnet. Die übrigen Stützenmomente sind links vom Stützpunkt $(k-1)$ durch die Festpunkte $F_{(k-1)k}$ rechts vom Stützpunkt k durch die Festpunkte $F_{k(k-1)}$ bestimmt. Um darauf auch die Biegemomente im belasteten Felde l_k an-

zugeben, werden nach dem Ansatz (637) die Biegemomente M_0 des einfachen Balkenträgers l_k von $A'_{k-1} A'_k \equiv \xi_k$ als Bezugsgeraden aus abgetragen.

Die allgemeine zeichnerische Untersuchung einer beliebigen Belastung mit Hilfe der Festpunkte und der Punkte E'_k ist ausführlich auf S. 260 beschrieben, so daß darauf in Verbindung mit den beiden Abb. 380 und 381 verwiesen werden kann.

Die Entwicklung der Einflußlinien der Stützenmomente aus den Festpunkten. Das Stützenmoment X_k ist als überzählige Größe eines $(n-1)$ fach statisch unbestimmten Hauptsystems

$$X_k = \delta_{k0}^{(n-1)} / \delta_{kk}^{(n-1)}.$$

Die Einflußlinie wird daher aus der Biegelinie $\delta_{mk}^{(n-1)}$ des Hauptsystems für $-X_k = 1$ abgeleitet und daher aus den Momenten $M_k^{(n-1)}$ berechnet, die für den Lastangriff $-X_k = 1$ mit Hilfe der Festpunkte aufgezeichnet werden (Abb. 378 b).

$$\begin{aligned} \delta_{kk}^{(n-1)} &= -\alpha_{(k-1)k} \delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \alpha_{(k+1)k} \delta_{k(k+1)} \\ &= \delta_{k(k-1)} \left(\frac{b_{k(k-1)}}{a_{k(k-1)}} - \frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}} \right) + \delta_{k(k+1)} \left(\frac{b_{k(k+1)}}{a_{k(k+1)}} - \frac{a_{(k+1)k}}{b_{(k+1)k}} \right). \end{aligned}$$

Bei Approximation der Querschnittsveränderlichkeit nach Tabelle 29 ist

$$6 \delta_{kk}^{(n-1)} = l'_k \left(2\mu_k - \lambda_k \frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}} \right) + l'_{k+1} \left(2\mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \frac{a_{(k+1)k}}{b_{(k+1)k}} \right). \quad (680)$$

Gleichung der Biegelinie $6 \delta_{mk}^{(n-1)}$ für $J_k/J = \text{const.}$

$$\left. \begin{aligned} \text{Feld } l_k: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= l_k l'_k (\omega_D - \alpha_{(k-1)k} \omega'_D), \\ \text{,, } l_{k+1}: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= l_{k+1} l'_{k+1} (\omega'_D - \alpha_{(k+1)k} \omega_D), \\ \text{,, } l_h: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= (-1)^{(k-h)} \alpha_{(k-1)k} \cdots \alpha_{h(h+1)} l_h l'_h (\omega_D - \alpha_{(h-1)h} \omega'_D), \\ \text{,, } l_r: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= (-1)^{(r-1-k)} \alpha_{(k+1)k} \cdots \alpha_{(r-1)(r-2)} l_r l'_r (\omega'_D - \alpha_{r(r-1)} \omega_D). \end{aligned} \right\} (681)$$

Für $\zeta_k = J_k/J$ nach S. 394 treten an die Stelle von ω_D, ω'_D die Werte $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$ nach Tabelle 29.

Einflußlinien der Schnitt- und Stützkräfte. Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden in der Regel auf eine Gruppe von Querschnitten m bezogen, welche das Feld l_k in eine Anzahl (ϱ_k) gleichgroßer Abschnitte c zerlegen ($l_k = \varrho_k c$).

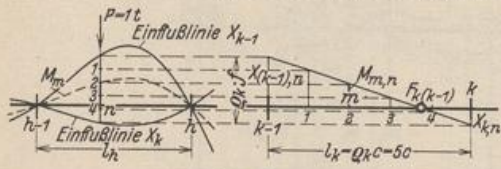


Abb. 382.

Die Abszissen x_m, x'_m eines Querschnitts m sind daher ebenfalls ein Vielfaches der Strecken c ($x_m = \varrho'_k c, x'_m = \varrho''_k c, x_m + x'_m = l_k, \varrho'_k + \varrho''_k = \varrho_k$). Solange sich die Last P im Felde l_k des Trägers bewegt, dem der Querschnitt m angehört, ist das Biegemoment

$$M_m = M_{m0} - X_{k-1} \xi'_m - X_k \xi_m = M_{m0} - X_{k-1} - (X_k - X_{k-1}) \xi_m. \quad (682)$$

Greift P außerhalb von l_k an, so ist $M_{m0} = 0$ und

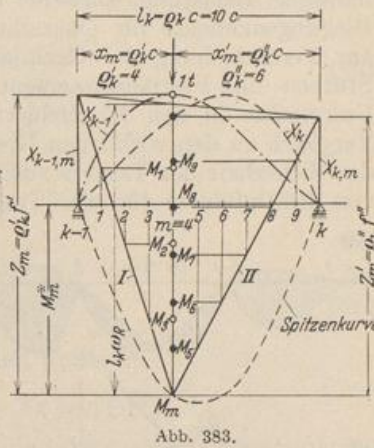
$$M_m = -X_{k-1} \xi'_m - X_k \xi_m = -X_{k-1} - (X_k - X_{k-1}) \xi_m = -X_k - (X_{k-1} - X_k) \xi'_m. \quad (683)$$

Die Ordinaten der Einflußlinien von X_{k-1} und X_k besitzen hier stets entgegengesetztes Vorzeichen, so daß nach (683) die Einflußlinien der Feldmomente M_m die Summe der einem jeden Lastpunkt zugeordneten Ordinaten $|X_{k-1}| + |X_k|$ ebenfalls in ϱ_k gleichgroße Abschnitte f teilen (Abb. 382).

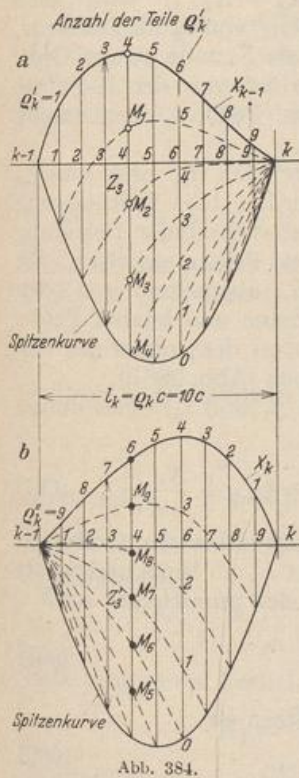
Die Einflußlinien M_m werden innerhalb des Feldes l_k am einfachsten aus den Zustandslinien gefunden, die für die Stellung der Last P in jedem Teilpunkt m der Strecke l_k mit Hilfe der vorhandenen Einflußlinien X_{k-1} und X_k aufgezeichnet

werden. Sie bestehen in jedem Falle aus zwei geraden Linien (I, II), so daß die Feldmomente der Querschnitte m' im Bereich von x_m links vom Lastpunkt m durch Unterteilung der Strecke Z_m in Q'_k gleichgroße Abschnitte f' erhalten werden. Die Intervallgrenzen sind Punkte der Einflußlinien für die Feldmomente in den Querschnitten m' bei Stellung der Last im Punkte m . Dasselbe gilt von den Feldmomenten der Querschnitte m'' im Bereiche x'_m rechts vom Lastpunkt m . Sie werden durch die Aufteilung der Ordinate Z'_m in Q''_k gleichgroße Strecken f'' gefunden. Die Intervallgrenzen sind Punkte der Einflußlinien für die Feldmomente in den Querschnitten m'' rechts von m bei Stellung der Last F über m (Abb. 383).

Die Feldmomente M_m^* bei Stellung der Last über dem Querschnitt m bilden die Spitzenkurve des Feldes l_k . Ihre Ordinaten werden nach Abb. 383 aufgetragen oder nach (657) u. (682) aus



$$M_m^* = l_k \xi_m \xi'_m \left[1 - \xi'_m \frac{(1 + \xi'_m) \alpha_{(k-1)k} - (1 + \xi_m) \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)}}{1 - \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)}} - \xi_m \frac{(1 + \xi_m) \alpha_{(k-1)k} - (1 + \xi'_m) \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)}}{1 - \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)}} \right] \quad (684)$$

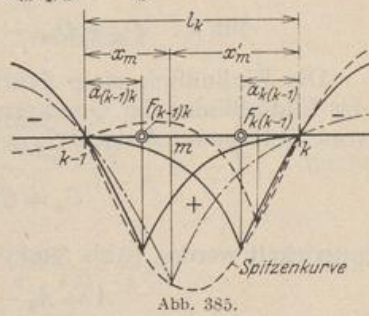


berechnet, so daß die Ordinaten $Z_m = M_m^* + X_{(k-1)m}$ und $Z'_m = M_m^* + X_{km}$ für jede Stellung der Einzelast P bekannt sind und nach Vorschrift in Q'_k oder Q''_k Strecken aufgeteilt werden können. Auf diese Weise entstehen nach Abb. 384 a die rechten, nach Abb. 384 b die linken Zweige der Einflußlinien der Feldmomente, die sich in einem Punkte der Spitzenkurve schneiden.

Die Ordinaten der Einflußlinie des Feldmomentes für den Querschnitt im linken Festpunkt $F_{(k-1)k}$ sind rechts vom Abschnitt l_k Null, denn

$$M_m = -X_{k-1} \frac{b_{(k-1)k}}{l_k} - X_k \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} = - \left(\frac{X_{k-1}}{X_k} + \frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}} \right) \frac{X_k b_{(k-1)k}}{l_k} = 0. \quad (685)$$

Die Einflußlinie berührt die Achse im Punkte k . Aus dem gleichen Grunde sind auch die Ordinaten der Einflußlinie des Feldmomentes im Querschnitt des rechten Festpunktes $F_{k(k-1)}$ links vom Abschnitt l_k Null. Die Einflußlinien der Biegemomente für Querschnitte zwischen den Festpunkten ($x_m > a_{(k-1)k}$, $x'_m > a_{k(k-1)}$) sind daher nach (685) in den benachbarten Abschnitten l_{k-1} , l_{k+1} negativ, im Abschnitt l_k also durch die in k oder $(k-1)$ vorgeschriebene Stetigkeit der Linie positiv. Dagegen wechseln die Einflußlinien der Biegemomente das Vorzeichen im Felde l_k für Querschnitte im Bereiche von $a_{(k-1)k}$ oder $a_{k(k-1)}$ (Abb. 385).



Die größten positiven und negativen Feldmomente entstehen daher bei gleichförmiger Nutzlast p für alle Querschnitte m zwischen den Festpunkten durch feldweise Belastung. Dasselbe gilt für die Stützenmomente. Die Grenzwerte der Biegemomente für Querschnitte im Bereiche von $a_{k(k-1)}$ oder $a_{(k-1)k}$ werden zur Vereinfachung der Rechnung in der Regel zwischen den Grenzwerten des Stützen- und Festpunktmomentes linear interpoliert (Abb. 374i). Dabei werden die Festpunkte in den Randfeldern nach S. 396 eingerechnet. Das Ergebnis ist im Vergleich zu den wirklichen Grenzwerten etwas zu ungünstig, also zur Beurteilung der Sicherheit des Trägers zulässig. Auf diese Weise erübrigt sich die Darstellung von Einflußlinien für alle Tragwerke, die nur gleichförmig verteilte Nutzlasten aufzunehmen haben.

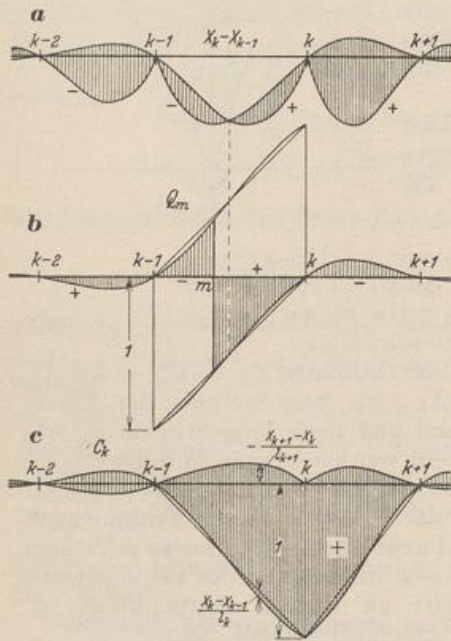


Abb. 386.

Die Einflußlinie der Querkraft Q_m im Querschnitt m des Feldes l_k wird aus

$$\left. \begin{aligned} Q_m &= Q_{m0} - \frac{X_k - X_{k-1}}{l_k}, \\ Q_m &= -\frac{X_k - X_{k-1}}{l_k} \end{aligned} \right\} \quad (686)$$

abgeleitet, je nachdem die Last P innerhalb oder außerhalb des Feldes l_k steht. Der Ausdruck $(X_k - X_{k-1})$ wird nach Abb. 386 im Bereiche von l_k als Differenz, außerhalb von l_k als Summe zweier Ordinaten gebildet. Er ist von der Lage des Querschnitts m im Felde l_k unabhängig (Abb. 386a, 386b).

Die Grenzwerte $\max Q_m$ und $\min Q_m$ der Querkraft werden bei Teilbelastung des Feldes l_k und abwechselnder Belastung der anschließenden Felder erhalten. Sie unterscheiden sich, abgesehen von den Grenzwerten im ersten und letzten Felde, nur unwesentlich von denjenigen des einfachen Balkenträgers (Abb. 386b).

Für die Querschnitte m des ersten und letzten Feldes (l_1 und l_n) eines durchlaufenden Trägers mit frei drehbaren Enden ist

$$\text{für } l_1: Q_m = Q_{m0} - \frac{X_1}{l_1}; \quad \text{für } l_{n+1}: Q_m = Q_{m0} + \frac{X_n}{l_{n+1}}. \quad (687)$$

Die Einflußlinie einer Stützkraft C_k kann durch Superposition der Ordinaten der Einflußlinien der Querkraften Q'_k, Q''_k in dem Querschnitt k', k'' links und rechts vom Stützpunkt k nach $C_k = -Q'_k + Q''_k$ aufgezeichnet oder unmittelbar nach

$$C_k = C_{k0} + \frac{X_k - X_{k-1}}{l_k} - \frac{X_{k+1} - X_k}{l_{k+1}} \quad (688)$$

entwickelt werden (Abb. 386c). Bei frei drehbaren Endstützen ist

$$A = A_0 - X_1/l_1; \quad B = B_0 - X_n/l_{n+1}. \quad (689)$$

Vereinfachung der Annahmen über die elastischen Eigenschaften. Während bisher mit der Möglichkeit eines Wechsels der für die elastischen Eigenschaften des Trägers charakteristischen Längen gerechnet wurde, entstehen für den Fall, daß

$$\lambda_k l'_k = \lambda l', \quad \mu_k l'_k = \mu l', \quad \mu/\lambda = \chi, \quad l_k \neq l_{k+1},$$

Bedingungsgleichungen mit konstanten Vorzahlen

$$\lambda X_{k-1} + 4\mu X_k + \lambda X_{k+1} = 6\delta_{k0}/l', \quad (690)$$

bei feldweiser Belastung ist

$$\frac{6\delta_{k0}}{l'} = \frac{p_k l_k^2}{4} + \frac{p_{k+1} l_{k+1}^2}{4}. \quad (691)$$

Einzellasten:

$$\frac{6\delta_{k0}}{l'} = l_k \sum_k P \omega_D + l_{k+1} \sum_{k+1} P \omega'_D.$$

Kennbeziehungen (392):

$$\varkappa_{(k-1)k} = \frac{1}{4\chi - \varkappa_{(k-2)(k-1)}}, \quad (692)$$

$$\varkappa_{k(k-1)} = \frac{1}{4\chi - \varkappa_{(k+1)k}}. \quad (693)$$

Durchlaufender Träger mit unendlich vielen Feldern.

$$l'_k = l', \quad \varkappa_{(k-1)k} = \varkappa_{k(k-1)} = \varkappa = 2\chi - \sqrt{4\chi^2 - 1}.$$

Sind die Stützweiten außerdem gleichgroß ($l_k = l$) und daher das Trägheitsmoment des Trägers konstant ($J_k = J$), so ist für $\chi = 1$

$$a_{(k-1)k} = a_{k(k-1)} = 0,211 l. \quad (694)$$

Durchlaufender Träger mit einer begrenzten Anzahl von Feldern. Sind die Träger aller Zwischenöffnungen durch $l'_k = l'$ ausgezeichnet, dagegen die elastischen Eigenschaften der Träger über den Endfeldern bei freidrehbarer Auflagerung der Enden derart bestimmt, daß

$$\varkappa_{12} = \varkappa_{n(n-1)} = \varkappa_{(k-1)k} = \varkappa_{k(k-1)} = \varkappa = 2\chi - \sqrt{4\chi^2 - 1},$$

so ist $\delta_{12}/\delta_{11} = \varkappa = \frac{\lambda l'}{2(\mu l'_1 + \mu l')}$ und daher $l'_1 = \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\lambda}{2\varkappa} - \mu \right) l'. \quad (695)$

Die Bedingung kann entweder durch geeignete Ablängung der Träger oder durch die Wahl der Querschnitte erfüllt werden. Sie gilt ebenso für $\delta_{n(n-1)}/\delta_{nn} = \varkappa$ und liefert

$$l'_n = \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{\lambda}{2\varkappa} - \mu \right) l'. \quad (696)$$

Bedingungsgleichungen 1 und n nach (634) u. (690)

$$\frac{\lambda}{\varkappa} X_1 + \lambda X_2 = \frac{6\delta_{10}}{l'}, \quad \lambda X_{n-1} + \frac{\lambda}{\varkappa} X_n = \frac{6\delta_{n0}}{l'}.$$

Sonderfall $\lambda = \mu = \bar{\mu} = 1: \varkappa = 0,268, \quad l'_1 = 0,866 l'.$

Belastung eines einzelnen Feldes l_k

a) symmetrisch

b) antimetrisch

$$X_{k-1} = 6 \frac{^{(1)}\delta_{k0}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1+\varkappa)} = X_k, \quad (697a) \quad X_{k-1} = 6 \frac{^{(2)}\delta_{k0}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa)} = -X_k. \quad (697b)$$

Belastung eines Endfeldes:

$$X_1 = \frac{6\delta_{10}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa^2)}, \quad X_n = \frac{6\delta_{n0}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa^2)}. \quad (698)$$

Einflußlinie des Stützenmomentes

$$\text{Feld } l_k : X_k = l_k \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa^2)} (\bar{\omega}_D - \varkappa \bar{\omega}'_D), \quad (699)$$

$$\text{Feld } l_{k+1}: X_k = l_{k+1} \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa^2)} (\bar{\omega}'_D - \varkappa \bar{\omega}_D);$$

mit $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$ nach Tabelle 29.

Bei gleichen Feldweiten, gleicher Belastung und gleicher Approximation von $\zeta_k = J_k/J$ in allen Feldern entsteht nach (690) eine Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Belastungszahlen. Für gleichmäßig verteilte Belastung ist

$$\lambda X_{k-1} + 4\mu X_k + \lambda X_{k+1} = \frac{p l^2}{2}.$$

Lösung der homogenen Gleichung (vgl. Abschn. 33) $X_k = \varrho^k$;

charakteristische Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \lambda + 4\mu \varrho + \lambda \varrho^2 &= 0, & \varrho_{1,2} &= -2\chi \pm \sqrt{4\chi^2 - 1}, & \varrho &= \varrho_1, \\ X_k &= \frac{p l^2}{4\lambda(1+2\chi)} \left(1 - \frac{\varrho^{n-k} + \varrho^k}{1 + \varrho^n}\right). \end{aligned} \right\} (700)$$

Lösung für hydraulische Belastung vgl. S. 269.

Durchlaufender Träger mit gleichen elastischen Eigenschaften in allen Feldern.

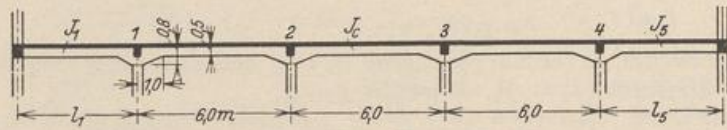


Abb. 387.

1. Geometrische Grundlagen:

$$l = 6,0 \text{ m}, \quad v = 1,0 \text{ m}, \quad \nu = 1/6, \quad l' = 6,0 \text{ m}.$$

2. Approximation des Trägheitsmomentes (Abb. 388):

$$n = \frac{J_k}{J_a} = \frac{J_c}{J_a} = \frac{0,5^3}{0,8^3} = 0,244; \quad \text{Tabelle 29 Fall 2:}$$

$$\mu_k = \mu = \bar{\mu} = 1 - (1 - 0,244) \left[2 \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3 \cdot 6} \right] = 0,75;$$

$$\lambda_k = \lambda = 1 - 3(1 - 0,244) \frac{1}{6^2} = 0,94.$$

3. Bemessung der Endfelder nach (695):

$$\chi = \frac{0,75}{0,94} \approx 0,8; \quad \alpha = 2 \cdot 0,8 - \sqrt{4 \cdot 0,8^2 - 1} = 0,35,$$

$$l'_1 = l'_5 = \frac{1}{0,75} \left(\frac{0,94}{2 \cdot 0,35} - 0,75 \right) l' = 0,785 l'.$$

a) Die Trägheitsmomente der Rand- und Zwischenträger sind gleich, $J_1 = J_5 = J_c$:

$$l_1 = l_5 = 0,785 l = 4,7 \text{ m}.$$

b) Die Stützweiten der Rand- und Zwischenfelder sind gleich, $l_1 = l_5 = l$:

$$J_1 = J_5 = \frac{J_c}{0,785} = 1,275 J_c.$$

4. Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ in Feld l_1 : $\frac{6 \delta_{10}}{l'} = \frac{l_1^3}{4} \cdot 0,785 = 0,196 l_1^3$,

daher nach (698) $X_1 = 0,196 l_1^3 \frac{0,35}{0,94(1 - 0,35^2)} = 0,083 l_1^3$;

Anordnung a) $X_1 = 1,85 \text{ mt}$, Anordnung b) $X_1 = 3,0 \text{ mt}$.

Berechnung eines durchlaufenden Brückenträgers.

1. Geometrische Grundlagen.

$$l_1 = l_4 = 22,0, \quad l_2 = l_3 = 28,0 \text{ m}. \quad J_a = \frac{2}{3} J_c.$$

$$l'_1 = l'_4 = 33,0, \quad l'_2 = l'_3 = 28,0 \text{ m}.$$

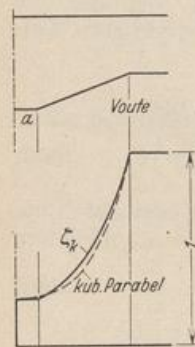


Abb. 388.

2. Approximation des Trägheitsmomentes (Abb. 389c). Parabel mit $n = 0$. Tab. 29. Fall 4 u. 9.

$$\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_4 = 0,4, \quad \mu_2 = \mu_3 = 0,6, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0,8.$$

3. Vorzahlen nach (651):

$$6 \delta_{11} = 6 \delta_{33} = 2 (0,4 \cdot 33,0 + 0,6 \cdot 28) = 60,0,$$

$$6 \delta_{22} = 2 (0,6 \cdot 28 + 0,6 \cdot 28) = 67,2.$$

$$6 \delta_{12} = 6 \delta_{23} = 0,8 \cdot 28 = 22,4.$$

δ Matrix

X_1	X_2	X_3
60,0	22,4	
22,4	67,2	22,4
	22,4	60,0

konjugierte Matrix $10^3 \beta'_{ik}$

	$6 \delta_{10}$	$6 \delta_{20}$	$6 \delta_{30}$
$10^3 X_1$	19,4280	-7,3964	2,7613
$10^3 X_2$	-7,3964	19,8119	-7,3964
$10^3 X_3$	2,7613	-7,3964	19,4280

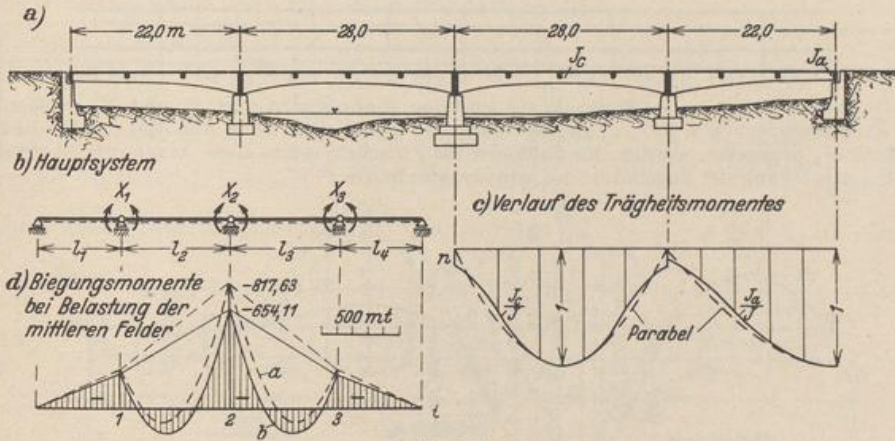


Abb. 389.

4. Belastung: $p = 6 \text{ t/m}$ auf l_2 und l_3 .

a) Belastungszahlen für konst. Trägheitsmoment. Tab. 35

$$6 \delta_{10} = 6 \delta_{30} = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 28^3 = 32928, \quad 6 \delta_{20} = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot (28^3 + 28^3) = 65856.$$

X_1	X_2	X_3
243,55 mt	817,63 mt	243,55 mt

Abb. 389d, Lösung a.

b) Belastungszahlen für die Approximation unter 2. nach Tab. 13a.

$$6 \delta_{10} = 6 \delta_{30} = 6 \cdot \frac{1}{15} \cdot 1 \cdot \frac{6 \cdot 28^2}{8} \cdot 4 \cdot 28 = 26342,4, \quad 6 \delta_{20} = 52684,8;$$

X_1	X_2	X_3
194,84 mt	654,11 mt	194,84 mt

Abb. 389d, Lösung b.

5. Einflußlinien X_1, X_2 .

Biegelinien $\bar{\omega}_D = 6 \delta_{mk} / l_k l'_k$ n. Tab. 29, Fall 4 und 9.

Feld 1: $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{3}{15} (\xi - \xi^5),$ Feld 2: $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{1}{5} \{ \omega_D - 2 \omega_R \xi^2 (3 \xi' - 1) \}.$

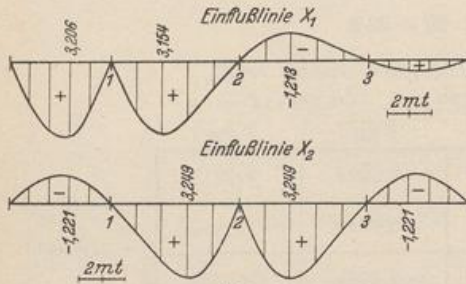
ϵr	Feld 1 $\bar{\omega}_D$	Feld 4 $\bar{\omega}'_D$	Feld 2 u. 3 $\bar{\omega}_D$	Feld 2 u. 3 $\bar{\omega}'_D$
0,2	0,1321	0,1463	0,1572	0,2140
0,4	0,2191	0,2273	0,2811	0,3141
0,6	0,2273	0,2191	0,3141	0,2811
0,8	0,1463	0,1321	0,2140	0,1572

Feld 1: $X_1 = 22,0 \cdot 33,0 \cdot 0,019428 \bar{\omega}_D$
 $= 14,104728 \bar{\omega}_D$ (Gl. 664),

Feld 2: $X_1 = 15,232336 (\bar{\omega}'_D$
 $- 0,380711 \bar{\omega}_D)$,

Feld 2: $X_2 = 15,532530 (\bar{\omega}_D$
 $- 0,373333 \bar{\omega}'_D)$,

Feld 3: X_2 Spiegelbild zu Feld 2.



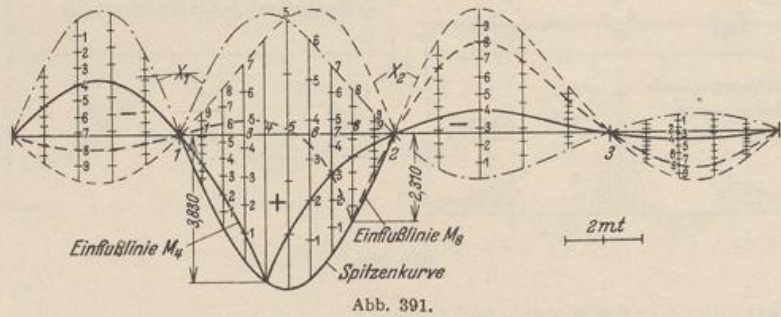
Einflußlinie X_3 : Spiegelbild zu X_1 .
 In den übrigen Feldern wird nach (667) u. (668)

Feld 3: $X_1 = (-1)^1 \cdot 0,373333 X_2$,
 Feld 4: $X_1 = (-1)^2 \cdot 0,380711 \cdot 0,373333 X_2$,
 Feld 1: $X_2 = (-1)^1 \cdot 0,380711 \cdot X_1$,
 Feld 2: X_2 Spiegelbild zu Feld 1.

6. Einflußlinien der Feldmomente im Feld 2. Konstruktion n. S. 423 $Q_k=10$, $c=2,8$ m. Die Ordinaten $X_2 - X_1$ werden nach Abb. 391 in 10 gleiche Teile geteilt. Die Spitzenkurve wird nach Abb. 383 aufgetragen.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l \omega_R$	2,52	4,48	5,88	6,72	7,0	6,72	5,88	4,48	2,52 mt

Die Ordinaten zwischen der Spitzenkurve und den Einflußlinien von X_2 und X_1 werden mit dem Rechenschieber in 9, 8, 7... gleiche Abschnitte geteilt. Dies ist in Abb. 391 nur für die Einflußlinie M_4 angegeben worden. Einflußlinien für Zwischenpunkte eines Abschnitts c entstehen durch Unterteilung der zugeordneten Ordinatenabschnitte j', j'' .



7. Einflußlinien der Querkräfte in Feld 2. Die Ordinaten $(X_2 - X_1)/l_2$ werden mit dem Rechenschieber gebildet und von der Stabachse, im Feld 2 von der Geraden Q_{m0} aus abgetragen (Abb. 392).

8. Einflußlinie der Stützkraft C_1 . Die Ordinaten X_1/l_1 der Querkraftlinie im Feld 1 und die Querkraftlinie Abb. 392 werden superponiert. $C_1 = Q_{m2} - Q_{m1}$ (Abb. 393).

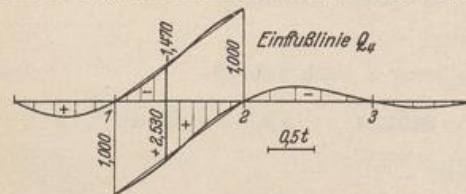


Abb. 392.

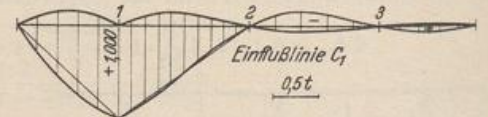


Abb. 393.

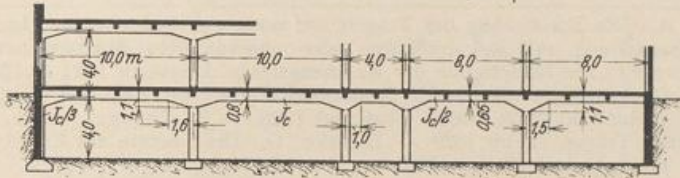
Zeichnerische Untersuchung eines Deckenunterzugs.

1. Geometrische Grundlagen:

$l_1 = 4,0$, $l_2 = l_3 = 10,0$, $l_4 = 4,0$, $l_5 = l_6 = 8,0$ m,
 $l'_1 = 12,0$, $l'_2 = l'_3 = 10,0$, $l'_4 = 4,0$, $l'_5 = l'_6 = 16,0$ m.

2. Approximation des Trägheitsmomentes für gerade Vouten, Tab. 29 Fall 2 u. 7.

Feld l_2, l_3		Feld l_4		Feld l_5, l_6	
$n = 0,4,$	$v = 0,16,$	$n = 0,4,$	$v = 0,25,$	$n = 0,22,$	$v = 0,188,$
$\mu = 1 - 0,6 \times$	$\times \left(2 \cdot 0,16 \cdot 0,84 + \frac{0,16}{3} \right)$	$\mu = 1 - 0,6 \times$	$\times \left(2 \cdot 0,25 \cdot 0,75 + \frac{0,25}{3} \right)$	$\mu = 1 - 0,78 \times$	$\times \left(2 \cdot 0,188 \cdot 0,812 + \frac{0,188}{3} \right)$
$\mu = 0,81,$	$\lambda \approx 1$	$\mu = 0,73,$		$\mu = 0,71,$	$\lambda \approx 1$
		$\lambda = 1 - 3 \cdot 0,6 \cdot 0,25^2 = 0,89$			



3. Wirkungslinien w'_{k1}, w'_{k2}, w_k nach (674) $e_k = Z_k/N_k$.

k	$\lambda_k l_k$	$\lambda_k + 2\mu_k$	c_{kk}	$c_{(k+1)k}$	$\lambda_k l_k l'_k$	Z_k	$(\lambda_k + 2\mu_k)l'_k$	N_k	$e_k [m]$
2	10,0	2,62	3,81	3,81	100	0	26,2	52,4	0
3	10,0	2,62	3,81	1,52	100	- 85,76	26,2	35,6	- 2,41
4	3,56	2,35	1,52	3,31	14,24	113,76	9,4	48,12	2,36
5	8,0	2,42	3,31	—	128	- 128	38,72	61,44	- 2,085
6	(0)	(1,42)	—	—	(0)	Gl. (670)	22,72	—	—

M_1 für $-X_1 = 1$ (Abb. 394) nach Tab. 30. $6\delta_{11} = 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{7}{16} - \frac{2}{16} \right) + 2 \cdot 0,81 \cdot 10 = 21,82.$

$6\delta_{11} + 6\delta_{12} = 21,82 + 10 = 31,82, \text{ Gl. (670): } e_1 = a_{12} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 10}{31,82} = 3,14 \text{ m.}$

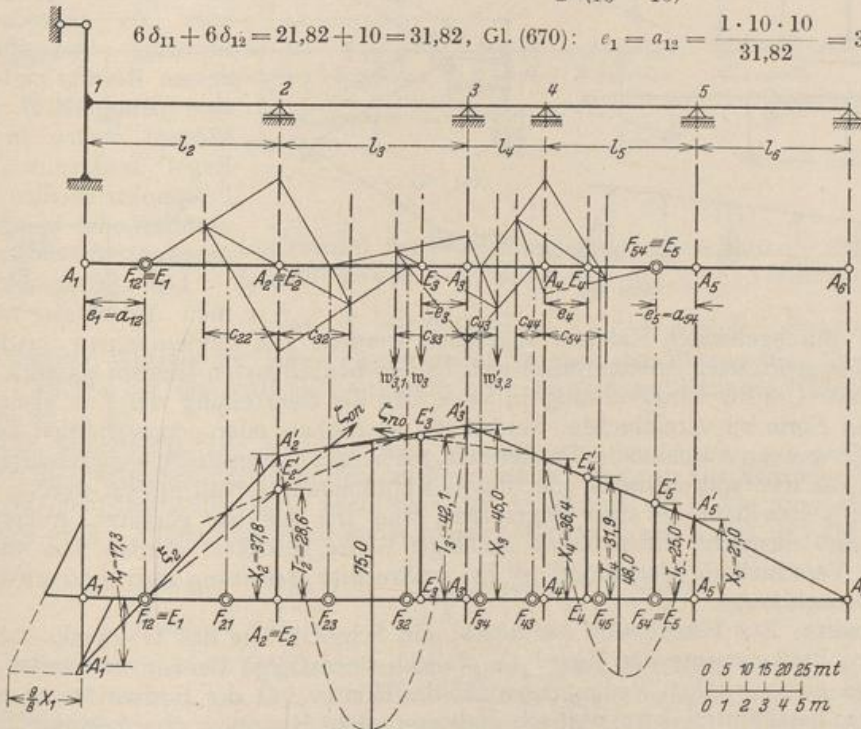


Abb. 395. Der Verlauf der Biegemomente in den belasteten Feldern l_3, l_5 ist mit gestrichelten Linien dargestellt.

4. Festpunkte. Zeichnerisch nach Abb. 395.

5. Belastung. $p = 6 \text{ t/m}$ auf Feld l_3 u. l_5 .
Belastungszahlen für $J = \text{const.}$ Tab. 35.

$$6\delta_{10} = 0, \quad 6\delta_{20} = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 1000 = 1500 = 6\delta_{30}, \quad 6\delta_{40} = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 64 \cdot 16 = 1536 = 6\delta_{50}.$$

$$\text{Gl. (676)} \quad T_k = 6\delta_{k0}/N_k, \quad T_1=0, \quad T_2=1500/52,4=28,6, \quad T_3=42,1, \quad T_4=31,9, \quad T_5=25,0 \text{ mt.}$$

Die Abschnitte T_k werden von den Punkten E_k im Momentenmaßstab aufgetragen (positiv nach oben, negativ nach unten). Die Geradenzüge ζ_{0n} und ζ_{n0} bestimmen die Punkte des Geradenzugs ξ_k auf den Festpunktsenkrechten und damit die Stützenmomente.

Hertwig, A.: Die Berechnung des Trägers auf mehreren Stützen mit gleichem und veränderlichem Querschnitt, mit frei drehbaren oder eingespannten Stützen. Arm. Beton 1913 S. 219. — Derselbe: Die Berechnung der Rahmengebilde. Eisenbau 1921 S. 122. — Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2 5. Aufl. Stuttgart 1922. — Mörsch, E.: Der durchlaufende Träger. Stuttgart 1928. — Kleinlogel, A., u. G. Sigmann: Der durchlaufende Träger. Berlin 1929. — Domke, O.: Die Theorie des Eisenbetons. Handb. Eisenbetonbau Bd. 1 4. Aufl. Berlin 1930.

48. Der durchlaufende Träger mit elastisch drehbaren Stützen.

Die einfache und zuverlässige Ausführung starrer Stabknoten im Eisenbetonbau erklärt die Bedeutung des durchlaufenden Trägers mit elastisch drehbaren Stützen im Bauwesen. Er unterscheidet sich von dem durchgehenden Rahmen (Abb. 396b) durch die unverschiebliche Lage der Stabknoten. Der Riegel des durchgehenden

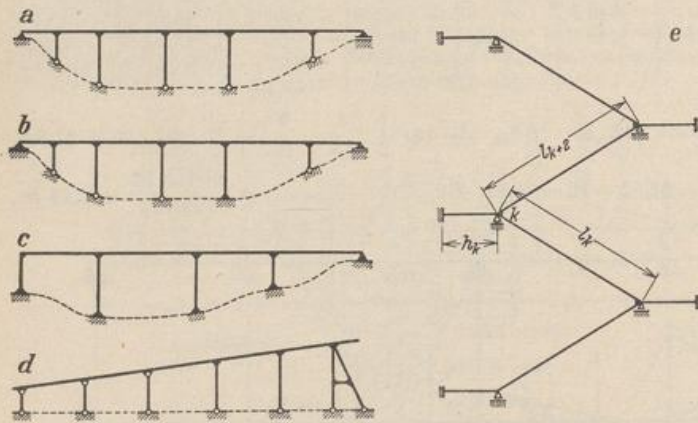


Abb. 396.

Trägers ist daher stets horizontal gestützt. Er wird je nach der Bestimmung des Tragwerks gerade und waagrecht, gerade und schräg oder als gebrochener Stabzug ausgeführt, dessen Knoten gestützt sind (Abb. 396e). Die Pfosten stehen in der Regel senkrecht. Die Fußpunkte werden frei drehbar oder starr eingespannt angenommen.

Der Stockwerkrahmen kann als mehrfacher durchgehender Rahmen angesehen werden. Die beiden einem mittleren Riegel zugeordneten Stützenreihen sind in den benachbarten Riegeln elastisch eingespannt. Um die Untersuchung in einer für die Beurteilung der Festigkeit zulässigen Form zu vereinfachen, werden die statischen oder geometrischen Randbedingungen am Anschluß der Pfosten mit den benachbarten Riegeln vorgeschrieben, indem die Knotendrehwinkel oder die Anschlußmomente Null gesetzt werden. Die Pfosten gelten dann als starr eingespannt oder frei drehbar gestützt. Außerdem kann eine elastische Einspannung beliebiger Größe geschätzt werden. Die waagrechte Verschiebung der Riegel ist bei senkrechter Belastung klein und wird daher vernachlässigt.

Ansatz. Zur Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte des Tragwerks werden die Anschlußmomente der Riegel als statisch überzählige Größen verwendet und aus den geometrischen Bedingungen für die Kontinuität der Formänderung eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems bestimmt. Die Gleichungen enthalten je drei statisch überzählige Größen X_k . Auf diese Weise

entsteht ein Ansatz nach (701). Die Nebenglieder einer Zeile der Matrix haben stets verschiedenes Vorzeichen.

Die Anschlußmomente der Riegel links und rechts der Stütze k werden durch die Fußzeichen k und $(k + 1)$, die benachbarten Felder durch l_k und l_{k+2} unterschieden. X_1 und X_n sind je nach der Abstützung der Trägerenden Riegelmomente rechts oder links von den Endstützen (Abb. 397b, c).

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} &+ X_2 \delta_{12} &= \delta_{10} \\ \dots &\dots &\dots \\ X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} &+ X_{k+1} \delta_{k(k+1)} &= \delta_{k0} \\ X_k \delta_{(k+1)k} &+ X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1)} + X_{k+2} \delta_{(k+1)(k+2)} &= \delta_{(k+1)0} \\ \dots &\dots &\dots \\ X_{n-1} \delta_{n(n-1)} + X_n \delta_{nn} &&= \delta_{n0} \end{aligned} \right\} \quad (701)$$

Die Hauptglieder der Matrix werden nach

$$\delta_{kk} = \delta_{kk,1} + \delta_{kk,2}; \quad \delta_{(k+1)(k+1)} = \delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+1),2}$$

zerlegt. Die Anteile $\delta_{kk,1}$ und $\delta_{(k+1)(k+1),1}$ bezeichnen die Verdrehung der Endquerschnitte $k, (k + 1)$ der Riegelstäbe l_k, l_{k+2} , die Beiträge $\delta_{kk,2}, \delta_{(k+1)(k+1),2}$ die

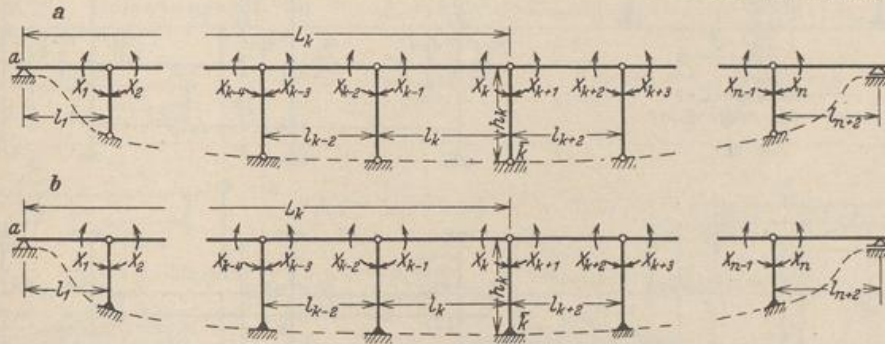


Abb. 397.

Drehwinkel der Pfosten tangente am Anschluß der Riegel l_k, l_{k+2} infolge von $-X_k = 1$ und $-X_{k+1} = 1$. Daher ist auch

$$1_k \delta_{kk,2} = 1_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1),2} = -1_k \delta_{k(k+1)} = -1_{k+1} \delta_{(k+1)k}.$$

Die zweiten Anteile der Hauptglieder gelten je nach Ausbildung und Lagerung des Pfostens für die statisch bestimmte oder statisch unbestimmte Anordnung (Abb. 397a, b).

Die Vorzahlen. Die Beiträge $\delta_{kk,1}, \delta_{(k+1)(k+1),1}, \delta_{k(k-1)}, \delta_{(k+1)(k+2)}$ werden durch die elastischen Eigenschaften der Riegelstäbe bestimmt. Die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes kann nach einer der Annahmen auf S. 394 approximiert, in zahlreichen Fällen aber auch vernachlässigt werden. Nach S. 393 ist (Abb. 398)

$$\left. \begin{aligned} 6 \delta_{kk,1} &= 2 \mu_k l'_k, & 6 \delta_{(k+1)(k+1),1} &= 2 \mu_{k+2} l'_{k+2}, \\ 6 \delta_{k(k-1)} &= \lambda_k l'_k, & 6 \delta_{(k+1)(k+2)} &= \lambda_{k+2} l'_{k+2}. \end{aligned} \right\} \quad (702)$$

Bei unveränderlichem Trägheitsmoment J_k, J_{k+2} im Bereiche von l_k, l_{k+2} ist $\mu_k = \lambda_k = 1$ und $\mu_{k+2} = \lambda_{k+2} = 1$. Die Vorzahlen $\delta_{kk,2} = \delta_{(k+1)(k+1),2} = -\delta_{k(k+1)}$ werden durch die Anordnung der Pfosten und durch die Art ihrer Stützung bestimmt.

1. Einteilige Stützen mit frei drehbarer Auflagerung (Abb. 398a).
 Ausbildung a) Die Stützen besitzen im Bereiche \bar{h}_k konstantes Trägheitsmoment. Im Bereich des Abschnittes $h_k - \bar{h}_k = f_k$ wird das Trägheitsmoment unendlich groß angenommen (Abb. 399).

$$6 \delta_{k,k,2} = 6 \delta_{(k+1)(k+1),2} = -6 \delta_{k(k+1)} = 2 \frac{\bar{h}_k^3}{h_k^3} h'_k. \quad (703)$$

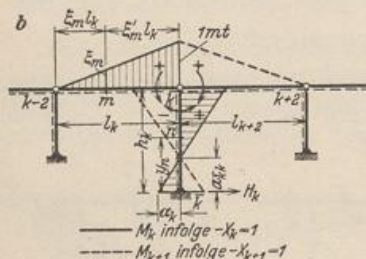
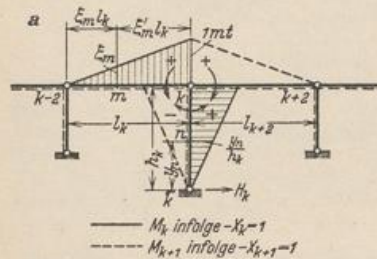


Abb. 398.

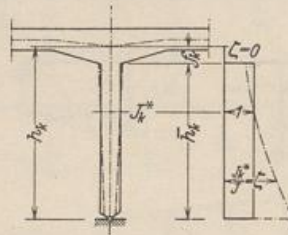


Abb. 399.

Ausbildung b) Das Trägheitsmoment ist im Bereich der theoretischen Stützenlänge h_k konstant.

$$6 \delta_{k,k,2} = 6 \delta_{(k+1)(k+1),2} = -6 \delta_{k(k+1)} = 2 h'_k. \quad (704)$$

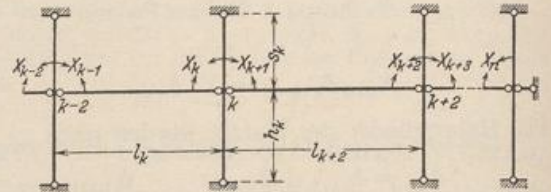


Abb. 400.

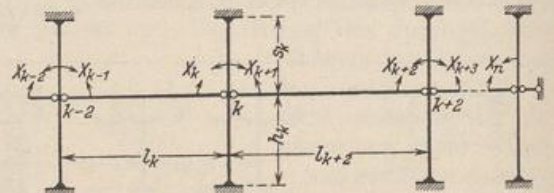


Abb. 401.

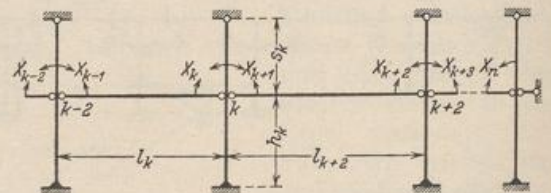


Abb. 402.

Bei linear veränderlicher Stärke der Stütze wird der einer Stütze mit gleichbleibender Stärke ($J = \text{const}$) äquivalente mittlere Querschnitt J_k^* nach S. 99 bestimmt (Abb. 399).

2. Einteilige Stützen mit starrer Einspannung der Enden (Abb. 398b).

Ausbildung a)

$$a_{kk} = \frac{\bar{h}_k}{3} \frac{h_k + 2f_k}{h_k + f_k},$$

$$6 \delta_{k,k,2} = 6 \delta_{(k+1)(k+1),2} = -6 \delta_{k(k+1)} = \frac{3 \bar{h}_k^3}{2 h_k [h_k^2 + h_k f_k + f_k^2]} h'_k. \quad (705)$$

Ausbildung b)

$$a_{kk} = h_k/3.$$

$$6 \delta_{k,k,2} = 6 \delta_{(k+1)(k+1),2} = -6 \delta_{k(k+1)} = \frac{3}{2} h'_k. \quad (706)$$

3. Zweiteilige Anordnung der Stützen $s_k + h_k$. Die Trägheitsmomente $J_{k,2}$, $J_{k,1}$ werden im Bereich der theoretischen Längen s_k , h_k konstant angenommen.

a) Die Enden der beiden Stützen sind frei drehbar gelagert (Abb. 400).

$$6 \delta_{k,k,2} = 6 \delta_{(k+1)(k+1),2} = -6 \delta_{k(k+1)} = \frac{2 s'_k h'_k}{s'_k + h'_k}. \quad (707)$$

b) Die Enden der beiden Stützen sind starr eingespannt (Abb. 401).

$$6 \delta_{kk,2} = 6 \delta_{(k+1)(k+1),2} = -6 \delta_{k(k+1)} = \frac{3 s'_k h'_k}{2 (s'_k + h'_k)}. \quad (708)$$

c) Die Enden der beiden Stützen sind elastisch eingespannt. Der Abstand $a_{\bar{k}k}$ der Momentennullpunkte von den Enden der Stützen wird mit $h/4$ geschätzt.

$$6 \delta_{kk,2} = 6 \delta_{(k+1)(k+1),2} = -6 \delta_{k(k+1)} = \frac{5 s'_k h'_k}{3 (s'_k + h'_k)}. \quad (709)$$

d) Die obere Stütze s_k ist frei drehbar angeschlossen, die untere Stütze h_k starr eingespannt (Abb. 402).

$$6 \delta_{kk,2} = 6 \delta_{(k+1)(k+1),2} = -6 \delta_{k(k+1)} = \frac{6 s'_k h'_k}{4 s'_k + 3 h'_k}. \quad (710)$$

Belastungszahlen. Die Belastungszahlen $\delta_{k \otimes}, \delta_{(k+1) \otimes}$ werden als virtuelle Arbeiten aus der Verdrehung der Querschnitte $k, k+1$ des Hauptsystems gebildet, welche bei der Belastung der Stäbe l_k, l_{k+2}, h_k oder durch Temperaturänderung und Stützenverschiebung entsteht. Die Riegel des Hauptsystems l_k, l_{k+2} sind einfache Balkenträger, deren Endverdrehung bei konstantem Trägheitsmoment für alle in Betracht kommenden Belastungen in Tabelle 17 angegeben sind oder sich nach Tabelle 12 entwickeln lassen. Sie werden ebenso wie die Vorzeichen der statisch überzähligen Schnittkräfte im 6fachen Betrage eingesetzt und für die häufigen Belastungsfälle nochmals angeschrieben.

Tabelle 36¹. Belastungsglieder für $J_k = \text{const}$ und Lastangriff am Riegel l_k, l_{k+2} .

	$6 \delta_{k0} = l_k l'_k \sum_k P \omega_D,$	$6 \delta_{(k+1)0} = l_{k+2} l'_{k+2} \sum_{k+2} P \omega'_D$
	$6 \delta_{k0} = l'_k \sum M_k \omega_M,$	$6 \delta_{(k+1)0} = -l'_{k+2} \sum M_{k+2} \omega'_M$
Streckenbelastung: $6 \delta_{k0} = c_k p_k l_k^2 l'_k,$ $6 \delta_{(k+1)0} = c'_{k+2} p_{k+2} l_{k+2}^2 l'_{k+2}$		
	$c_k = c'_{k+2} = \frac{1}{4}$	
	$c_k = c'_{k+2} = \frac{5}{32}$	
	$c_k = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2)^2,$	$c'_{k+2} = \frac{1}{4} (1 - \zeta'^2)^2$
	$c_k = \frac{1}{4} \zeta^2 (2 - \zeta^2),$	$c'_{k+2} = \frac{1}{4} \zeta'^2 (2 - \zeta'^2)$
	$c_k = \frac{1}{4} [\zeta_2^2 (2 - \zeta_2^2) - \zeta_1^2 (2 - \zeta_1^2)],$	$c'_{k+2} = \frac{1}{4} [\zeta_2'^2 (2 - \zeta_2'^2) - \zeta_1'^2 (2 - \zeta_1'^2)]$

Bei Lastangriff am Pfosten h_k ist dessen Abstützung zu beachten.

¹ Funktionswerte ω auf S. 116ff.

Tabelle 37¹. Belastungsglieder $6\delta_{k0} = -6\delta_{(k+1)0}$ für $J = \text{const}$ und Lastangriff am Pfosten h_k .

Belastungsfall	Belastungsfall					
	1	2	3	4	5	6
	$6\delta_{k0}$ (frei drehbare Lagerung)			$6\delta_{k0}$ (starre Einspannung)		
1	$-\frac{1}{4} p_k h_k^2 h_k'$			$-\frac{1}{8} p_k h_k^2 h_k'$		
2	$-\frac{7}{60} p_k h_k^2 h_k'$			$-\frac{1}{20} p_k h_k^2 h_k'$		
3	$-\frac{1}{60} p_k h_k^2 h_k' \beta^2 (10 - 3\beta^2)$			$-\frac{1}{40} p_k h_k^2 h_k' \beta^3 (5 - 3\beta)$		
4	$-P h_k h_k' \omega_D$			$-\frac{3}{2} P h_k h_k' \omega_\tau$		
5	$-P c h_k' \omega_M$			$-\frac{3}{2} P c h_k' \xi (2 - 3\xi)$		
6	$-P h_k h_k' [\omega_D(\xi_1) - \omega_D(\xi_2)]$			$-\frac{3}{2} P h_k h_k' [\omega_\tau(\xi_1) - \omega_\tau(\xi_2)]$		

Bei Belastung eines am Fuße \bar{k} eingespannten Pfostens mit $f_k \neq 0$ nach Abb. 399 ist

$$6\delta_{k0}^{(1)} = 6 \int M_k^{(1)} M_k^{(0)} \frac{J_c}{J} ds, \quad M_k^{(1)} \text{ nach Abb. 398b mit } a_{\bar{k}k} = \frac{\bar{h}_k h_k + 2f_k}{3 h_k + f_k}. \quad (711)$$

Die folgenden Belastungszahlen beschränken sich auf die Temperaturänderung t , Δt des Riegels und die ihr äquivalente Wirkung des Schwindens, auf die senkrechten Verschiebungen Δ_k der Stützenfüße \bar{k} und die waagerechte Verschiebung Δ_R des Riegels.

a) Frei drehbare Lagerung der Pfostenenden (beliebige Stützenform).
Temperaturänderung:

$$\left. \begin{aligned} 6\delta_{kt} &= +6EJ_c \frac{1}{h_k} \alpha_t t (l_1 + \dots + l_k) + 3EJ_c \frac{\alpha_t \Delta t}{d_k} l_k, \\ 6\delta_{(k+1)t} &= -6EJ_c \frac{1}{h_k} \alpha_t t (l_1 + \dots + l_k) + 3EJ_c \frac{\alpha_t \Delta t}{d_{k+1}} l_{k+1}, \end{aligned} \right\} \quad (712)$$

senkrechte Stützenverschiebung:

$$\left. \begin{aligned} 6\delta_{ks} &= +6EJ_c \frac{\Delta_{k-2} - \Delta_k}{l_k}, \\ 6\delta_{(k+1)s} &= -6EJ_c \frac{\Delta_k - \Delta_{k+2}}{l_{k+2}}; \end{aligned} \right\} \quad (713)$$

waagerechte Verschiebung des Riegels um eine vorgeschriebene Strecke Δ_R :

$$6\delta_{ks} = 6EJ_c \frac{\Delta_R}{h_k} = -6\delta_{(k+1)s}. \quad (714)$$

¹ Funktionswerte ω auf S. 116ff.

b) Starre Einspannung der Pfostenenden.

Temperaturänderung (näherungsweise für beliebige Stützenform):

$$\left. \begin{aligned} 6 \delta_{kt} &= 9 E J_c \frac{1}{h_k} \alpha_t t (l_1 + \dots + l_k) + 3 E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{d_k} l_k, \\ 6 \delta_{(k+1)t} &= -9 E J_c \frac{1}{h_k} \alpha_t t (l_1 + \dots + l_k) + 3 E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{d_{k+1}} l_{k+2}, \end{aligned} \right\} \quad (715)$$

senkrechte Stützenverschiebung (für beliebige Stützenform):

$$6 \delta_{ks} = +6 E J_c \frac{\Delta_{k-2} - \Delta_k}{l_k}, \quad 6 \delta_{(k+1)s} = -6 E J_c \frac{\Delta_k - \Delta_{k-2}}{l_{k+2}}, \quad (716)$$

waagerechte Verschiebung des Riegels, für $J = \text{const}$:

$$6 \delta_{ks} = 9 E J_c \frac{\Delta_R}{h_k} = -6 \delta_{(k+1)s}, \quad (717)$$

für $J = \infty$ im Bereich $f_k = h_k - \bar{h}_k$ der Stütze:

$$6 \delta_{ks} = 9 E J_c \Delta_R \frac{h_k + f_k}{h_k^2 + h_k f_k + f_k^2} = -6 \delta_{(k+1)s}. \quad (718)$$

Lösung. Die statisch überzähligen Größen X_k sind nach (701) die Wurzeln dreigliedriger linearer Gleichungen, die unter Einbeziehung der Belastungszahlen mit dem Gaußschen Algorithmus nach der Rechenvorschrift S. 232 aufgelöst werden. Die konjugierte Matrix entsteht auf dieselbe Weise oder nach S. 232 aus 2 Kettenbrüchen, die neben den Vorzahlen β'_{nn} , β'_{11} die Kennbeziehungen $\alpha_{(k-1)k}$, $\alpha_{k(k-1)}$ und damit alle übrigen Glieder β'_{kk} , β'_{ik} liefern.

Da die Verschiebungen $\delta_{k(k-1)}$ positiv, dagegen die Verschiebungen $\delta_{k(k+1)}$ negativ sind, werden die Kennbeziehungen $\alpha_{(k-1)k}$, $\alpha_{k(k-1)}$ zwischen den Endmomenten eines Trägers l_k ebenso wie beim durchgehenden Träger auf frei drehbaren Stützen stets positiv, dagegen die Kennbeziehungen $\alpha_{k(k+1)}$, $\alpha_{(k+1)k}$ der beiden Rieglmomente zu beiden Seiten der Stütze h_k negativ. Trotzdem gelten hier nach Abschn. 29 dieselben Vorschriften über die Verwendung der Kennbeziehungen zur Bildung der konjugierten Matrix und zur Berechnung der Stützenmomente wie beim durchgehenden Träger auf frei drehbaren Stützen.

Die konjugierte Matrix β'_{ik} ist den Elastizitätsgleichungen (701) mit den 6fachen Beträgen der Vorzahlen δ_{ik} zugeordnet, so daß

$$X_k = \sum \beta'_{kh} (6 \delta_{h\otimes}), \quad X_{k+1} = \sum \beta'_{(k+1)h} (6 \delta_{h\otimes}) \quad (719)$$

und damit auch alle übrigen Stütz- und Schnittkräfte des Tragwerks bestimmt sind.

a) Querschnitt m im Riegel l_k (Abb. 398).

$$M_m = M_{m0} - X_{k-1} \xi'_m - X_k \xi_m, \quad Q_m = Q_{m0} - \frac{X_k - X_{k-1}}{l_k}. \quad (720)$$

b) Querschnitt n im Pfosten h_k im Abstand y_n vom Stützenfuß \bar{k} an gerechnet (Abb. 398).

Frei drehbare Lagerung des Pfostens.

Starre Einspannung des Pfostens.

$$\left. \begin{aligned} M_n &= M_{n0} - \frac{X_{k+1} - X_k}{h_k} y_n, \\ Q_n &= Q_{n0} - \frac{X_{k+1} - X_k}{h_k}. \end{aligned} \right\} (721a)$$

$$\left. \begin{aligned} M_n &= M_{n0}^{(1)} - \frac{X_{k+1} - X_k}{2 h_k} (3 y_n - h_k), \\ Q_n &= Q_{n0}^{(1)} - \frac{3}{2} \frac{X_{k+1} - X_k}{h_k}. \end{aligned} \right\} (721b)$$

Längskraft und senkrechte Stützkraft des Pfostens h_k mit den Querkraften Q'_k , Q''_k des Riegels links und rechts vom Anschlußpunkt k :

$$C_k = -Q'_k + Q''_k = C_{k0} + \frac{X_k - X_{k-1}}{l_k} - \frac{X_{k+2} - X_{k+1}}{l_{k+2}}. \quad (722)$$

Waagerechte Stützkraft des Pfostens h_k :

frei drehbare Lagerung in \bar{k}

$$H_k = H_{k0} - \frac{X_{k+1} - X_k}{h_k}, \quad (723)$$

starre Einspannung in \bar{k}

$$H_k = H_{k0}^{(1)} - \frac{3}{2} \frac{X_{k+1} - X_k}{h_k}. \quad (724)$$

Die Stütz- und Schnittkräfte des Hauptsystems sind bei einteiligen Pfosten und frei drehbarer Lagerung des Fußes statisch bestimmt, bei starrer Einspannung und bei Verwendung von zweiteiligen Stützen statisch unbestimmt. Sie werden dann nach S. 397 berechnet oder aus vorhandenen Tabellen 30 u. 32 entnommen. In der Regel sind die Pfosten unbelastet, also H_{k0} , M_{n0} , Q_{n0} Null.

Der Ansatz (719) liefert nach (328) auch die Einflußlinien der statisch überzähligen Größen. Dabei sind $\delta_{h0} = \delta_{mh}$ bei senkrechter Belastung und waagerechtem Riegel die Ordinaten der senkrechten Biegelinien der Riegelstäbe l_h des Hauptsystems für $-X_h = 1$. Die Einflußlinien setzen sich daher ebenso wie beim durchgehenden Träger auf frei drehbaren Stützen aus zwei Biegelinien zusammen. Die analytischen Ausdrücke für die Gleichungen der Einflußlinien auf S. 418 gelten auch für den durchgehenden Träger mit elastisch drehbaren Stützen. Darnach wird nach (667) die Einflußlinie einer statisch überzähligen Größe X_k im Felde l_h aus der Einflußlinie X_h dieses Feldes, im Felde l_r aus der Einflußlinie X_{r-1} dieses Feldes entwickelt. Aus demselben Grunde stimmen auch die Regeln für die ungünstigsten Belastungen mit denjenigen überein, die auf S. 424 für den durchgehenden Träger auf frei drehbaren Stützen abgeleitet worden sind.

Zeichnerische Untersuchung. Die Punkte A_k , A_{k+1} der Achse A_1 , A_n der Lösung fallen in Übereinstimmung mit der relativen Lage der Stützenmomente X_k , X_{k+1} zusammen. Die Abschnitte Δ_k , Δ_{k+2} werden proportional zu den Riegel-längen l_k , l_{k+2} aufgetragen. Die Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ der analytischen Lösung des Ansatzes (701) bestimmen dann nach S. 255 die Strecken $a_{(k-1)k}$, $a_{k(k-1)}$ und damit die Festpunkte $F_{(k-1)k}$, $F_{k(k-1)}$, die Kennbeziehungen $\varkappa_{k(k+1)}$, $\varkappa_{(k+1)k}$ nach Abb. 225 die Übergangslinien $u_{k(k+1)}$, $u_{(k+1)k}$.

Die Anschlußmomente X_{k-1} , X_k des Riegelstabes l_k sind bei Belastung dieses Abschnitts allein aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (447), zeichnerisch durch Abb. 228 bekannt. Die Kreuzlinienabschnitte $R_{(k-1)k}$, R_{kk} und die Ordinaten $V_{(k-1)k}$, V_{kk} werden ebenso wie beim durchgehenden Träger auf frei drehbaren Stützen berechnet (672). Die übrigen Stützenmomente ergeben sich nach S. 258 und Abb. 228 aus den Festpunkten und Übergangslinien.

Die zeichnerische Bestimmung der Festpunkte und Übergangslinien ohne die Verwendung algebraisch berechneter Kennbeziehungen ist in Abschn. 32, S. 257 abgeleitet worden. Sie stützt sich auf die Wirkungslinien elastischer Gewichte, deren Lage für beliebige elastische Eigenschaften der Stäbe mit der Aufzeichnung der Biegelinien der Stäbe l_k für $-X_k = 1$ bestimmt oder durch die folgenden Strecken eingerechnet wird.

$$\begin{aligned} c_{kk} &= \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} l_k, & \bar{c}_{kk} &= \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}} l_k, \\ c_{(k+2)(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}}{\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}} l_{k+2}, & \bar{c}_{(k+2)(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}}{\delta_{(k+1)(k+1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}} l_{k+2}, \\ e_{k(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)} l_{k+2} - \delta_{k(k-1)} l_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}}. \end{aligned}$$

Nach S. 431 kann mit der Approximation der elastischen Eigenschaften der Riegelstäbe nach Tabelle 29 und der Pfosten nach (703ff.) gerechnet und

$$\left. \begin{aligned} 6 \delta_{k(k-1)} &= \lambda_k l_k', & 6 \delta_{(k+1)(k+2)} &= \lambda_{k+2} l_{k+2}', \\ 6 \delta_{kk,1} &= 2 \mu_k l_k', & 6 \delta_{(k+1)(k+1),1} &= 2 \mu_{k+2} l_{k+2}' \end{aligned} \right\} \quad (725)$$

gesetzt werden. Der Beiwert λ ist nach S. 395 in zahlreichen Fällen 1. Dasselbe gilt auch von dem Beiwert μ , wenn das Trägheitsmoment J_k im Bereiche eines jeden Riegelabschnittes konstant angenommen wird. Um die Rechenvorschrift formal zu vereinfachen, wird $-6 \delta_{k(k+1)}$ stets durch $+2 \psi_k h'_k$ ausgedrückt und ψ_k entsprechend der Art der Pfostenstützung nach (703 ff.) eingesetzt.

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 2\mu_k} l_k, & \bar{c}_{kk} &= \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 2\mu_k + 2\psi_k h'_k/l'_k} l_k, & c_{(k+2)(k+1)} &= \frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+2} + 2\mu_{k+2}} l_{k+2}, \\ \bar{c}_{(k+2)(k+1)} &= \frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+2} + 2\mu_{k+2} + 2\psi_k h'_k/l'_{k+2}} l_{k+2}, & e_{k(k+1)} &= \frac{\lambda_{k+2} l'_{k+2} l_{k+2} - \lambda_k l'_k l_k}{l'_k (\lambda_k + 2\mu_k) + l'_{k+2} (\lambda_{k+2} + 2\mu_{k+2})}, \end{aligned} \right\} \quad (726)$$

für $J_k = \text{const}$ und $J_{k+2} = \text{const}$ ist

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{l_k}{3}, & \bar{c}_{kk} &= \frac{l_k}{3 + 2\psi_k h'_k/l'_k}, & c_{(k+2)(k+1)} &= \frac{l_{k+2}}{3}, \\ \bar{c}_{(k+2)(k+1)} &= \frac{l_{k+2}}{3 + 2\psi_k h'_k/l'_{k+2}}, & e_{k(k+1)} &= \frac{l'_{k+2} l_{k+2} - l'_k l_k}{3(l'_k + l'_{k+2})}. \end{aligned} \right\} \quad (727)$$

Zur zeichnerischen Untersuchung eines allgemeinen Belastungsfalles werden außerdem noch die Punkte E'_k durch die Koordinaten $e_k = c_{kk}$ und

$$T_k = \frac{6 \delta_{k0}}{(\lambda_k + 2\mu_k) l'_k}; \quad \mu_k = \lambda_k = 1: \quad T_k = 2 \frac{\delta_{k0}}{l'_k} \quad (728)$$

eingerechnet (Abb. 232). Ungleichförmige Temperaturänderung und senkrechte Stützenverschiebungen ergeben

$$T_k = \frac{6 E J_e \left[\frac{\alpha_t \Delta t}{2d} l_k + \frac{1}{l'_k} (\Delta_k - \Delta_{k-2}) \right]}{(\lambda_k + 2\mu_k) l'_k} \quad (729)$$

Die Ergebnisse für e_1 , T_1 und e_n , T_n lassen sich jeweils ebenso wie auf S. 421 ableiten. Für die Lösung nach Abb. 233 werden nach S. 263 die Punkte $E_{k(k+1)}$ mit den Koordinaten $e_{k(k+1)}$, $T_{k(k+1)}$ und die Strecken S_k bestimmt.

Die Verwendung der Ordinaten $V_{k(k-1)}$, V_{kk} zur zeichnerischen Bestimmung der Riegelmomente X_{k-1} , X_k und der übrigen Stützenmomente ist in Abschn. 32 begründet und in Abb. 228 gezeigt worden. Der allgemeine Belastungsfall wird nach den Bemerkungen auf S. 262 und nach Abb. 232 untersucht.

Die Biegemomente und Querkräfte der Riegelstäbe werden nach (720) ebenso wie beim durchlaufenden Träger mit frei drehbaren Stützen aufgetragen, die Schnittkräfte der Pfosten nach (721) mit den Ergebnissen für Kopf und Fuß entwickelt. Dabei sind bei statisch unbestimmter Anordnung zunächst die Momente und Querkräfte im Hauptsystem zu berechnen.

Die Einflußlinien der Stützenmomente und der Schnittkräfte in Riegel und Pfosten lassen sich nach denselben Regeln entwickeln, die auf S. 422 für den durchlaufenden Träger auf frei drehbaren Stützen abgeleitet worden sind.

Vereinfachung der Annahmen über die elastischen Eigenschaften.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte sind nach (702) durch die elastisch wirksamen Längen l'_k , $\mu_k l'_k$, $\lambda_k l'_k$ der Riegel und durch die Art und Abstützung der Pfosten bestimmt, die in den Ansatz nach (703 ff.) mit $2 \psi_k h'_k$ eingehen. Werden diese mit dem Felde l_k und dem Pfosten h_k veränderlichen Strecken konstant angenommen, so entstehen einfache Näherungslösungen mit den folgenden Bedingungengleichungen:

$$\lambda_k X_{k-1} + 2\mu_k \left(1 + \frac{\psi_k h'_k}{\mu_k l'_k} \right) X_k - 2 \frac{\psi_k h'_k}{l'_k} X_{k+1} = \lambda X_{k-1} + a X_k - b X_{k+1} = \frac{6 \delta_{k0}}{l'}$$

$$\text{Sonderfall } \lambda = \mu = 1: \quad X_{k-1} + (2 + b) X_k - b X_{k+1} = 6 \delta_{k0}/l'$$

Bei unendlich vielen Stützen sind die Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ zwischen den Anschlußmomenten eines Riegels und die Kennbeziehungen $\varkappa_{k(k+1)}$, $\varkappa_{(k+1)k}$

zwischen den Anschlußmomenten der Riegel zu beiden Seiten einer Stütze konstant, und zwar

$$\varkappa_{(k-1)k} = \varkappa_{k(k-1)} = \varkappa \quad \text{und} \quad \varkappa_{k(k+1)} = \varkappa_{(k+1)k} = -\varepsilon.$$

Mit

$$\frac{(a+b)(a-b) + \lambda^2}{2a\lambda} = \varrho \quad \text{ist} \quad \varkappa = \varrho - \sqrt{\varrho^2 - 1} = -\frac{X_{k-1}}{X_k}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a - \varkappa\lambda} = \frac{X_k}{X_{k+1}}. \quad (730)$$

Sonderfall $\lambda = \mu = 1$:

$$\varrho = \frac{5 + 4b}{2(2 + b)}.$$

Da die Hauptglieder β_{kk} der konjugierten Matrix für \varkappa und ε konstant sind, genügt es, die Nebenglieder einer Zeile der Matrix anzuschreiben.

$$\beta_{(k-2)k} = -\frac{\varkappa^2 \varepsilon}{l' \lambda (1 - \varkappa^2)}, \quad \beta_{(k-1)k} = -\frac{\varkappa^2}{l' \lambda (1 - \varkappa^2)}, \quad \beta_{kk} = \frac{\varkappa}{l' \lambda (1 - \varkappa^2)},$$

$$\beta_{(k+1)k} = \frac{\varkappa \varepsilon}{l' \lambda (1 - \varkappa^2)}, \quad \beta_{(k+2)k} = -\frac{\varkappa^2 \varepsilon}{l' \lambda (1 - \varkappa^2)}.$$

Bei einer begrenzten Anzahl von Stützen haben die Endfelder die gleichen elastischen Eigenschaften wie die Zwischenfelder, wenn

für Endfelder nach Abb. 397a, b für Endfelder nach Abb. 397c

$$l'_1 = \frac{2\mu - \varkappa\lambda}{2\mu_1} l'; \quad (731a) \quad l'_2 = l' \quad \text{und} \quad (731b)$$

$$2\psi_0 h'_0 = 2\psi h'(1 - \varepsilon).$$

Bei symmetrischer Belastung (1) und antisymmetrischer Belastung (2) des Riegels l_k ist

$$1) X_{k-1} = X_k = 6 \frac{\delta_{(k-1)0}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1 + \varkappa)}, \quad 2) X_{(k-1)} = -X_k = 6 \frac{\delta_{(k-1)0}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1 - \varkappa)}; \quad (732)$$

für Belastung eines Endfeldes nach Abb. 397a, b

$$X_1 = \frac{6 \delta_{10}}{l'} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, \quad X_n = \frac{6 \delta_{n0}}{l'} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}. \quad (733)$$

Die übrigen Anschlußmomente sind analytisch durch die Kennbeziehungen, zeichnerisch durch die Festpunkte und Übergangslinien bestimmt. Die Schnittkräfte aus einer allgemeinen Belastung des Trägers werden durch Superposition der Teilergebnisse aus feldweiser Belastung erhalten. Die Gleichungen der Einflußlinien von X_{k-1} und X_k im Felde l_k sind

$$X_{k-1} = l_k \frac{\varkappa}{\lambda(1 - \varkappa^2)} (\bar{\omega}'_D - \varkappa \bar{\omega}_D), \quad X_k = l_k \frac{\varkappa}{\lambda(1 - \varkappa^2)} (\bar{\omega}_D - \varkappa \bar{\omega}'_D). \quad (734)$$

Sie werden nach S. 436 zur Aufzeichnung der Einflußlinien der übrigen Stützenmomente verwendet und bilden damit nach S. 435 auch die Grundlage für die Einflußlinien der übrigen Schnittkräfte.

Untersuchung der Pilzdecke (Abb. 406) mit vereinfachten Annahmen für die elastischen Eigenschaften.

1. Geometrische Grundlagen nach S. 441 u. 442.

$$l' = 5,4 \text{ m}, \quad \mu = 0,7, \quad \lambda = 0,93, \quad 2\psi h' = 2,58,$$

$$a = 2 \cdot 0,7 \left(1 + \frac{2,58}{2 \cdot 0,7 \cdot 5,4} \right) = 1,88, \quad b = \frac{2,58}{5,4} = 0,48, \quad \varrho = 1,192,$$

$$\varkappa = 1,192 - \sqrt{1,192^2 - 1} = 0,544, \quad \varepsilon = \frac{0,48}{1,88 - 0,544 \cdot 0,93} = 0,348$$

$$2\psi_0 h'_0 = 2,58 (1 - 0,348) = 1,68.$$

2. Bemessung der Endstützen nach (731b).

$$h = s = 4,2 \text{ m}, \quad J_0 = 21,33, \quad J_n = 76,26, \quad J_c = 36 \text{ dm}^4;$$

nach (709) ist

$$2\psi_0 h'_0 = \frac{5}{3} \frac{h'_0 s'_0}{h'_0 + s'_0} = \frac{5}{3} \frac{4,2 J_c}{J_{0s} + J_{0h}} = 1,68,$$

also

$$J_{0s} + J_{0h} = 4,16 J_c \quad \text{oder z. B.} \quad J_{0s} = 1,54 J_s, \quad J_{0h} = 1,54 J_h.$$

Für diese Abmessungen wird bei Belastung des Feldes l_2 mit $p = 1 \text{ t/m}$

$$\frac{6 \delta_{10}}{l'} = \frac{l_0^3}{4} = \frac{5,4^2}{4} = 7,29, \quad X_1 = X_2 = 7,19 \frac{0,544}{0,93 (1 + 0,544)} = 2,75 \text{ mt.}$$

3. Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ auf allen Feldern. Superposition:

$$X_1 = 2,75 (1 - \varepsilon \kappa + \varepsilon^2 \kappa^2 - \varepsilon^3 \kappa^3) = 2,31 \text{ mt}, \quad X_2 = 2,75 (1 + \varepsilon - \varepsilon^2 \kappa + \varepsilon^3 \kappa^2) = 3,56 \text{ mt},$$

$$X_3 = 2,75 (1 + \varepsilon - \varepsilon \kappa + \varepsilon^2 \kappa^2) = 3,29 \text{ mt}, \quad X_4 = 2,75 (1 + \varepsilon - \varepsilon \kappa - 2^2 \kappa) = 3,09 \text{ mt}.$$

Untersuchung durchlaufender Träger mit Hilfe der Knotendrehwinkel.

Die Stabdrehwinkel ϑ_i des Tragwerks sind bei allen äußeren Ursachen Null oder vorgeschrieben (gleichförmige Temperaturänderung des Riegels $\vartheta_{i0} = \vartheta_{it}$, Stützenverschiebungen $\vartheta_{i0} = \vartheta_{is}$). Die n Knotendrehwinkel φ_J ($J = A \dots N$) eines durchgehenden Trägers mit n Zwischenstützen werden daher nach Abschn. 39 bei beliebiger Abstützung der Pfosten aus n statischen Bedingungsgleichungen $\delta A_J = 0$ berechnet.

$$\delta A_J = \varphi_{J-1} a_{J(J-1)} + \varphi_J a_{JJ} + \varphi_{J+1} a_{J(J+1)} + a_{J0} = 0. \quad (735)$$

Das Trägheitsmoment aller Träger l_i und Pfosten h_i, s_i gilt im Bereich der geometrischen Stablänge als konstant.

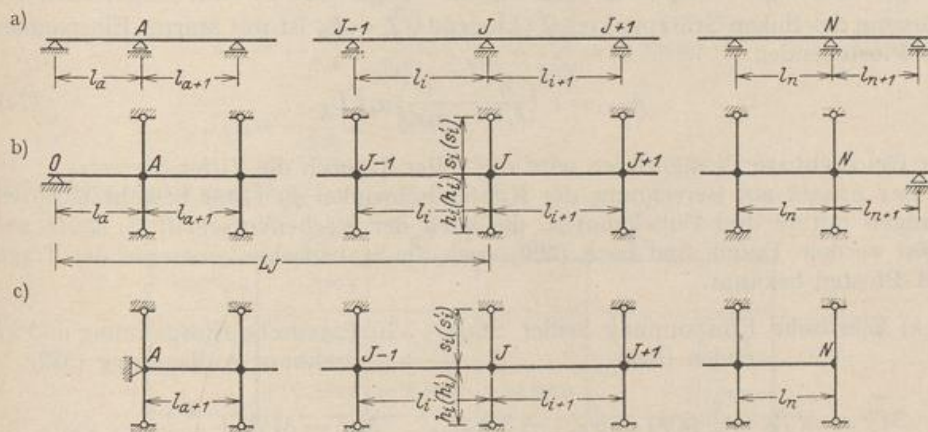


Abb. 403.

Vorzahlen der Knotendrehwinkel. 1. Durchlaufender Träger mit freidrehbaren Stützen (Abb. 403a)

$$a_{J(J-1)} = -\frac{2}{l'_i}, \quad a_{JJ} = -\frac{4}{l'_i} - \frac{4}{l'_{i+1}}, \quad a_{J(J+1)} = -\frac{2}{l'_{i+1}}, \quad (736)$$

freie Auflagerung der Endstützen

$$a_{AA} = -\frac{3}{l'_a} - \frac{4}{l'_{a+1}}, \quad a_{NN} = -\frac{4}{l'_n} - \frac{3}{l'_{n+1}}, \quad (737a)$$

starre Einspannung der Endstützen

$$a_{AA} = -\frac{4}{l'_a} - \frac{4}{l'_{a+1}}, \quad a_{NN} = -\frac{4}{l'_a} - \frac{4}{l'_{a+1}}. \quad (737b)$$

2. Durchlaufender Träger mit elastisch drehbaren Stützen (Abb. 403b)

$$a_{J(J-1)} = -\frac{2}{l'_i}, \quad a_{JJ} = -\frac{4}{l'_i} - \frac{4}{l'_{i+1}} - \frac{\lambda_h}{h'_i} - \frac{\lambda_s}{s'_i}, \quad a_{J(J+1)} = -\frac{2}{l'_{i+1}}. \quad (738)$$

Die Beiwerte λ_h, λ_s erhalten bei starrer Einspannung der Pfosten h_i, s_i den Betrag 4, bei frei drehbarer Auflagerung der Pfosten den Betrag 3, bei elastischer Einspannung mit dem Momentennullpunkt in dem Viertelpunkt den Betrag 3,6. Bei frei drehbarer Auflagerung der Randträger l_a, l_{n+1} ist

$$a_{AA} = -\frac{3}{l'_a} - \frac{4}{l'_{a+1}} - \frac{\lambda_h}{h'_a} - \frac{\lambda_s}{s'_a}, \quad a_{NN} = -\frac{4}{l'_a} - \frac{3}{l'_{a+1}} - \frac{\lambda_h}{h'_a} - \frac{\lambda_s}{s'_a}. \quad (739)$$

Abschluß des Tragwerks nach Abb. 403c: $1/l'_a = 1/l'_{n+1} = 0$. Anordnung des Tragwerks nach Abb. 397: $1/s' = 0$.

Belastungszahlen des Ansatzes. Die Belastungszahlen a_{J0} werden für die an den Trägern l_i und an den Pfosten h_i, s_i angreifenden äußeren Kräfte nach (536) gebildet. Man bedient sich bei Stäben mit zwei eingespannten Enden der Tabelle 25, bei Stäben mit einem eingespannten Ende der Tabelle 26. Gemessene oder geschätzte senkrechte Verschiebungen der Stützpunkte ergeben

$$a_{J0} = +\frac{6}{l_i l'_i} (\Delta_J - \Delta_{J-1}) + \frac{6}{l_{i+1} l'_{i+1}} (\Delta_{J+1} - \Delta_J). \quad (740)$$

Bei gleichförmiger Temperaturänderung des Trägers um t^0 und waagerechter Abstützung des linken Stützpunktes O (Abstand $\overline{OJ} = L_J$ ist mit starrer Einspannung der Pfostenenden

$$a_{J0} = +\left(\frac{6}{h_i h'_i} - \frac{6}{s_i s'_i}\right) \alpha_t t L_J. \quad (741)$$

Für frei drehbare Pfostenenden wird die Ziffer 6 durch die Ziffer 3 ersetzt.

Der Ansatz zur Berechnung der Knotendrehwinkel φ_J (735) besteht aus Gleichungen mit je drei Unbekannten, die nach der Rechenvorschrift S. 230 ff. aufgelöst werden. Damit sind nach (529) auch die Stabanschlußmomente der Träger und Pfosten bekannt.

- a) Elastische Einspannung beider Stabenden (530) b) Elastische Einspannung und frei drehbare Auflagerung (532)

$$M_J^{(i)} = M_{J0}^{(i)} + \frac{2}{l'_i} (2\varphi_J + \varphi_{J-1} - 3\vartheta_{i0}). \quad M_J^{(i)} = M_{J0}^{(i)} + \frac{3}{l'_i} (\varphi_J - \vartheta_{i0}).$$

Die Aufzeichnung der Einflußlinien der Knotendrehwinkel φ_J und der Stabanschlußmomente $M_J^{(i)}$ ist in Abschn. 40 abgeleitet und für den durchlaufenden Träger auf elastisch drehbaren Stützen dargelegt worden.

Die Verwendung der Knotendrehwinkel liefert die Schnittkräfte im Gegensatz zur Lösung auf S. 435 in zwei Stufen. Sie ist übersichtlich und vor allem bei mehrteiliger Ausbildung der Zwischenstützen (Abb. 396d) von Bedeutung. Die Rechnung ist an einem Beispiel auf S. 328 ff. gezeigt worden.

Auch diese Untersuchung kann durch geometrische Auslegung der Kennbeziehungen zwischen je zwei Stabanschlußmomenten am Stabknoten und an einem

Systemstabe graphisch behandelt werden. Das ist in Abschn. 44 geschehen und dort auch durch Beispiele belegt worden, so daß sich besondere Angaben erübrigen, zumal die Lösung im Vergleich zu den ausführlichen Rechenvorschriften dieses Abschnitts weder sachliche noch formale Vorteile bietet.

Berechnung einer Pilzdecke.

Die Decke des zweiten Geschosses wird unter der Annahme berechnet, daß eine waagerechte Verschiebung der Riegel ausgeschlossen ist.

$$l_k = 5,4 \text{ m}, \quad J_k = J_e = 36,0 \text{ dm}^4,$$

$$l'_k = 5,4, \quad s' = 7,09, \quad h' = 1,983 \text{ m}.$$

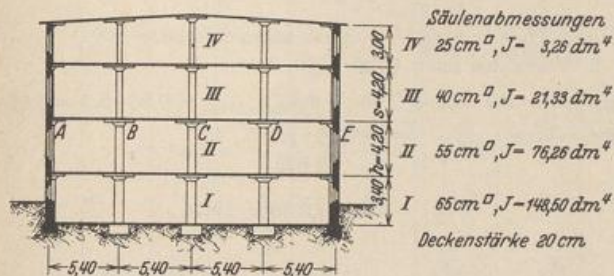


Abb. 404.

A. Berechnung für feldweise konstantes Trägheitsmoment mit Hilfe der Knotendrehwinkel (S. 439). Elastische Einspannung der Pfostenenden ($\alpha_{kk} = h_k/4$).

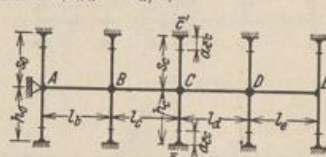


Abb. 405.

1. Vorzahlen nach Gl. (738)

$$a_{AA} = a_{EE} = -\frac{4}{5,4} - \frac{3,6}{1,983} - \frac{3,6}{7,09} = -3,0639,$$

$$a_{JJ} = -\frac{4}{5,4} - \frac{4}{5,4} - \frac{3,6}{1,983} - \frac{3,6}{7,09} = -3,8047,$$

$$a_{J(J+1)} = -\frac{2}{5,4} = -0,3704.$$

Die Stabdrehwinkel sind Null.

φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	
-3,0639	-0,3704				a_{A0}
-0,3704	-3,8047	-0,3704			a_{B0}
	-0,3704	-3,8047	-0,3704		a_{C0}
		-0,3704	-3,8047	-0,3704	a_{D0}
			-0,3704	-3,0639	a_{E0}

2. Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ auf allen Feldern. Tab. 25.

$$M_{J0}^{(k)} = -M_{k0}^{(k)} = -\frac{1 \cdot 5,4^2}{12} = -2,43, \quad a_{A0} = -a_{E0} = +2,43, \quad a_{J0} = 0.$$

Infolge Symmetrie ist $\varphi_C = 0$. Daher folgt aus den ersten beiden Gleichungen

$$\varphi_A = 0,80254, \quad \varphi_B = -0,07812.$$

Nach Gl. (530) wird

$$M_A^{(b)} = -2,43 + 0,3704 (2 \cdot 0,80254 - 0,07812) = -1,864 \text{ mt,}$$

$$M_B^{(b)} = 2,43 + 0,3704 (-2 \cdot 0,07812 + 0,80254) = +2,669 \text{ mt,}$$

$$M_B^{(c)} = -2,43 + 0,3704 (-2 \cdot 0,07812 + 0) = -2,488 \text{ mt,}$$

$$M_C^{(c)} = 2,43 + 0,3704 (0 - 0,07812) = +2,401 \text{ mt.}$$

Die Anschlußmomente der Pfosten verhalten sich wie deren Trägheitsmomente.

B. Berechnung unter Berücksichtigung starrer Stützenköpfe beim Riegel. Elastische Einspannung der Pfostenenden ($\alpha_{\bar{k}k} = h_k/4$).

1. Approximation des Trägheitsmomentes der Riegel. Tab. 29 (für alle Felder gleich).

$$v = 0,6 \text{ m, } \nu = \frac{1}{9}, \quad \mu = \left(1 - \frac{2}{9} \right) \left(1 - \frac{1}{9} \frac{8}{9} \right) = 0,7, \quad \lambda = 0,93.$$

Für die Pfosten wird $J = \text{const}$ angenommen.

2. Vorzahlen nach (702).

$$6 \delta_{kk,1} = 2 \cdot 0,7 \cdot 5,4 = 7,56, \quad 6 \delta_{(k+1)(k+2)} = 0,93 \cdot 5,4 = 5,02,$$

$$6 \delta_{kk,2} = \frac{5}{3} \frac{7,09 \cdot 1,983}{9,073} = 2,58,$$

$$6 \delta_{kk} = 7,56 + 2,58 = 10,14.$$

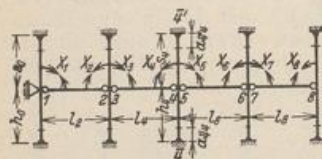


Abb. 406.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
10,14	5,02							δ_{10}
5,02	10,14	-2,58						δ_{20}
	-2,58	10,14	5,02					δ_{30}
		5,02	10,14	-2,58				δ_{40}
			-2,58	10,14	5,02			δ_{50}
				5,02	10,14	-2,58		δ_{60}
					-2,58	10,14	5,02	δ_{70}
						5,02	10,14	δ_{80}

3. Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ auf allen Feldern. Tab. 36. $6 \delta_{k0} = \frac{5,4^3}{4} = 39,366$. Infolge Symmetrie ergibt sich aus den ersten 4 Gleichungen

$$X_1 = 2,038, \quad X_2 = 3,726, \quad X_3 = 3,355, \quad X_4 = 2,980 \text{ mt.}$$

C. Zeichnerische Lösung mit Berücksichtigung der starren Stützenköpfe beim Riegel. Elastische Einspannung der Pfostenenden ($\alpha_{\bar{k}k} = h_k/4$).

$$\text{Gl. (726) } c_{kk} = c_{(k+2)(k+1)} = \frac{0,93}{0,93 + 2 \cdot 0,7} \cdot 5,4 = 2,156 = e_k = e_{k+1},$$

$$2 \psi_k h_k' = 2,58, \quad \bar{c}_{kk} = \bar{c}_{(k+2)(k+1)} = \frac{0,93}{0,93 + 2 \cdot 0,7 + 2,58/5,4} \cdot 5,4 = 1,79,$$

$$c_{21} = c_{88} = e_1 = e_8 = 1,79,$$

$$T_k = \frac{39,366}{12,58} = 3,13 \text{ mt,} \quad T_1 = T_8 = \frac{39,366}{15,16} = 2,59 \text{ mt.}$$

Festpunkte zeichnerisch nach Abb. 226, Überzählige nach Abb. 407.

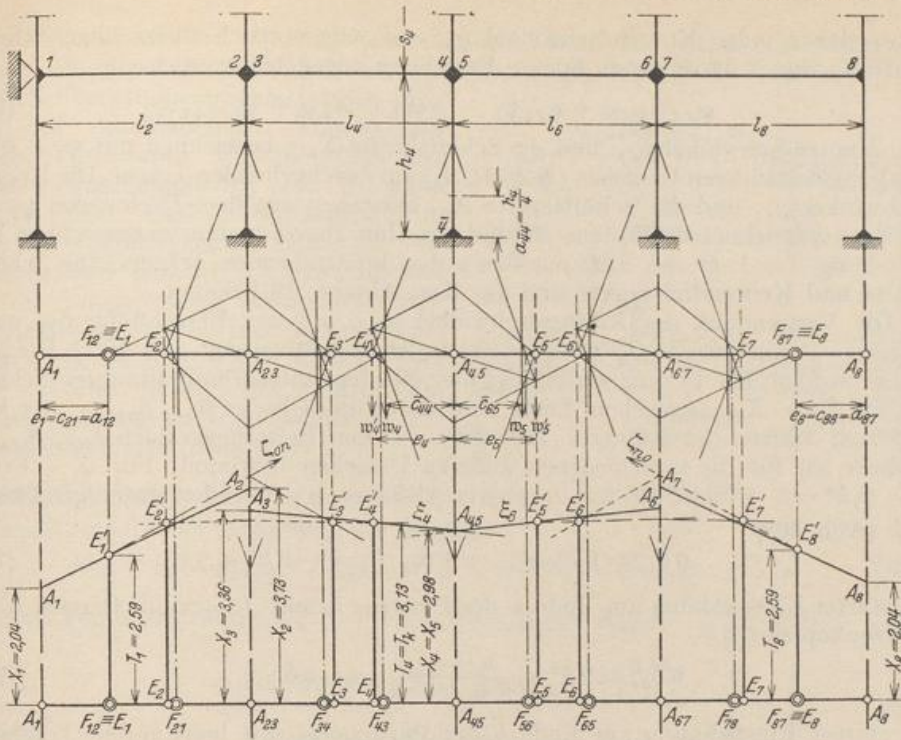


Abb. 407.

1. Geometrische Entwicklung der Festpunkte und Übergangslinien aus den Schwerlinien nach S. 257.
2. Eintragung der Punkte E'_k mit e_k und T_k .
3. Der Geradenzug ζ_{0n} bestimmt die linke Gruppe der den Festpunkten $F_{(k-1)k}$ zugeordneten Punkte der Geraden ζ_k , der Geradenzug ζ_{n0} die rechte Gruppe der den Festpunkten $F_{k(k-1)}$ zugeordneten Punkte von ζ_k . Diese schneiden auf den Ordinaten zu A_{k-2} , A_k die Stützmomente X_{k-1} , X_k ab.

Schächterle, W.: Beiträge zur Berechnung elastischer Bogen und Rahmen. Berlin 1914.
 — Leve, V.: Die Berechnung durchlaufender Träger und mehrstieliger Rahmen nach der Methode des Zahlenrechtecks. Borna 1916. — Straßner, A.: Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke. Bd. 1: Der durchlaufende Rahmen. Berlin 1922. — Derselbe: Tabellen für die Einflußlinien und die Momente des durchlaufenden Rahmens. Berlin 1922. — Kann, F.: Durchlaufende Eisenbetonkonstruktionen in elastischer Verbindung mit Zwischenstützen. Berlin 1926. — Crämer, H.: Der elastisch drehbare, gestützte Durchlaufbalken. Berlin 1927. — Mörsch, E.: Der durchlaufende Träger. Stuttgart 1928.

49. Die Rahmenstellung mit beliebig vielen Feldern, geraden Riegelstäben und senkrechten Pfosten.

Die Rahmenstellung entsteht durch Beseitigung der waagerechten Stützung a des Riegels eines durchlaufenden Trägers mit elastisch drehbaren Pfosten (Abb. 397), so daß die waagerechten Komponenten der Lasten am Riegel und der Unterschied der Querkräfte an den Pfostenköpfen den Stützpunkten durch die Biegesteifigkeit der Pfosten zugeleitet werden. Hiermit ist eine Verschiebung der Stabknoten verbunden. Da jedoch stets die von den statisch überzähligen Größen abhängigen Längenänderungen der Stäbe vernachlässigt werden, sind die waagerechten Verschiebungen durch einen Parameter ψ_1 bestimmt. Er ist beim durchgehenden Träger Null. Man verwendet für ψ_1 den EJ_c -fachen Betrag des Stabdrehwinkels ϑ^* eines der beiden Endpfosten, bei Symmetrie der Rahmenstellung den EJ_c -fachen Betrag des Drehwinkels der Mittelstütze oder der waagerechten Verschiebung des Symmetriepunktes des Riegels. Nach dem Superpositionsgesetz

kann daher jeder Knotendrehwinkel φ_J und jede statisch überzählige Schnittkraft X_h durch die folgende lineare Beziehung angegeben werden:

$$\varphi_J = \varphi_{J\otimes} + \varphi_{J1} \psi_1, \quad X_h = X_{h\otimes} + \psi_1 X_{h1}. \quad (742)$$

Die Knotendrehwinkel $\varphi_{J\otimes}$ und die Schnittkräfte $X_{h\otimes}$ bezeichnen mit $\psi_1 = 0$ die Wirkung der äußeren Ursachen ($\mathfrak{F}, t, \Delta t, \Delta_k$) am durchgehenden Träger. Die Knotendrehwinkel φ_{J1} und die Schnittkräfte X_{h1} entstehen aus dem Drehwinkel $\psi_1 = 1$ eines ausgezeichneten Pfostens h^* und der ihm zugeordneten waagerechten Verschiebung $\Delta = 1 \cdot h^*$ des Stützpunktes a des durchgehenden Trägers. Die Schnittkräfte und Knotendrehwinkel sind aus dem Abschn. 48 bekannt.

Die Verwendung der Knotendrehwinkel $\varphi_{J\otimes}, \varphi_{J1}$ zur Berechnung des unabhängigen Parameters ψ_1 des Ansatzes ist in Abschn. 39 gezeigt und durch Beispiele belegt worden. Die Lösung wird daher hier mit den statisch unbestimmten Schnittkräften $X_{h\otimes}, X_{h1}$ angegeben. Diese sind durch die Glieder $\beta_{hk}, \beta_{h(k+1)}$ der konjugierten Matrix des Ansatzes (719) und als den Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}, \delta_{(k+1)\otimes}$ (Tabelle 36) für die verschiedenen äußeren Ursachen bestimmt. Für $\psi_1 = 1$ und $\Delta = \psi_1 h^* = 1 \cdot h^*$ wird bei frei drehbarer Abstützung der Enden einteiliger Pfosten in \bar{k} (Abb. 408)

$$6 \delta_{ks} = 6 h^*/h_k, \quad 6 \delta_{(k+1)s} = -6 h^*/h_k, \quad (743)$$

bei starrer Einspannung am Ende \bar{k} des Pfostens h_k mit $J = \infty$ im Bereich f_k des Stützenkopfes

$$6 \delta_{ks} = 9 h^* \frac{h_k + f_k}{h_k^2 + h_k f_k + f_k^2} = -6 \delta_{(k+1)s}, \quad (744)$$

bei starrer Einspannung am Ende \bar{k} des Pfostens h_k mit konstantem Trägheitsmoment im Bereich $h_k, (f_k = 0)$

$$6 \delta_{ks} = 9 h^*/h_k, \quad 6 \delta_{(k+1)s} = -9 h^*/h_k. \quad (745)$$

Daher ist mit $k = 0, 2, 4 \dots$ bei gelenkiger Auflagerung in \bar{k} :

$$X_{h1} = 6 \sum_k \frac{h^*}{h_k} (\beta'_{hk} - \beta'_{h(k+1)}), \quad (746)$$

bei starrer Einspannung in $\bar{k}, f_k = 0$:

$$X_{h1} = 9 \sum_k \frac{h^*}{h_k} (\beta'_{hk} - \beta'_{h(k+1)}). \quad (747)$$

Der EJ_c -fache Betrag ψ_1 des Stabdrehwinkels ist durch das Gleichgewicht der Schnittkräfte der Rahmenstellung bestimmt. Sie wird für diesen Nachweis in eine statisch äquivalente zwangsläufige Stabkette I_1 verwandelt, an deren Elementen $i \equiv \bar{J}\bar{K}$ neben der Belastung \mathfrak{F} , die Stabendmomente $M_J^{(i)}, M_K^{(i)}$ als äußere Kräfte angreifen. Der Drehsinn im Uhrzeiger ist an beiden Stabenden positiv. Dasselbe gilt daher auch von der Momentensumme $M^{(i)} = M_J^{(i)} + M_K^{(i)}$ (Abb. 408) und ihren Anteilen $M_0^{(i)}, M_1^{(i)}$ in

$$M^{(i)} = M_0^{(i)} + \psi_1 M_1^{(i)}. \quad (748)$$

Die äußeren Kräfte der Kette ($\mathfrak{F}_i, M^{(i)}$) sind nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen (524) im Gleichgewicht, wenn ihre virtuelle Arbeit für den Bewegungszustand $\psi_1 = 1$ Null ist. Dabei drehen sich die Stäbe i um einen Hauptpol (i) mit der Geschwindigkeit v_{i1} .

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= \sum (M_P^{(i)} + M_0^{(i)} + \psi_1 M_1^{(i)}) v_{i1} = 0, \\ \psi_1 &= - \frac{\sum (M_P^{(i)} + M_0^{(i)}) v_{i1}}{\sum M_1^{(i)} v_{i1}}. \end{aligned} \quad (749)$$

In diesem Ansatz ist $M_p^{(i)}$ das Moment aller Lasten am Stabe i in bezug auf dessen Hauptpol (i). Die Momentensummen $M_0^{(i)}$, $M_1^{(i)}$ sind Funktionen der statisch überzähligen Schnittkräfte X_{h_0} , X_{h_1} des durchlaufenden Trägers auf elastisch drehbaren Stützen infolge der äußeren Ursachen oder $\psi_1 = 1$. Bei senkrechten Pfosten sind die Winkelgeschwindigkeiten der Riegelstäbe Null. Sie verschieben sich parallel. Daher sind hier nur die waagerechten Komponenten W der Kräfte an der virtuellen Arbeit beteiligt. Sie beträgt $\sum W h^* = h^* \sum W$. Die virtuelle Arbeit der Kräfte am Pfosten h_k wird aus den folgenden Ergebnissen gebildet (Abb. 408).

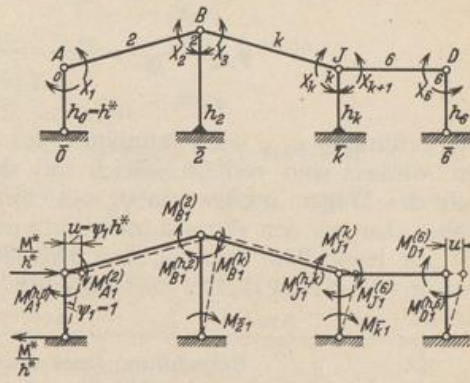


Abb. 408.

Winkelgeschwindigkeit: $v_{k1} = h^*/h_k$.

Stabmomente bei Belastung des Riegels:

$$M_{\bar{k}0} = \alpha_k (X_{(k+1)0} - X_{k0}), \quad M_0^{(h,k)} = (1 + \alpha_k) (X_{(k+1)0} - X_{k0}). \quad (750)$$

Gleichm. Temperaturänd.: $M_0^{(h,k)} = (1 + \alpha_k) (X_{(k+1)t,0} - X_{kt,0}) - \frac{3L_k \alpha_t t}{h_k h_k' \beta_k} E J_c. \quad (751)$

$\psi_1 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} M_{\bar{k}1} &= \alpha_k (X_{(k+1)1} - X_{k1}) - \frac{3h^*}{h_k h_k' \beta_k}, \\ M_1^{(h,k)} &= (1 + \alpha_k) (X_{(k+1)1} - X_{k1}) - \frac{3h^*}{h_k h_k' \beta_k}. \end{aligned} \right\} \quad (752)$$

Bei frei drehbaren Pfostenenden ist $\alpha_k = 0$, $\beta_k = \infty$, bei eingespannten Pfostenenden

$$\alpha_k = \frac{\bar{h}_k (h_k + 2f_k)}{2(h_k^2 + h_k f_k + f_k^2)}, \quad \beta_k = 1 - \frac{f_k^2}{h_k^2}. \quad (753)$$

Mit ψ_1 ist dann

$$X_k = X_{k0} + \psi_1 X_{k1},$$

also infolge

Belastung: $M_{\bar{k}} = \alpha_k (X_{(k+1)0} - X_{k0}) + \psi_1 M_{\bar{k}1}, \quad (754)$

Temperaturänd.: $M_{\bar{k}} = \alpha_k (X_{(k+1)t,0} - X_{kt,0}) - \frac{3L_k \alpha_t t}{h_k h_k' \beta_k} E J_c + \psi_1 M_{\bar{k}1}.$

Die Einflußlinien einer beliebigen Schnittkraft K_r bestehen nach (742) aus den Ordinaten der Einflußlinie K_{r0} des durchgehenden Trägers ($\psi_1 = 0$) und den Ordinaten ψ_{1m} der Einflußlinie von ψ_1 nach deren Erweiterung mit der Schnittkraft K_{r1} infolge von $\psi_1 = 1$. Nach dem Satze von Maxwell ist

$$P_m v_{mM} = M \psi_{1m},$$

d. h. die Arbeit der wandernden Last P_m bei einer durch ein Kräftepaar M hervorgerufenen EJ_c -fachen Einbiegung v_{mM} des Riegels des durchlaufenden Rahmens ist gleich der virtuellen Arbeit des Kräftepaares M am Pfosten h^* während deren im EJ_c -fachen Betrage angegebenen Verdrehung ψ_{1m} infolge von P_m . Die äußeren Ursachen P_m und M können nach S. 90 beliebig festgesetzt werden. Daher soll $P_m = 1$, dagegen M so groß gewählt werden, daß dabei der Drehwinkel $\psi_1 = 1$ wird.

$$M = M^*, \quad v_{mM} = v_{m\psi}, \quad I_m v_{m\psi} = M^* \psi_{1m}.$$

Der Betrag M^* wird aus dem Gleichgewicht der Schnittkräfte an einer zwangsläufigen, mit $\psi_1 = 1$ angetriebenen Stabkette (Abb. 408) berechnet. Die Winkelgeschwindigkeiten der Riegel sind Null, diejenigen der Pfosten $v_k = h^*/h_k$.

Nach (524) ist dann

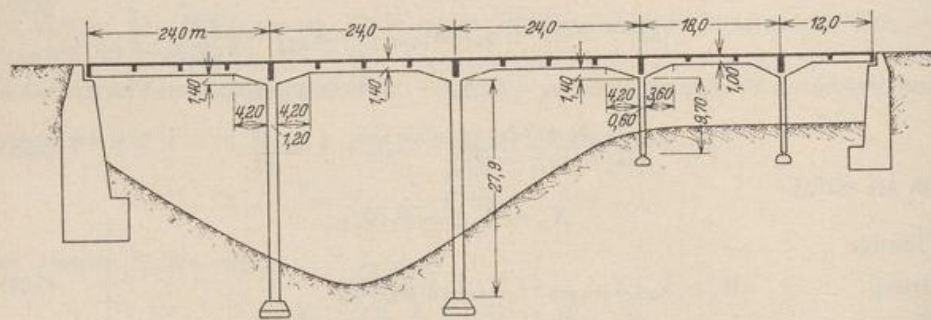
$$\left. \begin{aligned} M^* \cdot i + \sum \left(M_1^{(k)} \frac{h^*}{h_k} \right) &= 0, \\ \psi_{1m} = \frac{v_m \psi}{M^*} &= - \frac{v_m \psi}{\sum \left(M_1^{(k)} \frac{h^*}{h_k} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (755)$$

Die Ordinaten ψ_{1m} der Einflußlinie des EJ_c -fachen Betrages des ausgezeichneten Drehwinkels sind verhältnismäßig mit den EJ_c -fachen Ordinaten $v_m \psi$ der Biegelinie des Trägers infolge von $\psi_1 = 1$. Sie wird aus den Endmomenten der Riegelstäbe, also aus den statisch unbestimmten Schnittkräften $X_{(h-1)1}$, X_{h1} aufgezeichnet, die nach (746) bekannt sind. Um die Ordinaten ψ_{1m} unmittelbar zu erhalten, werden die Schnittkräfte X_h zunächst durch den Nenner des Ausdrucks (755) geteilt.

Berechnung eines durchlaufenden Rahmens.

1. Geometrische Grundlagen.

h	l_k	J_k	l_k^3	h_k	$J_{h,k}$	h_k^3	\bar{h}_k	\bar{l}_k
1	24,0	0,138	24,0	29,3	0,086	47,1	27,9	1,4
3	24,0	0,138	24,0	29,3	0,086	47,1	27,9	1,4
5	24,0	0,138	24,0	11,1	0,011	139,1	9,7	1,4
7	18,0	0,050	49,68	11,1	0,011	139,1	9,7	1,4
9	12,0	0,050	33,12	—	—	—	—	—



Hauptsystem der 1. Stufe

Stabkette I_1

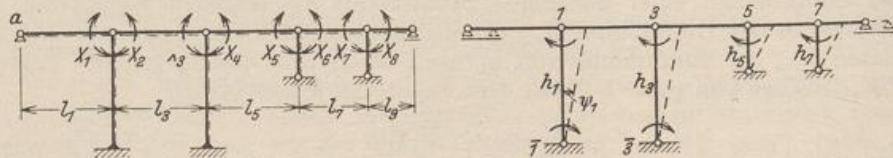


Abb. 409.

2. Approximation des Trägheitsmomentes für gerade Vouten. Tab. 29, Fall 3.

$$\begin{aligned} v_1 = v_3 = v_5 &= 0,2, & v_7 &= 0,217, & v_9 &= 0,323, \\ n_1 = n_3 = n_5 &= \frac{1,4^3}{2,8^3} = 0,125, & n_7 = n_9 &= \frac{1,0^3}{2,8^3} = 0,045, \\ \bar{\mu}_1 = \mu_3 = \mu_5 &= 1 - (1 - 0,125) [2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,2/3] = 0,66, & \mu_7 &= 0,61, & \bar{\mu}_9 &= 0,48, \\ \lambda_3 = \lambda_5 &= 1 - 3(1 - 0,125) \cdot 0,2^2 = 0,90, & \lambda_7 &= 0,86, \\ \alpha_1 = \alpha_3 &= \frac{27,9(29,3 + 2 \cdot 1,4)}{2(29,3^2 + 29,3 \cdot 1,4 + 1,4^2)} = 0,4967, & \beta_1 = \beta_3 &= 1 - \frac{1,4^3}{29,3^3} \approx 1. \end{aligned}$$

3. Vorkzahlen der ersten Stufe (durchlaufender Träger) nach (702) u. (705).

Riegel: $6 \delta_{11,1} = 6 \delta_{22,1} = 6 \delta_{33,1} = 6 \delta_{44,1} = 6 \delta_{55,1} = 2 \cdot 0,66 \cdot 24 = 31,70,$

$6 \delta_{66,1} = 6 \delta_{77,1} = 60,60, \quad 6 \delta_{88,1} = 31,80,$

$6 \delta_{23} = 0,9 \cdot 24 = 21,60, \quad 6 \delta_{45} = 21,60, \quad 6 \delta_{67} = 42,70.$

Pfosten: $6 \delta_{11,2} = \frac{3 \cdot 27,9^3 \cdot 47,1}{2 \cdot 29,3 (29,3^2 + 29,3 \cdot 1,4 + 1,4^2)} = 58,10,$

$6 \delta_{11,2} = 6 \delta_{44,2} = -6 \delta_{34} = 58,10, \quad 6 \delta_{33,2} = 6 \delta_{44,2} = -6 \delta_{34} = 58,10,$

$6 \delta_{55,2} = 2 \frac{9,7^3}{11,13} \cdot 139,1 = 186,0, \quad 6 \delta_{66,2} = -6 \delta_{56} = 6 \delta_{77,2} = 6 \delta_{88,2} = -6 \delta_{78} = 186,0,$

$\delta_{kk} = \delta_{kk,1} + \delta_{kk,2}.$

Matrix der geometrischen Bedingungen $\delta_k = 0.$

X_{10}	X_{20}	X_{30}	X_{40}	X_{50}	X_{60}	X_{70}	X_{80}
89,8	-58,1						
-58,1	89,8	21,6					
	21,6	89,8	-58,1				
		-58,1	89,8	21,6			
			21,6	217,7	-186,0		
				-186,0	246,6	42,7	
					42,7	246,6	-186,0
						-186,0	217,8

Konjugierte Matrix $10^3 \beta'_{ik}.$

$\rightarrow + 0,723876 - 0,441569 + 0,703674 - 0,334880 + 0,823652 - 0,486571 + 0,853994 \rightarrow$

	$6 \delta_{10}$	$6 \delta_{20}$	$6 \delta_{30}$	$6 \delta_{40}$	$6 \delta_{50}$	$6 \delta_{60}$	$6 \delta_{70}$	$6 \delta_{80}$	
$10^3 X_{10}$	+20,9456	+15,1621	-6,6950	-4,7112	+1,5777	+1,2995	-0,6323	-0,5400	+0,646993
$10^3 X_{20}$	+15,1621	+23,4347	-10,3480	-7,2816	+2,4385	+2,0085	-0,9773	-0,8346	-0,413716
$10^3 X_{30}$	-6,6950	-10,3480	+25,0124	+17,6006	-5,8940	-4,8547	+2,3621	+2,0173	+0,718493
$10^3 X_{40}$	-4,7112	-7,2816	+17,6006	+24,4965	-8,2034	-6,7568	+3,2876	+2,8076	-0,449480
$10^3 X_{50}$	+1,5777	+2,4385	-5,8940	-8,2034	+18,2509	+15,0324	-7,3143	-6,2464	+0,894268
$10^3 X_{60}$	+1,2995	+2,0085	-4,8547	-6,7568	+15,0324	+16,8097	-8,1791	-6,9849	-0,531981
$10^3 X_{70}$	-0,6323	-0,9773	+2,3621	+3,2876	-7,3143	-8,1791	+15,3748	+13,1300	+0,830786
$10^3 X_{80}$	-0,5400	-0,8346	+2,0173	+2,8076	-6,2464	-6,9849	+13,1300	+15,8043	

4. Zustand $\psi_1 = 1.$ Belastungszahlen nach (744) u. (743). $h^* = h_1; X_{k1} = \sum \beta'_{ki} 6 \delta_{is}.$

$6 \delta_{1s} = -6 \delta_{2s} = 6 \delta_{3s} = -6 \delta_{4s} = 9 \frac{29,3 (29,3 + 1,4)}{29,3^2 + 29,3 \cdot 1,4 + 1,4^2} = 8,9804.$

$6 \delta_{5s} = -6 \delta_{6s} = 6 \delta_{7s} = -6 \delta_{8s} = 6 \frac{29,3}{11,1} = 15,8378.$

X_{11}	X_{21}	X_{31}	X_{41}	X_{51}	X_{61}	X_{71}	X_{81}
+0,03707	-0,09728	+0,08837	-0,05415	+0,04707	-0,03635	+0,04404	-0,03511 mt

$$M_1^{(h,1)} = 1,4967 (-0,09728 - 0,03707) - \frac{3 \cdot 29,3}{29,3 \cdot 47,1 \cdot 1} = -0,26478, \quad M_1^{(h,3)} = -0,27700 \text{ mt},$$

$$M_1^{(h,5)} = -0,03635 - 0,04707 = -0,08342, \quad M_1^{(h,7)} = -0,07915 \text{ mt}.$$

$$v_{11} = v_{31} = 1, \quad v_{51} = v_{71} = \frac{29,3}{11,1} = 2,6396;$$

$$\sum M_1^{(i)} v_{i1} = -0,97089.$$

$$M_{\bar{1}1} = 0,4967 (-0,09728 - 0,03707) - \frac{3}{47,1 \cdot 1} = -0,13043, \quad M_{\bar{3}1} = -0,13448 \text{ mt}.$$

5. Belastung der Felder l_1 und l_3 mit $p = 4 \text{ t/m}$. Belastungszahlen nach Tab. 36.

$$6 \delta_{10} = 6 \delta_{20} = 6 \delta_{30} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 24^2 \cdot 24 = 13824,$$

$$\delta_{40} = \delta_{50} = \delta_{60} = \delta_{70} = \delta_{80} = 0.$$

X_{10}	X_{20}	X_{30}	X_{40}	X_{50}	X_{60}	X_{70}	X_{80}
+406,59	+390,51	+110,16	+77,51	-25,96	-21,38	+10,42	+8,89 mt

$$M_0^{(h,1)} = 1,4967 (390,51 - 406,59) = -24,067, \quad M_0^{(h,3)} = -48,867 \text{ mt},$$

$$M_0^{(h,5)} = -21,38 + 25,96 = +4,58, \quad M_0^{(h,7)} = -1,53 \text{ mt},$$

$$\sum M_0^{(i)} v_{i1} = -64,884.$$

$$v_1 = -\frac{-64,884}{-0,97089} = -66,829.$$

$$X_1 = 406,59 - 66,829 \cdot 0,03707 = +404,11 \text{ mt usw.}$$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
+404,11	+397,01	+104,25	+81,13	-29,11	-18,95	+7,48	+11,24 mt

$$M_{\bar{1}} = 0,4967 (390,51 - 406,59) + 66,829 \cdot 0,13043 = +0,73, \quad M_{\bar{3}} = -7,23 \text{ mt}.$$

Die Biegemomente werden durch das Diagramm *a* der Abb. 410 dargestellt. Die Berücksichtigung der Vouten in den Belastungszahlen δ_{k0} durch numerische Integration nach Abschn. 18 ergibt $6 \delta_{10} = 6 \delta_{20} = 6 \delta_{30} = 12150$ und $X_{10} = 357,36$; $X_{20} = 343,22$; $X_{30} = 96,82$; $X_{40} = 68,12 \text{ mt}$ usw. Damit entsteht in Abb. 410 das Diagramm *b* der Biegemomente.

6. Temperaturerhöhung des Riegels um 15° . Belastungszahlen nach (715) u. (712).

$$6 E J_c \alpha_t t = 6 \cdot 2100000 \cdot 0,138 \cdot 10^{-5} \cdot 15 = 43,47; \quad 9 E J_c \alpha_t t = 65,21.$$

$$6 \delta_{1t} = -6 \delta_{2t} = 65,21 \frac{24}{29,3} = 53,41, \quad 6 \delta_{3t} = -6 \delta_{4t} = 106,82,$$

$$6 \delta_{5t} = -6 \delta_{6t} = 43,47 \cdot \frac{72}{11,1} = 281,97, \quad 6 \delta_{7t} = -6 \delta_{8t} = 352,50.$$

X_{10}	X_{20}	X_{30}	X_{40}	X_{50}	X_{60}	X_{70}	X_{80}
+0,14286	-0,69843	+0,81533	-0,83804	+0,73178	-0,75679	+0,95471	-0,80314 mt

$$M_0^{(h,1)} = 1,4967 (-0,69843 - 0,14286) - \frac{43,47 \cdot 24}{2 \cdot 29,3 \cdot 47,1 \cdot 1} = -1,63715,$$

$$M_0^{(h,3)} = -3,23058, \quad M_0^{(h,5)} = -1,48857, \quad M_0^{(h,7)} = -1,75785 \text{ mt}.$$

$$\sum M_0^{(i)} v_{i1} = -13,437, \quad v_{1t} = -13,840.$$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
-0,370	+0,648	-0,408	-0,089	+0,081	-0,254	+0,345	-0,317 mt

$$M_1 = 0,4967(-0,69843 - 0,14286) - \frac{43,47 \cdot 24}{2 \cdot 29,3 \cdot 47,1 \cdot 1} + 13,840 \cdot 0,13043 = +1,009 \text{ mt}$$

$$M_3 = +0,284 \text{ mt}$$

Die Momente sind in Abb. 411 aufgezeichnet.

7. Einflußlinie ψ_{1m} . Entwicklung aus der Biegelinie $v_{m\psi}$ des Riegels für $\psi_1 = 1$ nach S. 445 und damit aus den Biegelinien der Träger des Hauptsystems für $-X_k = 1$, ($k = 1 \dots 8$).

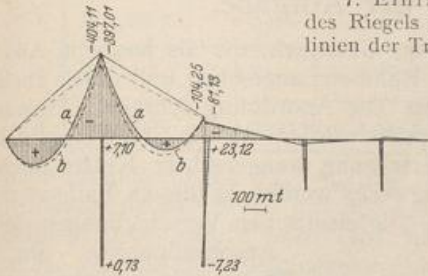


Abb. 410.

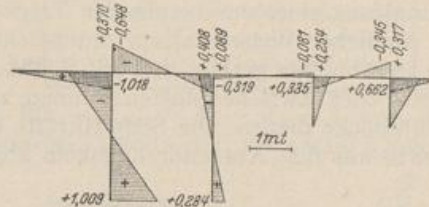


Abb. 411.

Diese werden nach S. 124 als Momentenlinien der elastischen Gewichte der Abschnitte l_3 und l_5 berechnet und mit

$$\delta_{3m} = \frac{l_3 l'_3}{6} \bar{\omega}_D, \quad \delta_{5m} = \frac{l_5 l'_5}{6} \bar{\omega}'_D$$

angeschrieben. Hierbei ergeben sich für $\bar{\omega}_D$ und $\bar{\omega}'_D$ folgende Werte:

m	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
$\bar{\omega}_D$	0	0,0877	0,1731	0,3063	0,3435	0,2367	0,1244	0
$\bar{\omega}'_D$	0	0,1244	0,2367	0,3435	0,3063	0,1731	0,0877	0

Das Ergebnis gilt mit großer Annäherung auch für das Randfeld l_1 , da $\bar{\mu} \approx \mu$. Es kann für den Trägerabschnitt zwischen den Vouten nach der Tabelle 29 unmittelbar angeschrieben werden und unterscheidet sich innerhalb der Vouten nur unwesentlich von der auf S. 395 als Näherung bezeichneten geraden Linie. Die Biegelinien der Felder l_7, l_9 entstehen in gleicher Weise.

Die Biegelinie $v_{m\psi}$ wird mit den Biegemomenten X_{k1} aus $\psi_1 = 1$ (S. 448) gebildet, im Felde l_3 z. B. aus X_{21} und X_{31} . Die Einflußlinie ψ_{1m} folgt dann aus (755) (Abb. 412).

$$\text{Feld } l_1: \psi_{1m} = -\frac{-X_{11}}{0,97089} \cdot \frac{24^2}{6} \cdot \frac{6}{l_1 l'_1} \delta_{m1} \approx -3,6654 \bar{\omega}_D,$$

$$\text{Feld } l_3: \psi_{1m} = -\frac{1}{0,97089} \cdot \frac{24^2}{6} (X_{31} \bar{\omega}_D + X_{21} \bar{\omega}'_D) = -98,8783 (0,08837 \bar{\omega}_D - 0,09728 \bar{\omega}'_D),$$

$$\text{Feld } l_5: \psi_{1m} = -\frac{1}{0,97089} \cdot \frac{24^2}{6} (X_{51} \bar{\omega}_D + X_{41} \bar{\omega}'_D) = -98,8783 (0,04707 \bar{\omega}_D - 0,05415 \bar{\omega}'_D).$$

usw.

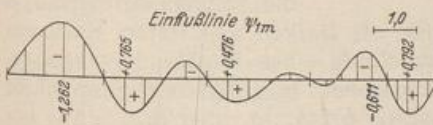


Abb. 412.

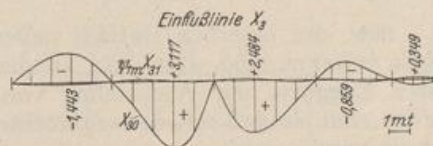


Abb. 413.

8. Einflußlinie X_3 . Einflußlinie X_{30} nach Gl. (665).

$$\text{Feld } l_1: X_{30} = -0,006695 \cdot 24^2 \cdot \frac{6}{l_1 l'_1} \delta_{m1} \approx -3,856320 \bar{\omega}_D,$$

$$\text{Feld } l_3: X_{30} = 0,025012 \cdot 24^2 (\bar{\omega}_D - \alpha_{23} \bar{\omega}'_D) = 14,407142 (\bar{\omega}_D - 0,413716 \bar{\omega}'_D),$$

$$\text{Feld } l_5: X_{30} = 0,017601 \cdot 24^2 (\bar{\omega}'_D - \alpha_{54} \bar{\omega}_D) = 10,137946 (\bar{\omega}'_D - 0,334880 \bar{\omega}_D)$$

usw.

Die Einflußlinie X_3 ergibt sich durch Superposition von X_{30} und der um $X_{31} = 0,08837$ erweiterten Einflußlinie $\psi_{1,m}$ (Abb. 413).

Dieses Beispiel wurde in Abschn. 40 für konstantes Trägheitsmoment gerechnet. Der Vergleich zeigt den Einfluß der Vouten auf die Größe der Schnittkräfte.

Spiegel, G.: Mehrstielige Rahmen. Berlin 1920. — Nakonz, W.: Die Berechnung mehrstieliger Rahmen unter Anwendung statisch unbestimmter Hauptssysteme. Berlin 1924. — Kleinogel, A.: Mehrstielige Rahmen 2. Aufl. Berlin 1927.

50. Die Erweiterung der Aufgabe.

Im Bauwesen sind zahlreiche Tragwerke im Gebrauch, die als bauliche Ausgestaltung eines durchlaufenden Trägers oder Rahmens angesehen und daher auch in ähnlicher Weise statisch untersucht werden. Die Anordnung schräger Stützen ist in Abb. 298 gezeigt und auf S. 328 nachgeprüft worden. An die Stelle einzelner End- oder Zwischenpfosten können zur Übertragung waagerechter Kräfte auch Stützböcke dienen. Die Schnittkräfte des Tragwerks werden in diesem Falle nach S. 319 aus den Knotendrehwinkeln abgeleitet. Die elastischen Verschiebungen der

Anschlußpunkte der Riegel in senkrechter Richtung besitzen nur in Ausnahmefällen Bedeutung.

Tragwerke nach Abb. 414 können als durchlaufende Träger oder durchlaufende Rahmen mit aufgelöstem Riegel angesehen werden, wenn die Änderung der Stützenentfernung durch die Belastung klein genug bleibt, um vernachlässigt zu werden. Die Berechnung der Schnittkräfte aus den Komponenten des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur ist auf S. 310 erwähnt worden. Sie kann auch auf die Ansätze des Abschn. 24 zurückgeführt werden, wenn die Formänderungen δ_{k0} ,

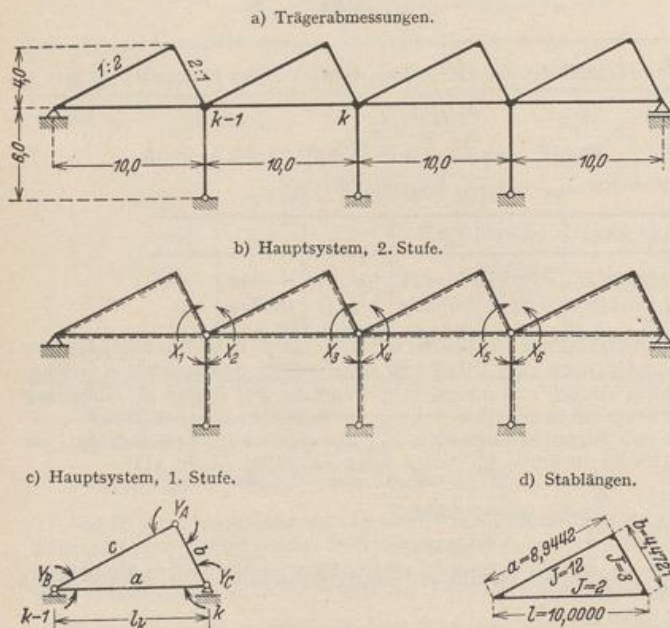


Abb. 414.

$\delta_{kk,1}$ usw. des innerlich statisch unbestimmten, als Balken gestützten Rahmenriegels bekannt sind. Das wird an der Untersuchung eines Shedbinders gezeigt, dessen Zuggurte zur Abstützung von Transmissionen biegeunflexibel ausgebildet worden sind, so daß mit der senkrechten Belastung p_a, p_b, p_c aller drei Stäbe gerechnet werden muß.

Die Lösung zerfällt in zwei Stufen. Die erste behandelt die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_A, Y_B, Y_C des Rahmenriegels l_k für dessen Belastung mit p_a, p_b oder p_c und durch die äußeren Kräfte $-X_{k-1} = 1, -X_k = 1$ und die Berechnung der Verdrehung der Endquerschnitte $(k-1), k$ infolge dieser äußeren Ursachen. In der zweiten Stufe werden die nunmehr bekannten Verdrehungen $\delta_{k0}, \delta_{kk,1}, \delta_{k(k-1)}, \delta_{(k-1)(k-1),1}$ zur Berechnung der Stützenmomente X_k, X_{k+1} rechts und links von einer Stütze k nach Abb. 414 verwendet. Mit diesen und den Schnitt-

kräften des statisch unbestimmten Hauptsystems aus \mathfrak{P} , $-X_{k-1} = 1$, $-X_k = 1$ ist dann eine beliebige Schnittkraft des Rahmenriegels

$$M = M_0^{(3)} - X_{k-1} M_{(k-1)}^{(3)} - X_k M_k^{(3)}.$$

1. Stufe (Abb. 414c). Berechnung der Eckmomente Y_A, Y_B, Y_C .

Matrix der Elastizitätsgleichungen

	Y_A	Y_B	Y_C
1	+ 1,4907	+ 0,2484	+ 0,4969
2	+ 0,2484	+ 3,8302	+ 1,6667
3	+ 0,4969	+ 1,6667	+ 4,3271

Konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{AB} .

	δ_{A0}	δ_{B0}	δ_{C0}
Y_A	+ 0,69802	- 0,01248	- 0,07535
Y_B	- 0,01248	+ 0,31388	- 0,11946
Y_C	- 0,07535	- 0,11946	+ 0,28577

Die Formänderungen $\delta_{A0}, \delta_{B0}, \delta_{C0}$ werden für $-X_{k-1} = 1, -X_k = 1$ und für die Belastung der Stäbe mit p_a, p_b, p_c berechnet. Damit sind die statisch überzähligen Eckmomente nach (354) bekannt, so daß die Biegemomente für jeden Belastungsfall angegeben werden können ($-X_{k-1} = 1$: Abb. 415a, $-X_k = 1$: Abb. 415b, p_a : Abb. 415c, p_b : Abb. 415d, p_c : Abb. 415e). Mit diesen sind die Verdrehungen der Endquerschnitte $(k-1), k$ des Rahmenriegels nach (305) ($J_c = 2$, Pfosten: $J = 4$)

$$\delta_{kk,1}^{(3)} = \int M_k^{(3)} M_k^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 0,6135,$$

$$\delta_{(k-1)(k-1),1}^{(3)} = 0,3792,$$

$$\delta_{k(k-1)}^{(3)} = -0,0055,$$

$$-\delta_{k(k+1)} = \delta_{kk,2} = \delta_{(k+1)(k+1),2} = +1.$$

Damit kann nach (488) auch die zweite Stufe der statischen Untersuchung zur Berechnung der Stützmomente X_{k-1}, X_k, X_{k+1} usw. angeschrieben werden. Sie besteht aus dreigliedrigen Gleichungen und zeichnet sich dadurch aus, daß die Vorzahlen $\delta_{23} = \delta_{45}$ so klein sind, daß der Ansatz in drei unabhängige Teile zerlegt und der elastische Zusammenhang damit auf zwei Rahmenriegel mit dem Zwischenpfosten beschränkt werden kann.

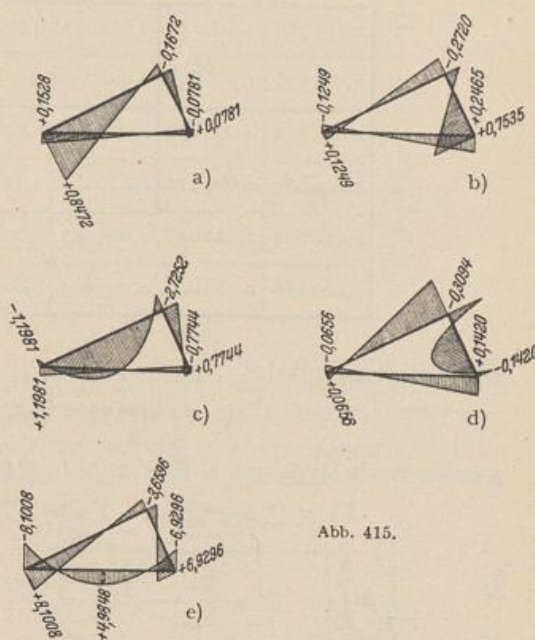


Abb. 415.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	+ 1,6135	- 1,0000				
2	- 1,0000	+ 1,3792	- 0,0055			
3		- 0,0055	+ 1,6135	- 1,0000		
4			- 1,0000	+ 1,3792	- 0,0055	
5				- 0,0055	+ 1,6135	- 1,0000
6					- 1,0000	+ 1,3792

Der vollständige Ansatz wird nach der Rechenvorschrift S. 232 aufgelöst. Die Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}$, $\kappa_{k(k-1)}$ und die Vorzahlen β_{ik} der konjugierten Matrix bestätigen die erwähnte Aufteilung der elastischen Wirkung des Tragwerks. Das Verhältnis zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten des homogenen Ansatzes mit $\delta_{10} = 1$ oder $\delta_{50} = 1$ ist stets positiv. Die statischen Eigenschaften des durchgehenden Trägers sind durch die Auflösung des Riegels verlorengegangen.

$k(k-1)$	65	54	43	32	21
$-\kappa_{k(k-1)}$	-0,725058	-0,006191	-0,725076	-0,006191	-0,725076
$(k-1)k$	12	23	34	45	56
$-\kappa_{(k-1)k}$	-0,619771	-0,007242	-0,619786	-0,007242	-0,619786

Vorzahlen β_{ik} .

	0,725076	0,006191	0,725076	0,006191	0,725058	
1	1,125589	0,816136	0,005052	0,003663	0,000023	0,000016
2	0,816136	1,316833	0,008152	0,005911	0,000037	0,000027
3	0,005052	0,008152	1,125632	0,816168	0,005053	0,003663
4	0,003663	0,005911	0,816168	1,316853	0,008152	0,005911
5	0,000023	0,000037	0,005053	0,008152	1,125623	0,816139
6	0,000016	0,000027	0,003663	0,005911	0,816139	1,316805
	1	2	3	4	5	6

Die Belastungsglieder

$$\delta_{k0}^{(3)} = \int M_0^{(0)} M_k^{(3)} \frac{J_c}{J} ds = \int M_0^{(3)} M_k^{(0)} \frac{J_c}{J} ds$$

werden nach (305) mit Hilfe der Abb. 415 berechnet. Damit sind dann

$$X_k = \sum \beta_{kh} \delta_{h0}^{(3)}, \quad Y_A = Y_{A0}^{(3)} - X_{k-1} Y_{A(k-1)}^{(3)} - X_k Y_{Ak}^{(3)}$$

bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abb. 416 für zwei Belastungsfälle aufgezeichnet worden.

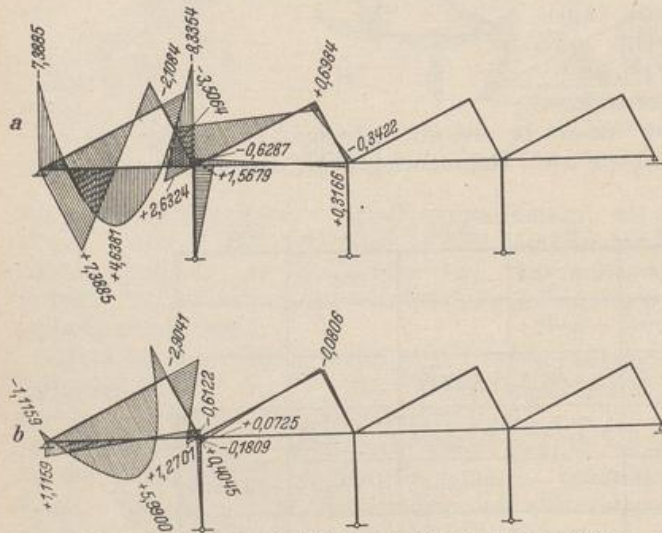


Abb. 416. a) Belastung des Untergurtes, b) Belastung des Stabes e im ersten Felde.

Die Verwendung des durchgehenden Trägers als Hauptsystem. Die Untersuchung hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke bietet in zahlreichen Fällen Gelegenheit, den durchgehenden Träger auch als statisch unbestimmtes Hauptsystem, also im Gegensatz zur Untersuchung des Shedträgers (Abb. 414) als Hauptsystem der ersten Stufe des Ansatzes zu verwenden. Die Längskraft X_n eines

Rahmens (Abb. 417a) ist die statisch überzählige Größe eines durchlaufenden Trägers. Sie wird nach S. 296 in einer zweiten Stufe berechnet. $X_n = \delta_{n0}^{(n-1)} / \delta_{nn}^{(n-1)}$. Da die Längenänderungen der biegesteifen Stäbe jedoch vernachlässigt werden, ist X_n bei jeder Belastung Null und nur für eine Temperaturänderung des Riegels zu berechnen.

Der Ansatz findet auch bei Tragwerken nach Abb. 418 Anwendung. In diesem Falle sind jedoch Längskräfte X_a infolge einer Belastung des Stabzugs vorhanden. $X_a \approx 0$ bedeutet daher nur eine Näherungslösung, deren Gültigkeit nicht ohne weiteres übersehen werden kann und daher

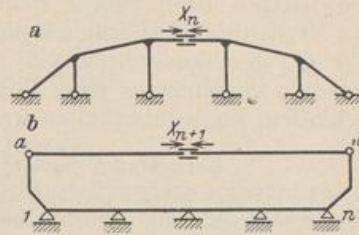


Abb. 417.

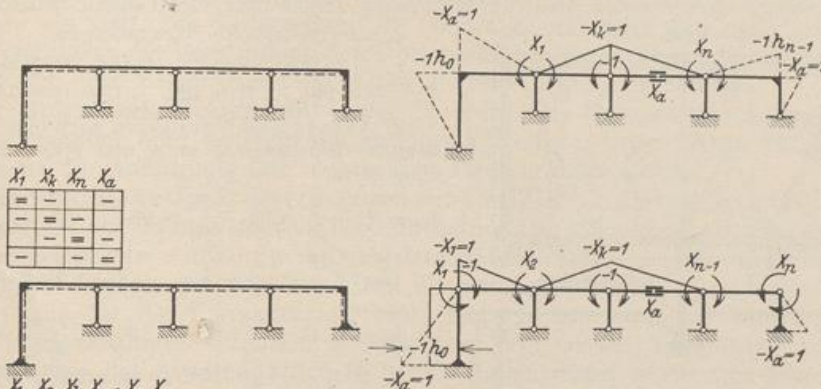


Abb. 418.

nachzuprüfen ist. Die Art der Untersuchung kann auch auf den Behälterrahmen (Abb. 417b) übertragen werden.

Die Änderung der Länge \bar{ab} ist aber in der Regel so klein, daß bei symmetrischer Ausbildung des Rahmens mit unverschieblichen Punkten a, b gerechnet werden kann.

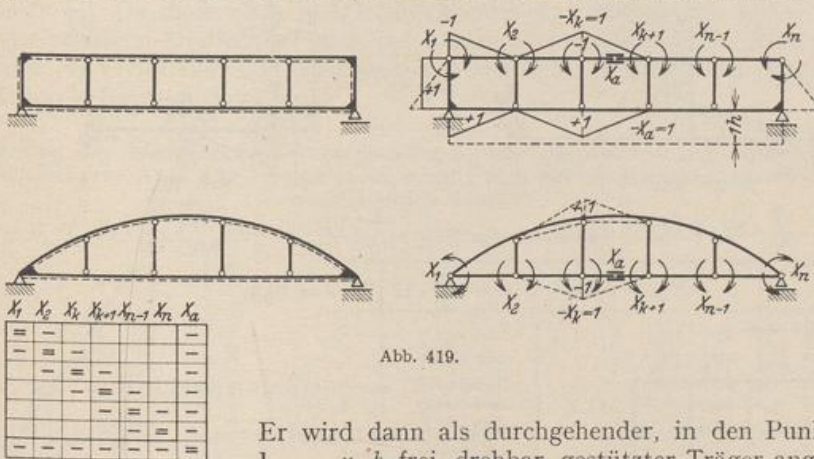


Abb. 419.

Er wird dann als durchgehender, in den Punkten $a, 1, \dots, n, b$ frei drehbar gestützter Träger angesehen, dessen Längskraft X_{n+1} statisch bestimmt ist.

Das Hauptsystem zur Berechnung der Längskraft X_a eines Bogenträgers mit biegesteifem Zugband (Abb. 419) oder biegesteifem Streckbalken kann bei Vernachlässigung der Längenänderung der Stäbe zwischen Balken und Bogen als durch-

laufender Balkenträger mit senkrecht verschieblichen Zwischenstützen angesehen werden. Die statischen Eigenschaften lassen sich am einfachsten für $J_c/J \cos \alpha = \text{const}$ beschreiben, da in diesem Falle die Belastung den beiden biegeungssteifen Gurten im Verhältnis ihrer Trägheitsmomente zufällt. Dasselbe gilt dann nach S. 270 auch für den geschlossenen Träger, nur daß in diesem Falle nicht die Balkenmomente, sondern die Momente eines Bogenträgers aufgeteilt werden, die für den Träger mit schlaffem Zugband erhalten werden würden.

Berechnung eines symmetrischen Behälterrahmens Abb. 420.

Bei symmetrischer Belastung sind die Querkraft und die Verdrehung der Stabtangente im Querschnitt der Symmetrieachse Null. Daher ändert die Annahme einer beweglichen Einspannung im Querschnitt δ nichts am Spannungs- und Verschiebungszustand des Tragwerks. Die Schnittkräfte werden daher für den einen der beiden symmetrischen, im Querschnitt δ beweglich, im Querschnitt 4 starr eingespannten, durchlaufenden Träger über vier Feldern berechnet.

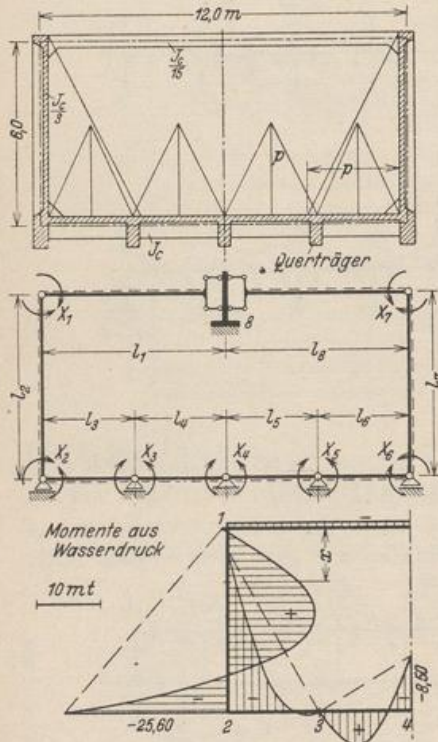


Abb. 420.

1. Geometrische Grundlagen.

$$l_1 = l_2 = 6,0 \text{ m}, \quad l_3 = l_4 = 3,0 \text{ m},$$

$$l'_1 = 90, \quad l'_2 = 18, \quad l'_3 = l'_4 = 3 \text{ m}.$$

2. Ansatz und Vorzahlen nach (651) für bewegliche Einspannung in δ und starre Einspannung in 4 .

$$\delta_{11} = l'_1 + \frac{l'_2}{3} = 90 + \frac{18}{3} = 96, \quad \delta_{12} = \frac{18}{6} = 3,$$

$$\delta_{22} = \frac{18}{3} + \frac{3}{3} = 7, \quad \delta_{23} = \delta_{34} = 0,5,$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{3} (3 + 3) = 2, \quad \delta_{44} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

3. Belastung: Der Wasserdruck wird von der Bodenplatte dreieckförmig auf die Quer- und Längsträger verteilt. Rahmenabstand 2,0 m, $p = 2,0 \cdot 6,0 = 12 \text{ t/m}$.

4. Belastungszahlen nach Tab. 35.

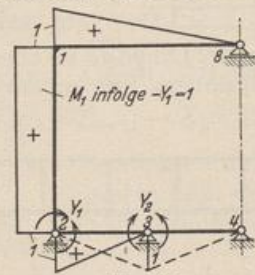


Abb. 421.

$$\delta_{10} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{60} \cdot 12 \cdot 6^2 \cdot 18 = 151,2, \quad \delta_{20} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{15} \cdot 12 \cdot 6^2 \cdot 18 + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{32} \cdot 12 \cdot 3^2 \cdot 3 = 181,5,$$

$$\delta_{30} = 2 \delta_{40} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{32} \cdot 12 \cdot 3^2 \cdot 3 = 16,9.$$

5. Lösung.

X_1	X_2	X_3	X_4	
96	3			151,2
3	7	0,5		181,5
	0,5	2	0,5	16,9
		0,5	1	8,45

$$M_1 = -X_1 = -0,78 \text{ mt} \quad \text{Feld } l_2:$$

$$M_2 = -X_2 = -25,60 \text{ mt} \quad M_{0x} = \frac{p l_2^3}{6} \omega_D,$$

$$M_3 = -X_3 = +0,08 \text{ mt} \quad \text{Feld } l_3, l_4, \left(\xi \leq \frac{1}{2} \right):$$

$$M_4 = -X_4 = -8,50 \text{ mt} \quad M_{0x} = \frac{p l_3^3}{4} \left(\omega_D - \frac{\xi^3}{3} \right).$$

Bei antimetrischer Belastung des Tragwerks durch Winddruck sind das Biegemoment und die senkrechte Verschiebung der Querschnitte 4 und 8 der Symmetrieachse Null. Die Schnittkräfte werden daher mit dem Hauptsystem Abb. 421 berechnet.

$$Y_1 = -M_2 = M_6, \quad Y_2 = -M_3 = M_5, \quad M_4 = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{l_1}{3} + l_2 + \frac{l_3}{3}, \quad \delta_{12} = \frac{l_3}{6}, \quad \delta_{22} = \frac{l_3 + l_4}{3}.$$

51. Der Stockwerkrahmen.

Der Stockwerkrahmen ist in der Gegenwart ein wichtiges Traggerüst des Brücken- und Hochbaues. Während die Verbindung von Zwischenstütze und Riegel bei Ausführungen in Stahl für den Festigkeitsnachweis in der Regel frei drehbar angenommen wird, gilt sie bei der einfachen Ausbildung der Rahmenknoten im Eisenbetonbau als steif. Die Unterteilung in Tragwerke mit zwei und mehr als zwei Pfosten ist durch die Verwendung des Stockwerkrahmens im Bauwesen entstanden; sie läßt sich noch besser durch die statische Untersuchung begründen.

Der Stockwerkrahmen mit zwei Pfosten. Die Rahmenknoten liegen beliebig zueinander oder symmetrisch zu einer Mittellinie. Unter diesen Stockwerkrahmen ist die Anordnung mit senkrechten Pfosten ausgezeichnet.

Die Schnittkräfte des Tragwerks lassen sich stets aus den überzähligen Größen X_k eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems ableiten. Der statisch bestimmte Aufbau von Dreigelenrahmen führt zu geometrischen Bedingungsgleichungen mit acht oder fünf überzähligen Größen. Die geometrischen Bedingungen für die Formänderung eines statisch unbestimmten Hauptsystems aus Zweigelenrahmen enthalten je sechs oder drei statisch überzählige Größen. Die Auflösung des Ansatzes leidet in beiden Fällen durch ungünstige Fehlerfortpflanzung. Daher werden bei einem Stabnetz mit beliebiger Knotenpunktfigur nach Abschn. 38 ff. zunächst die Knoten- und Stabdrehwinkel φ_j, ϑ_h aus den Gleichgewichtsbedingungen (523) der Schnittkräfte berechnet und diese dann selbst als Funktionen der Komponenten φ_j, ϑ_h des Verschiebungszustandes angegeben. Die Gleichgewichtsbedingung $\delta A_j = 0$ enthält vier unbekannte Knotendrehwinkel φ_j und zwei unabhängige Parameter ψ_c des Verschiebungszustandes, die Gleichgewichtsbedingung $\delta A_c = 0$ je vier Knotendrehwinkel φ_j und einen Parameter ψ_c . Da diese nach S. 311 voneinander unabhängig sein sollen, werden dafür die relativen Drehwinkel eines der beiden Pfosten h_k zum Riegelstab l_k der Stabkette (k) verwendet. Die Gleichungen lassen sich für jeden Belastungsfall am besten durch Iteration auflösen.

Berechnung der waagerechten Verschiebung u_F und der Verdrehung ϑ_i des Stabes i des Gerüsts Abb. 422 infolge einer exzentrisch zur Stabachse angreifenden waagerechten Kraft W .

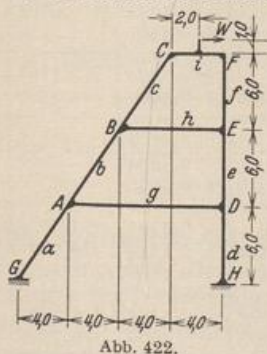


Abb. 422.

1. Geometrische Grundlagen.

k	l_k [m]	J_c/J_k	l_k	$1/l_k$
a	7,211 102	1	7,211 102	0,1387
b	7,211 102	1	7,211 102	0,1387
c	7,211 102	1	7,211 102	0,1387
d	6,000 000	1	6,000 000	0,1667
e	6,000 000	1	6,000 000	0,1667
f	6,000 000	1	6,000 000	0,1667
g	12,000 000	1/2	4,000 000	0,2500
h	8,000 000	1/2	2,666 667	0,3750
i	4,000 000	1	4,000 000	0,2500

2. Die geometrisch überzähligen Größen des Verschiebungszustandes und die statischen Bedingungsgleichungen. Als unabhängige geometrisch überzählige Größen

im Sinne von S. 311 werden neben den 6 Knotendrehwinkeln $\varphi_A \dots \varphi_F$ und dem Stabdrehwinkel $\vartheta_d = \psi_1$ die gegenseitigen Verdrehungen $\vartheta_e - \vartheta_g = \psi_2$ und $\vartheta_f - \vartheta_h = \psi_3$ verwendet. Sie bilden die Wurzeln der 9 statischen Bedingungen.

$$\delta A_J = \sum a_{JK} \varphi_K + \sum a_{Je} \psi_e + a_{J0} = 0 \quad J = A \dots F;$$

$$\delta A_h = \sum a_{hK} \varphi_K + \sum a_{he} \psi_e + a_{h0} = 0 \quad h = 1, 2, 3.$$

Die Vorzeichen bedeuten nach Abschn. 38 die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte an neun verschiedenen zwangläufigen Gebilden I_J, I_h im Geschwindigkeitszustand $\dot{\varphi}_J = 1, \dot{\psi}_h = 1$. Diese äußeren Kräfte in a_{JK}, a_{Je} sind Anschlußmomente des Hauptsystems infolge von $\varphi_K = 1$ oder aus den Stabdrehwinkeln ϑ_{he} infolge von $\psi_e = 1$. Die äußeren Kräfte in a_{J0}, a_{h0} bestehen aus der Belastung \mathfrak{P} und den ihr zugeordneten Anschlußmomenten des Hauptsystems. Diese werden nach (507) oder der Tabelle 25 gebildet (S. 457).

a) Bewegungszustände $\psi_1 = 1, \psi_2 = 1, \psi_3 = 1$ (Abb. 423).

α) Kinematische Kette I_1 (Abb. 423a): $\psi_1 = \vartheta_d = 1, \psi_2 = \vartheta_e - \vartheta_g = 0, \psi_3 = \vartheta_f - \vartheta_h = 0$.

$$\vartheta_I = 1, \quad \vartheta_{II} = -\vartheta_I \frac{6,0}{18,0} = -\frac{1}{3}, \quad \vartheta_{III} = -\vartheta_{II} \frac{3}{1} = +1,$$

$$u_{F1} = -\vartheta_{II} \cdot 6,00 = +2,00.$$

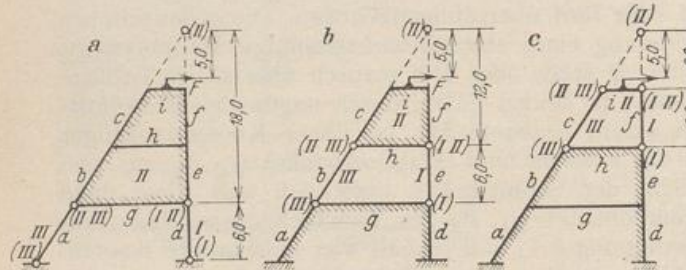
β) Kinematische Kette I_2 (Abb. 423b): $\psi_1 = \vartheta_d = 0, \psi_2 = \vartheta_e - \vartheta_g = 1, \psi_3 = \vartheta_f - \vartheta_h = 0$.

$$\vartheta_I = 1, \quad \vartheta_{II} = -\vartheta_I \frac{6,0}{12,0} = -\frac{1}{2}, \quad \vartheta_{III} = -\vartheta_{II} \frac{2}{1} = +1,$$

$$u_{F2} = -\vartheta_{II} \cdot 6,00 = +3,00.$$

γ) Kinematische Kette I_3 (Abb. 423c): $\psi_1 = \vartheta_d = 0, \psi_2 = \vartheta_e - \vartheta_g = 0, \psi_3 = \vartheta_f - \vartheta_h = 1$.

$$\vartheta_I = 1, \quad \vartheta_{II} = -\vartheta_I \frac{6,0}{6,0} = -1, \quad \vartheta_{III} = +1, \quad u_{F3} = -\vartheta_{II} \cdot 6,00 = +6,00.$$



	$\psi_1 = 1$	$\psi_2 = 1$	$\psi_3 = 1$
ϑ_a	+1	0	0
ϑ_b	-1/2	+1	0
ϑ_c	-1/2	-1/2	+1
ϑ_d	+1	0	0
ϑ_e	-1/2	+1	0
ϑ_f	-1/2	-1/2	+1
ϑ_g	-1/2	0	0
ϑ_h	-1/2	-1/2	0
ϑ_i	-1/2	-1/2	-1

Abb. 423.

b) Tabelle der Anschlußmomente nach (530).

	$\varphi_A = 1$	$\varphi_B = 1$	$\varphi_C = 1$	$\varphi_D = 1$	$\varphi_E = 1$	$\varphi_F = 1$	$\psi_1 = 1$	$\psi_2 = 1$	$\psi_3 = 1$
$M_A^{(a)}$	+0,5548	0	0	0	0	0	-0,8322	0	0
$M_B^{(a)}$	+0,5548	+0,2774	0	0	0	0	+0,2774	-0,8322	0
$M_A^{(b)}$	+1,0000	0	0	+0,5000	0	0	+0,5000	0	0
$M_B^{(b)}$	+0,2774	+0,5548	0	0	0	0	+0,2774	-0,8322	0
$M_C^{(b)}$	0	+0,5548	+0,2774	0	0	0	+0,2774	+0,4161	-0,8322
$M_B^{(c)}$	0	+1,5000	0	0	+0,7500	0	+0,7500	+1,1250	0
$M_C^{(c)}$	0	+0,2774	+0,5548	0	0	0	+0,2774	+0,4161	-0,8322
$M_G^{(c)}$	0	0	+1,0000	0	0	+0,5000	+0,5000	+0,7500	+1,5000
$M_D^{(d)}$	0	0	0	+0,6668	0	0	-1,0002	0	0
$M_D^{(e)}$	0	0	0	+0,6668	+0,3334	0	+0,3334	-1,0002	0
$M_D^{(g)}$	+0,5000	0	0	+1,0000	0	0	+0,5000	0	0
$M_E^{(e)}$	0	0	0	+0,3334	+0,6668	0	+0,3334	-1,0002	0
$M_E^{(f)}$	0	0	0	0	+0,6668	+0,3334	+0,3334	+0,5001	-1,0002
$M_E^{(h)}$	0	+0,7500	0	0	+1,5000	0	+0,7500	+1,1250	0
$M_F^{(f)}$	0	0	0	0	+0,3334	+0,6668	+0,3334	+0,5001	-1,0002
$M_F^{(i)}$	0	0	+0,5000	0	0	+1,0000	+0,5000	+0,7500	+1,5000
$M_G^{(a)}$	+0,2774	0	0	0	0	0	-0,8322	0	0
$M_H^{(d)}$	0	0	0	+0,3334	0	0	-1,0002	0	0

c) Die Vorzahlen der statischen Bedingungen.

$$a_{AK} = -\dot{i}_A (M_{AK}^{(a)} + M_{AK}^{(b)} + M_{AK}^{(c)}), \quad a_{BK} = -\dot{i}_B (M_{BK}^{(b)} + M_{BK}^{(c)} + M_{BK}^{(d)}).$$

Mit $M_{aK} = M_{AK}^{(a)} + M_{aK}^{(a)}$, der Summe der Stabendmomente im positiven Drehsinn aus $K \equiv A \dots F, 1, 2, 3$, ist

$$a_{1K} = \dot{i}_1 M_{aK} + \dot{i}_1 M_{dK} - \frac{1}{3} \cdot \dot{i}_1 (M_{bK} + M_{cK} + M_{eK} + M_{fK} + M_{gK} + M_{hK} + M_{iK}),$$

$$a_{2K} = \dot{i}_2 M_{bK} + \dot{i}_2 M_{cK} - \frac{1}{2} \cdot \dot{i}_2 (M_{cK} + M_{fK} + M_{hK} + M_{iK}).$$

d) Die Belastungszahlen (Abb. 424).

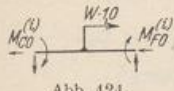


Abb. 424.

$$M_{c0}^{(d)} = M_{f0}^{(d)} = + \frac{W \cdot l \cdot 0}{4} \quad (\text{Tabelle 25}),$$

$$a_{c0} = -\dot{i}_c \cdot M_{c0}^{(d)} = -0,25 W, \quad a_{f0} = -\dot{i}_f \cdot M_{f0}^{(d)} = -0,25 W.$$

$$a_{10} = \dot{i}_1 (-\frac{1}{3}) (2 \cdot 0,25 W - 5,0 W), \quad a_{20} = \dot{i}_2 (-\frac{1}{2}) (2 \cdot 0,25 W - 5,0 W),$$

$$a_{30} = \dot{i}_3 (-1) (2 \cdot 0,25 W - 5,0 W).$$

e) Matrix der statischen Bedingungen. ($W = 1$).

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	ψ_1	ψ_2	ψ_3	a_{j0}
A	-2,1096	-0,2774	.	-0,5000	.	.	+0,0548	+0,8322	.	
B	-0,2774	-2,6096	-0,2774	.	-0,7500	.	-1,3048	-0,7089	+0,8322	
C	.	-0,2774	-1,5548	.	.	-0,5000	-0,7774	-1,1661	-0,6678	-0,25
D	-5,000	.	.	-2,3336	-0,3334	.	+0,1668	+1,0002	.	
E	.	-0,7500	.	-0,3334	-2,8336	-0,3334	-1,4168	-0,6249	+1,0002	
F	.	.	-0,5000	.	-0,3334	-1,6668	-0,8334	-1,2501	-0,4998	-0,25
1	+0,0548	-1,3048	-0,7774	+0,1668	-1,4168	-0,8334	-5,6459	-0,6392	+0,2216	+1,50
2	+0,8322	-0,7089	-1,1661	+1,0002	-0,6249	-1,2501	-0,6392	-6,4560	+0,3324	+2,25
3	.	+0,8322	-0,6678	.	+1,0002	-0,4998	+0,2216	+0,3324	-6,6648	+4,50

3. Auflösung durch Iteration (Abschn. 30).

φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	ψ_1	ψ_2	ψ_3
+0,2788	-0,1178	-1,1160	+0,3444	-0,0378	-0,9834	+0,5546	+0,8379	+0,9006

4. EJ_c fache waagerechte Verschiebung des Knotens F (Stab i).

$$u_F = \psi_1 u_{F1} + \psi_2 u_{F2} + \psi_3 u_{F3} = \psi_1 \cdot 2,00 + \psi_2 \cdot 3,00 + \psi_3 \cdot 6,00 = 9,0265.$$

EJ_c fache Verdrehung des Stabes i.

$$\vartheta_i = \psi_1 \vartheta_{i1} + \psi_2 \vartheta_{i2} + \psi_3 \vartheta_{i3} = \psi_1 (-\frac{1}{3}) + \psi_2 (-\frac{1}{2}) + \psi_3 (-1) = -1,5045.$$

Der symmetrische Stockwerkrahmen mit zwei geneigten Pfosten. Die äußeren Ursachen des Spannungs- und Verschiebungszustandes des Tragwerks (Belastung \mathfrak{P} , Temperaturänderung t und die Stützenverschiebungen) werden nach S. 186 in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt. Die Schnittkräfte sind nach Abschn. 28 Funktionen von statisch überzähligen Gruppenlasten eines statisch bestimmten Hauptsystems, die aus den Schnittkräften am unteren Ende

der Pfosten h_r eines jeden Stockwerks (r) gebildet werden. Dies sind links die Kräfte $A^{(r)}, H_a^{(r)}, M_a^{(r)}$, rechts die Kräfte $B^{(r)}, H_b^{(r)}, M_b^{(r)}$ (Abb. 425).

$$X_r = \frac{M_a^{(r)} + M_b^{(r)}}{2}, \quad Y_r = \frac{M_a^{(r)} - M_b^{(r)}}{2}, \quad X'_r = \frac{H_a^{(r)} + H_b^{(r)}}{2} \cdot h_r. \quad (756)$$

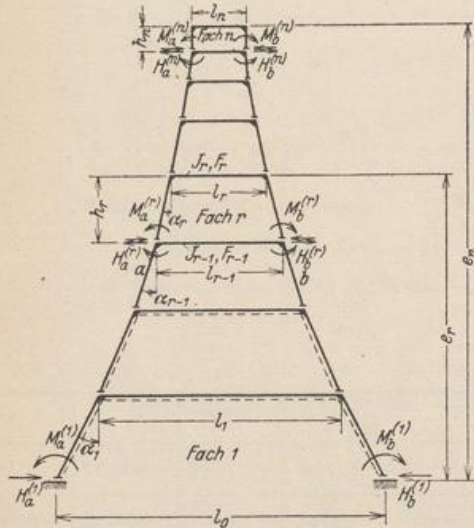


Abb. 425.

Die Kräfte $A^{(r)}, B^{(r)}, C^{(r)} = (H_a^{(r)} - H_b^{(r)})/2$ sind statisch bestimmt. Die Stützkkräfte $A_0^{(r)}, B_0^{(r)}, C_0^{(r)}$ stehen mit den Lasten $\sum P, \sum W$ im Gleichgewicht. Bei symmetrischer Belastung ist

$$C_0^{(r)} = 0, \quad A_0^{(r)} = B_0^{(r)},$$

bei antisymmetrischer Belastung

$$A_0^{(r)} = -B_0^{(r)},$$

$$C_0^{(r)} = H_a^{(r)} = -H_b^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_r W.$$

Die statisch unbestimmten Größen X_r, X'_r, Y_r ergeben sich nach Abschn. 28 aus den geometrischen Bedingungen für die Formänderung des Hauptsystems. Diese werden aus den Schaubildern für die Schnittkräfte infolge von $-X_r = 1, -X'_r = 1, -Y_r = 1$ (Abb. 426) abgeleitet und bilden zwei Gruppen voneinander unabhängiger Gleichungen mit den Unbekannten X_r, X'_r und

mit Y_r . Bei symmetrischer Belastung sind die Kräfte Y_r , bei antisymmetrischer Belastung die Kräfte X_r, X'_r Null.

Symmetrischer Anteil:

$$\left. \begin{aligned} X'_{r-1} \tau_{(r-1)'}(r-1)' + X_{r-1} \tau_{(r-1)'}(r-1) + X_r \tau_{(r-1)'}r &= \tau_{(r-1)'} \otimes, \\ X_{(r-1)} \tau_{r(r-1)} + X_r \tau_{rr} + X_{(r+1)} \tau_{r(r+1)} + X'_{r-1} \tau_{r(r-1)'} + X'_r \tau_{rr'} &= \tau_r \otimes, \\ X'_r \tau_{r'r'} + X_r \tau_{r'r} + X_{r+1} \tau_{r'(r+1)} &= \tau_{r'} \otimes. \end{aligned} \right\} \quad (757)$$

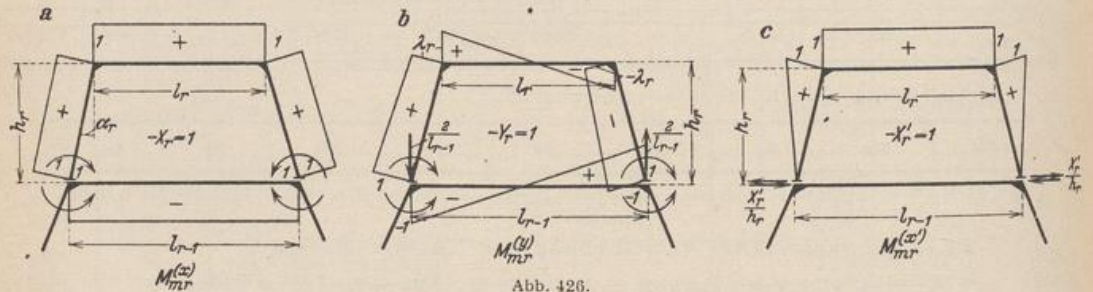


Abb. 426.

Die Regelgleichung entsteht durch Elimination von X'_{r-1} und X'_r .

$$\left. \begin{aligned} X_{r-1} \left[\tau_{r(r-1)} - \frac{\tau_{(r-1)'}(r-1)}{\tau_{(r-1)'}(r-1)'} \tau_{r(r-1)'} \right] + X_r \left[\tau_{rr} - \frac{\tau_{r'r'}}{\tau_{r'r'}} - \frac{\tau_{r'(r-1)'}}{\tau_{(r-1)'}(r-1)'} \right] \\ + X_{r+1} \left[\tau_{r(r+1)} - \frac{\tau_{r'(r+1)}}{\tau_{r'r'}} \tau_{r'r'} \right] &= \tau_r \otimes - \frac{\tau_{r(r-1)'}}{\tau_{(r-1)'}(r-1)'} \tau_{(r-1)'} \otimes - \frac{\tau_{r'r'}}{\tau_{r'r'}} \tau_{r'} \otimes. \end{aligned} \right\} \quad (758a)$$

Sie kann auch unmittelbar als geometrische Bedingung (285) für die Formänderung eines statisch unbestimmten Hauptsystems angeschrieben werden, das aus Zweigelenrahmen besteht. Diese lautet in der üblichen Schreibweise (294)

$$X_{r-1} \tau_{r(r-1)}^{(1)} + X_r \tau_{rr}^{(1)} + X_{r+1} \tau_{r(r+1)}^{(1)} = \tau_r^{(1)} \otimes. \quad (758b)$$

Die Vorzahlen und Belastungszahlen dieser Gleichungen sind bereits in (758a) als Funktionen der Verschiebungen eines statisch bestimmten Stabzugs entwickelt worden. Antimetrischer Anteil:

$$Y_{(r-1)} \delta_{r(r-1)} + Y_r \delta_{rr} + Y_{(r+1)} \delta_{r(r+1)} = \delta_{r\otimes}. \quad (759)$$

Ableitung der Vorzahlen nach Abb. 426.

$$\left. \begin{aligned} l_r \frac{J_c}{J_r} &= l'_r, & h_r \frac{J_c}{J_{rk}} &= h'_r, & \frac{l_r}{l_{r-1}} &= \lambda_r, \\ \tau_{r,r'} &= l'_r + \frac{2}{3} h'_r \sec \alpha_r = b_r, & \tau_{r,r'} &= l'_r + h'_r \sec \alpha_r = a_r, \\ \tau_{r(r-1)} &= \tau_{r(r-1)'} = -l'_{r-1}, & \tau_{r(r+1)} &= \tau_{r(r+1)'} = -l'_r, \\ \tau_{rr} &= l'_r + 2h'_r \sec \alpha_r + l'_{r-1} = a_r + h'_r \sec \alpha_r + l'_{r-1}, \\ \delta_{r(r-1)} &= -\frac{\lambda_{r-1} l'_{r-1}}{3}, & \delta_{r(r+1)} &= -\frac{\lambda_r l'_r}{3}, \\ \delta_{rr} &= \frac{1}{3} [\lambda_r^2 l'_r + l'_{r-1} + 2h'_r \sec \alpha_r (1 + \lambda_r + \lambda_r^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (760)$$

Sonderfall senkrechter Pfosten:

$$\alpha_r = 0, \quad \sec \alpha_r = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha_r = 0, \quad \lambda_r = 1, \\ b_r = l'_r + \frac{2}{3} h'_r, \quad a_r = l'_r + h'_r.$$

Ableitung der Belastungszahlen.
a) Symmetrische Belastung. 1. Eigengewicht. Das Eigengewicht g_k eines jeden Rahmens k wird gleichförmig über die Strecke $l_k + 2h_k \operatorname{tg} \alpha_k = l_{k-1}$ verteilt und das Biegemoment im Bereich der Pfosten näherungsweise linear angenommen (Abb. 427).

$$\tau_{r0} = a_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n g_k l_{k-1} - l'_{r-1} h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{r-1}^n g_k l_{k-1} + \frac{1}{12} (g_r l_r^2 l'_r - g_{r-1} l_{r-1}^2 l'_{r-1});$$

$$\tau_{r'0} = b_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n g_k l_{k-1} + g_r \frac{l_r^2 l'_r}{12}.$$

2. Gleichförmig über jeden Riegel l_k verteilte Nutzlast p_k (Abb. 428).

$$\tau_{r0} = a_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n p_k l_k - l'_{r-1} h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{r-1}^n p_k l_k + \frac{1}{12} (p_r l_r^2 l'_r - p_{r-1} l_{r-1}^2 l'_{r-1});$$

$$\tau_{r'0} = b_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n p_k l_k + \frac{1}{12} p_r l_r^2 l'_r.$$

3. Symmetrische Anordnung von Einzellasten $\sum P$ über jedem Riegel.

$$\tau_{r0} = a_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n \sum_k P - l'_{r-1} h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{r-1}^n \sum_k P + \frac{1}{2} (l_r l'_r \sum_r P \omega_R - l_{r-1} l'_{r-1} \sum_{r-1} P \omega_R);$$

$$\tau_{r'0} = b_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n \sum_k P + \frac{l_r l'_r}{2} \sum_r P \omega_R;$$

Die $\sum_k P$ und $\sum_k P \omega_R$ enthalten alle Lasten des Riegels l_k .

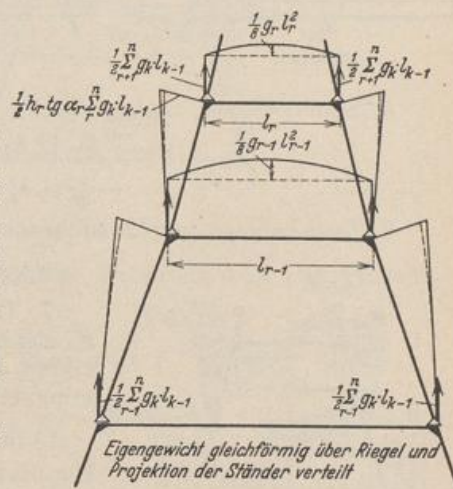


Abb. 427.

4. Symmetrische, gleichförmig verteilte horizontale Belastung $w_h/2$ der Pfosten (Abb. 429).

$$\tau_{r,0} = -\frac{1}{12} w_r h_r^2 (2a_r + l'_r) + \frac{1}{4} w_{r-1} h_{r-1}^2 l'_{r-1} = -\frac{1}{4} w_r h_r^2 b_r + \frac{1}{4} w_{r-1} h_{r-1}^2 l'_{r-1};$$

$$\tau_{r',0} = -\frac{1}{8} w_r h_r^2 (a_r + l'_r).$$

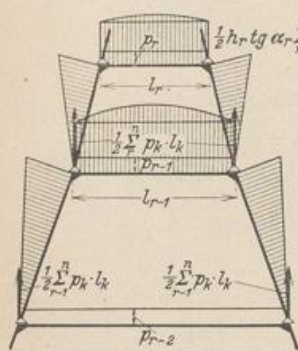


Abb. 428.

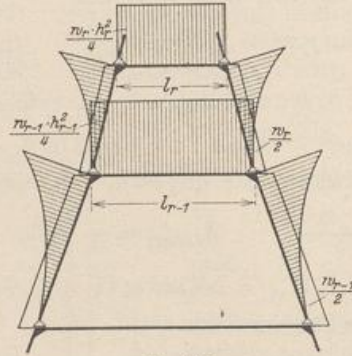


Abb. 429.

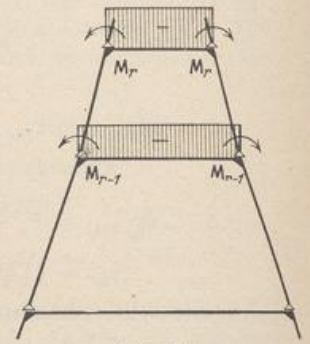


Abb. 430.

5. Symmetrische, hydrostatische horizontale Belastung w_k der Pfosten.

$$\tau_{r,0} = -\frac{1}{24} w_r h_r^2 (3a_r + l'_r) + \frac{1}{8} w_{r-1} h_{r-1}^2 l'_{r-1};$$

$$\tau_{r',0} = -\frac{1}{60} w_r h_r^2 (11a_r + 9l'_r).$$

6. Zwei entgegengesetzt drehende Momente M_k am Riegel l_k (Abb. 430).

$$\tau_{r,0} = -M_r l'_r + M_{r-1} l'_{r-1}; \quad \tau_{r',0} = -M_r l'_r.$$

7. Gleichförmige Erwärmung des Rahmens um t^0 . Bei statisch bestimmter Stützung nach Abb. 434c treten keine Schnittkräfte auf, bei statisch unbestimmter Stützung nach Abb. 434a oder b wird

$$\tau_{1t} = 0; \quad \tau_{1't} = E J_c \alpha t l_0.$$

Die übrigen Formänderungen $\tau_{r,t}$ sind Null.

b) Antimetrische Belastung.

1. Antimetrische, senkrecht gerichtete gleichförmige Belastung $p_k/2$ der Riegel (Abb. 431).

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{pr} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{\mathfrak{M}_{p(r-1)} l'_{r-1}}{3} + \frac{p_r \lambda_r l_r^2 l'_r - p_{r-1} l_{r-1}^2 l'_{r-1}}{192},$$

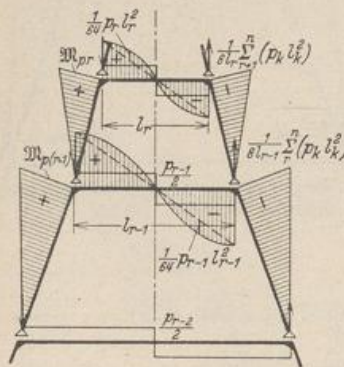


Abb. 431.

$$\mathfrak{M}_{pr} = \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{8 l_{r-1}} \sum_r p_k l_k^2, \quad \mathfrak{M}_{p(r-1)} = \frac{h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1}}{8 l_{r-2}} \sum_{r-1} p_k l_k^2.$$

2. Antimetrische, zum Riegel senkrechte Gruppe von Einzellasten $P/2$.

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{Pr} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{P(r-1)} l'_{r-1} - \frac{\lambda_r l_r l'_r}{6} \sum_r P \omega_D'' + \frac{l_{r-1} l'_{r-1}}{6} \sum_{r-1} P \omega_D'', \quad (\text{Tabelle 22})$$

$$\mathfrak{M}_{Pr} = \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{l_{r-1}} \sum_r \sum_k P c, \quad \mathfrak{M}_{P(r-1)} = \frac{h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1}}{l_{r-2}} \sum_{r-1} \sum_k P c \quad (\text{Abb. 432}).$$

3. Antimetrische Belastung des Riegels durch horizontale Einzellasten $W_k/2$.

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{W_r} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{W_{(r-1)}} l'_{r-1},$$

$$\mathfrak{M}_{W_r} = \frac{h_r}{2} \sum_r^n W_k - \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{l_{r-1}} \sum_r^n W_k (e_k - e_{r-1}) \quad (\text{Abb. 433}),$$

$$\mathfrak{M}_{W_{(r-1)}} = \frac{h_{r-1}}{2} \sum_{r-1}^n W_k - \frac{h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1}}{l_{r-2}} \sum_{r-1}^n W_k (e_k - e_{r-2}).$$

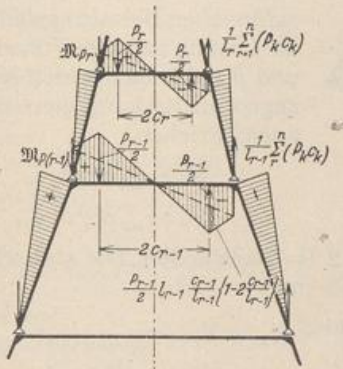


Abb. 432.

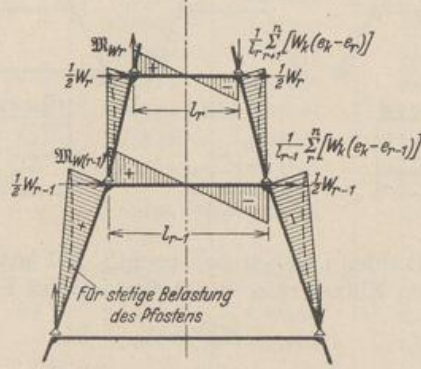


Abb. 433.

4. Antimetrische, waagerechte und gleichförmige Belastung $w_k/2$ der Pfosten (Abb. 433).

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{w_r} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{w_{(r-1)}} l'_{r-1} + \frac{w_r h_r^2}{24} (a_r - l'_r) \lambda_{r+1},$$

$$\mathfrak{M}_{w_r} = \frac{h_r}{2} \sum_r^n w_k h_k - \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{l_{r-1}} \sum_r^n w_k h_k (e_k - e_{r-1} - \frac{h_k}{2}) - \frac{w_r h_r^2}{4},$$

bei konstantem $w_k = w$,

$$\mathfrak{M}_{w_r} = \frac{w h_r}{2} \sum_r^n h_k - \frac{w h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{2 l_{r-1}} \left(\sum_r^n h_k \right)^2 - \frac{w h_r^2}{4}$$

5. Antimetrisch wirkende Momente $M_k/2$ an den Rahmenknoten.

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{M_r} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{M_{(r-1)}} l'_{r-1} + \frac{1}{3} (\lambda_r l'_r M_r - l'_{r-1} M_{r-1}),$$

$$\mathfrak{M}_{M_r} = - \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{l_{r-1}} \sum_r^n M_k.$$

Sind die Riegel am Anschluß mit den Pfosten durch Vouten verstärkt, deren Einfluß nicht vernachlässigt werden soll, so lassen sich die Vorzahlen mit einer Approximation der elastischen Eigenschaften nach den Tabellen 13 bis 15 berichtigen. Dasselbe gilt auch bei anderen Riegelformen, die vor allem zum oberen Abschluß des Tragwerks dienen. In diesem Falle wird mit Vorteil die Tabelle 12 zu Rate gezogen.

Ansatz und Lösung. Die statisch unbestimmten Gruppenlasten X_r, Y_r werden aus zwei voneinander unabhängigen Ansätzen berechnet, von denen jeder bei n Feldern des Tragwerks und starrer Einspannung oder Auflagerung nach

Abb. 434 c n Gleichungen enthält. Bei frei drehbarem Anschluß der Pfosten h_1 nach Abb. 434 a sind $(n - 1)$ Gleichungen aufzulösen. Die Nebenglieder der Matrix des symmetrischen Anteils sind positiv, diejenigen des antisymmetrischen Anteils negativ. Durch die Belastung eines Riegels l_k oder eines Pfostens h_k sind die Belastungszahlen δ_{10} bis δ_{k0} von Null verschieden, dagegen

$$\delta_{(k+1)0} = 0, \dots, \delta_{n0} = 0.$$

Die statisch unbestimmten Größen X_r, Y_r werden nach der Vorschrift S. 236 berechnet. Bei zahlreichen Belastungsfällen wird die Lösung mit den Vorzahlen $\beta_{rk}^{(a)}$ und $\beta_{rk}^{(y)}$ der den beiden Ansätzen zugeordneten konjugierten Matrix angeschrieben.

$$X_r = \sum \beta_{rk}^{(a)} \tau_{k \otimes},$$

$$Y_r = \sum \beta_{rk}^{(y)} \delta_{k \otimes}.$$

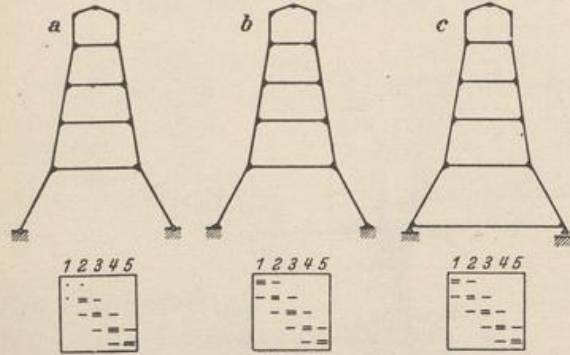


Abb. 434.

Die Vorzahlen ergeben sich nach S. 237 aus je 2 Kettenbrüchen. Die statisch unbestimmten Einzelkräfte der Ableitung auf S. 458 sind

$$M_a^{(r)} = X_r + Y_r, \quad M_b^{(r)} = X_r - Y_r.$$

Aus (757) und (760) wird

$$\frac{X_r'}{h_r} = \frac{H_a^{(r)} + H_b^{(r)}}{2} = \frac{1}{h_r b_r} (\tau_{r'} \otimes - X_r a_r + X_{r+1} l_r'),$$

$$H_a^{(r)} = \frac{X_r'}{h_r} + C_0^{(r)}, \quad H_b^{(r)} = \frac{X_r'}{h_r} - C_0^{(r)}.$$

Die Schnittkräfte werden mit den Gleichgewichtsbedingungen aus den Lasten und den in Abb. 435 eingetragenen Anschlußkräften rechnerisch oder zeichnerisch bestimmt.

Die Rechenvorschrift wird für einzelne ausgezeichnete Belastungsfälle an dem Binder einer Aufbereitungsanlage (Abb. 436) erläutert. Sie behandeln die gleichförmige Belastung $p_1 = 1 \text{ t/m}$ einer Bühne, Einzellasten $P_0 = 1 \text{ t}$ aus Maschinengewichten, Windbelastung $W = 1 \text{ t}$ und einseitige Sonnenbestrahlung $i = 10^\circ$ (Abb. 437 bis 440).

Die Vorzahlen der Bedingungsgleichungen für das obere Stockwerk mit gekrümmtem Abschlußriegel werden mit Hilfe der Tabelle 12 abgeleitet. Darnach ist ohne besondere Begründung

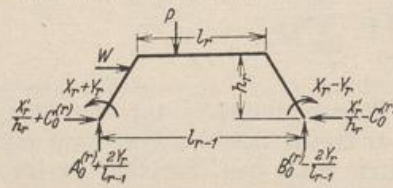


Abb. 435.

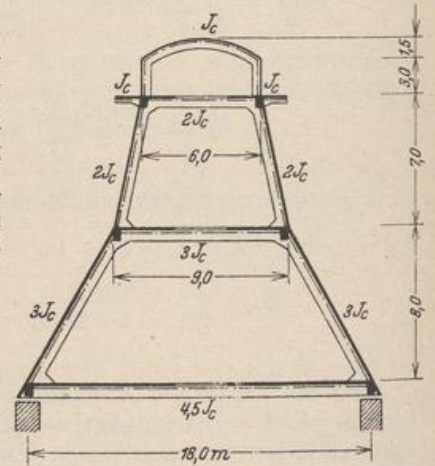


Abb. 436.

$$\tau_{3,3} = l_3' + \frac{2}{3} h_3' + \frac{8}{15} \left(\frac{f}{h_3}\right)^2 l_3' + \frac{4}{3} \frac{f}{h_3} l_3' = b_3 + \frac{8}{15} \left(\frac{f}{h_3}\right)^2 l_3' + \frac{4}{3} \frac{f}{h_3} l_3'$$

$$\tau_{3,3} = l_3' + h_3' + \frac{2}{3} \frac{f}{h_3} l_3' = a_3 + \frac{2}{3} \frac{f}{h_3} l_3'$$

Die übrigen Vorzahlen ergeben sich aus den Ansätzen (758) und (760). Die Zahlenrechnung wird folgendermaßen entwickelt:

r	0	1	2	3
l_r	18,00	9,00	6,00	6,00
h_r	—	8,50	7,00	3,00
$l'_r = -\tau_{r(r+1)} = -\tau_{r'(r+1)}$	4,00	3,00	3,00	6,00
h'_r	—	2,833	3,500	3,000
$\operatorname{tg} \alpha_r$	—	0,529412	0,214286	0,0000
$\sec \alpha_r$	—	1,131493	1,022701	1,0000
$h'_r \sec \alpha_r$	—	3,20590	3,57945	3,0000
$a_r = l'_r + h'_r \sec \alpha_r$	—	6,20590	6,57945	9,0000
$b_r = l'_r + 2/3 \cdot h'_r \sec \alpha_r$	—	5,13727	5,38630	8,0000
$\tau_{rr'}$	—	6,20590	6,57945	11,0000
$\tau_{r'r'}$	—	5,13727	5,38630	12,8000
$\tau_{rr} = a_r + h'_r \sec \alpha_r + l'_{r-1}$	—	13,41180	13,15891	15,0000
$-\frac{\tau_{r'(r+1)} \tau_{rr'}}$	—	3,62405	3,66455	5,15625
$\tau_{r(r+1)}^{(3)} = \tau_{r(r+1)} - \frac{\tau_{r'(r+1)} \tau_{rr'}}$	—	0,62405	0,66455	—
$\tau_{r'r'}^2 / \tau_{r'r'}$	—	7,49682	8,03690	9,45313
$\tau_{r'(r-1)}^2 / \tau_{(r-1)'(r-1)'}$	—	—	1,75190	1,67091
$\tau_{r'r}^{(3)} = \tau_{rr} - \frac{\tau_{r'r'}^2}{\tau_{r'r'}} - \frac{\tau_{r'(r-1)'}^2}{\tau_{(r-1)'(r-1)'}}$	—	5,91498	3,37011	3,87597
λ_r	—	0,500	0,66667	1,0000
$3 \delta_{r(r+1)} = -\lambda_r l'_r$	—	-1,500	-2,000	—
$1 + \lambda_r + \lambda_r^2$	—	1,7500	2,11111	3,0000
$2 h'_r \sec \alpha_r (1 + \lambda_r + \lambda_r^2)$	—	11,22065	15,11323	18,0000
$\lambda_r^2 l'_r$	—	0,7500	1,33333	6,0000
$3 \delta_{rr} = \lambda_r^2 l'_r + l'_{r-1} + 2 h'_r \sec \alpha_r (1 + \lambda_r + \lambda_r^2)$	—	15,97065	19,44656	27,0000

Die beiden voneinander unabhängigen Gruppen der Bedingungsgleichungen (758 b) und (759) sind daher für

Antimetrische Belastung

Symmetrische Belastung

	Y ₁	Y ₂	Y ₃
1	+ 15,971	- 1,500	—
2	- 1,500	+ 19,447	- 2,00
3	—	- 2,00	+ 27,00

	X ₁	X ₂	X ₃
1	+ 5,9150	+ 0,6240	—
2	+ 0,6240	+ 3,3701	+ 0,6645
3	—	+ 0,6645	+ 3,8760

Kettenbrüche zur Ermittlung der Kennbeziehungen und der Vorzahlen $\beta^{(v)} = \beta^{(v)}/3$:

$$\beta'_{11} = \frac{1}{15,971 - (-1,50) \frac{(-1,50)}{19,447 - (-2,0) \frac{(-2,0)}{27,00}}}$$

$$\beta'_{33} = \frac{1}{27,0 - (-2,00) \frac{(-2,00)}{19,447 - (-1,50) \frac{(-1,50)}{15,969}}}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{32} &= \frac{-2,0}{27,00} = -0,0740741, & \kappa_{12} &= \frac{-1,50}{15,971} = -0,0939202, \\ \kappa_{21} &= \frac{-1,50}{19,447 - 0,148} = -0,0777248, & \kappa_{23} &= \frac{-2,00}{19,447 - 0,141} = -0,1035941, \\ \beta'_{11} &= \frac{1}{15,971 - 0,117} = +0,0630739, & \beta'_{33} &= \frac{1}{27 - 0,207} = +0,0373234, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\kappa_{21} &= & -\kappa_{32} &= \\ +0,0777248 & & +0,0740741 & \end{aligned}$$

Matrix der Vorzahlen $\beta^{(y)}$

1	+0,0630739	+0,0049024	+0,0003631	+0,0939202 = $-\kappa_{12}$
2	+0,0049024	+0,0521976	+0,0038665	+0,1035941 = $-\kappa_{23}$
3	+0,0003631	+0,0038665	+0,0373234	
	1	2	3	

Kettenbrüche zur Ermittlung der Kennbeziehungen und der Vorzahlen $\beta^{(x)}$:

$$\beta_{11} = \frac{1}{5,9150 - \frac{0,6240 \cdot 0,6240}{3,3701 - \frac{0,6645 \cdot 0,6645}{3,8760}}}, \quad \beta_{33} = \frac{1}{3,8760 - \frac{0,6645 \cdot 0,6645}{3,3701 - \frac{0,6240 \cdot 0,6240}{5,9150}}}$$

$$\kappa_{32} = \frac{0,6645}{3,8760} = +0,171454, \quad \kappa_{12} = \frac{0,6240}{5,9150} = +0,105503,$$

$$\kappa_{21} = \frac{0,6240}{3,3701 - 0,1139} = +0,191652, \quad \kappa_{23} = \frac{0,6645}{3,3701 - 0,0658} = +0,201119,$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{5,9150 - 0,1196} = +0,172551, \quad \beta_{33} = \frac{1}{3,8760 - 0,1336} = +0,267214.$$

$$\begin{aligned} -\kappa_{21} &= & -\kappa_{32} &= \\ -0,191652 & & -0,171454 & \end{aligned}$$

Matrix der Vorzahlen $\beta^{(x)}$

1	+0,172551	-0,033070	+0,005670	-0,105503 = $-\kappa_{12}$
2	-0,033070	+0,313447	-0,053742	-0,201119 = $-\kappa_{23}$
3	+0,005670	-0,053742	+0,267214	
	1	2	3	

Die vorgeschriebenen Belastungen werden in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil aufgespalten (Abb. 437 bis 440). Ansatz und Größe der Belastungsglieder für p_1, p_0, W sind auf S. 465, für die Temperaturänderung t auf S. 466 angegeben.

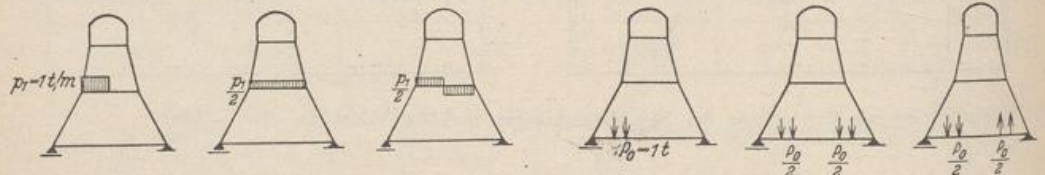


Abb. 437.

Abb. 438.

Auswertung der überzähligen Größen

$$X_r = \sum \beta_{rh}^{(y)} \tau_{h0}^{(y)}, \quad Y_r = \sum \frac{\beta_{rh}^{(y)}}{3} \cdot 3 \delta_{h0} = \sum \beta_{rh}^{(y)} \cdot 3 \delta_{h0},$$

$$\frac{1}{h_r} X'_r = \frac{1}{h_r \tau_{r,r}} (\tau_{r,0} - X_r \tau_{r,r} - X_{r+1} \tau_{r,(r+1)}).$$

Belastungsglieder.

	$p_1 = 1$	$P_0 = 1$	$W = 1$	Symmetrischer Anteil $\frac{p_1}{2}, \frac{P_0}{2}, \frac{W}{2}$	Antimetrischer Anteil $\frac{p_1}{2}, \frac{P_0}{2}, \frac{W}{2}$
τ_{10}	$a_1(h_1 \tan \alpha_1) \frac{p_1 l_1}{4} + \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24}$	$-\frac{l_0 l_0'}{4} P_0(0,16 + 0,21) \cdot 2$	0	0	
τ_{20}	$-l_1'(h_1 \tan \alpha_1) \frac{p_1 l_1}{4} - \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24}$	0	0	0	
τ_{30}	0	0	$-\frac{W}{3} f \cdot l_3'$	$-\frac{W}{3} f \cdot l_3'$	$= -3,00$
$\tau_{1'0}$	$b_1(h_1 \tan \alpha_1) \frac{p_1 l_1}{4} + \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24} = 62,13981$	0	0	0	
$\tau_{2'0}$	0	0	0	0	
$\tau_{3'0}$	0	0	0	$-\frac{W}{15} f l_3' (5 + 4 \frac{f}{h_3})$	$= -4,20$
$\tau_{10}^{(3)}$	$-\frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24} \left(\frac{a_1}{b_1} - 1 \right) = -2,106161$	$-\frac{l_0 l_0'}{4} P_0(0,16 + 0,21) \cdot 2 = -13,32$	0	0	
$\tau_{20}^{(3)}$	$-\frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24} \left(1 - \frac{l_1'}{b_1} \right) = -4,212322$	0	0	0	
$\tau_{30}^{(3)}$	0	0	0	0	
\mathfrak{M}_1	$\frac{p_1 l_1^2}{8 l_0} (h_1 \tan \alpha_1)$	0	0	$-3,00 + 0,8593 \cdot 4,20$	$= + 0,609375$
\mathfrak{M}_2	0	0	0	$\frac{h_1 \cdot 3W}{2} - \frac{h_1 \tan \alpha_1}{l_0} (8,5 + 15,5 + 18,5)W = + 2,125$	
\mathfrak{M}_3	0	0	0	$\frac{h_2 \cdot 2W}{2} - \frac{h_2 \tan \alpha_2}{l_1} (7,0 + 10,0)W = + 4,16667$	
$3\delta_{10}$	$\mathfrak{M}_{p1} [\lambda_1 (2a_1 - l_1) + (a_1 - l_1')] + \lambda_1 \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{64} = +21,92517$	$-\frac{l_0 l_0'}{4} P_0(0,192 + 0,168) = -6,48$	0	$\frac{h_3 \cdot W}{2} - \frac{h_3 \tan \alpha_3}{l_2} \cdot 3,0W = + 1,500$	
$3\delta_{20}$	$-\mathfrak{M}_{p1} l_1' - \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{64} = -11,39062$	0	0	$\mathfrak{M}_{w1} [(2a_1 - l_1') \lambda_1 + (a_1 - l_1')] = +16,8126$	
$3\delta_{30}$	0	0	0	$\mathfrak{M}_{w2} [(2a_2 - l_2') \lambda_2 + (a_2 - l_2')] - \mathfrak{M}_{w1} l_1' = +36,7585$	
				$\mathfrak{M}_{w3} [(2a_3 - l_3') \lambda_3 + (a_3 - l_3')] - \mathfrak{M}_{w2} l_2' = +10,00$	



Belastung p_1 (Abb. 437).

Antimetrischer Anteil.

$$Y_1 = + 0,0630739 \cdot 21,92517 - 0,0049244 \cdot 11,39062 = + 1,32706,$$

$$Y_2 = + 0,0049024 \cdot 21,92517 - 0,0521976 \cdot 11,39062 = - 0,48708,$$

$$Y_3 = + 0,0003631 \cdot 21,92517 - 0,0038665 \cdot 11,39062 = - 0,03608.$$

Symmetrischer Anteil.

$$X_1 = - 0,172551 \cdot 2,106161 + 0,033070 \cdot 4,212322 = - 0,22412,$$

$$X_2 = + 0,033070 \cdot 2,106161 - 0,313447 \cdot 4,212322 = - 1,25069,$$

$$X_3 = - 0,005670 \cdot 2,106161 + 0,053742 \cdot 4,212322 = + 0,21444.$$

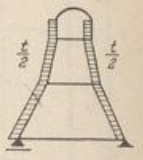
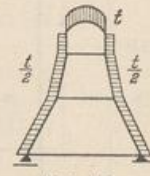
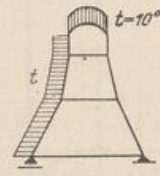
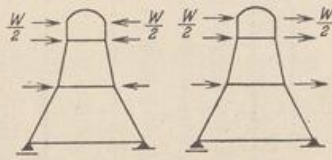


Abb. 439.

Abb. 440.

$$\frac{1}{h_1} X'_1 = \frac{1}{8,5 \cdot 5,1373} (62,13981 + 0,22412 \cdot 6,2059 - 1,25069 \cdot 3,00) = + 1,36899,$$

$$\frac{1}{h_2} X'_2 = \frac{1}{7,0 \cdot 5,3863} (\quad + 1,25069 \cdot 6,5795 + 0,21444 \cdot 3,00) = + 0,23531,$$

$$\frac{1}{h_3} X'_3 = \frac{1}{3,0 \cdot 12,800} (\quad - 0,21444 \cdot 11,0000 \quad) = - 0,06143.$$

Biegemomente des Stabwerks in Abb. 441.

Belastung P_0 (Abb. 438).

Antimetrischer Anteil.

$$Y_1 = - 0,0630739 \cdot 6,48 = - 0,4087,$$

$$Y_2 = - 0,0049024 \cdot 6,48 = - 0,0318,$$

$$Y_3 = - 0,003631 \cdot 6,48 = - 0,0024. \quad (\text{Fortsetzung auf S. 467.})$$

Belastungsglieder für symmetrische und antimetrische Temperaturänderung $t = 10^0$.

$$E \alpha_t = 21 \text{ t/m}^2$$

$$J_c = 0,012825 \text{ m}^4$$

Be- lastung	$t = 10^0 \text{ C}$	
$\tau_{1,t}$	$E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \text{tg } \alpha_1$	$= + 1,42584$
$\tau_{2,t}$	$E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \text{tg } \alpha_2$	$= + 0,57712$
$\tau_{3,t}$	$E J_c \alpha_t \cdot t \cdot l_3/h_3$	$= + 5,38650$
$\tau_{1,t}^{(3)}$	$- 1,208015 \cdot 1,42584$	$= - 1,72244$
$\tau_{2,t}^{(3)}$	$- 1,221516 \cdot 0,57712 + \frac{3,00}{5,13727} \cdot 1,42584$	$= + 0,12768$
$\tau_{3,t}^{(3)}$	$- 0,859375 \cdot 5,38650 + \frac{3,00}{5,38630} \cdot 0,57712$	$= - 4,31872$
$3 \delta_{1,t}$	$6 E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \frac{h_1}{l_0}$	$= + 7,63087$
$3 \delta_{2,t}$	$6 E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \frac{h_2}{l_1}$	$= + 12,56849$
$3 \delta_{3,t}$	$6 E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \frac{h_3}{l_2}$	$= + 8,07975$

Symmetrische Erwärmung der Pfosten um $t/2$, des obersten Riegels um t .
Antimetrische Erwärmung der Pfosten um $t/2$.

Symmetrischer Anteil.

$$\begin{aligned} X_1 &= -0,172551 \cdot 13,32 = -2,2984, \\ X_2 &= +0,033070 \cdot 13,32 = +0,4405, \\ X_3 &= -0,005670 \cdot 13,32 = -0,0755, \end{aligned}$$

$$\frac{X'_1}{h_1} = \frac{1}{8,5 \cdot 5,1373} (+2,2984 \cdot 6,2059 + 0,4405 \cdot 3,00) = +0,3569,$$

$$\frac{X'_2}{h_2} = \frac{1}{7,0 \cdot 5,3863} (-0,4405 \cdot 6,5795 - 0,0755 \cdot 3,00) = -0,0829,$$

$$\frac{X'_3}{h_3} = \frac{1}{3,0 \cdot 12,8000} (+0,0755 \cdot 11,0000) = +0,0216.$$

Biegemomente des Stabwerks in Abb. 442.

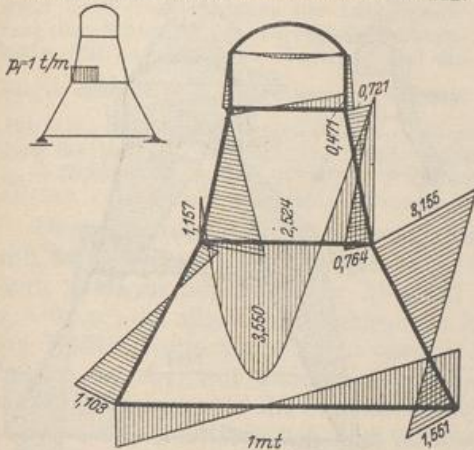


Abb. 441.

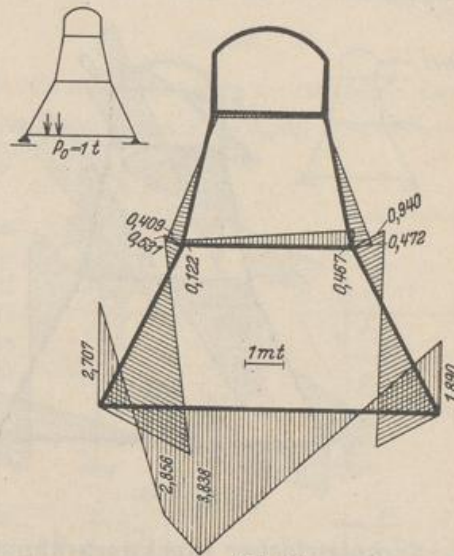


Abb. 442.

Belastung W (Abb. 439).

Antimetrischer Anteil.

$$Y_1 = +0,0630739 \cdot 16,8126 + 0,0049024 \cdot 36,7585 + 0,0003631 \cdot 10,00 = +1,2443,$$

$$Y_2 = +0,0049024 \cdot 16,8126 + 0,0521976 \cdot 36,7585 + 0,0038665 \cdot 10,00 = +2,0398,$$

$$Y_3 = +0,0003631 \cdot 16,8126 + 0,0038665 \cdot 36,7585 + 0,0373234 \cdot 10,00 = +0,5215.$$

Symmetrischer Anteil.

$$X_1 = +0,005670 \cdot 0,609375 = +0,0035,$$

$$X_2 = -0,053742 \cdot 0,609375 = -0,0327,$$

$$X_3 = +0,267214 \cdot 0,609375 = +0,1628.$$

$$\frac{X'_1}{h_1} = \frac{1}{8,5 \cdot 5,1373} (-0,0035 \cdot 6,2059 - 0,0327 \cdot 3,00) = -0,0027,$$

$$\frac{X'_2}{h_2} = \frac{1}{7,0 \cdot 5,3863} (+0,0327 \cdot 6,5795 + 0,1628 \cdot 3,00) = +0,0187$$

$$\frac{X'_3}{h_3} = \frac{1}{3,0 \cdot 12,8000} (-4,20 - 0,1628 \cdot 11,0000) = -0,1560.$$

Biegemomente des Stabwerks in Abb. 443.

Temperaturänderung (Abb. 440).

Antimetrischer Anteil.

$$Y_1 = +0,0630739 \cdot 7,63087 + 0,0049024 \cdot 12,56849 + 0,0003631 \cdot 8,07975 = +0,54586,$$

$$Y_2 = +0,0049024 \cdot 7,63087 + 0,0521976 \cdot 12,56849 + 0,0038665 \cdot 8,07975 = +0,72470,$$

$$Y_3 + 0 = 0,0003631 \cdot 7,63087 + 0,0038665 \cdot 12,56849 + 0,0373234 \cdot 8,07975 = +0,35293.$$

Symmetrischer Anteil.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -0,172551 \cdot 1,72244 - 0,033070 \cdot 0,12768 - 0,005670 \cdot 4,31872 = -0,32592, \\
 X_2 &= +0,033070 \cdot 1,72244 + 0,313447 \cdot 0,12768 + 0,053742 \cdot 4,31872 = +0,32908, \\
 X_3 &= -0,005670 \cdot 1,72244 - 0,053742 \cdot 0,12768 - 0,267214 \cdot 4,31872 = -1,17065.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{X'_1}{h_1} &= \frac{1}{8,5 \cdot 5,1373} (1,42584 + 0,32592 \cdot 6,2059 + 0,32908 \cdot 3,00) = +0,10158, \\
 \frac{X'_2}{h_2} &= \frac{1}{7,0 \cdot 5,3863} (0,57712 - 0,32908 \cdot 6,5795 - 1,17065 \cdot 3,00) = -0,13526, \\
 \frac{X'_3}{h_3} &= \frac{1}{3,0 \cdot 12,8000} (5,38650 + 1,17065 \cdot 11,0000) = +0,47562.
 \end{aligned}$$

Biegemomente des Stabwerks in Abb. 444.

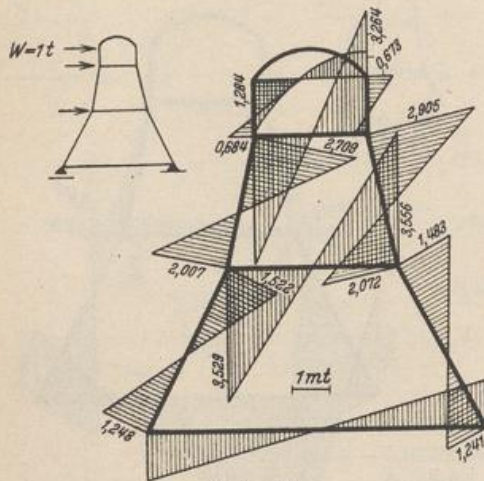


Abb. 443.

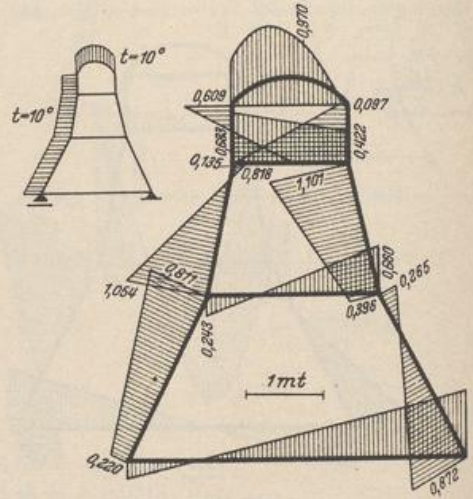


Abb. 444.

Symmetrischer Stockwerkrahmen mit gelenkig angeschlossenen Zwischenriegeln. Bei zahlreichen Bauaufgaben, zu deren Lösung Stockwerkrahmen herangezogen werden, dienen die Zwischenriegel nur zur Aussteifung und zur Knicksicherung der Pfosten. Ihre biegesteife Verbindung ist dann unnötig. Der Stockwerkrahmen mit r Zwischenriegeln ist in diesem Falle bei symmetrischer

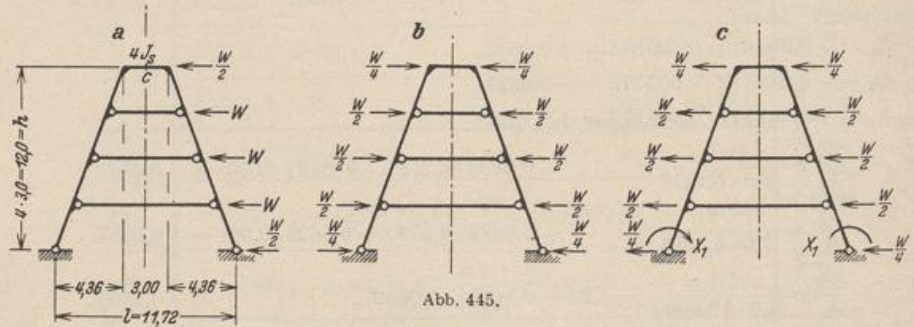


Abb. 445.

Belastung $(r + 1)$ oder $(r + 2)$ fach statisch unbestimmt, je nachdem die Pfostenenden frei drehbar gestützt oder eingespannt sind. Die Schnittkräfte werden dabei aus statisch unbestimmten Gruppenlasten berechnet, die aus der halben Summe symmetrisch liegender Pfostenmomente bestehen. Die Elastizitätsgleichungen erhalten dieselbe Form wie bei der Berechnung des durchlaufenden Trägers. Bei Antimetrie der Belastung sind das Biegemoment im Querschnitt c (Abb. 445a)

und die Längskräfte in den Riegeln Null, die Schnittkräfte daher bei frei drehbaren Pfostenenden statisch bestimmt, bei starrer Einspannung der Pfostenenden einfach statisch unbestimmt. Die statisch unbestimmte Querkraft im Scheitel oder das statisch unbestimmte Einspannmoment können nach Abschn. 26 berechnet werden. In zahlreichen Fällen genügen die Angaben der Tabelle 47.

Beispiel. Die Windbelastung des Rahmens (Abb. 445a) wird in den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil umgeordnet (Abb. 445b, c). Der symmetrische Anteil erzeugt bei Vernachlässigung der Längenänderung der Stäbe in den Riegeln nur Druckkräfte. Bei antisymmetrischer Belastung sind die

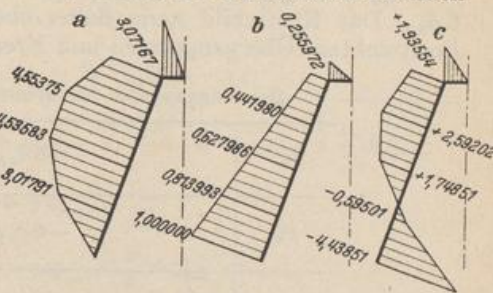


Abb. 446.

Riegel spannungslos. Querkraft im Scheitel: $Q_0 = 2W \frac{h/2}{l/2} = 2,04778 W$. Momente siehe

Abb. 446a. Bei eingespannten Pfosten wird das Einspannmoment $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$ unter Verwendung der Momente M_1 nach Abb. 446b berechnet. $\delta_{10} = 32,83283 W$, $\delta_{11} = 7,39710$, $X_1 = 4,43851 W$. Statisch unbestimmte Momente: Abb. 446c.

Der symmetrische Stockwerkrahmen mit zwei senkrechten Pfosten. Das Tragwerk kann als Sonderfall der Abb. 425 mit $\alpha_r = 0$ nach der allgemeinen Rechenvorschrift auf S. 457ff. statisch untersucht werden. Die Lösung ist aber mit anderen überzähligen Größen, die auf Grund der besonderen Eigenschaften des symmetrischen oder antisymmetrischen Verschiebungs- und Spannungszustandes ausgewählt werden, einfacher.

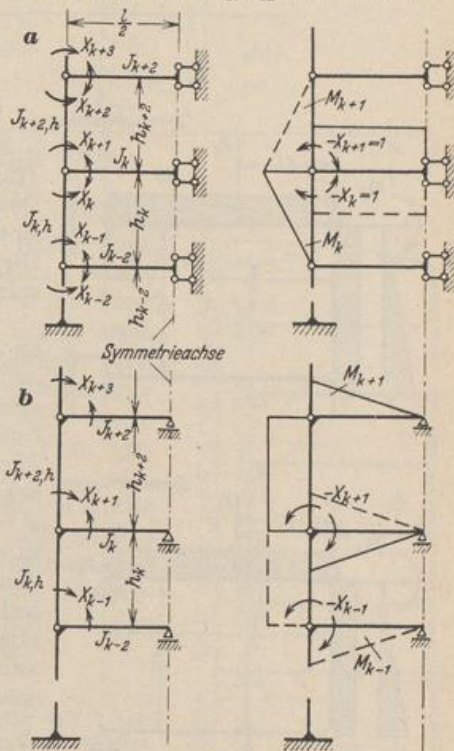


Abb. 447.

a) Symmetrische Belastung: Spannungs- und Verschiebungszustand sind symmetrisch. Daher sind in der Symmetrieachse die Tangenten an die Biegelinien der Riegel waagrecht und die Querkräfte Null. Die statische Untersuchung kann daher auf die linke Hälfte des Rahmens beschränkt und der Riegel in der Symmetrieachse mit $Q = 0$, $dw/dx = 0$ beweglich eingespannt angenommen werden. Die dem Riegelanschluß k benachbarten Biegemomente X_k, X_{k+1} des Pfostens sind statisch unbestimmt. Auf diese Weise entsteht das Hauptsystem Abb. 447a mit den folgenden geometrischen Bedingungen für die Formänderung:

$$\left. \begin{aligned} X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} &= \delta_{k0}, \\ X_k \delta_{(k+1)k} + X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1)} + X_{k+2} \delta_{(k+1)(k+2)} &= \delta_{(k+1)0}. \end{aligned} \right\} (761)$$

Sechsfacher Betrag der Vorzahlen unter Berücksichtigung einer Riegelverstärkung nach Tabelle 29:

$$\left. \begin{aligned} 6 \delta_{k(k-1)} &= h'_k, & 6 \delta_{kk} &= 2h'_k + (2\mu_k + \lambda_k) l'_k, \\ 6 \delta_{k(k+1)} &= -(2\mu_k + \lambda_k) l'_k = 6 \delta_{(k+1)k}, \\ 6 \delta_{(k+1)(k+1)} &= 2h'_{k+2} + (2\mu_k + \lambda_k) l'_k, & 6 \delta_{(k+1)(k+2)} &= h'_{k+2}. \end{aligned} \right\} (762)$$

Konstantes Trägheitsmoment des Riegels l_k : $\mu_k = 1, \lambda_k = 1$.

Die Belastung eines einzelnen Riegels l_k liefert nur die Belastungszahlen $-6\delta_{k0} = 6\delta_{(k+1)0}$, die Belastung eines einzelnen Pfostens h_k nur $6\delta_{(k-1)0}$ und $6\delta_{k0}$. Das Kräftebild kann daher ebenso wie beim durchlaufenden Träger mit Festpunkten, Übergangslinien und Kreuzlinienabschnitten aufgezeichnet werden.

Belastungsglieder für symmetrische Belastung (Abb. 448a).

p_k	$-6\delta_{k0} = 6\delta_{(k+1)0} = \frac{p_k l_k^2 l'_k}{4}$
P_k	$-6\delta_{k0} = 6\delta_{(k+1)0} = 3 P_k l'_k \omega_R$
w_k	$6\delta_{(k-1)0} = 6\delta_{k0} = -\frac{w_k h_k^2 h'_k}{4}$
\bar{w}_k	$6\delta_{(k-1)0} = -\frac{2}{15} w_k h_k^2 h'_k, \quad 6\delta_{k0} = -\frac{7}{60} w_k h_k^2 h'_k$
M_k	$-6\delta_{k0} = 6\delta_{(k+1)0} = 3 l'_k M_k$

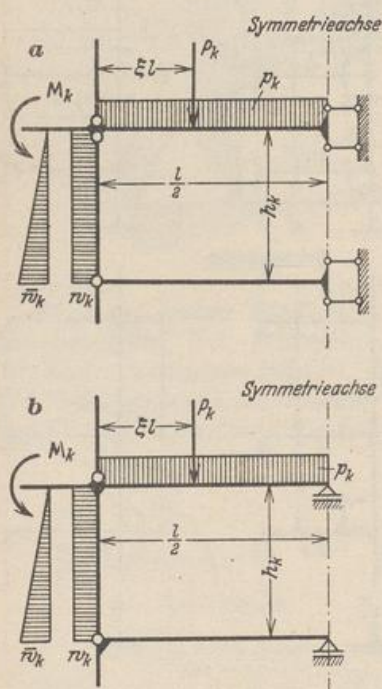


Abb. 448.

Der dreigliedrige Ansatz wird rechnerisch nach S. 232, also ebenso wie für den durchlaufenden Träger mit elastisch drehbaren Stützen gelöst. Dasselbe gilt für die zeichnerische Behandlung eines allgemeinen Belastungsfalles nach Abschn. 32. Die Zahlenrechnung ist in dem folgenden Beispiel ausführlich erläutert worden.

b) Antimetrische Belastung. Spannungs- und Verschiebungszustand sind antimetrisch. Daher sind nach S. 185 in der Symmetrieachse die Biegemomente und die senkrechten Verschiebungen der Querschnitte Null. Die Untersuchung kann daher auf die linke Hälfte des Tragwerks beschränkt und der Riegel mit $M = 0, N = 0, w = 0$ in der Symmetrieachse durchschnitten und in senkrechtem Sinne gestützt angenommen werden. Die Biegemomente $X_{k-1}, X_{k+1}, X_{k+3}$ am unteren Ende der Pfosten sind statisch unbestimmt. Auf diese Weise entsteht das statisch bestimmte Hauptsystem Abb. 447b. Die geometrischen Bedingungen lauten

$$X_{k-1} \delta_{(k+1)(k-1)} + X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1)} + X_{k+3} \delta_{(k+1)(k+3)} = \delta_{(k+1)0}. \quad (763)$$

Sechsfacher Betrag der Vorzeichen unter Berücksichtigung der Riegelverstärkung nach Tabelle 29:

$$\left. \begin{aligned} 6\delta_{(k+1)(k-1)} &= -l'_k(2\mu_k - \lambda_k), & 6\delta_{(k+1)(k+3)} &= -l'_{(k+2)}(2\mu_{k+2} - \lambda_{k+2}), \\ 6\delta_{(k+1)(k+1)} &= l'_k(2\mu_k - \lambda_k) + 6h'_{k+2} + l'_{k+2}(2\mu_{k+2} - \lambda_{k+2}). \end{aligned} \right\} \quad (764)$$

Konstantes Trägheitsmoment des Riegels l_k : $\mu_k = \lambda_k = 1$.

Bei Belastung eines einzelnen Riegels l_k sind nur die Belastungszahlen $6\delta_{(k+1)0} = -6\delta_{(k-1)0}$ von Null verschieden. Dagegen liefert die Belastung eines Pfostens h_k Belastungsglieder $\delta_{10} \neq 0$ bis $\delta_{(k+1)0} \neq 0$.

Belastungsglieder für antimetrische Belastung (Abb. 448 b).

p_k	$-6 \delta_{(k-1)0} = 6 \delta_{(k+1)0} = \frac{p_k l_k^2 l'_k}{32}$
P_k	$-6 \delta_{(k-1)0} = 6 \delta_{(k+1)0} = P_k l'_k \omega_R (1 - 2 \xi)$
w_k	$6 \delta_{(k+1)0} = \frac{w_k h_k^3 l'_k}{2}, \quad 6 \delta_{(k-1)0} = -\frac{w_k h_k^3}{2} \left(l'_k + 4 h'_k - 2 \frac{h_{k-2}}{h_k} l'_{k-2} \right)$ $6 \delta_{(k-3)0} = -w_k h_k h_{k-2} \left(l'_{k-2} + 3 h'_{k-2} - \frac{h_{k-4}}{h_{k-2}} l'_{k-4} \right)$ $6 \delta_{(k-5)0} = -w_k h_k h_{k-4} \left(l'_{k-4} + 3 h'_{k-4} - \frac{h_{k-6}}{h_{k-4}} l'_{k-6} \right)$ usw.
\bar{w}_k	$6 \delta_{(k+1)0} = \frac{\bar{w}_k h_k^3 l'_k}{6}, \quad 6 \delta_{(k-1)0} = -\frac{\bar{w}_k h_k^3}{12} \left(2 l'_k + 9 h'_k - 6 \frac{h_{k-2}}{h_k} l'_{k-2} \right)$ $6 \delta_{(k-3)0} = -\frac{\bar{w}_k h_k h_{k-2}}{2} \left(l'_{k-2} + 3 h'_{k-2} - \frac{h_{k-4}}{h_{k-2}} l'_{k-4} \right)$ $6 \delta_{(k-5)0} = -\frac{\bar{w}_k h_k h_{k-4}}{2} \left(l'_{k-4} + 3 h'_{k-4} - \frac{h_{k-6}}{h_{k-4}} l'_{k-6} \right)$ usw.
M_k	$-6 \delta_{(k-1)0} = 6 \delta_{(k+1)0} = l'_k M_k$

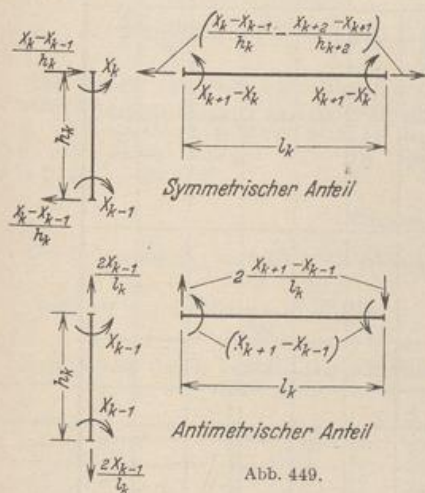


Abb. 449.

Der dreigliedrige Ansatz (763) kann in ähnlicher Weise wie beim durchlaufenden Träger nach der bekannten Rechenvorschrift rechnerisch oder zeichnerisch gelöst werden.

Die Schnittkräfte ergeben sich aus dem statisch bestimmten Anteil und den Anschlußkräften in Abb. 449.

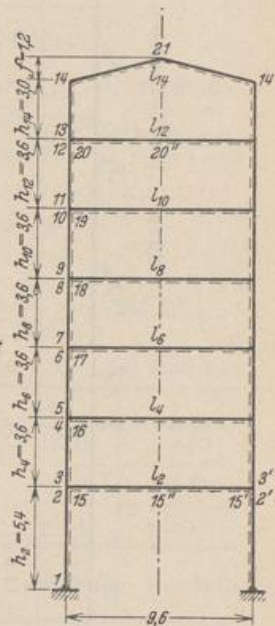


Abb. 450.

Statische Untersuchung eines Stockwerkrahmens mit 7 Geschossen für ständige Last und Windlast. Grenzwerte der Biegemomente bei voller Nutzlast in einzelnen Geschossen.

1. Geometrische Grundlagen. Abb. 450. Die Trägheitsmomente sind im Bereich eines jeden Stabes konstant. $J_c = 72 \text{ dm}^4$.

A. Symmetrische Belastung. Berechnung nach S. 469. Die statisch überzähligen Größen sind die Anschlußmomente X_k, X_{k+1} der Pfosten.

2. Die geometrischen Bedingungsgleichungen (761). Momente M_k und M_{k+1} nach Abb. 447 a, Momente M_{13} und M_{14} nach Abb. 451, Vorzahlen der Matrix nach (762):

k	l_k	J_k	l'_k	k	h_k	J_k	h'_k
2	9,6	171	4,03	2	5,4	307	1,27
4	9,6	171	4,03	4	3,6	256	1,01
6	9,6	108	6,40	6	3,6	256	1,01
8	9,6	90	7,68	8	3,6	143	1,81
10	9,6	90	7,68	10	3,6	143	1,81
12	9,6	72	9,60	12	3,6	72	3,60
14	9,6	72	9,90	14	3,0	60	3,60

Matrix der Vorzahlen $6\delta_{ik}$.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
1	2,54	1,27												
2	1,27	14,63	- 12,09											
3		- 12,09	14,11	1,01										
4			1,01	14,11	- 12,09									
5				- 12,09	14,11	1,01								
6					1,01	21,22	- 19,20							
7						- 19,20	22,82	1,81						
8							1,81	26,66	- 23,04					
9								- 23,04	26,66	1,81				
10									1,81	26,66	- 23,04			
11										- 23,04	30,24	3,60		
12											3,60	36,00	- 28,80	
13												- 28,80	37,584	- 3,924
14													- 3,924	50,36

$$\begin{aligned}
 6 \delta_{k(k-1)} &= h'_k, & 6 \delta_{kk} &= 2h'_k + 3l'_k, & 6 \delta_{k(k+1)} &= -3l'_k, \\
 6 \delta_{(k+1)(k+1)} &= 2h'_{k+1} + 3l'_{k+1}, & 6 \delta_{(k+1)(k+2)} &= h'_{k+2}, \\
 6 \delta_{1313} &= 2h'_{14} + 3l'_{12} + l'_{14} \left(\frac{f}{h_{14}}\right)^2, \\
 6 \delta_{1414} &= 2h'_{14} + l'_{14} \left[3 + 3\frac{f}{h_{14}} + \left(\frac{f}{h_{14}}\right)^2\right], \\
 6 \delta_{1314} &= h'_{14} - \frac{l'_{14}}{2} \frac{f}{h_{14}} \left(3 + 2\frac{f}{h_{14}}\right).
 \end{aligned}$$

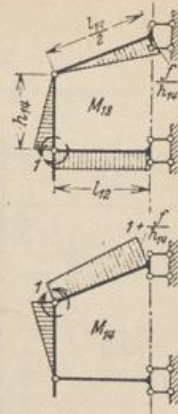


Abb. 451.

Ergebnis der Rechnung auf S. 472.

3. Die Auflösung des Ansatzes. Anwendung der Rechenvorschrift auf S. 238 mit den Kennbeziehungen $-X_k/X_{k+1} = \alpha_{k(k+1)}$, $-X_k/X_{k-1} = \alpha_{k(k-1)}$ und den Vorzahlen $\beta_{ik} = \beta_{ik}/6$ der konjugierten Matrix. Da bei symmetrischer Belastung p_k eines Riegels l_k nach S. 470 nur die Belastungsglieder $-6\delta_{k0} = 6\delta_{(k+1)0}$ und bei symmetrischer gleichförmiger Belastung w_k eines Pfostenpaares nur die Belastungsglieder $6\delta_{(k-1)0} = 6\delta_{k0}$ entstehen, so genügen die Vorzahlen $\beta_{kk}/6$ der Hauptdiagonalen der konjugierten Matrix und die beiderseits benachbarten Nebenglieder $\beta_{k(k-1)}/6$, $\beta_{k(k+1)}/6$. Die konjugierte Matrix wird daher nur für diesen Bereich berechnet. Das Ergebnis der Auflösung nach S. 238 besteht in der Tabelle S. 474.

a) Symmetrische Belastung eines Riegels

$$X_k = \left(-\frac{\beta_{kk}}{6} + \frac{\beta_{k(k+1)}}{6}\right) 6\delta_{(k+1)0}, \quad X_{k+1} = \left(-\frac{\beta_{(k+1)k}}{6} + \frac{\beta_{(k+1)(k+1)}}{6}\right) 6\delta_{(k+1)0};$$

b) symmetrische Belastung eines Pfostenpaares

$$X_{k-1} = \left(\frac{\beta_{(k-1)(k-1)}}{6} + \frac{\beta_{(k-1)k}}{6}\right) 6\delta_{k0}, \quad X_k = \left(\frac{\beta_{k(k-1)}}{6} + \frac{\beta_{kk}}{6}\right) 6\delta_{k0}.$$

Die übrigen statisch unbestimmten Größen sind für jede Belastung p_k , w_k durch die Kennbeziehungen $\alpha_{k(k-1)}$, $\alpha_{k(k+1)}$ bestimmt.

4. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte bei gleichförmiger Belastung p_k der einzelnen Riegel l_k . Die Belastungsglieder sind nach S. 470 für $p_k = 1 \text{ t/m}$ ($k = 2, 4, \dots, 12$)

$$-6\delta_{k0} = 6\delta_{(k+1)0} = \frac{p_k l_k^2 l'_k}{4}.$$

Die Belastung p_{14} erzeugt nach Abb. 451

$$6\delta_{13,0} = \frac{5}{32} p_{14} l_{14}^2 l'_{14} \frac{f}{h_{14}} = 57,024, \quad 6\delta_{14,0} = -\frac{1}{32} p_{14} l_{14}^2 l'_{14} \left(8 + 5\frac{f}{h_{14}}\right) = -285,120.$$

Berechnung der l_k benachbarten Pfostenendmomente X_k , X_{k+1} ($k = 2, 4, \dots, 12$) nach 3a:

k	2	4	6	8	10	12
p_k	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
l'_k	4,03	4,03	6,40	7,68	7,68	9,60
$-6\delta_{k0} = 6\delta_{(k+1)0}$	92,85	92,85	147,46	176,95	176,95	221,18
$-\frac{\beta_{kk}}{6} + \frac{\beta_{k(k+1)}}{6}$	-0,036678	-0,039198	-0,031630	-0,021131	-0,026638	-0,018275
X_k	-3,4056	-3,6395	-4,6642	-3,7391	-4,7136	-4,0421
$-\frac{\beta_{(k+1)k}}{6} + \frac{\beta_{(k+1)(k+1)}}{6}$	+0,040255	+0,037868	+0,017600	+0,019529	+0,013185	+0,012707
X_{k+1}	+3,7377	+3,5160	+2,5953	+3,4557	+2,3331	+2,8105

Die Belastung $p_{14} = 1 \text{ t/m}$ erzeugt

$$X_{13} = \frac{\beta_{13,13}}{6} \cdot 6\delta_{13,0} + \frac{\beta_{13,14}}{6} \cdot 6\delta_{14,0} = +2,6031, \quad X_{14} = -5,4588.$$

10^6 -fache Vorzahlen $\beta'_{ik} = \frac{1}{6} \beta_{ik}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
			+0,874454	+0,870230	+0,860497	+0,876832	+0,866416	+0,8772569						
$-x_{k(k-1)}$	-0,312974	-0,281421	-0,214964	-0,280281	-0,211920	-0,261818	+0,0777919							
1	+466739	-146077												
2	-146077	+292154	+255476											
3		+255476	+295731	-83225										
4			-83225	+302056	+262858									
5				+262858	+300726	-64645								
6					-64645	+226732	+195102							
7						+195102	+212702	-59616						
8							-59616	+171561	+150430					
9								+150430	+169959	-36018				
10									-36018	+124716	+98078			
11										+98078	+111263	-29131		
12											-29131	+80354	+62079	
13												+62079	+74786	+5827
14													+5827	+20311

$-x_{k-1k}$



Die anderen überzähligen Schnittkräfte sind für jeden Belastungsfall p_k

$$X_{k-1} = -\kappa_{(k-1)k} X_k, \quad X_r = -\kappa_{r(r-1)} X_{r-1} \quad (k < k, r > k + 1),$$

die Anschlußmomente der Riegel: $(X_{k+1} - X_k)$. Damit kann folgende Tabelle angeschrieben werden:

	$p_2 = 1$	$p_4 = 1$	$p_6 = 1$	$p_8 = 1$	$p_{10} = 1$	$p_{12} = 1$	$p_{14} = 1$
X_1	+ 1,7028	- 0,4332	+ 0,1383	- 0,0354	+ 0,0114	- 0,0031	+ 0,0017
X_2	- 3,4056	+ 0,8663	- 0,2766	+ 0,0707	- 0,0228	+ 0,0062	- 0,0034
X_3	+ 3,7377	+ 1,0028	- 0,3202	+ 0,0818	- 0,0264	+ 0,0072	- 0,0039
X_4	- 1,0519	- 3,6395	+ 1,1623	- 0,2970	+ 0,0957	- 0,0262	+ 0,0140
X_5	- 0,9154	+ 3,5160	+ 1,3298	- 0,3398	+ 0,1095	- 0,0300	+ 0,0160
X_6	+ 0,1968	- 0,7558	- 4,6642	+ 1,1918	- 0,3841	+ 0,1052	- 0,0562
X_7	+ 0,1693	- 0,6504	+ 2,5953	+ 1,2993	- 0,4187	+ 0,1147	- 0,0613
X_8	- 0,0475	+ 0,1823	- 0,7274	- 3,7391	+ 1,2049	- 0,3302	+ 0,1765
X_9	- 0,0416	+ 0,1598	- 0,6378	+ 3,4557	+ 1,3613	- 0,3731	+ 0,1994
X_{10}	+ 0,0088	- 0,0339	+ 0,1352	- 0,7323	- 4,7136	+ 1,2918	- 0,6906
X_{11}	+ 0,0069	- 0,0267	+ 0,1063	- 0,5759	+ 2,3331	+ 1,4654	- 0,7834
X_{12}	- 0,0018	+ 0,0070	- 0,0278	+ 0,1508	- 0,6108	- 4,0421	+ 2,1608
X_{13}	- 0,0014	+ 0,0054	- 0,0215	+ 0,1165	- 0,4719	+ 2,8105	+ 2,6031
X_{14}	- 0,0001	+ 0,0004	- 0,0017	+ 0,0091	- 0,0368	+ 0,2190	- 5,4588
$X_2 - X_3$	- 7,1433	- 0,1365	+ 0,0436	- 0,0111	+ 0,0036	- 0,0010	+ 0,0005
$X_4 - X_5$	- 0,1365	- 7,1555	- 0,1675	+ 0,0428	- 0,0138	+ 0,0038	- 0,0020
$X_6 - X_7$	+ 0,0275	- 0,1054	- 7,2595	- 0,1075	+ 0,0346	- 0,0095	+ 0,0051
$X_8 - X_9$	- 0,0059	+ 0,0225	- 0,0896	- 7,1948	- 0,1564	+ 0,0429	- 0,0229
$X_{10} - X_{11}$	+ 0,0019	- 0,0072	+ 0,0289	- 0,1564	- 7,0467	- 0,1736	+ 0,0928
$X_{12} - X_{13}$	- 0,0004	+ 0,0016	- 0,0063	+ 0,0343	- 0,1389	- 6,8526	- 0,4423
+ X_{14}	- 0,0001	+ 0,0004	- 0,0017	+ 0,0091	- 0,0368	+ 0,2190	- 5,4588

5. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte bei gleichförmiger, symmetrischer Windbelastung $w_k = 0,525$ t/m. Nach S. 470 entsteht bei symmetrischer Belastung des Pfostenpaares h_k durch w_k ($k = 2, 4, \dots, 12$)

$$6 \delta_{(k-1)0} = 6 \delta_{k0} = -\frac{w_k h_k^2 h'_k}{4}$$

Nach Abb. 452 ist außerdem

$$6 \delta_{13,0} = -9,11736, \quad 6 \delta_{14,0} = +18,38781.$$

Berechnung der statisch unbestimmten Schnittkräfte X_{k-1}, X_k nach 3b:

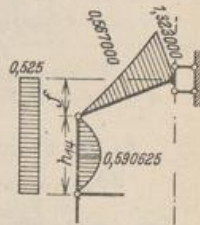


Abb. 452.

k	2	4	6	8	10	12
w_k	0,525					
h_k	5,4	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
h'_k	1,27	1,01	1,01	1,81	1,81	3,60
$6\delta_{(k-1)0} = 6\delta_{k0}$	-4,86061	-1,71801	-1,71801	-3,07881	-3,07881	-6,12360
$\frac{\beta_{(k-1)(k-1)}}{6} + \frac{\beta_{(k-1)k}}{6}$	+0,320662	+0,212506	+0,236081	+0,153086	+0,133941	+0,082132
X_{k-1}	-1,5586	-0,3651	-0,4056	-0,4713	-0,4124	-0,5029
$\frac{\beta_{k(k-1)}}{6} + \frac{\beta_{kk}}{6}$	+0,146077	+0,218831	+0,162087	+0,111945	+0,088698	+0,051223
X_k	-0,7100	-0,3760	-0,2785	-0,3447	-0,2731	-0,3137
	$X_{13} = -0,5747,$		$X_{14} = +0,3203.$			

Die anschließenden Pfostenmomente ergeben sich wiederum aus $X_{h-1} = -\alpha_{(h-1)h} X_h$, $X_r = -\alpha_{r(r-1)} X_{r-1}$. Das Ergebnis ist in der folgenden Zahlentafel enthalten.

	w_2	w_4	w_6	w_8	w_{10}	w_{12}	w_{14}	Σ
X_1	-1,5586	+0,1577	-0,0422	+0,0128	-0,0034	+0,0011	-0,0004	-1,4330
X_2	-0,7100	-0,3154	+0,0844	-0,0256	+0,0069	-0,0021	+0,0007	-0,9612
X_3	-0,6209	-0,3651	+0,0977	-0,0297	+0,0080	-0,0025	+0,0009	-0,9116
X_4	+0,1747	-0,3760	-0,3545	+0,1077	-0,0290	+0,0090	-0,0031	-0,4711
X_5	+0,1521	-0,3272	-0,4056	+0,1233	-0,0332	+0,0103	-0,0035	-0,4838
X_6	-0,0327	+0,0703	-0,2785	-0,4323	+0,1163	-0,0361	+0,0124	-0,5805
X_7	-0,0281	+0,0605	-0,2396	-0,4713	+0,1268	-0,0394	+0,0135	-0,5776
X_8	+0,0079	-0,0170	+0,0672	-0,3447	-0,3650	+0,1133	-0,0390	-0,5772
X_9	+0,0069	-0,0149	+0,0589	-0,3022	-0,4124	+0,1280	-0,0440	-0,5796
X_{10}	-0,0015	+0,0032	-0,0125	+0,0640	-0,2731	-0,4432	+0,1525	-0,5107
X_{11}	-0,0012	+0,0025	-0,0098	+0,0504	-0,2148	-0,5029	+0,1730	-0,5029
X_{12}	+0,0003	-0,0006	+0,0026	-0,0132	+0,0562	-0,3137	-0,4771	-0,7455
X_{13}	+0,0002	-0,0005	+0,0020	-0,0102	+0,0434	-0,2423	-0,5747	-0,7821
X_{14}	+0,0000	-0,0000	+0,0002	-0,0008	+0,0034	-0,0189	+0,3204	+0,3042

B. Antimetrische Belastung. Berechnung nach S. 470. Die statisch überzähligen Größen sind die Anschlußmomente am unteren Pfostenende.



Abb. 453.

6. Die geometrischen Bedingungsgleichungen (763). Die Vorzeichen sind nach (764)

$$6\delta_{(k+1)(k-1)} = -l'_k, \quad 6\delta_{(k+1)(k+3)} = -l'_{k+2}, \quad 6\delta_{(k+1)(k+1)} = l'_k + 6h'_{k+2} + l'_{k+2}.$$

Der Ansatz gilt unverändert für das Dachgeschoß mit schrägem Riegel (Abb. 453).

Matrix der Vorzahlen $6 \delta_{ik}$:

	X_1	X_3	X_5	X_7	X_9	X_{11}	X_{13}
1	+ 11,65	- 4,03					
3	- 4,03	+ 14,12	- 4,03				
5		- 4,03	+ 16,49	- 6,40			
7			- 6,40	+ 24,94	- 7,68		
9				- 7,68	+ 26,22	- 7,68	
11					- 7,68	+ 38,88	- 9,60
13						- 9,60	+ 41,10

7. Auflösung des Ansatzes.

a) Antimetrische Belastung eines Riegels l_k . Es treten nur zwei Belastungsglieder $-6 \delta_{(k-1)0} = 6 \delta_{(k+1)0}$ auf, so daß die gleiche Rechenvorschrift wie unter 3a verwendet wird.

b) Antimetrische Windlast. Antimetrische Windlast eines Pfostenpaares h_k gibt Belastungszahlen $\delta_{10}, \delta_{30}, \dots, \delta_{(k+1)0}$. Da jedoch in der Regel nur Windbelastung auf die ganze Pfostenlänge in Betracht kommt, werden die Belastungszahlen δ_{k0} am besten nach (171) unmittelbar aus den Biegemomenten M_0 des Hauptsystems angegeben. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte können nach S. 236 mit dem Gaußschen Algorithmus berechnet werden. Das Ergebnis läßt sich auch nach einer Superposition anschreiben, in dem jede überzählige Größe X_i zunächst für $6 \delta_{k0}$ allein bestimmt wird ($X_i \rightarrow X_{i,h}$). Hierzu genügen die Kennbeziehungen und die Hauptglieder $\beta_{h,h}/6$ der konjugierten Matrix.

$$X_{h,h} = 6 \delta_{k0} \cdot \frac{\beta_{h,h}}{6},$$

oder

$$X_{(i-1)h} = -\kappa_{(i-1)i} X_{i,h} \text{ für } i \leq h$$

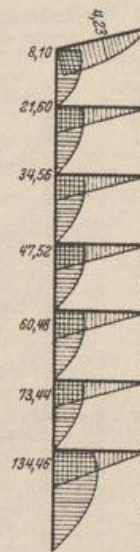
$$X_{(i+1)h} = -\kappa_{(i+1)i} X_{i,h} \text{ für } i \geq h;$$

$$X_i = \sum_{h=1}^n X_{i,h}.$$

Biegemomente in der Mitte der Pfosten:

- 5,175
- 12,42
- 18,90
- 25,38
- 31,86
- 38,34
- 70,875

Abb. 454.



Kennbeziehungen und Vorzahlen $\beta_{(k+1)(k+1)}/6$ zur Matrix am Kopf der Seite.

κ_{31}	κ_{53}	κ_{75}	κ_{97}	κ_{119}	κ_{1311}
-0,309687	-0,274653	-0,283898	-0,312067	-0,209620	-0,233577
κ_{1113}	κ_{911}	κ_{79}	κ_{57}	κ_{35}	κ_{13}
-0,263900	-0,325854	-0,345204	-0,420671	-0,316676	-0,345923

β_{11}	β_{33}	β_{55}	β_{77}	β_{99}	β_{1111}	β_{1313}
+0,0961357	+0,0860653	+0,0746444	+0,0503752	+0,0455395	+0,0292954	+0,0259292

8. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte für volle antimetrische Windlast. Die Momente des Hauptsystems sind in Abb. 454 ohne Einhaltung eines Maßstabes aufgetragen. In Verbindung mit Abb. 453 ist z. B.

$$6 \delta_{70} = 6 \int M_7 M_0 \frac{J_c}{J} ds$$

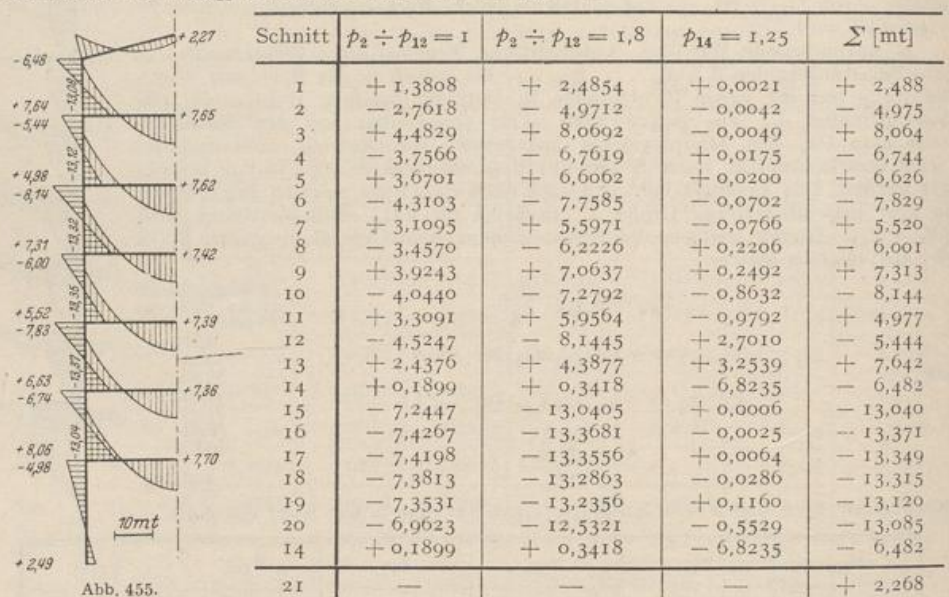
$$= w [l_0 \cdot 60,48 - h_8^2 (47,52 + 4 \cdot 25,38) - l_8^2 \cdot 47,52] = -130,013 w.$$

Belastungszahlen und Superposition der Teilergebnisse:

<i>h</i>	1	3	5	7	9	11	13	Σ
$6\delta_{20}$	- 563,159	+ 8,843	- 147,477	- 130,013	- 52,425	- 104,237	+ 11,397	—
$\beta_{hN}/6$	+ 0,096 1357	+ 0,086 0653	+ 0,074 6444	+ 0,050 3752	+ 0,045 5395	+ 0,029 2954	+ 0,025 9292	—
X_1	- 54,1397	+ 0,2633	- 1,2059	- 0,3018	- 0,0380	- 0,0158	+ 0,0004	- 55,4375
X_3	- 16,7663	+ 0,7611	- 3,4861	- 0,8725	- 0,1098	- 0,0458	+ 0,0012	- 20,5182
X_5	- 4,6049	+ 0,2090	- 11,0083	- 2,7551	- 0,3467	- 0,1445	+ 0,0037	- 18,6468
X_7	- 1,3073	+ 0,0593	- 3,1252	- 6,5494	- 0,8241	- 0,3435	+ 0,0088	- 12,0814
X_9	- 0,4080	+ 0,0185	- 0,9753	- 2,0439	- 2,3874	- 0,9951	+ 0,0254	- 6,7658
X_{11}	- 0,0855	+ 0,0039	- 0,2044	- 0,4284	- 0,5004	- 3,0537	+ 0,0780	- 4,1905
X_{13}	- 0,0200	+ 0,0009	- 0,0477	- 0,1001	- 0,1169	- 0,7133	+ 0,2955	- 0,7016

C. Biegemomente aus Eigengewicht. g_2 bis $g_{12} = 1,8$ t/m, $g_{14} = 1,25$ t/m (Dachriegel).

Die Teilergebnisse der Tabelle S. 475 aus p_2 bis p_{12} werden addiert und mit 1,8 multipliziert. Hierzu treten die mit g_{14} erweiterten Ergebnisse für $p_{14} = 1$.



Die Momente sind in Abb. 455 dargestellt.

D. Grenzwerte der Biegemomente infolge Nutzlast von 2,5 t/m auf Geschoßbreite.

Die Belastungsvorschrift ergibt sich aus den Vorzeichen der Teilergebnisse der Tabelle S. 475. Diese liefert auch die Schnittkräfte für $p = 1$ t/m.

Schnitt	M_{max}				M_{min}			
	Belastung	Grenzwert		Belastung	Grenzwert			
		$p = 1$	$p = 2,5$		$p = 1$	$p = 2,5$		
5	p_4, p_6, p_{10}	+ 4,9553	+ 12,388	p_2, p_8, p_{12}	- 1,2852	- 3,213		
6	p_2, p_8, p_{12}	+ 1,4938	+ 3,734	p_4, p_6, p_{10}	- 5,8041	- 14,510		
17	p_2, p_{10}	+ 0,0621	+ 0,155	p_4, p_6, p_8, p_{12}	- 7,4819	- 18,705		
17''	p_2, p_6, p_{10}	+ 4,3226	+ 10,806	p_4, p_8, p_{12}	- 0,2224	- 0,556		

$$\text{Balkenmoment für } p_k = 1 \text{ t/m: } \frac{p_k \cdot 9,6^2}{8} = \frac{1 \cdot 9,6^2}{8} = 11,52 \text{ tm.}$$

Biegemomente infolge Windbelastung w .

Schnitt	Symmetrische Belastung w			Antimetrische Belastung w			Schnitt	Unsymmetr. Belastung w	Unsymmetr. Belastung $2w$	Unsymmetr. Belastung w
	Stat. best. Anteil	Stat. unbest. Anteil	Σ	Stat. best. Anteil	Stat. unbest. Anteil	Σ				
1	0	-1,4330	-1,4330	0	-55,4375	-55,4375	1'	-28,435	+54,0045	+27,002
3	0	-0,9116	-0,9116	0	-20,5182	-20,5182	3'	-10,715	+19,6056	+9,803
5	0	-0,4838	-0,4838	0	-18,6460	-18,6460	5'	-9,595	+18,1622	+9,081
7	0	-0,5778	-0,5778	0	-12,0812	-12,0812	7'	-6,330	+18,5034	+5,752
9	0	-0,5796	-0,5796	0	-6,7657	-6,7657	9'	-3,673	+6,1861	+3,093
11	0	-0,5029	-0,5029	0	-4,1995	-4,1995	11'	-2,347	+3,6876	+1,844
13	0	-0,7821	-0,7821	0	-0,7016	-0,7016	13	-0,742	-0,0805	-0,040
2	0	-0,9612	-0,9612	+70,5915	-55,4375	+15,1540	2'	+7,096	-16,1152	-8,058
4	0	-0,4711	-0,4711	+38,5500	-20,5182	+18,0378	4'	+8,783	-18,5089	-9,254
6	0	-0,5805	-0,5805	+31,7520	-18,6460	+13,1060	6'	+6,263	-13,6865	-6,843
8	0	-0,5772	-0,5772	+24,9480	-12,0812	+12,8668	8'	+6,145	-13,4440	-6,722
10	0	-0,5107	-0,5107	+18,1440	-6,7657	+11,3783	10'	+5,434	-11,8890	-5,945
12	0	-0,7455	-0,7455	+11,3400	-4,1995	+7,1495	12'	+3,202	-7,8950	-3,948
14	0	+0,3042	+0,3042	+4,2525	-0,7016	+3,5509	14	+1,928	-3,2467	-1,623
15	0	-0,0496	-0,0496	+70,5915	-34,9193	+35,6722	15'	+17,811	-35,7218	-17,861
16	0	+0,0127	+0,0127	+38,5560	-1,8722	+36,6838	16'	+18,348	-36,6711	-18,336
17	0	-0,0027	-0,0027	+31,7520	-6,5648	+25,1872	17'	+12,592	-25,1899	-12,595
18	0	+0,0024	+0,0024	+24,9480	-5,3155	+19,6325	18'	+9,817	-19,6301	-9,815
19	0	-0,0078	-0,0078	+18,1440	-2,5752	+15,5688	19'	+7,780	-15,5766	-7,788
20	0	+0,0366	+0,0366	+11,3400	-3,4889	+7,8511	20'	+3,944	-7,8145	-3,997
21	-1,3230	+0,7387	-0,5843	0	0	0	21'	-0,292	-0,5843	-0,292

E. Biegemomente aus Windbelastung. Das Ergebnis wird durch Superposition des symmetrischen und des antisymmetrischen Anteils in der Tabelle S. 479 erhalten. Die Momente sind in Abb. 456 aufgezeichnet.

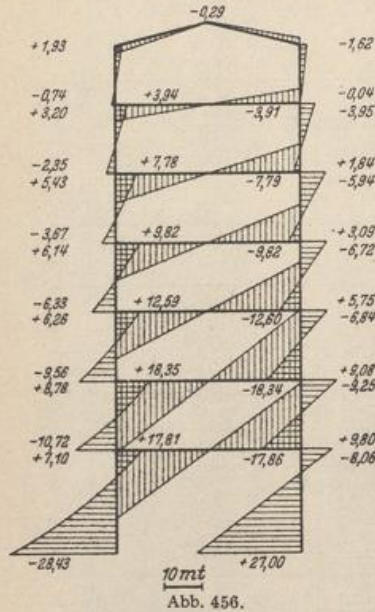


Abb. 456.

Der symmetrische Stockwerkrahmen mit mehr als zwei Pfosten und frei drehbar angeschlossenen Zwischenstielen. Die Untersuchung des Stockwerkrahmens mit zwei Pfosten für symmetrische Belastung nach S. 469, für antisymmetrische Belastung nach S. 470 kann unmittelbar auf das erweiterte symmetrische System mit gelenkig angeschlossenen Zwischenpfosten übertragen werden. Die Riegel des Hauptsystems werden jedoch nicht mehr allein in der Symmetrieachse, sondern nach Abb. 457 auch durch Zwischenpfosten gestützt. Sie bilden daher bei beiden Lösungen durchlaufende

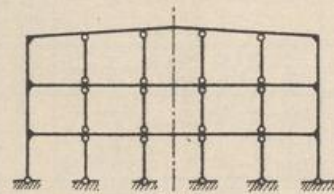


Abb. 457.

Träger mit frei drehbaren Zwischenstützen, das Hauptsystem ist also statisch unbestimmt. Trotzdem werden die überzähligen Größen ebenso wie nach (761) und (763) aus dreigliedrigen geometrischen Bedingungsbeziehungen berechnet, nur daß die Vorzeichen $\delta_{kk}^{(r)}$, $\delta_{(k-1)}^{(r)}$ und die Belastungszahlen $\delta_{k0}^{(r)}$ aus der Formänderung eines durchlaufenden nach Abb. 458a oder Abb. 458b gestützten Trägers k infolge $-X_k = 1$, $-X_{k+1} = 1$ und der Belastung \mathfrak{P} hervorgehen (311). Hierzu werden die Biegemomente $M_k^{(r)}$, $M_{k+1}^{(r)}$, $M_0^{(r)}$ für jeden Riegelabschnitt

Abb. 458a oder Abb. 458b nach Abschn. 47 bestimmt.

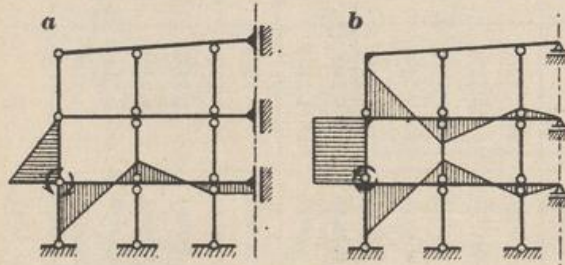


Abb. 458.

Das Ergebnis hat für Ausführungen in Eisenbeton keine Bedeutung, so daß die Lösung abgebrochen wird. Sie bietet bei Anwendung der Angaben des Abschn. 37, der sich mit statisch unbestimmten Hauptsystemen beschäftigt, keine Schwierigkeiten.

Stockwerkrahmen mit mehr als zwei Pfosten und biegeungssteifer Verbindung von Pfosten und Riegel. Die Schnittkräfte werden aus den Knoten- und Stabdrehwinkeln des Tragwerks entwickelt (Abschn. 38 ff.). Die Untersuchung ist auf S. 345 ff. gezeigt und in Abschn. 42 auf die Berechnung von symmetrischen Stockwerkrahmen mit zwei, drei und vier Stützen angewendet worden. Der Ansatz bietet keine Schwierigkeiten. Die Zahlenrechnung ist zuverlässig, leider jedoch zeitraubend. Man begnügt sich aus diesem Grunde in der Regel mit Näherungslösungen auf Grund einer Abschätzung des Verschiebungszustandes.

Die Pfostendrehwinkel ψ_c sind bei senkrechter Belastung der Riegel stets klein, so daß sie bei der angenäherten Beschreibung des Spannungs- und Formänderungszustandes vernachlässigt werden können. Man beschränkt die Untersuchung in

diesem Falle oft nur auf einen durchlaufenden Riegel, dessen Pfosten an den benachbarten beiden Riegeln mit vorgeschriebenen statischen oder geometrischen Eigenschaften enden. Dabei werden die Anschlußmomente der Pfosten oder die Knotendrehwinkel der benachbarten Riegel Null gesetzt (frei drehbare Verbindung oder starre Einspannung der Pfosten). Die wahre Lösung für $\psi_e = 0$ wird durch das Ergebnis aus beiden Annahmen eingeschlossen. Sie entspricht einer elastischen Einspannung der Pfostenenden, die oft auch als Grundlage des Spannungsnachweises geschätzt wird. Dabei werden die Wendepunkte der elastischen Linien, also die Nullpunkte der Momentenlinien der dem Riegel benachbarten Pfosten, im Abstand $3/4 \cdot h$ vom Riegel angenommen.

Der durchlaufende Riegel ist in Abschn. 48 mit statisch unbestimmten Schnittkräften und mit Knotendrehwinkeln berechnet worden. Die Untersuchung bedarf nach geeigneten Annahmen über die elastische Einspannung der Pfosten keiner Ergänzung. Sie kann rechnerisch (S. 230) oder zeichnerisch (S. 262) durchgeführt werden. Die Momentenlinien schneiden dabei meist die Achsen der Pfosten im Abstand $0,25 h$ von dem benachbarten Riegel.

Zur Abschätzung der Schnittkräfte genügen die Ergebnisse auf S. 438 für den durchlaufenden Träger mit unendlich vielen Feldern $l'_k = l'$ oder Annahmen über

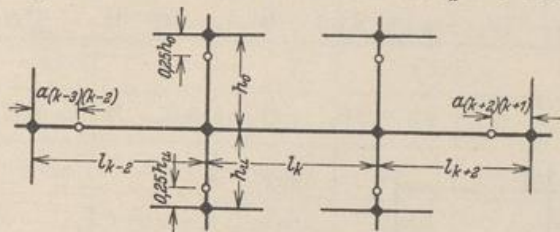


Abb. 459.

die Lage der Festpunkte in den Trägern l_{k-2} , l_{k+2} neben dem belasteten Felde l_k (Abb. 459). Man wählt ebenso wie bei den Pfosten

$$a_{(k-3)(k-2)} = 0,25 l_{k-2}, \quad a_{(k+2)(k+1)} = 0,25 l_{k+2}.$$

Waagerechte Belastung. Man unterscheidet Lastangriff am Knoten und Pfosten, rechnet jedoch in der Regel den allgemeinen Fall nur für unverschiebliche Abstützung der Pfosten durch die Riegel, um dann die Stützkräfte gemeinsam mit den vorgeschriebenen Knotenlasten als äußere Kräfte des Stockwerkrahmens zu verwenden. Die Annahme $\psi_e = 0$ ist dann auch in einer Näherungslösung unbrauchbar.

Das Schaubild der Biegemomente besteht bei Knotenbelastung aus geraden Linien, welche die Stabachsen schneiden, so daß die Schnittpunkte oft zur Abschätzung der Lösung in die Halbierungspunkte der Stäbe gelegt und die Querkräfte eines jeden Stockwerks proportional zu den Trägheitsmomenten der Pfosten auf diese verteilt werden. Damit sind dann die Stabendmomente bestimmt. Leider ist das Ergebnis selbst als Näherungslösung ohne große Bedeutung, da der Spannungszustand des Stockwerkrahmens durch die Annahme der Momentennullpunkte in den Pfostenmitten zu günstig beurteilt wird.

Bleibt die Näherungslösung auf Stockwerkrahmen mit rechteckigem Umriß und rechteckigen Feldern beschränkt, so wird man auch bei ungleicher Verteilung der Nutzlast damit rechnen können, daß die Trägheitsmomente der Säulen der Geschosse in einem konstanten Verhältnis stehen, die Trägheitsmomente der Säulen des ersten Geschosses also mit $J_a c_1, J_a c_2 \dots J_a c_k$, diejenigen eines anderen mit $J_b c_1, J_b c_2 \dots J_b c_k$ beschrieben werden, wobei die Säulen $J_a c_2, J_b c_2$ demselben Strang (2) angehören.

Da nun die horizontalen Verschiebungen der Knotenpunkte eines Riegels gleich groß sind und die Schaubilder der Biegemomente aller Pfosten der Form nach übereinstimmen, können nach dem wirklich vorhandenen Verschiebungszustand die waagerechten Biegelinien der Pfosten in erster Annäherung als kongruent und daher die Knotendrehwinkel eines Riegels gleich groß angenommen werden ($\varphi_{J,r} = \varphi_J$, $r = 1 \dots s$).

Die Addition der Gleichungen $\delta A_J = 0$ für alle Knoten J eines Geschosses liefert unter Berücksichtigung der Kongruenz der Biegelinien (Abb. 460)

$$2\varphi_H \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} + \varphi_J \left(4 \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} + 12 \sum_{r=2}^{r=s} \frac{1}{l'_{i,r}} + 4 \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{k,r}} \right) + 2\varphi_K \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{k,r}} - 6\psi_i \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} - 6\psi_k \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{k,r}} = 0. \quad (a)$$

Die Gleichungen $\delta A_c = 0$ lauten für die beiden dem Riegel i benachbarten Stockwerke

$$\left. \begin{aligned} 6 \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} (\varphi_H + \varphi_J - 2\psi_i) + W_i h_i &= 0, & W_i &= \sum_{l=1}^n H_m, \\ 6 \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{k,r}} (\varphi_J + \varphi_K - 2\psi_k) + W_k h_k &= 0, & W_k &= \sum_{k=1}^n H_m. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

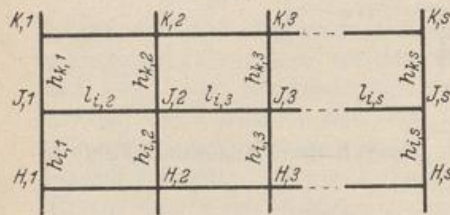


Abb. 460.

Mit

$$h'_{i,r} = h_i \frac{J_c}{J_{i,r}} = h_i \frac{J_c}{J_{i,1} c_r} = \frac{h_{i,1}}{c_r}, \quad C = \sum_{r=1}^{r=s} c_r$$

wird

$$\sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} = \frac{1}{h_{i,1}} \sum_{r=1}^{r=s} c_r = \frac{C}{h_{i,1}}$$

$\sum_{r=2}^{r=s} \frac{1}{l'_{i,r}} = \frac{s-1}{l'_{i,m}}$ liefert einen Mittelwert $l'_{i,m}$. Die Substitution der Pfostendrehwinkel ψ_i, ψ_k nach (b)

$$\left. \begin{aligned} 6\psi_i \frac{C}{h_{i,1}} &= \frac{3C}{h_{i,1}} (\varphi_H + \varphi_J) + \frac{W_i h_i}{2}, \\ 6\psi_k \frac{C}{h_{k,1}} &= \frac{3C}{h_{k,1}} (\varphi_J + \varphi_K) + \frac{W_k h_k}{2} \end{aligned} \right\} \quad (765)$$

in (a) liefert die folgenden dreigliedrigen Beziehungen zwischen den Knotendrehwinkeln dreier benachbarter Riegel:

$$-\varphi_H \frac{1}{h'_{i,1}} + \varphi_J \left(\frac{1}{h'_{i,1}} + \frac{12(s-1)}{C l'_{i,m}} + \frac{1}{h'_{k,1}} \right) - \varphi_K \frac{1}{h'_{k,1}} - \frac{W_i h_i}{2C} - \frac{W_k h_k}{2C} = 0, \quad (766a)$$

allgemein:

$$\varphi_H \bar{a}_{JH} + \varphi_J \bar{a}_{JJ} + \varphi_K \bar{a}_{JK} + \bar{a}_{J0} = 0. \quad (766b)$$

Sie werden am einfachsten durch Iteration gelöst, da die Hauptglieder wesentlich größer als die Nebenglieder sind.

Die Ergebnisse dieser Näherungsrechnung lassen sich durch Iteration der statischen Bedingungen (599) bis (601) verbessern.

Die Brauchbarkeit der Lösung wird an dem Stockwerkrahmen Abb. 331 nachgeprüft, dessen Stab- und Knotendrehwinkel nach Abschn. 42 bekannt sind. Er besitzt $s = 4$ Pfosten, also $12 (s - 1) = 36$, und ist zur Mittellinie symmetrisch, daher $c_1 = c_4 = 1,00$, $c_2 = c_3 = 1,28$, $C = 2 (c_1 + c_2) = 4,56$. Für den Abschlußriegel l_g ist $1/h'_{g,m} = 1/3 \cdot (2 \cdot 0,105 + 0,211) = 0,140$, für alle übrigen Riegel $1/h'_{i,m} = 0,216$. Die reziproken Werte $1/h'_{g,1}$ werden nach S. 359 angeschrieben, so daß alle Vorzahlen und Belastungszahlen des Ansatzes (766) bekannt sind.

i	$1/h'_{i,1} = \bar{a}_{(j-1)j}$	$1/h'_{(i+1),1} = \bar{a}_{j(j+1)}$	$\frac{1}{l'_{i,m}}$	$\frac{36}{Cl'_{i,m}}$	\bar{a}_{jj}	W_i	$W_i h_i$	$\frac{W_i h_i}{2C}$	\bar{a}_{j_0}
g	-0,059	—	0,140	1,105	1,164	1,105	3,757	0,41	-0,41
f	-0,085	-0,059	0,216	1,705	1,849	3,380	12,168	1,34	-1,75
e	-0,198	-0,085	0,216	1,705	1,988	5,720	20,592	2,26	-3,60
d	-0,254	-0,198	0,216	1,705	2,157	8,060	29,016	3,20	-5,46
c	-0,254	-0,254	0,216	1,705	2,213	10,400	37,440	4,10	-7,30
b	-0,340	-0,254	0,216	1,705	2,299	12,740	45,864	5,02	-9,12
a	—	-0,340	0,216	1,705	2,607	14,885	44,655	4,90	-9,92

Ansatz der Bedingungsgleichungen (766).

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	\bar{a}_{j_0}
A	2,607	-0,340						-9,92
B	-0,340	2,299	-0,254					-9,12
C		-0,254	2,213	-0,254				-7,30
D			-0,254	2,157	-0,198			-5,46
E				-0,198	1,988	-0,085		-3,60
F					-0,085	1,849	-0,059	-1,75
G						-0,059	1,164	-0,41

Iteration der Lösung.

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G
	3,80	4,52	3,82	2,98	2,11	1,04	0,40
	4,39	5,04	4,22	3,22	2,17	1,05	0,40
	4,46	5,09	4,25	3,24	2,17	1,05	0,40
	4,47	5,10	4,25	3,24	2,17	1,05	0,40
	4,47	5,10					

Fehler gegenüber dem genauen Ergebnis auf S. 365.

Winkel . . .	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G
Fehler in % .	-12	-17	-18	-19	-28	-40	-50
Winkel . . .	φ_H	φ_J	φ_K	φ_L	φ_M	φ_N	φ_R
Fehler in % .	+7	+9	+9	+10	+16	+30	+48

Berechnung der Stabdrehwinkel nach (765).

$$\psi_i = \frac{W_i h_i}{2C} \frac{h'_{i,1}}{6} + \frac{1}{2} (\varphi_{j-1} + \varphi_j).$$

i	$\frac{W_i h_i}{2C}$	$\frac{6}{h'_{i,1}}$	$\frac{W_i h_i}{2C} \cdot \frac{6}{h'_{i,1}}$	ω_{J-1}	φ_J	ψ_i	Fehler ψ_i %
a	4,90	3,372	1,45	0	4,47	3,69	+ 1,1
b	5,02	2,040	2,46	4,47	5,10	7,24	- 1,3
c	4,10	1,524	2,69	5,10	4,25	7,37	- 1,9
d	3,20	1,524	2,10	4,25	3,24	5,84	- 2,2
e	2,26	1,188	1,90	3,24	2,17	4,70	- 2,1
f	1,34	0,510	2,63	2,17	1,05	4,24	- 5,1
g	0,41	0,354	1,16	1,05	0,40	1,88	- 10,1

Werden diese Werte als Grundlage der Iteration der statischen Bedingungsgleichungen von S. 362/363 verwendet, so liefern die zweiten verbesserten Werte

φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G
+ 5,08	+ 6,11	+ 5,14	+ 3,96	+ 3,08	+ 1,73	+ 0,75
φ_H	φ_J	φ_K	φ_L	φ_M	φ_N	φ_R
+ 4,17	+ 4,65	+ 3,86	+ 2,94	+ 1,86	+ 0,80	+ 0,26
ψ_a	ψ_b	ψ_c	ψ_d	ψ_e	ψ_f	ψ_g
+ 3,65	+ 7,32	+ 7,46	+ 5,92	+ 4,79	+ 4,46	+ 2,21

bereits eine gute Annäherung für die Biegemomente.

$M_J^{(h)}$	Betrag	Fehler %	$M_J^{(h)}$	Betrag	Fehler %	$M_J^{(h)}$	Betrag	Fehler %	$M_J^{(h)}$	Betrag	Fehler %
$M_C^{(c)}$	- 3,04	0,3	$M_F^{(f)}$	- 1,16	0,0	$M_H^{(h)}$	- 4,11	0,5	$M_N^{(n)}$	- 2,10	0,0
$M_C^{(c)}$	+ 4,72	1,3	$M_F^{(f)}$	+ 1,42	2,1	$M_H^{(h)}$	+ 4,48	0,0	$M_N^{(n)}$	+ 1,11	1,8
$M_C^{(c)}$	- 1,79	1,7	$M_F^{(f)}$	- 0,26	7,1	$M_H^{(h)}$	+ 7,86	0,1	$M_N^{(n)}$	+ 1,51	1,9
						$M_H^{(h)}$	- 8,16	0,3	$M_N^{(n)}$	- 0,52	8,8

Die Näherungslösung für die Stabdrehwinkel ψ_e auf S. 482 ist also auch zur strengen statischen Untersuchung des Tragwerks nützlich, da sie gute Anfangswerte zur Iteration der allgemeinen Lösung liefert. Ihre Konvergenz ist daher günstig, so daß die algebraische Auflösung der Bedingungen nach Abschn. 29 unnötig wird.

Spiegel, G.: Mehrstielige Rahmen. Berlin 1920. — Traub: Beitrag zur Berechnung von Stockwerkrahmen. Bauing. 1922 S. 18. — Fritsche: Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzgleichungen. Berlin 1923. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin 1925. — Bleich-Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik. Berlin 1927. — Pasternack, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegegesteiften Stab- und Flächentragwerke. Zürich 1927. — Worch, G.: Studie über die Wahl der Unbekannten bei der Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. Beton u. Eisen 1928 S. 363. — Takabeya, F.: Rahmentafeln. Berlin 1930. — Bleich, F.: Stahlhochbauten Bd. 1. Berlin 1932. — Michnik, P.: Näherungsverfahren zur Berechnung von Stockwerkrahmen für vertikale und horizontale Belastungen. Bauing. 1932 S. 74.

52. Der Rahmenträger.

Der Rahmenträger ist ebenso wie der Stockwerkrahmen ein durch Stabführung und Stützung ausgezeichnetes Netz steifer Vierecke. Die Stäbe sind gerade, die Pfosten parallel zueinander. Die Träger unterscheiden sich durch die Gurtführung und durch die Art ihrer Abstützung. Abb. 461.

Die statische Eigenart des Rahmenträgers beruht im Gegensatz zu anderen Tragwerken des Eisenbetonbaues in der Verwendung von Bauteilen, in denen neben Biegemomenten gleichzeitig auch große Längs- und Querkräfte auftreten. Die bauliche Ausgestaltung der Rahmenstäbe und die Überleitung der Kräfte am Stabknoten verlangt daher besondere Sorgfalt. Diese Schwierigkeiten zwingen oft dazu, Teile des Rahmenträgers vollwandig oder als Fachwerk auszuführen, soweit dies durch die Art der Bauaufgabe möglich ist.

Der Spannungs- und Formänderungszustand ist bei n geschlossenen steifen Vierecken durch $3n$ statisch unbestimmte Schnittkräfte oder durch $2(n+1)$ Knotendrehwinkel und n Stabdrehwinkel bestimmt. Die vollständige Lösung wird jedoch in der Regel nur für Träger mit besonderen elastischen Eigenschaften angegeben, welche die Aufgabe vereinfachen. In anderen Fällen begnügt man sich mit einer Annäherung.

Rahmenträger mit beliebiger Gurtform und Belastung durch Einzelkräfte in den Stabknoten.

Die Trägheitsmomente der Stäbe werden im Bereich ihrer theoretischen Länge als konstant, die Trägheitsmomente der Gurtstäbe im Felde k außerdem noch proportional zu ihren Längen angenommen; $J_k^a \cos \alpha_k = J_k^b \cos \beta_k$ (Abb. 462). Die elastische Mitwirkung der Zwischenkonstruktion (Decke, Fahrbahn) als Teil einer Gurtung kann daher bei dieser Untersuchung ebensowenig Berücksichtigung finden wie Risse im Beton der Zuggurte. Im Grenzfall wird nur ein Gurt als biegeungssteif angenommen (Abb. 461f).

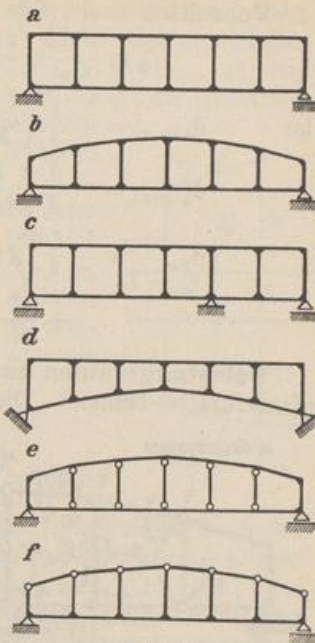


Abb. 461. Die Abb. 461 e, f können als Grenzfälle des Rahmenträgers angesehen werden, bei denen entweder die Pfosten oder der Obergurt nur Längskräfte erhalten.

Werden die Längenänderungen der Pfosten vernachlässigt, so sind die senkrechten Verschiebungen zweier Stabknoten k^a, k^b und die Drehwinkel der Gurtstäbe des Feldes (k) eines Trägers mit $J_k^a \cos \alpha_k = J_k^b \cos \beta_k$ gleich groß. Die Differenz der Gleichgewichtsbedingungen (523) $\delta A_k^a = 0, \delta A_k^b = 0$ ($k = 1, \dots, n$) enthält daher nur die unbekanntenen Differenzen ($\varphi_k^a - \varphi_k^b$) senkrecht zugeordneter Knotendrehwinkel. Der Ansatz ist bei Eintragung der Lasten in den Knotenpunkten homogen und daher: $\varphi_k^a = \varphi_k^b$. Nach der Definition des Drehsinns in Abb. 462 sind dann die Biegemomente M_k^a, M_k^b der Gurte einander gleich und die Biegemomente M_k^a, M_k^b an den Pfostenenden entgegengesetzt gleich. Das Biegemoment in Pfostenmitte ist also Null ($X_k' = 0$) und

$$Y_k = \frac{M_k^a + M_k^b}{2}, \quad k = 1, \dots, n \quad (767)$$

die einzige statisch unbestimmte Größe des Spannungszustandes. Die Rechnung enthält daher durch diese Annahmen nur n statisch überzählige Größen. Sie werden aus ebenso vielen geometrischen Bedingungsgleichungen bestimmt,

$$1_k (\delta_k^a + \delta_k^b) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Außer der ersten und letzten enthält nach Abb. 462 jede von ihnen drei Unbekannte.

$$Y_{k-1} \delta_{k(k-1)} + Y_k \delta_{kk} + Y_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k\otimes}.$$

Die Vorzeichen und Belastungszahlen werden für einen Träger mit geradem Untergurt und gebrochenem Obergurt unter Berücksichtigung der Längenänderungen der Gurtstäbe und der Querkräfte in den Pfosten angeschrieben. Das Hauptsystem ist in Abb. 462a aufgezeichnet.

Vorzahlen nach Abb. 462b. Mit den Abkürzungen:

$$\zeta_k' = \frac{c_k}{s_{ka}} + \frac{(h_k - h_{k-1})^2}{2 c_k s_k^a}, \quad v_k = \kappa \frac{E J_c}{G F_k^h}, \quad J_k^b = J_k^a \cos \alpha_k,$$

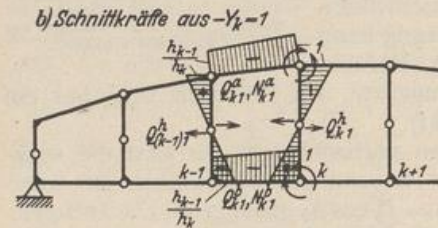
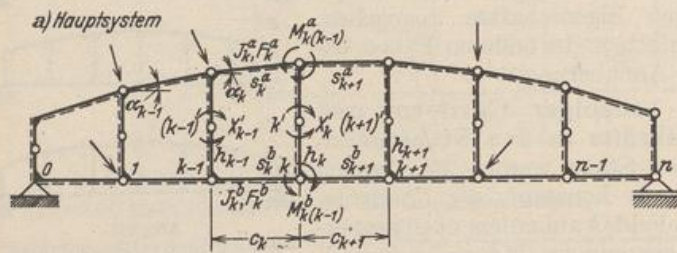
ist

$$\delta_{k(k-1)} = -\frac{1}{3} \left(\frac{h_{k-1}}{h_k} h_{k-1}' + 12 v_{k-1} \frac{1}{h_k} \right),$$

$$\delta_{k(k+1)} = -\frac{1}{3} \left(\frac{h_k}{h_{k+1}} h_k' + 12 v_k \frac{1}{h_{k+1}} \right),$$

$$\delta_{kk} = \frac{1}{3} \left[2 c_k' \left(\frac{h_{k-1}^2}{h_k^2} + \frac{h_{k-1}}{h_k} + 1 \right) + \frac{h_{k-1}}{h_k^2} h_{k-1}' + h_k' \right. \\ \left. + \frac{12}{h_k^2} (v_{k-1} h_{k-1} + v_k h_k) + 12 \frac{c_k}{h_k^2} \left(\frac{J_c}{F_k^a} \frac{s_k^2}{c_k} \zeta_k' + \frac{J_c}{F_k^b} \right) \right]. \quad (768)$$

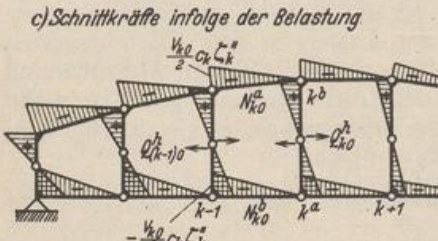
Belastungszahlen nach Abb. 462c. Der Träger wird in den Stabknoten durch Einzelkräfte belastet. Die Stützkräfte sind statisch bestimmt und damit auch die Komponenten V_{k0} , H_{k0} aller äußeren Kräfte links von einem Schnitt durch das Feld k und deren Momente M_{k0}^a , M_{k0}^b in bezug auf die Punkte k^a , k^b bekannt.



$$Q_{k1}^a = -\frac{h_k - h_{k-1}}{h_k s_k^a}, \quad Q_{k1}^b = -\frac{h_k - h_{k-1}}{h_k c_k},$$

$$Q_{(k-1)1}^a = -\frac{2}{h_k}, \quad Q_{k1}^a = -\frac{2}{h_k},$$

$$N_{k1}^a = -\frac{2}{h_k} \zeta_k', \quad N_{k1}^b = +\frac{2}{h_k}.$$



$$Q_{k0}^a = \frac{V_{k0}}{2} \frac{c_k}{s_k^a} \zeta_k'', \quad Q_{k0}^b = \frac{V_{k0}}{2} \zeta_k'',$$

$$Q_{(k-1)0}^a = -V_{k0} \frac{c_k}{h_{k-1}} \zeta_k'', \quad Q_{k0}^a = -V_{(k+1)0} \frac{c_{k+1}}{h_k} \zeta_{k+1}'',$$

$$N_{k0}^a = -\frac{M_{k0}^b}{h_k} \zeta_{k0}, \quad N_{k0}^b = +\frac{M_{k0}^a}{h_k}.$$

Abb. 462.

Mit diesen werden zur Berechnung der Belastungszahlen δ_{k0} die Funktionen ζ_{k0} , ζ_k' , ζ_k'' gebildet.

$$V_{k0} = A - \sum_0^{k-1} P; \quad \zeta_k'' = \left(1 - \frac{M_{k0}^b}{V_{k0}} \frac{h_k - h_{k-1}}{h_k c_k} \right);$$

$$\zeta_k''' = \left(1 + \frac{M_{k0}^b}{V_{k0}} \frac{h_k - h_{k-1}}{h_k c_k} \right); \quad \zeta_{k0} = \frac{c_k}{s_k^a} \left[1 + \frac{V_{k0}}{M_{k0}^b} \frac{\zeta_k'''}{2} \frac{h_k}{c_k} (h_k - h_{k-1}) \right]; \quad (769)$$

$$\delta_{k0} = V_{k0} \frac{\zeta_k'}{6} \frac{c_k}{h_k} [c_k (2 h_{k-1} + h_k) + h_{k-1}' h_{k-1} + 12 v_{k-1}] \\ - V_{(k+1)0} \frac{\zeta_{k+1}'}{6} c_{k+1} \left(h_k' + 12 \frac{v_k}{h_k} \right) + 2 \frac{c_k}{h_k^2} \left(\frac{J_c}{F_k^a} \frac{s_k^2}{c_k} M_{k0}^b \zeta_{k0} \zeta_k' + \frac{J_c}{F_k^b} M_{k0}^a \right).$$

Die Vorzahlen und Belastungszahlen des Ansatzes sind wesentlich einfacher, wenn die Biegung der Pfosten durch Querkräfte ($v_k = 0$) allein oder gemeinsam mit der Längenänderung der Gurtstäbe ($J_c/F_k^a = 0, J_c/F_k^b = 0, k = 1, \dots, n$) vernachlässigt wird. Die Regelgleichungen bleiben dabei dreigliedrig. Sie gestatten auch ohne Zahlen leicht, die Größenordnung der Vorzahlen abzuschätzen. Die Nebenglieder der Matrix sind bei Trägern mit starken Pfosten wesentlich kleiner als die Glieder der Hauptdiagonale. Die Annahme $\delta_{k(k-1)} = \delta_{k(k+1)} = 0$ führt daher zu einer Näherungslösung, mit der das Kräftebild im Felde c_k abgeschätzt werden kann. Die Vorzahlen $\delta_{k(k-1)}, \delta_{k(k+1)}$ werden mit h'_{k-1}, h'_k Null. Dies gilt für einen Rahmenträger mit sehr steifen Pfosten ($J_k^h = \infty$). Die statisch überzähligen Größen Y_k sind dann voneinander unabhängig. Für senkrechte Knotenlasten ist mit

$$M_{k0}^a = M_{k0}^b = M_{k0}$$

$$Y_k \approx \frac{1}{4} \frac{2h_{k-1} + h_k}{h_{k-1}^2 + h_{k-1}h_k + h_k^2} (M_{k0}h_{k-1} - M_{(k-1)0}h_k)$$

$$= \frac{1}{2} \left(M_{k0} - M_{k0}^* \frac{h_k}{h_k^*} \right). \quad (770)$$

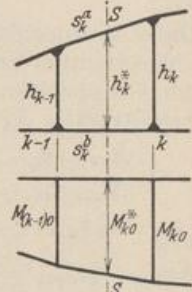
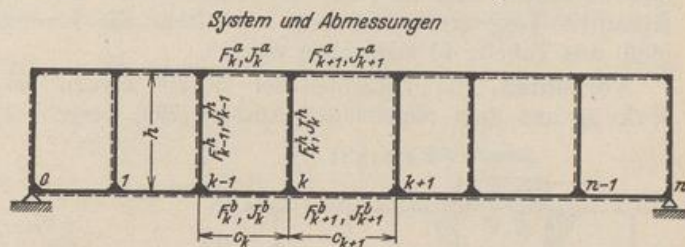


Abb. 463.

Hierin bedeutet h_k^* den Trägerabstand in der vertikalen Schwerlinie $S-S$ des Trapezes aus den Stäben $s_k^a, s_k^b, h_{k-1}, h_k$ und M_{k0}^* das Moment der äußeren Kräfte links vom Feld c_k in bezug auf einen Punkt dieser Schwerlinie. (Abb. 463.) Das Ergebnis läßt sich leicht auch für ein beliebiges Verhältnis der Trägheitsmomente der Gurtstäbe eines Feldes anschreiben, um damit auf die Bedeutung der Annahme

$J_k^a \cos \alpha_k = J_k^b \cos \beta_k$ einer allgemeinen Lösung zu schließen.

Rahmenträger mit parallelen Gurten ($J_k^a = J_k^b$) und Belastung zwischen den Stabknoten. Die Untersuchung wird auf einen



Rahmenträger beschränkt, dessen elastische Eigenschaften in bezug auf die waagerechte Mittellinie des Stabnetzes symmetrisch sind. Die Längskräfte der Pfosten sind klein, so daß deren Längenänderungen vernachlässigt werden können. Die $3n$ statisch un-

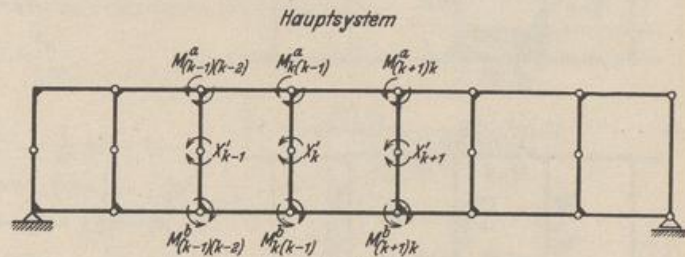


Abb. 464.

bestimmten Schnittkräfte eines Trägers mit n Feldern werden zur Symmetrieachse symmetrisch angeordnet. Für die Auswahl des Hauptsystems sind dieselben Gesichtspunkte maßgebend wie bei der Untersuchung des Stockwerkrahmens mit zwei Pfosten, mit der diejenige des Rahmenträgers, abgesehen von der Stützung, übereinstimmt. Im Gegensatz zu S. 458 wird eine Kette von Dreigelenkrahmen als Hauptsystem gewählt (Abb. 464), so daß die statisch unbestimmten Schnittkräfte des Rahmenträgers $M_{k(k-1)}^a, M_{k(k-1)}^b, X_k'$ zu den folgenden überzähligen Größen zusammengefaßt werden können:

$$Y_k = \frac{1}{2} (M_{k(k-1)}^a + M_{k(k-1)}^b); \quad X_k = \frac{1}{2} (M_{k(k-1)}^a - M_{k(k-1)}^b); \quad X_k' = M_k'. \quad (771)$$

Die statisch unbestimmten Gruppenlasten Y_k sind nach Abb. 464 antisymmetrisch, die Gruppenlasten X_k, X'_k symmetrisch zur Achse. Sie sind daher unabhängig voneinander. Die n Gruppenlasten Y_k werden aus n Gleichungen mit je drei Unbekannten berechnet.

$$Y_{k-1} \delta_{k(k-1)} + Y_k \delta_{kk} + Y_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k\otimes}. \quad (772)$$

Die n Gruppenlasten X_k sind in $2n$ Gleichungen gemeinsam mit den n statisch unbestimmten Schnittkräften X'_k enthalten. Diese werden eliminiert, so daß auch die Gruppenlasten X_k aus n dreigliedrigen Gleichungen berechnet werden. Die Schnittkräfte X'_k ergeben sich daraus durch Rekursion.

$$\begin{aligned} X_{(k-1)} \tau_{k(k-1)} + X_k \tau_{kk} + X_{(k+1)} \tau_{k(k+1)} + X'_{(k-1)} \tau_{k(k-1)'} + X'_k \tau_{kk'} &= \tau_{k\otimes}, \\ X'_{(k-1)} \tau_{(k-1)'(k-1)'} + X_{(k-1)} \tau_{(k-1)'(k-1)} + X_k \tau_{(k-1)'k} &= \tau_{(k-1)'\otimes}, \\ X'_k \tau_{k'k'} + X_k \tau_{k'k} + X_{(k+1)} \tau_{k'(k+1)} &= \tau_{k'\otimes}, \\ X_{(k-1)} \left(\tau_{k(k-1)} - \tau_{k(k-1)'} \frac{\tau_{(k-1)'(k-1)}}{\tau_{(k-1)'(k-1)'}} \right) + X_k \left(\tau_{kk} - \tau_{k(k-1)'} \frac{\tau_{(k-1)'k}}{\tau_{(k-1)'(k-1)'}} - \tau_{kk'} \frac{\tau_{kk'}}{\tau_{k'k'}} \right) \\ + X_{(k+1)} \left(\tau_{k(k+1)} - \tau_{k'k'} \frac{\tau_{k'(k+1)}}{\tau_{k'k'}} \right) &= \tau_{k\otimes} - \tau_{(k-1)'\otimes} \frac{\tau_{k(k-1)'}}{\tau_{(k-1)'(k-1)'}} - \tau_{k'\otimes} \frac{\tau_{k'k'}}{\tau_{k'k'}}. \end{aligned} \quad (773)$$

Diese Bedingungsgleichungen gelten für ein statisch unbestimmtes Hauptsystem, das aus einer Kette von Zweigelenrahmen besteht. Sie können daher auch folgendermaßen angeschrieben werden:

$$X_{k-1} \tau_{k(k-1)}^{(1)} + X_k \tau_{kk}^{(1)} + X_{k+1} \tau_{k(k+1)}^{(1)} = \tau_{k\otimes}^{(1)}.$$

Die Vorzahlen sind in (773) als Funktion der Verschiebungen des statisch bestimmten Tragwerks (Abb. 464) enthalten. Sie können auch unmittelbar nach (489) aus Tabelle 43 angegeben werden.

Vorzahlen. Die Vorzahlen der Matrix werden bei der Eigenart der Kraftwirkung aus dem allgemeinen Ansatz (299) berechnet, in dem nicht allein die

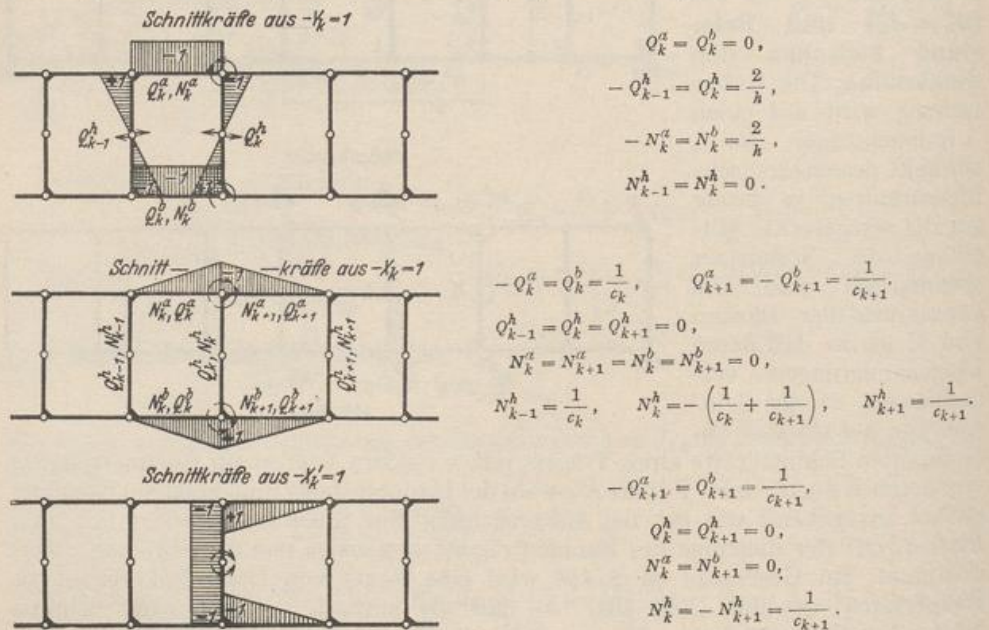


Abb. 465.

Biegemomente, sondern auch Quer- und Längskräfte berücksichtigt sind. Ihr Anteil enthält im Bereich der Gurtstäbe l_k den elastischen Beiwert $\gamma_k = \kappa E J_c : GF_k^a$,

im Bereich der Pfosten h_k den Beiwert $v_k = \alpha E J_c : G F_k^h$. Die Schnittkräfte des Hauptsystems aus $-Y_k = 1, -X_k = 1, -X'_k = 1$ sind in den Abb. 465 eingetragen.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{k(k-1)} &= -\frac{1}{3} \left(h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right), & \delta_{k(k+1)} &= -\frac{1}{3} \left(h'_k + \frac{12 v_k}{h} \right), \\ \delta_{kk} &= \frac{1}{3} \left[h'_{k-1} + h'_k + 6 c'_k + \frac{12}{h_k} (v_{k-1} + v_k) + 24 \frac{J_c}{F_k^2} \frac{c_k}{h^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (774)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{k(k-1)}^{(1)} &= \frac{h'_{k-1} \left(c'_k - 6 \frac{v_k}{c_k} \right)}{2 c'_k + 3 h'_{k-1} + 6 \frac{v_k}{c_k}}, & \tau_{k(k+1)}^{(1)} &= \frac{h'_k \left(c'_{k+1} - 6 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}} \right)}{2 c'_{k+1} + 3 h'_k + 6 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}}}, \\ \tau_{kk}^{(1)} &= \left(\frac{2}{3} c'_k + 2 \frac{v_k}{c_k} \right) + \left(\frac{2}{3} c'_{k+1} + 2 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}} \right) - \frac{\left(c'_k - 6 \frac{v_k}{c_k} \right)^2}{3 \left(2 c'_k + 3 h'_{k-1} + 6 \frac{v_k}{c_k} \right)} \\ &\quad - \frac{\left(2 c'_{k+1} + 6 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}} \right)^2}{3 \left(2 c'_{k+1} + 3 h'_k + 6 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (775)$$

Belastungszahlen. Senkrechte Einzellasten in den Knotenpunkten des Ober- und Untergurtes. $P_h^a + P_h^b = P_h$.

$V_{k0}, M_{k0}^a, M_{k0}^b$ bezeichnen die Querkräfte und die Momente der äußeren Kräfte A, \mathfrak{B} links von einem Schnitt durch das Feld k in bezug auf die Punkte k^a, k^b .

$$V_{k0} = A - \sum_{h=0}^{k-1} P_h, \quad M_{k0}^a = M_{k0}^b = M_{k0} = A x_k - \sum_{h=0}^{k-1} P_h (x_k - a_h), \quad (776)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{k0} &= V_{k0} \frac{c_k c'_k}{2} + \frac{1}{6} V_{k0} c_k \left(h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} V_{(k+1)0} c_{k+1} \left(h'_k + 12 \frac{v_k}{h} \right) + 4 M_{k0} \frac{c_k}{h^2} \frac{J_c}{F_k^2}, \end{aligned} \right\} \quad (777)$$

$$\tau_{k0}^{(1)} = 0 \text{ und daher } X_k = 0, \quad X'_k = 0.$$

Waagerechte Einzellasten am Obergurt (Bremskräfte),
Abb. 466.

$$\left. \begin{aligned} V_{k0} &= \frac{f}{l} H, & M_{k0}^a &= -f \xi'_k H, \\ M_{k0}^b &= h \sum_{i=k}^n H_i - f \xi'_k H. \end{aligned} \right\} \quad (778)$$

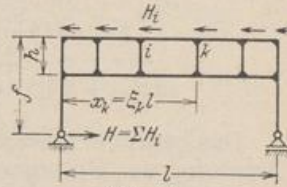


Abb. 466.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{k0} &= \frac{1}{2} H \frac{f}{l} \left[c_k c'_k + \frac{c_k}{3} \left(h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right) - \frac{c_{k+1}}{3} \left(h'_k + 12 \frac{v_k}{h} \right) \right] \\ &\quad - 2 \frac{J_c}{F_k^2} \frac{c_k}{h^2} \left(2 f \xi'_k H - h \sum_{i=k}^n H_i \right). \end{aligned} \right\} \quad (779)$$

Greifen die waagerechten Kräfte, wie dies bei Bremskräften die Regel sein wird, exzentrisch zu den Knotenpunkten an, so werden die Schnittkräfte aus der Knotenlast und einem Kräftepaar am Knoten berechnet, das in einen antimetrischen und einen symmetrischen Anteil zerlegt worden ist.

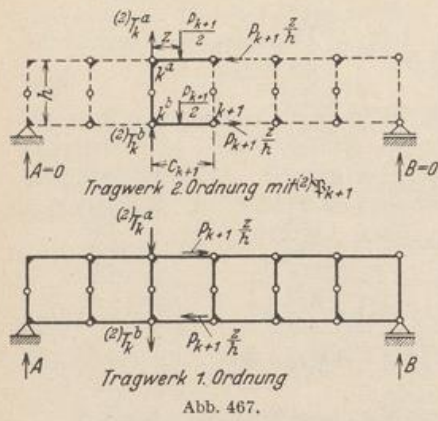
Temperaturänderung. Obergurt t_a , Untergurt t_b .

Antimetrischer Anteil: $\frac{1}{2} (t_a - t_b)$

$$\delta_{kt} = 2 E J_c \frac{c_k}{h} \alpha_t (t_b - t_a). \quad (780)$$

Symmetrischer Anteil: $\frac{1}{2} (t_a + t_b)$. Die Schnittkräfte sind Null.

Senkrechte Belastung der Gurtstäbe zwischen den Stabknoten. Die Kräfte \mathfrak{P} werden in einen antimetrischen und einen symmetrischen Anteil zerlegt



$\mathfrak{P} = {}^{(2)}\mathfrak{P} + {}^{(1)}\mathfrak{P}$ (Abb. 468a,b). Jeder wirkt in einem Dreigelenkrahmen, welcher die Belastung zunächst als Tragwerk zweiter Ordnung auf die Knoten k^a, k^b der Rahmenkette überträgt. Das Hauptsystem erhält daher in den Knotenpunkten Einzelkräfte T_k^a, T_k^b . Diese sind bei antimetrischer Belastung des Tragwerks gleich groß und gleichgerichtet (${}^{(2)}T_k$), bei symmetrischer Belastung entgegengesetzt gleich (${}^{(1)}T_k$). Die Belastungsglieder $\delta_{k0}, \tau_{k0}^{(1)}$ lassen sich daher aus je zwei Teilen zusammensetzen ($\delta_{k0} = \delta_{k0,1} + \delta_{k0,2}$, $\tau_{k0}^{(1)} = \tau_{k0,1}^{(1)} + \tau_{k0,2}^{(1)}$). Die Anteile $\delta_{k0,2}, \tau_{k0,2}^{(1)}$ gelten für die Rahmen als Tragglieder zweiter Ordnung (Abb. 467). Der Anteil $\delta_{k0,1}$ wird nach (777) berechnet, der Anteil $\tau_{k0,1}^{(1)}$ ist Null, da das Hauptsystem, abgesehen von der Längskraft der Pfosten, spannungslos ist.

$$\delta_{k0,2} = \frac{p_k c_k^2}{12} (2c'_k + h'_{k-1}) - \frac{p_{k+1} c_{k+1}^2}{12} h'_k + \frac{c'_k}{2c_k} \sum_k P z^2 + \frac{h'_{k-1}}{6} \sum_k P z - \frac{h'_k}{6} \sum_{k+1} P z + \frac{2v_{k-1}}{h} \left(\frac{p_k c_k^2}{2} + \sum_k P z \right) - \frac{2v_k}{h} \left(\frac{p_{k+1} c_{k+1}^2}{2} + \sum_{k+1} P z \right). \tag{781}$$

$$\tau_{k0}^{(1)} = \pm \left[- \left(\frac{p_k c_k^2 c'_k}{24} + \frac{p_{k+1} c_{k+1}^2 c'_{k+1}}{24} \right) - \left(\frac{c_k c'_k}{6} \sum_k P \omega_D + \frac{c_{k+1} c'_{k+1}}{6} \sum_{k+1} P \omega'_D \right) + \frac{c'_k - 6 \frac{\gamma_k}{c_k}}{2c_k + 3h'_{k-1} + 6 \frac{\gamma_k}{c_k}} \left(\frac{p_k c_k^2 c'_k}{24} + \frac{c_k c'_k}{6} \sum_k P \omega'_D \right) + \frac{2c'_{k+1} + 6 \frac{\gamma_{k+1}}{c_{k+1}}}{2c'_{k+1} + 3h'_k + 6 \frac{\gamma_{k+1}}{c_{k+1}}} \left(\frac{p_{k+1} c_{k+1}^2 c'_{k+1}}{24} + \frac{c_{k+1} c'_{k+1}}{6} \sum_{k+1} P \omega'_D \right) \right]. \tag{782}$$

Das positive Vorzeichen gilt bei Belastung des Obergurtes, das negative bei Belastung des Untergurtes.

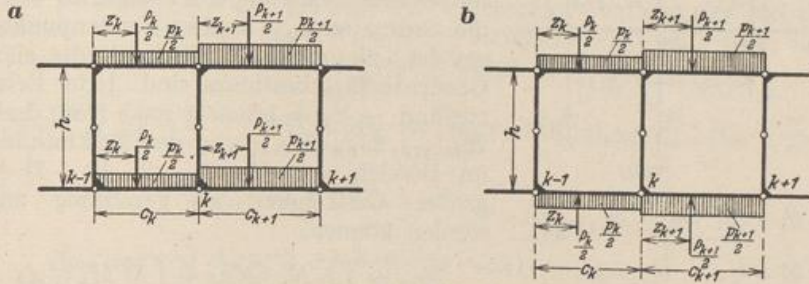
Die statisch überzähligen Gruppenlasten X_k für den symmetrischen Anteil ${}^{(1)}\mathfrak{P}$, Y_k für den antimetrischen Anteil ${}^{(2)}\mathfrak{P}$ sind in zwei dreigliedrigen Gruppen von Gleichungen enthalten, die nach der Rechenvorschrift S. 232 oder durch Iteration aufgelöst werden. Die Gruppenlasten X_k sind bei Lastangriff in den Stabknoten Null. Die für den Festigkeitsnachweis wichtigen Schnittkräfte ergeben sich aus dem Superpositionsgesetz (288) oder aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte am Hauptsystem.

a) Gurte:

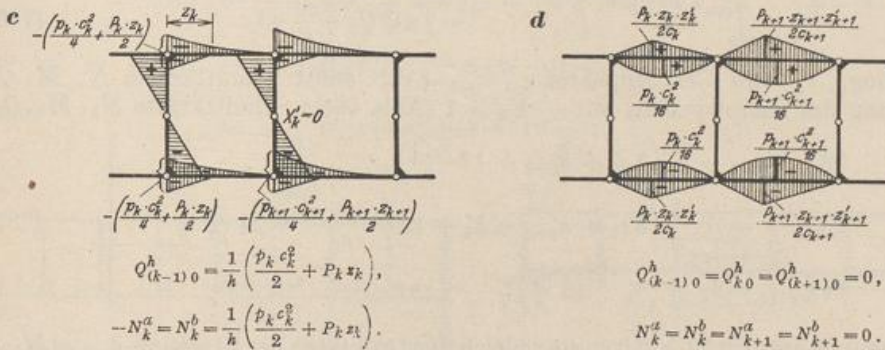
$$\left. \begin{aligned} M_{k(k-1)}^a &= Y_k + X_k; & M_{k(k-1)}^b &= Y_k - X_k, \\ M_{(k-1)k}^a &= M_{(k-1)k0}^a + Y_k + X_{k-1} - X'_{k-1}, \\ M_{(k-1)k}^b &= M_{(k-1)k0}^b + Y_k - X_{k-1} + X'_{k-1} \\ - N_k^a &= N_k^b = \frac{M_{k0} - 2Y_k}{h}, \\ Q_k^a &= Q_{k0}^a - \frac{1}{c_k} (X_{k-1} - X_k - X'_{k-1}), \\ Q_k^b &= Q_{k0}^b + \frac{1}{c_k} (X_{k-1} - X_k - X'_{k-1}). \end{aligned} \right\} \tag{783}$$

b) Pfosten:
$$\left. \begin{aligned} X'_k &= \frac{1}{\tau_{k',k'}} (\tau_{k',0} - X_k \tau_{k',k} - X_{k+1} \tau_{k',(k+1)}), \\ M_k^a &= -M_{k(k+1)0}^a - (Y_{k+1} - Y_k - X'_k) = M_{k(k-1)}^a - M_{k(k+1)}^a, \\ M_k^b &= M_{k(k+1)0}^b + (Y_{k+1} - Y_k + X'_k) = M_{k(k+1)}^b - M_{k(k-1)}^b, \\ Q_k^h &= -V_{(k+1)0} \frac{c_{k+1}}{h} + \frac{2}{h} (Y_{k+1} - Y_k). \end{aligned} \right\} (784)$$

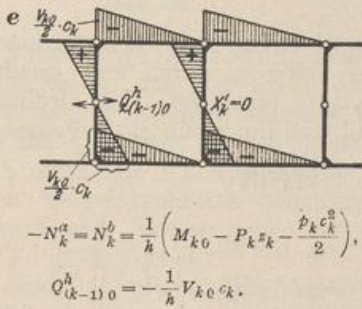
Belastungsumordnung:



Schnittkräfte im System 2. Ordnung:



Schnittkräfte im System 1. Ordnung:



$$^{(2)}T_k = ^{(2)}T_k^a + ^{(2)}T_k^b = p_{k+1} c_{k+1} + \sum_{(k+1)} P,$$

A, V_{k0}, M_{k0} wie im Hauptsystem. $V_{k0} = V_{(k-1)0} - T_{k-1}$. Die Längskräfte der beiden Systeme werden addiert und in $\delta_{k0,1}$ eingerechnet. Hierdurch entsteht wieder Gl. (777).

Abb. 468.

Die Einflußlinien. Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden in der Regel nur für mittelbare Belastung des Ober- oder Untergurts gezeichnet. Sie sind dann zwischen den Pfosten gerade Linien. Die Gruppenlasten X_k, X'_k sind Null und die Einflußlinien der Schnittkräfte daher nur von den statisch unbestimmten Gruppenlasten Y_k abhängig.

Die Einflußlinien Y_k werden nach (328) aus den Vorzahlen $\beta_{kh}^{(y)}$ der konjugierten Matrix zu (772) berechnet.

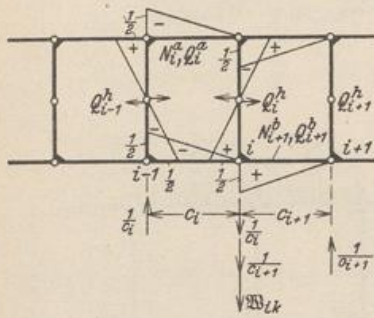
$$Y_k = \sum \beta_{kh}^{(y)} \delta_{mh}.$$

Da die Hauptglieder $\beta_{kk}^{(y)}$ der Matrix in der Regel wesentlich größer sind als deren Nebenglieder, so genügt bereits $Y_k = \beta_{kk}^{(y)} \delta_{mk}$ als Näherung und

$$Y_k = \beta_{k(k-1)}^{(y)} \delta_{m(k-1)} + \beta_{kk}^{(y)} \delta_{mk} + \beta_{k(k+1)}^{(y)} \delta_{m(k+1)} \quad (785)$$

als Lösung.

Die Belastungszahlen δ_{mk} bezeichnen die Biegelinien des Lastgurtes des Hauptsystems (Abb. 464) für $-Y_k = 1$, ($k = 1 \dots n$). Bei mittelbarer Belastung des Lastgurtes werden nur die Ordinaten δ_{mk} in den Knotenpunkten verwendet, die nach S. 125 durch die elastischen Gewichte \mathfrak{B}_{ik} bestimmt sind. Jeder Belastungszustand $-Y_k = 1$ liefert nach (786) drei Kräfte $\mathfrak{B}_{(k-1)k}$, \mathfrak{B}_{kk} , $\mathfrak{B}_{(k+1)k}$, so daß die Einflußlinien Y_k im Bereich von $0 \div (k-2)$, $(k+2) \div n$ mit großer Genauigkeit als geradlinig angesehen werden können.



$$-\bar{Q}_i^a = -\bar{Q}_i^b = -\frac{1}{2c_i}, \quad -\bar{Q}_{i+1}^a = -\bar{Q}_{i+1}^b = -\frac{1}{2c_{i+1}},$$

$$-\bar{Q}_{i-1}^a = -\bar{Q}_{i-1}^b = \frac{1}{h}, \quad \bar{Q}_{i+1}^h = 0,$$

$$-\bar{N}_i^a = \bar{N}_i^b = \frac{1}{h}, \quad \bar{N}_{i+1}^a = \bar{N}_{i+1}^b = 0.$$

Abb. 469.

$$\mathfrak{B}_{ik} = \int \bar{N} N_k \frac{J_c}{F} ds + \int \bar{M} M_k \frac{J_c}{J} ds + \int \bar{Q} Q_k \frac{E J_c}{G F} ds. \quad (786)$$

Belastung „1_i“ des Geradenpaares c_i, c_{i+1} (Abb. 469): Schnittkräfte $\bar{N}, \bar{M}, \bar{Q}$; Belastung des Hauptsystems mit $-Y_k = 1$ (Abb. 465): Schnittkräfte N_k, M_k, Q_k .

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_{(k-1)k} &= -\frac{1}{6} \left(3c'_k + h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right), \\ \mathfrak{B}_{kk} &= +\frac{1}{6} \left(3c'_k + h'_{k-1} + h'_k + 12 \frac{v_{k-1} + v_k}{h} + 24 \frac{c_k J_c}{h^2 F_k} \right), \\ \mathfrak{B}_{(k+1)k} &= -\frac{1}{6} \left(h'_k + 12 \frac{v_k}{h} \right). \end{aligned} \right\} \quad (787)$$

Die Momente aus den \mathfrak{B} -Kräften sind gleich den Ordinaten der Biegelinie $\delta_{mk} = M_{kw}$. Werden die mit den β -Zahlen erweiterten \mathfrak{B} -Kräfte verwendet, so liefert das Moment M_w unmittelbar die Einflußordinate Y_k .

Um die Einflußlinie Y_k auch bei Lastangriff zwischen den Pfosten nach (787) aufzuzeichnen, wird jede Biegelinie δ_{mk} im Felde c_k durch eine quadratische Parabel mit den Ordinaten $\Delta \delta_{mk} = -\frac{1}{2} c_k c'_k \omega_R$ berichtigt. Die Ordinaten der Einflußlinien X_k sind in den Stabknoten Null und innerhalb eines Feldes c_k

$$X_k = \beta_{k(h-1)}^{(\omega)} \tau_{m(h-1)}^{(1)} + \beta_{kh}^{(\omega)} \tau_{mh}^{(1)}.$$

Daher ist im

$$\left. \begin{aligned} \text{Feld } c_k &: X_k = \beta_{kk}^{(\omega)} (\tau_{mk}^{(1)} - \alpha_{(k-1)k} \tau_{m(k-1)}^{(1)}), \\ \text{Feld } c_{k+1} &: X_k = \beta_{kk}^{(\omega)} (\tau_{mk}^{(1)} - \alpha_{(k+1)k} \tau_{m(k+1)}^{(1)}). \end{aligned} \right\} \quad (788)$$

Ebenso werden die Ordinaten der Einflußlinien X'_k berechnet. Die Biegelinien $\tau_{mk}^{(1)}$ ergeben sich aus (782) für $p = 0$ und $P_k = 1, P_{k+1} = 0$. In den übrigen Feldern ist $X_k \approx 0$, da die Nebenglieder der konjugierten Matrix in der Regel so klein sind, daß ihre Beiträge vernachlässigt werden können.

$$M_{k(k-1)}^a = Y_k + X_k, \quad M_{k(k-1)}^b = Y_k - X_k.$$

Die Ordinaten der Einflußlinien Y_k in den Knotenpunkten können auch als Einflußgrößen Y_{km} berechnet und aufgetragen werden. Die Last $P = 1$ wird dabei der Reihe nach jedem Knoten m des Lastgurtes zugewiesen. Auch in diesem Falle

genügen in der Regel zur Berechnung von Y_{km} aus der konjugierten Matrix neben dem Hauptglied $\beta_{kk}^{(y)}$ die beiden benachbarten Nebenglieder der Zeile.

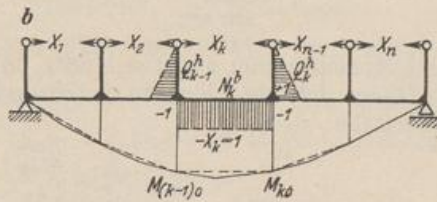
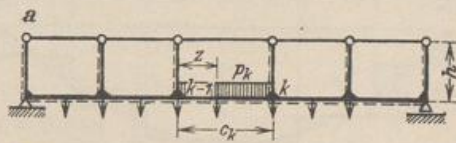
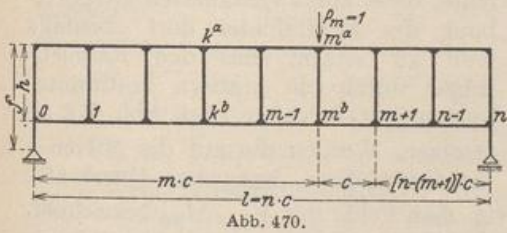
$$Y_{km} = \beta_{k(k-1)}^{(y)} \delta_{(k-1)m} + \beta_{kk}^{(y)} \delta_{km} + \beta_{k(k+1)}^{(y)} \delta_{(k+1)m}.$$

δ_{mk} sind die Belastungszahlen für $P = 1$ im Lastpunkt m . Die Einflußlinie ist nach (785) wiederum durch Y_{km} , ($m = (k-2) \dots (k+2)$) ausreichend bestimmt, da der Bereich $0 \div (k-2)$, $(k+2) \div n$ geradlinig angenommen werden kann.

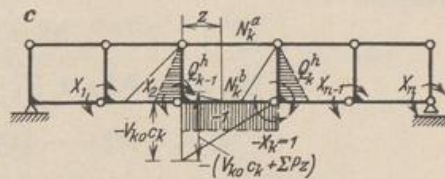
Belastungszahlen δ_{km} ($k = 1 \dots m-1, m, m+1 \dots n$) für den Rahmenträger mit parallelen Gurten, gleichgroßen Feldern ($c_k = c, l = nc$) und gleichen Abmessungen der Pfosten ($h'_k = h', v_k = v$). Lastpunkt m : $x_m = mc, x'_m = m'c = (n-m)c$ (Abb. 470). Elastisch wirksame Länge der Gurtstäbe k :

c'_k und $\frac{c_k}{h^2} \frac{J_c}{F_k^a} = \bar{c}'_k$. Stützkkräfte für $P_m = 1$: $A_m = \frac{m'}{n}, B_m = \frac{m}{n}$.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1m} &= \frac{1}{2} A_m c (c'_1 + 8 \bar{c}'_1), \dots \\ \delta_{(m-1)m} &= \frac{1}{2} A_m c (c'_{m-1} + 8 (m-1) \bar{c}'_{m-1}), \\ \delta_{mm} &= \frac{1}{2} A_m c (c'_m + 8 m \bar{c}'_m) + \frac{c}{6} (h' + 12 \frac{v}{h}), \\ \delta_{(m+1)m} &= -\frac{1}{2} B_m c (c'_{m+1} + 8 (m'-1) \bar{c}'_{m+1}), \dots \\ \delta_{nm} &= -\frac{1}{6} B_m c (3 c'_n + h' + 12 \frac{v}{h}). \end{aligned} \right\} (789)$$



$$-Q_{(k-1)1}^h = Q_{k1}^h = \frac{1}{h}, \quad N_{k1}^h = \frac{1}{h}.$$



$$\begin{aligned} -Q_{(k-1)1}^h &= Q_{k1}^h = \frac{1}{h}, \quad Q_{(k-1)0}^h = -V_{k0}, \\ Q_{k0}^h &= V_{(k+1)0}, \quad -N_{k1}^h = N_{k1}^h = \frac{1}{h}, \\ -N_{k0}^h &= N_{k0}^h = \frac{M_{k0}}{h}. \end{aligned}$$

Abb. 471.

Die vollwandige Ausführung einzelner Trägerabschnitte, die namentlich an den Enden einfacher Rahmenträger zur Übertragung der Querkraft notwendig ist, hat keinen Einfluß auf den Ansatz. Die vollwandigen Trägerabschnitte bedeuten für die Berechnung Pfosten mit unendlich großem Trägheitsmoment.

Der versteifte Balkenträger Abb. 471a ist auf S. 485 als Grenzfall eines Rahmenträgers bezeichnet worden, dessen elastische Eigenschaften durch $J_k^b \gg J_k^a$ ausgezeichnet sind. Der Obergurt erhält in diesem Falle nur Längskräfte, die Querkräfte werden allein vom Lastgurt aufgenommen. Das Kräftebild kann mit einem Hauptsystem Abb. 471b berechnet werden. Ein unmittelbarer Vergleich mit der statischen Unter-

suchung des Rahmenträgers ist durch die Wahl eines Hauptsystems Abb. 471c möglich. In beiden Lösungen ergeben sich dreigliedrige Bedingungsgleichungen.

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}.$$

Nach Abb. 471c ist

$$\left. \begin{aligned} 3 \delta_{k(k-1)} &= - \left(h'_{k-1} + 3 \frac{v_{k-1}}{h} \right), & 3 \delta_{k(k+1)} &= - \left(h'_k + 3 \frac{v_k}{h} \right), \\ 3 \delta_{kk} &= \left[3 c'_k + h'_{k-1} + h'_k + \frac{3}{h} (v_{k-1} + v_k) + 3 \frac{c_k}{h^2} \left(\frac{J_c}{F_o} + \frac{J_c}{F_u} \right) \right], \\ 3 \delta_{k0} &= \frac{c'_k}{2} \left[3 V_{k0} c_k + p_k c_k^2 + \frac{3}{c_k} \Sigma P_k z_k^2 \right] \\ &\quad + 3 \frac{M_{k0}}{h^2} \left(\frac{J_c}{F_o} + \frac{J_c}{F_u} \right) c_k + V_{k0} \left(c_k h'_{k-1} + 3 \frac{c_k}{h} v_{k-1} \right) \\ &\quad - V_{(k+1)0} \left(c_{k+1} h'_k + 3 \frac{c_{k+1}}{h} v_k \right). \end{aligned} \right\} \quad (790)$$

Näherungsberechnung eines Rahmenträgers. Die statische Untersuchung eines Rahmenträgers mit parallelen Gurten und elastischer Symmetrie in bezug auf eine waagerechte Achse lehrt, daß die Biegemomente bei senkrechten Einzellasten in den Knotenpunkten nicht nur in der Mitte der Pfosten, sondern auch in der Nähe der Gurtstabsmitten Null sind. Es liegt daher nahe, diese zur angenäherten Beschreibung des Kräftebildes dort ebenfalls Null zu setzen, also den Rahmenträger durch ein statisch bestimmtes System mit Gelenken nach Abb. 472 zu ersetzen. Werden die auf die Mitten \bar{k} der Gurtstäbe c_k bezogenen Querkräfte

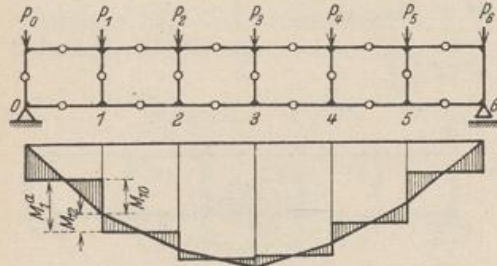


Abb. 472.

und Momente aller äußeren Kräfte links von dem Felde mit \bar{V}_{k0} , \bar{M}_{k0} bezeichnet, so lassen sich die folgenden Schnittkräfte anschreiben:
Gurtstäbe:

$$\left. \begin{aligned} -N_k^a &= N_k^b = \frac{\bar{M}_{k0}}{h}, & Q_k^a &= Q_k^b = \frac{1}{2} \bar{V}_{k0}, \\ M_{k(k-1)}^a &= -M_{(k-1)k}^a = \frac{1}{4} \bar{V}_{k0} c_k, & M_{k(k-1)}^b &= -M_{(k-1)k}^b = \frac{1}{4} \bar{V}_{k0} c_k. \end{aligned} \right\} \quad (791)$$

Pfosten:

$$\left. \begin{aligned} N_k^h &= \frac{1}{2} (P_k^b - P_k^a), \\ Q_{k-1}^h &= -N_{k-1}^a + N_k^a = -\frac{1}{h} (\bar{M}_{k0} - \bar{M}_{(k-1)0}), \\ M_k^a &= -M_k^b = -\frac{1}{2} Q_k^h h = \frac{1}{2} (\bar{M}_{k0} - \bar{M}_{(k-1)0}). \end{aligned} \right\} \quad (792)$$

Die Abb. 472 zeigt die graphische Verwendung der Ergebnisse. Darnach sind zunächst die Momente für die Einzellasten $P/2$ aufgetragen und daraus die Momente \bar{M}_{k0} gebildet worden. Dieses elementare Ergebnis zeigt die ungünstigen statischen Eigenschaften des Rahmenträgers, die sich namentlich aus den großen Querkräften in Pfosten und Gurten nächst den Auflagern ergeben. Sie lassen sich hier durch vollwandige Ausführung des Trägers und engere Stellung der Pfosten mildern.

Näherungsrechnung für den Rahmenträger (Abb. 474).

Belastung $P = 2,5 \text{ t}$ in den Knoten 1, 2, 3, 4, 5, 6.

k	0	$\bar{1}$	1	$\bar{2}$	2	$\bar{3} = 3'$	3	$\bar{4} = 4'$
P	(-7,5)	0	2,5	0	2,5	0	2,5	0 t
V_{k0}	0	7,5	7,5	5	5	2,5	2,5	0 t
$c/2$	—	1,25	1,25	1,25	1,25	2,5	2,5	2,5 m
$V_{k0} c/2$	—	9,38	9,38	6,25	6,25	6,25	6,25	0 mt
$M_{k0}/2$	—	4,69	9,38	12,50	15,63	18,75	21,88	21,88 mt
$M_{k(k+1)}$	-4,69		-3,12		-3,12		0	mt
$M_{k(k-1)}$			4,69		3,12		3,12	mt

Die Momente sind in Abb. 473 dargestellt. Die genauen Werte sind nach S. 497 berechnet und das Ergebnis in Klammern und gestrichelten Linien eingetragen.

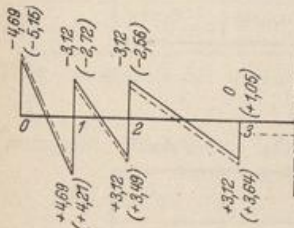


Abb. 473.

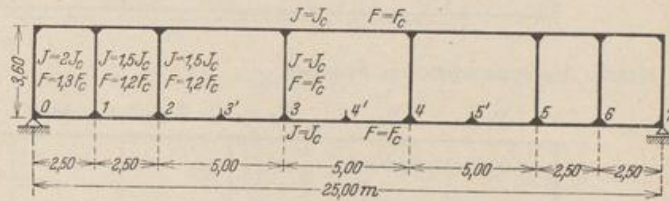


Abb. 474.

Zahlenbeispiel für die Berechnung eines Rahmenträgers (Abb. 474).

Das Tragwerk ist symmetrisch zu einer waagerechten und zu einer senkrechten Mittellinie.

Geometrische Grundlagen.

$$h_0 = 1,8, \quad h_1 = h_2 = 2,4, \quad h_3 = 3,6 \text{ m},$$

$$c_1 = c_2 = 2,5, \quad c_3 = c_4 = 5,0 \text{ m};$$

$$\alpha = 1,2, \quad E/G = 2, \quad J_c = 0,0533 \text{ m}^4, \quad F_c = 1,0 \text{ m}^2, \quad J_c/F_c^2 = 0,0533 \text{ m}^2;$$

$$v_0 = 1,2 \cdot 2 \cdot 0,0533/1,3 = 0,0985, \quad v_1 = v_2 = 0,1067, \quad v_3 = 0,128, \quad \gamma_k = 0,128.$$

Antimetrischer Ansatz, Vorzeichen nach (774):

$$\delta_{21} = -\frac{1}{3} \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) = -0,919, \quad \delta_{23} = -\frac{1}{3} \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) = -0,919,$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3} \left(2,4 + 2,4 + 6 \cdot 2,5 + \frac{12}{3,6} \cdot 2 \cdot 0,1067 + 24 \cdot 0,0533 \cdot \frac{2,5}{3,6^2} \right) = 6,921.$$

Symmetrischer Ansatz, Vorzeichen nach (775):

$$\tau_{21}^{(1)} = \frac{2,4 \left(2,5 - 6 \frac{0,128}{2,5} \right)}{2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 2,4 + 6 \frac{0,128}{2,5}} = 0,421, \quad \tau_{23}^{(1)} = \frac{2,4 \left(5,0 - 6 \frac{0,128}{5,0} \right)}{2 \cdot 5,0 + 3 \cdot 2,4 + 6 \frac{0,128}{5,0}} = 0,670,$$

$$\tau_{22}^{(1)} = \left(\frac{2}{3} \cdot 2,5 + 2 \frac{0,128}{2,5} \right) + \left(\frac{2}{3} \cdot 5,0 + 2 \frac{0,128}{5,0} \right) - \frac{\left(2,5 - 6 \frac{0,128}{2,5} \right)^2}{3 \left(2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 2,4 + 6 \frac{0,128}{2,5} \right)}$$

$$\frac{\left(2 \cdot 5,0 + 6 \frac{0,128}{5,0} \right)^2}{3 \left(2 \cdot 5,0 + 3 \cdot 2,4 + 6 \frac{0,128}{5,0} \right)} = 3,046.$$

Matrix des antimetrischen Ansatzes:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
	+ 6,712	- 0,919					
	- 0,919	+ 6,921	- 0,919				
		- 0,919	+ 12,425	- 1,342			
			- 1,342	+ 12,846	- 1,342		
				- 1,342	+ 12,425	- 0,919	
					- 0,919	+ 6,921	- 0,919
						- 0,919	+ 6,712

Matrix des symmetrischen Ansatzes:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
	2,638	0,421					
	0,421	3,046	0,670				
		0,670	4,677	0,833			
			0,833	4,756	0,833		
				0,833	4,031	0,421	
					0,421	2,660	0,421
						0,421	1,641

Bemerkenswert ist die geringe Abhängigkeit der überzähligen Größen, so daß die Formänderungen δ_{ki} und $\tau_{ki}^{(1)}$ mit $k \neq i$ zur Bildung eines ersten Näherungsergebnisses Null gesetzt werden können.

Konjugierte Matrix $\beta_{ki}^{(2)}$ des antimetrischen Ansatzes:

	$-\kappa_{21}$	$-\kappa_{32}$	$-\kappa_{43}$	$-\kappa_{54}$	$-\kappa_{65}$	$-\kappa_{76}$	
	0,1341	0,0748	0,1057	0,1091	0,1352	0,1370	→
1	0,1518	0,0204	0,0015	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0204	0,1486	0,0111	0,0012	0,0001	0,0000	0,0000
3	0,0015	0,0111	0,0822	0,0087	0,0009	0,0001	0,0000
4	0,0002	0,0012	0,0087	0,0796	0,0087	0,0012	0,0002
5	0,0000	0,0001	0,0009	0,0087	0,0822	0,0111	0,0015
6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0111	0,1486	0,0204
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0015	0,0204	0,1518

\uparrow
 $0,1370 = -\kappa_{12}$
 $0,1352 = -\kappa_{23}$
 $0,1091 = -\kappa_{34}$
 $0,1057 = -\kappa_{45}$
 $0,0748 = -\kappa_{56}$
 $0,1341 = -\kappa_{67}$
 \downarrow

Konjugierte Matrix $\beta_{ki}^{(y)}$ des symmetrischen Ansatzes.

	$-\kappa_{21}$	$-\kappa_{32}$	$-\kappa_{43}$	$-\kappa_{54}$	$-\kappa_{65}$	$-\kappa_{76}$	
	$-0,1429$	$-0,1481$	$-0,1817$	$-0,2103$	$-0,1650$	$-0,2564$	\rightarrow
1	$+0,3880$	$-0,0554$	$+0,0082$	$-0,0015$	$+0,0003$	$-0,0001$	$+0,0000$
2	$-0,0554$	$+0,3477$	$-0,0515$	$+0,0094$	$-0,0020$	$+0,0003$	$-0,0001$
3	$+0,0082$	$-0,0515$	$+0,2290$	$-0,0416$	$+0,0087$	$-0,0014$	$+0,0004$
4	$-0,0015$	$+0,0094$	$-0,0416$	$+0,2260$	$-0,0475$	$+0,0078$	$-0,0020$
5	$+0,0003$	$-0,0020$	$+0,0087$	$-0,0475$	$+0,2622$	$-0,0433$	$+0,0111$
6	$-0,0001$	$+0,0003$	$-0,0014$	$+0,0078$	$-0,0433$	$+0,3990$	$-0,1024$
7	$+0,0000$	$-0,0001$	$+0,0004$	$-0,0020$	$+0,0111$	$-0,1024$	$+0,6360$

Rechenvorschrift der überzähligen Größen.

$$Y_k = \sum \beta_{ki}^{(y)} \delta_{k0}, \quad X_k = \sum \beta_{ki}^{(x)} \tau_{k0}^{(1)}$$

Senkrechte Einzellasten in den Punkten 1, 2, 3', 3, 4', ...

$$\delta_{20,1} = V_{20} \left[\frac{2,5 \cdot 2,5}{2} + \frac{1}{6} 2,5 \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) \right] - \frac{1}{6} V_{30} 5,0 \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) + 4 M_{20} \frac{2,5}{3,6^2} \cdot 0,0533.$$

$$\begin{aligned} \delta_{10,1} &= 4,011 V_{10} - 1,148 V_{20} + 0,0412 M_{10}, \\ \delta_{20,1} &= 4,273 V_{20} - 2,296 V_{30} + 0,0412 M_{20}, \\ \delta_{30,1} &= 14,796 V_{30} - 3,356 V_{40} + 0,0824 M_{30}, \\ \delta_{40,1} &= 15,856 V_{40} - 3,356 V_{50} + 0,0824 M_{40}, \\ \delta_{50,1} &= 15,856 V_{50} - 1,148 V_{60} + 0,0824 M_{50}, \\ \delta_{60,1} &= 4,273 V_{60} - 1,148 V_{70} + 0,0412 M_{60}, \\ \delta_{70,1} &= 4,273 V_{70}. \end{aligned}$$

$$\delta_{k0,2} = \frac{c'_k}{2 c_k} P_k z_k^2 + \frac{1}{6} P_k z_k \left(h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right) - \frac{1}{6} P_{k+1} z_{k+1} \left(h'_k + 12 \frac{v_k}{h} \right).$$

Gleichförmige Belastung $g = 1,0 \text{ t/m}$ liefert $P = 2,5 \text{ t}$ in 1, 2, 3', 3, 4', ...

$k =$	1	2	3	4	5	6	7
$V_{k0} =$	11,25	8,75	3,75	-1,25	-6,25	-8,75	-11,25 t
$M_{k0} =$	28,125	50,0	75,0	75,0	50,0	28,125	0 mt

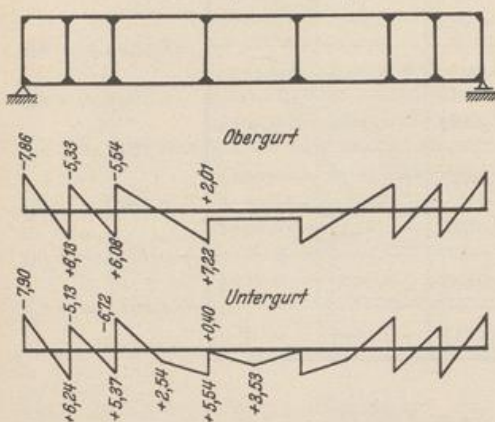
$$\delta_{30,1} = 14,796 \cdot 3,75 + 3,356 \cdot 1,25 + 0,0824 \cdot 75 = 65,860,$$

$$\delta_{30,2} = \frac{5,0}{2 \cdot 5,0} 2,5 \cdot 2,5^2 + \frac{1}{6} 2,5 \cdot 2,5 \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) - \frac{1}{6} 2,5 \cdot 2,5 \left(3,6 + 12 \cdot \frac{0,128}{3,6} \right) = 6,4885;$$

δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}	δ_{70}
36,2375	27,9668	-72,3485	15,1475	-72,9283	-23,3150	-48,0713

$$\tau_{30}^{(1)} = - \left[\frac{5,0 \cdot 5,0}{6} \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{8} - \frac{5,0 \cdot 5,0}{6} \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{8} + \frac{5,0 \cdot 5,0}{6} \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{8} \frac{5,0 - 6 \frac{0,128}{5,0}}{2 \cdot 5,0 + 3 \cdot 2,4 + 6 \frac{0,128}{5,0}} + \frac{5,0 \cdot 5,0}{6} \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{8} \frac{2 \cdot 5,0 + 6 \frac{0,128}{5,0}}{2 \cdot 5,0 + 3 \cdot 3,6 + 6 \frac{0,128}{5,0}} \right] = 4,8286.$$

$\tau_{10}^{(1)}$	$\tau_{20}^{(1)}$	$\tau_{30}^{(1)}$	$\tau_{40}^{(1)}$	$\tau_{50}^{(1)}$	$\tau_{60}^{(1)}$	$\tau_{70}^{(1)}$
0	1,6208	4,8286	5,0160	3,0028	0	0



Ergebnis der Superposition.

$Y_1 = 6,1829 \text{ mt}, \quad X_1 = -0,0568 \text{ mt},$
 $Y_2 = 5,7236 \text{ mt}, \quad X_2 = 0,3560 \text{ mt},$
 $Y_3 = 6,3756 \text{ mt}, \quad X_3 = 0,8397 \text{ mt},$
 $Y_4 = 1,2039 \text{ mt}, \quad X_4 = 0,8053 \text{ mt},$
 $Y_5 = -6,1259 \text{ mt}, \quad X_5 = 0,5907 \text{ mt},$
 $Y_6 = -5,2294 \text{ mt}, \quad X_6 = -0,1000 \text{ mt},$
 $Y_7 = -7,8792 \text{ mt}, \quad X_7 = 0,0225 \text{ mt},$
 $M_{21}^a = 5,7236 + 0,3560 = 6,08 \text{ mt},$
 $M_{11}^b = 5,7236 - 0,3560 = 5,37 \text{ mt},$
 $M_{23}^a = M_{54}^a = -6,1259 + 0,5907 = -5,54 \text{ mt},$
 $M_{23}^b = M_{54}^b = -6,1259 - 0,5907 = -6,72 \text{ mt},$
 Einflußlinie Y_3 für $P = 1 \text{ t}$ in 1, 2, 3, 4, 5, 6

Abb. 475. Momente in mt für $g = 1,0 \text{ t/m}$.

$$\mathfrak{B}_{23} = -\frac{1}{6} \left(3 \cdot 5 + 2,4 + 12 \frac{0,1067}{36} \right) = -2,9593,$$

$$\mathfrak{B}_{33} = \frac{1}{6} \left(3 \cdot 5 + 2,4 + 3,6 + 24 \frac{5}{3,6^2} \cdot 0,0533 \right) = +3,7127,$$

$$\mathfrak{B}_{43} = -\frac{1}{6} \left(3,6 + 12 \frac{0,128}{3,6} \right) = -0,6711.$$

$\beta_{33}^{(Y)} \mathfrak{B}_{23} = -0,2433, \quad \beta_{32}^{(Y)} \mathfrak{B}_{12} = -0,0190, \quad \beta_{34}^{(Y)} \mathfrak{B}_{34} = -0,0276,$
 $\beta_{33}^{(Y)} \mathfrak{B}_{33} = +0,3052, \quad \beta_{32}^{(Y)} \mathfrak{B}_{22} = +0,0245, \quad \beta_{34}^{(Y)} \mathfrak{B}_{44} = +0,0341,$
 $\beta_{33}^{(Y)} \mathfrak{B}_{43} = -0,0552, \quad \beta_{32}^{(Y)} \mathfrak{B}_{32} = -0,0051, \quad \beta_{34}^{(Y)} \mathfrak{B}_{54} = -0,0058.$

Die Superposition der Anteile an jedem Knoten ergibt

\mathfrak{B}_1	\mathfrak{B}_2	\mathfrak{B}_3	\mathfrak{B}_4	\mathfrak{B}_5	\mathfrak{B}_6
-0,0190	-0,2188	+0,2725	-0,0211	-0,0058	0

$A_{10} = -0,0382, \quad B_{10} = +0,0460, \quad Y_3 = M_{10}.$

$k =$	1	2	3	4	5	6	7
$Q_{10} =$	-0,0382	-0,0192	+0,1996	-0,0729	-0,0518	-0,0460	-0,0460
$Q_{10}^c =$	-0,0955	-0,0480	+0,3980	-0,3645	-0,2590	-0,1150	-0,1150
$Y_3 =$	-0,096	-0,140	+0,854	+0,490	+0,231	+0,116	0 mt

Ergänzung der Einflußlinie Y_3 für $P = 1 \text{ t}$ in 3', 4', 5'.

$$\Delta \delta_{k'k} = -\frac{c_k c'_k}{2} \omega_R = -\frac{5 \cdot 5}{2} \frac{1}{4} = -3,125, \quad k = 3, 4, 5. \quad \Delta Y_{3k'} = \beta_{3k} \delta_{k'k},$$

$$\Delta Y_{33'} = -0,0822 \cdot 3,125 = -0,257, \quad \Delta Y_{34'} = -0,027, \quad \Delta Y_{35'} = -0,003.$$

$$Y_{33'} = \frac{Y_{33} + Y_{32}}{2} + \Delta Y_{33'} = 0,098 \text{ mt}, \quad Y_{34'} = 0,645 \text{ mt}, \quad Y_{35'} = 0,357 \text{ mt}.$$

Einflußlinie X_3 für $P = 1 \text{ t}$ in 3', 4', 5'.

$\tau_{3'2}^{(1)} = 0,6483, \quad \tau_{3'3}^{(1)} = 1,1255, \quad \tau_{4'3}^{(1)} = 0,8053, \quad \tau_{4'4}^{(1)} = 1,2011.$

Feld c_3 : $X_{33'} = 0,2290 (1,1255 - 0,2249 \cdot 0,6483) = 0,224 \text{ mt},$

Feld c_4 : $X_{34'} = 0,2290 (0,8053 - 0,1817 \cdot 1,2011) = 0,134 \text{ mt}.$

Einflußlinien $M_{32}^a = Y_3 + X_3$, $M_{32}^b = Y_3 - X_3$.

$k =$	1	2	3'	3	4'	4	5'	5
$M_{32}^a =$	-0,096	-0,144	0,322	0,854	0,779	0,490	0,334	0,231 mt
$M_{32}^b =$	-0,096	-0,144	-0,126	0,854	0,511	0,490	0,338	0,321 mt

Die beiderseits anschließenden Teile sind geradlinig.

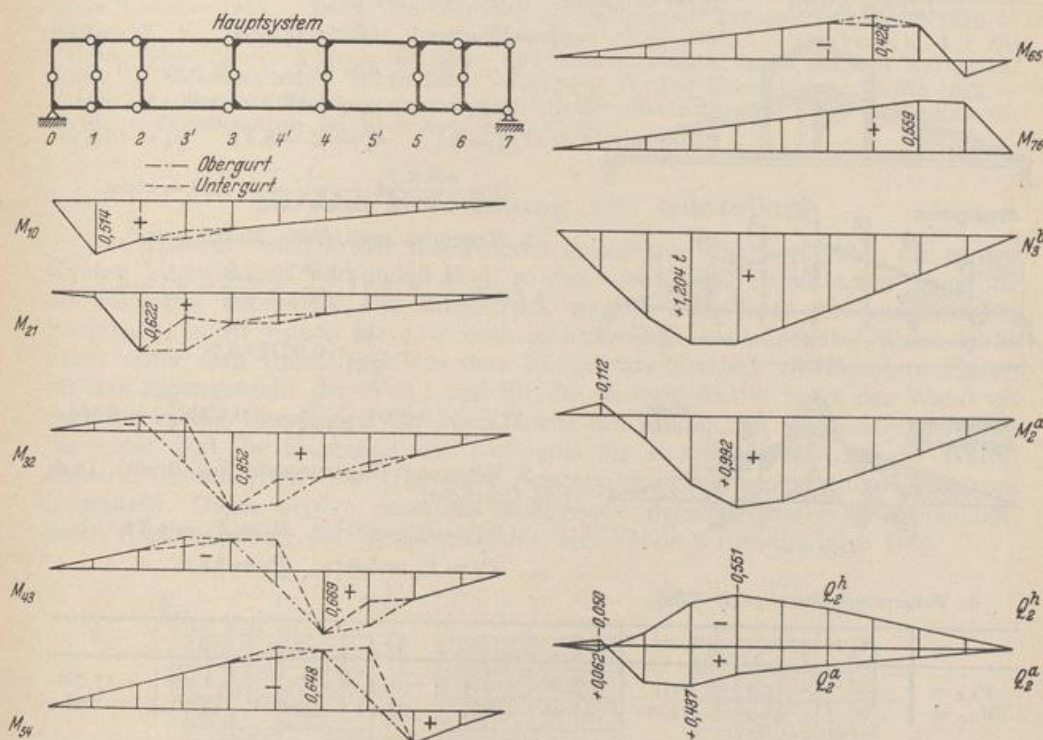


Abb. 476.

Einflußlinie $N_3^b = (M_{03} - 2 Y_3)/h$.

$k =$	1	2	3'	3	4'	4	5'	5
$M_{03} =$	1,500	3,000	4,500	6,000	5,000	4,000	3,000	2,000
$N_3^b =$	0,470	0,913	1,200	1,192	1,031	0,839	0,635	0,491 t

Alle übrigen Einflusslinien ergeben sich in derselben Weise.

Ist das Trägheitsmoment des Untergurtes groß gegenüber dem des Obergurtes, so kann näherungsweise mit einem System nach Abb. 477 gerechnet werden. Die Einflusslinien für die Untergurtmomente haben dann die in Abb. 477 dargestellte Form.

$$J_k^b = J_c = 0,1 \text{ m}^4, \quad F_k^b = 1,0, \quad F_k^a = 0,2 \text{ m}^2,$$

$$J_0 = J_1 = J_2 = 0,025, \quad J_3 = 0,0125 \text{ m}^4,$$

$$F_0 = F_1 = F_2 = 0,30, \quad F_3 = 0,25 \text{ m}^2,$$

$$v_0 = v_1 = v_2 = 0,8, \quad v_3 = 0,96.$$

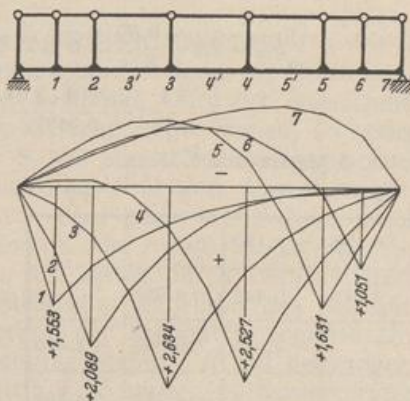


Abb. 477.

Berechnung eines Dachbinders mit vollwandigen Endfeldern (Abb. 478).

1. Geometrische Grundlagen.

$$c = 2,7 \text{ m}, \quad h_0 = 1,8, \quad h_1 = 2,7, \quad h_2 = 3,6 \text{ m},$$

$$c/s_k^\alpha = \cos \alpha = 0,9487, \quad J_c = J^b = J^a \cos \alpha,$$

$$J_c = 0,0031 \text{ m}^4, \quad F^a = 0,155, \quad F^b = 0,150, \quad F^h = 0,105 \text{ m}^2,$$

$$J_c/F^a = 0,0201, \quad J_c/F^b = 0,0208, \quad J_c/F^h = 0,0297 \text{ m}^2,$$

$$J_0^h = J_4^h = \infty, \quad F_0^h = F_4^h = \infty, \quad J_h = J_c/3;$$

$$\kappa = 1,2, \quad E/G = 2, \quad v_0 = v_4 = 0,$$

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0,0712, \quad c' = c,$$

$$h'_0 = h'_4 = 0, \quad h'_1 = h'_3 = 8,1, \quad h'_2 = 10,8 \text{ m}.$$

$$\zeta'_k = \frac{\cos \alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = 1,00 = \text{const.}$$

2. Vorkzahlen nach (768). Matrix s. u.

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} \left[2 \cdot 2,7 \left(\frac{1,8^2}{2,7^2} + \frac{1,8}{2,7} + 1 \right) + 8,1 \right. \\ \left. + \frac{12}{2,7^2} \cdot 0,0712 \cdot 2,7 \right. \\ \left. + 12 \frac{2,7}{2,7^2} \left(0,0201 \cdot \frac{1}{0,9487} + 0,0208 \right) \right] = 6,465.$$

3. Belastung: Eigengewicht aus Binder, Dach und Oberlicht.

$$P'_0 = P'_4 = 4,0 \text{ t}, \quad P_0 = P_4 = 4,5 \text{ t},$$

$$P_1 = P_3 = 5,8 \text{ t}, \quad P_2 = 2,8 \text{ t}.$$

4. Belastungszahlen nach (769).

$k =$	A	o'	o	I	2	3	4	4'	B
$V_{k0} =$	o	15,7	11,7	7,2	1,4	-1,4	-7,2	-11,7	-15,7 t
$M_{k0} =$	o	42,40	74,00	93,44	97,22	93,44	74,00	42,40	o mt

k	$\frac{M_{k0}}{V_{k0}}$	$\frac{M_{k0}}{V_{k0}} \frac{h_k - h_{k-1}}{h_k c_k}$	ζ''_k	ζ'''_k	ζ_{k0}
1	12,99	1,60	-0,60	2,60	1,04
2	69,40	6,42	-5,42	7,42	1,01
3	-66,70	8,24	-7,24	9,24	1,01
4	-10,27	1,90	-0,90	2,90	1,03

$$\delta_{10} = 7,2 \frac{-0,60}{6} \cdot 1,0 [2,7 \cdot 6,3 + 0] - 1,4 \frac{-5,42}{6} \cdot 2,7 \left(8,1 + \frac{0,854}{2,7} \right) \\ + \frac{5,4}{2,7^2} \left(\frac{0,0201 \cdot 1,04}{0,9487} + 0,0208 \right) \cdot 93,44 = 19,44.$$

5. δ Matrix und Lösung.

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	
6,465	-2,110			19,44
-2,110	9,445	-4,910		-93,19
	-4,910	16,800	-4,210	90,40
		-4,210	14,890	73,29

$$M_{10} = M_{34} = Y_1 = 0,64 \text{ mt},$$

$$M_{21} = M_{23} = Y_2 = -7,24 \text{ mt},$$

$$M_{32} = M_{12} = Y_3 = 4,78 \text{ mt},$$

$$M_{43} = M_{01} = Y_4 = 6,27 \text{ mt},$$

$$M_{k(k-1)}^a = M_{k(k-1)}^b, \quad M_{kh}^a = -M_{kh}^b.$$

$$M_{1h}^b = -M_{3h}^a = 4,78 - 0,64 = 4,14 \text{ mt},$$

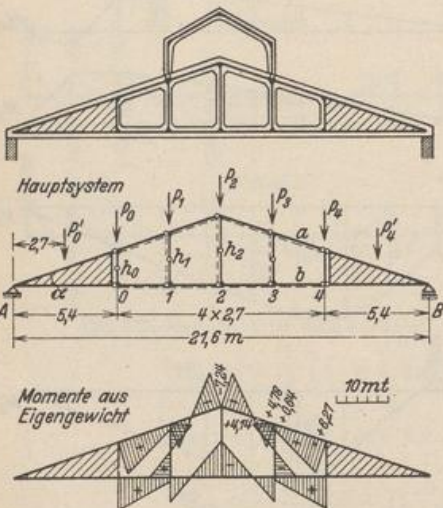


Abb. 478.

Mit den Momenten sind auch die Quer- und Längskräfte bekannt. Die Schnittkräfte aus Wind- und Schneelast werden in gleicher Weise berechnet.

Mann, L.: Statische Berechnung steifer Vierecknetze. Berlin 1909 und Z. Bauw. 1909. — Derselbe: Das strebenlose Ständerfachwerk. Müller-Breslau-Festschrift. Leipzig 1912. — Engesser, F.: Die Berechnung der Rahmenträger. Z. Bauw. 1913. — Grüning, M.: Die Spannungen im Knotenpunkt eines Vierendeelträgers. Eisenbau 1914. — Lührs, J.: Die statische Berechnung des Rahmenträgers. Eisenbau 1915 S. 83. — Mohr, O.: Die Berechnung der Pfosten-träger. Eisenbau 1915. — Derselbe: Beitrag zur Berechnung der Rahmenträger. Berlin 1915. — Engesser, F.: Die Berechnung der Rahmenträger. Berlin 1919. — Hartmann, F.: Die statisch unbestimmten Systeme des Eisen- und Eisenbetonbaues. Berlin 1922. — Kriso, K.: Statik der Vierendeelträger. Berlin 1922. — Spiegel, G.: Der Rahmenträger. Berlin 1922. — Wieser, F.: Statische Berechnung der Vierendeelträger. Bautechn. 1927 S. 263. — Domke, O.: Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 10 3. Aufl. Berlin 1931.

53. Die Berechnung von Silozellen.

Der Zellsilo wird in der Regel durch senkrechte Wände gebildet, die in den Kanten biegesteif verbunden sind, so daß rechteckige Behälter zur Lagerung des Füllgutes entstehen. Der Innendruck wächst nach S. 14 mit zunehmender Schütthöhe z , ist jedoch für $z = \text{const}$ in jeder Zelle konstant. Die Wand wirkt daher unter dem Innendruck aus dem Füllgut als elastisch eingespannte Platte, für das Eigengewicht der Wand und für die Reibungskräfte längs der Wand als Scheibe. In der Regel wird auf die Klärung des räumlichen Spannungszustandes verzichtet und die Sicherheit des Bauwerks für Kräfte winkelrecht zur Wandebene in Abschnitten des Tragwerks zwischen je zwei waagerechten Schnitten festgestellt. Diese werden dann als waagrecht liegende Stabwerke berechnet, deren Knoten infolge der Längssteifigkeit der Wände unverschieblich sind.

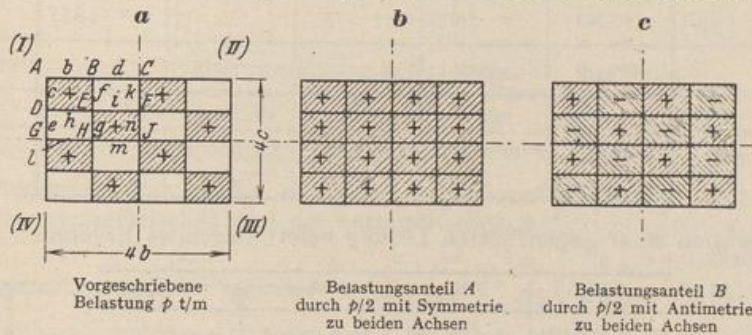


Abb. 479.

Das Tragwerk Abb. 479a besteht darnach aus elastisch eingespannten, gleichförmig belasteten Stäben $JK = l_k$. Ihr Spannungszustand ist durch die Belastung p und die benachbarten Knotendrehwinkel φ_J, φ_K bestimmt. Wird der Querschnitt im Bereich der theoretischen Stablänge l_k als konstant angenommen, so lassen sich n Knotendrehwinkel des Stabnetzes nach S. 320 aus n Bedingungsgleichungen $\delta A_J = 0$ berechnen, in denen die Stabdrehwinkel Null sind. Der allgemeine Ansatz wird bei Symmetrie des Tragwerks nach einer oder zwei Achsen durch Umordnung der Belastung in Anteile mit Symmetrie oder Antimetrie zu einer der beiden Achsen vereinfacht und in jedem Falle am besten durch Iteration nach Abschn. 30 gelöst. Damit sind auch die Schnittkräfte des Stabnetzes bekannt. Sie entstehen nach (530) durch die Überlagerung der bekannten Schnittkräfte des gleichförmig belasteten, beiderseits eingespannten Stabes JK mit denjenigen, welche durch die Verdrehung der Endquerschnitte J, K um φ_J, φ_K hervorgerufen werden. Das Ergebnis läßt sich mit der Bedingung nachprüfen, daß die Summe der

Biegemomente an jedem Stabknoten Null ist. Die Querkräfte an den Stabenden werden als äußere Kräfte in die Längs- und Querwände eingetragen.

Für die Ausführung kommen neben allgemeinen Anordnungen im wesentlichen nur regelmäßige Bauwerke mit wenigen Zellenreihen in Betracht, deren Berechnung die ungünstigsten Ergebnisse in der Regel bei schachbrettartiger Füllung des Silos liefert.

Belastungsanteil A: Die Formänderung des elastischen Gebildes ist zu beiden Achsen symmetrisch. Die Drehwinkel der Stabknoten in den Symmetrieachsen sind daher Null. Im übrigen ist $\varphi_{A,I} = -\varphi_{A,II} = \varphi_{A,III} = -\varphi_{A,IV}$. Der Ansatz besteht aus 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten. Sie werden nach (533), (534) angeschrieben. Darnach ist z. B.

$$\delta A_E = {}^{(1)}\varphi_B a_{EB} + {}^{(1)}\varphi_D a_{ED} + {}^{(1)}\varphi_E a_{EE} + a_{E0} = 0,$$

$$a_{EB} = 4(-\dot{i}_E) \cdot \frac{2}{c'} = -\frac{8}{c'}, \quad a_{ED} = -\frac{8}{b'},$$

$$a_{EE} = 4(-\dot{i}_E) \left(\frac{4}{b'} + \frac{4}{c'} + \frac{4}{b'} + \frac{4}{c'} \right) = -32 \left(\frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} \right),$$

$$a_{A0} = 4(-\dot{i}_A) \left(\frac{p}{2} \frac{b^2}{12} - \frac{p}{2} \frac{c^2}{12} \right) = -\frac{p}{6} (b^2 - c^2), \quad a_{B0} = a_{D0} = a_{E0} = 0,$$

so daß mit $b = 4,80$ m, $c = 3,20$ m, $J_b = 3 J_c$, $p = 1$ t/m der folgende Ansatz angeschrieben werden kann:

	${}^{(1)}\varphi_A$	${}^{(1)}\varphi_B$	${}^{(1)}\varphi_D$	${}^{(1)}\varphi_E$	a_{E0}
A	-15,0	-5,0	-2,5		-2,13333
B	-5,0	-25,0		-2,5	
D	-2,5		-20,0	-5,0	
E		-2,5	-5,0	-30,0	

Die Iteration einer angenäherten Lösung liefert folgendes Ergebnis:

${}^{(1)}\varphi_A$	${}^{(1)}\varphi_B$	${}^{(1)}\varphi_D$	${}^{(1)}\varphi_E$
-0,15637	+0,03189	+0,02109	-0,00617

Belastungsanteil B: Die Formänderung des elastischen Gebildes ist zu beiden Achsen antimetrisch und damit $\varphi_{B,I} = \varphi_{B,II} = \varphi_{B,III} = \varphi_{B,IV}$. Der Ansatz (523) besteht jetzt aus neun Gleichungen mit neun Unbekannten, z. B.

$$\delta A_E = \varphi_B a_{EB} + \varphi_D a_{ED} + \varphi_E a_{EE} + \varphi_F a_{EF} + \varphi_H a_{EH} + a_{E0} = 0,$$

$$a_{EB} = 4(-\dot{i}_E) \cdot \frac{2}{c'} = -\frac{8}{c'}, \quad a_{ED} = 4(-\dot{i}_E) \cdot \frac{2}{b'} = -\frac{8}{b'},$$

$$a_{EE} = 4(-\dot{i}_E) \left(\frac{4}{b'} + \frac{4}{c'} + \frac{4}{b'} + \frac{4}{c'} \right) = -32 \left(\frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} \right),$$

$$a_{EF} = 4(-\dot{i}_E) \cdot \frac{2}{b'} = -\frac{8}{b'}, \quad a_{EH} = 4(-\dot{i}_E) \cdot \frac{2}{c'} = -\frac{8}{c'},$$

$$a_{E0} = 4(-\dot{i}_E) \cdot 2 \left(\frac{pb^2}{12} - \frac{pc^2}{12} \right) = -\frac{2}{3} p (b^2 - c^2),$$

$$\delta A_J = \varphi_F a_{JF} + \varphi_H a_{JH} + \varphi_J a_{JJ} + a_{J0} = 0,$$

$$a_{JF} = 2(-i_J) \cdot \frac{2}{c'} = -\frac{4}{c'}, \quad a_{JH} = 2(-i_J) \cdot \frac{2}{b'} = -\frac{4}{b'},$$

$$a_{JJ} = -i_J \left(\frac{4}{b'} + \frac{4}{c'} + \frac{4}{b'} + \frac{4}{c'} \right) = -8 \left(\frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} \right),$$

$$a_{J0} = 2(-i_J) \left(\frac{pb^2}{12} - \frac{pc'}{12} \right) = -\frac{1}{6} p (b^2 - c^2).$$

Matrix der Gleichungen $\sum \varphi_K a_{LK} + a_{L0} = 0$ für $b = 4,80 \text{ m}$, $c = 3,20 \text{ m}$, $J_b = 3 J_c$, $p = 1 \text{ t/m}$.

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	φ_H	φ_J	a_{L0}
A	-15,00	-5,00		-2,50						-2,13333
B	-5,00	-25,00	-5,00		-2,50					+4,26667
C		-5,00	-12,50			-1,25				-2,13333
D	-2,50			-20,00	-5,00		-2,50			+4,26667
E		-2,50		-5,00	-30,00	-5,00		-2,50		-8,53333
F			-1,25		-5,00	-15,00			-1,25	+4,26667
G				-2,50			-10,00	-2,50		-2,13333
H					-2,50		-2,50	-15,00	-2,50	+4,26667
J						-1,25		-2,50	-7,50	-2,13333

Die Iteration einer Näherungslösung liefert folgendes Ergebnis:

$(2)\varphi_A$	$(2)\varphi_B$	$(2)\varphi_C$	$(2)\varphi_D$	$(2)\varphi_E$	$(2)\varphi_F$	$(2)\varphi_G$	$(2)\varphi_H$	$(2)\varphi_J$
-0,33769	+0,36453	-0,37006	+0,44375	-0,52313	+0,53582	-0,45940	+0,54052	-0,55392

Die Knotendrehwinkel infolge der gegebenen Belastung werden durch Superposition des symmetrischen und des antisymmetrischen Anteils erhalten, z. B.

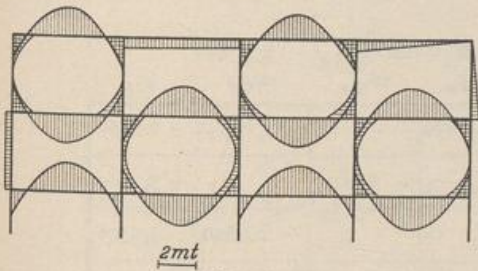


Abb. 480 a.

$$\varphi_{A,I} = (1)\varphi_A + (2)\varphi_A = -0,49406 = \varphi_{A,III}$$

$$\varphi_{A,II} = -(1)\varphi_A + (2)\varphi_A = -0,18132 = \varphi_{A,IV}$$

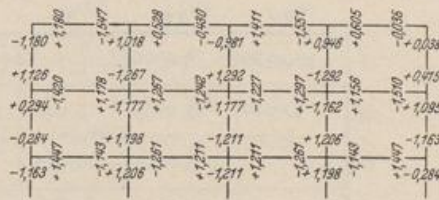


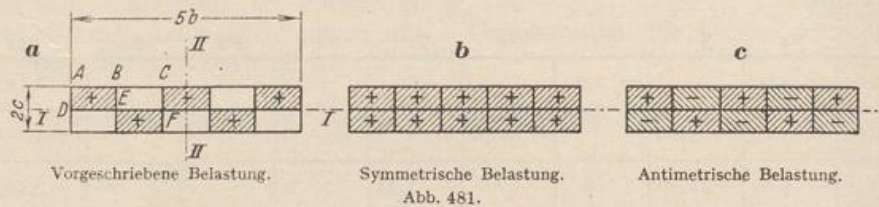
Abb. 480 b.

$\varphi_{A,I}$	$\varphi_{A,II}$	$\varphi_{B,I}$	$\varphi_{B,II}$	$\varphi_{D,I}$	$\varphi_{D,II}$	$\varphi_{E,I}$	$\varphi_{E,II}$
-0,49406	-0,18132	+0,39642	+0,33264	+0,46484	+0,42266	-0,52930	-0,51696
φ_C	φ_F	φ_G	φ_H	φ_J			
-0,37006	+0,53582	-0,45940	+0,54052	-0,55392			

Die Stabendmomente $M_J^{(h)}$, $M_K^{(h)}$ eines Stabes $\overline{JK} = l_k$ sind nach (530) berechnet und auf der Zugseite aufgetragen worden (Abb. 480). Darnach ist z. B.

$$\begin{aligned}
 M_A^{(b)} &= + p b^2/12 + 2/b' \cdot (2 \varphi_A + \varphi_B) = + 1,92000 - 0,73962 = + 1,1804 \text{ mt.} \\
 M_B^{(b)} &= - p b^2/12 + 2/b' \cdot (2 \varphi_B + \varphi_A) = - 1,92000 + 0,37348 = - 1,5465 \text{ mt.} \\
 M_B^{(d)} &= + 2/b' \cdot (2 \varphi_B + \varphi_C) = + 0,5285 \text{ mt.} \\
 M_C^{(d)} &= + 2/b' \cdot (2 \varphi_C + \varphi_B) = - 0,4296 \text{ mt.}
 \end{aligned}$$

Die Rechenvorschrift wird im Zusammenhang an dem folgenden Beispiel wiederholt:
 $c = 2,70 \text{ m}$, $b = 4,80 \text{ m}$, $J_b = 3 J_c$, $1/c' = 0,370370$, $1/b' = 0,625$ (Abb. 481)



Symmetrische Belastung $p/2$ (Abb. 481 b) $^{(1)}\varphi_D = ^{(1)}\varphi_E = ^{(1)}\varphi_F = 0$.

$$a_{A0} = 4(-i_A) \left(\frac{b^2}{12} - \frac{c^2}{12} \right) \frac{p}{2} = - \frac{p}{6} (b^2 - c^2) = - 2,625, \quad a_{B0} = a_{C0} = 0.$$

Matrix der Bedingungsgleichungen $\sum ^{(1)}\varphi_K a_{JK} + a_{J0} = 0$.

	$^{(1)}\varphi_A$	$^{(1)}\varphi_B$	$^{(1)}\varphi_C$	a_{J0}
A	-15,9259	- 5,0000		- 2,6250
B	- 5,0000	- 25,9259	- 5,0000	
C		- 5,0000	- 20,9259	

Lösung durch Iteration:

$^{(1)}\varphi_A$	$^{(1)}\varphi_B$	$^{(1)}\varphi_C$
- 0,17600	+ 0,03558	- 0,00850

Antimetrische Belastung $p/2$ (Abb. 481 c).

Matrix der Bedingungsgleichungen $\sum ^{(2)}\varphi_K a_{JK} + a_{J0} = 0$.

	$^{(2)}\varphi_A$	$^{(2)}\varphi_B$	$^{(2)}\varphi_C$	$^{(2)}\varphi_D$	$^{(2)}\varphi_E$	$^{(2)}\varphi_F$	a_{J0}
A	-15,9259	- 5,0000		- 2,9630			- 2,6250
B	- 5,0000	- 25,9259	- 5,0000		- 2,9630		+ 5,2500
C		- 5,0000	- 20,9259			- 2,9630	- 5,2500
D	- 2,9630			- 10,9259	- 2,5000		+ 2,6250
E		- 2,9630		- 2,5000	- 15,9259	- 2,5000	- 5,2500
F			- 2,9630		- 2,5000	- 13,4259	+ 5,2500

Lösung durch Iteration:

$^{(2)}\varphi_A$	$^{(2)}\varphi_B$	$^{(2)}\varphi_C$	$^{(2)}\varphi_D$	$^{(2)}\varphi_E$	$^{(2)}\varphi_F$
- 0,38797	+ 0,42769	- 0,43734	+ 0,47763	- 0,57762	+ 0,59511

Ergebnis der Überlagerung:

$$\varphi_{A,I} = {}^{(1)}\varphi_A + {}^{(2)}\varphi_A = -0,56396, \quad \varphi_{A,IV} = -{}^{(1)}\varphi_A + {}^{(2)}\varphi_A = -0,21198.$$

$\varphi_{A,I}$	$\varphi_{A,IV}$	$\varphi_{B,I}$	$\varphi_{B,IV}$	$\varphi_{C,I}$	$\varphi_{C,IV}$	φ_D	φ_E	φ_F
-0,56396	-0,21198	+0,46327	+0,39211	-0,44584	-0,42884	+0,47763	-0,57762	+0,59511

Biegemomente s. Abb. 482.

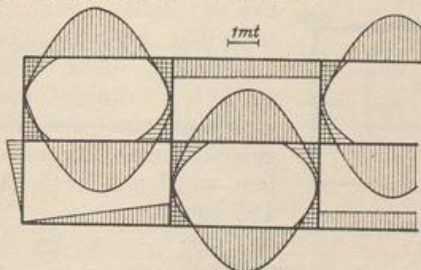


Abb. 482a.

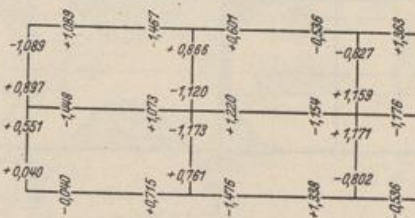


Abb. 482b.

Die einreihige Anordnung der Zellen. Belastung, Formänderung und Schnittkräfte sind zur Achse a symmetrisch (Abb. 483), also $\varphi_{A,I} = -\varphi_{A,II}$. Die Knotendrehwinkel werden daher aus einem dreigliedrigen Ansatz von Bedingungen berechnet.

Beispiel zur Berechnung eines einreihigen Zellensilos mit unregelmäßiger Teilung (Abb. 483).

$$c = 3,20 \text{ m}, \quad b_2 = b_3 = 2,40 \text{ m}, \quad J_2 = J_3 = J_c/2,$$

$$b_4 = b_5 = 4,00 \text{ m}, \quad J_4 = J_5 = 3 J_c,$$

$$\frac{1}{c'} = 0,3125, \quad \frac{1}{b_2'} = \frac{1}{b_3'} = 0,2083, \quad \frac{1}{b_4'} = \frac{1}{b_5'} = 0,7500,$$

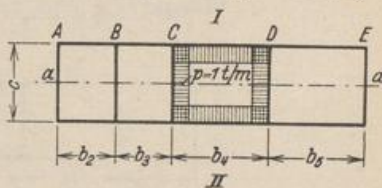


Abb. 483.

$$a_{CB} = 2(-i_c) \cdot \frac{2}{b_2'} = -\frac{4}{b_2'} = -0,8333,$$

$$a_{CC} = 2(-i_c) \cdot \left(\frac{4}{b_2'} + \frac{2}{c'} + \frac{4}{b_4'} \right) = -4 \left(\frac{2}{b_2'} + \frac{1}{c'} + \frac{2}{b_4'} \right) = -8,9167,$$

$$a_{CD} = 2(-i_c) \cdot \frac{2}{b_4'} = -\frac{4}{b_4'} = -3,0000,$$

$$a_{C0} = 2(-i_c) \cdot \left(-\frac{p c^2}{12} + \frac{p b_2^2}{12} \right) = -\frac{p}{6} (b_2^2 - c^2) = -0,9600,$$

$$a_{D0} = 2(-i_D) \cdot \left(+\frac{p c^2}{12} - \frac{p b_4^2}{12} \right) = +0,9600.$$

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	a_{J0}
A	-2,9167	-0,8333				
B	-0,8333	-4,5833	-0,8333			
C		-0,8333	-8,9167	-3,0000		-0,9600
D			-3,0000	-13,2500	-3,0000	+0,9600
E				-3,0000	-7,2500	

Lösung:

φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E
-0,00821	+0,02874	-0,14984	+0,11738	-0,04857

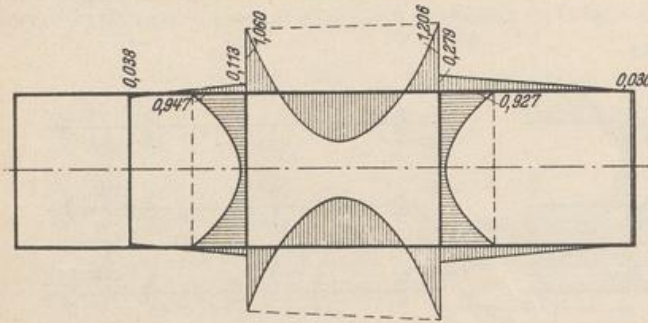


Abb. 484.

Biegemomente s. Abb. 484.

Dieses Ergebnis kann bei n Zellen auch unmittelbar aus der Formänderung eines n fach statisch unbestimmten Hauptsystems aus Zweigelenrahmen angeschrieben werden. Nach Abb. 485 ist

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)}^{(n)} + X_k \delta_{kk}^{(n)} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)}^{(n)} = \delta_{k0}^{(n)}.$$

Die Vorzahlen werden nach (305) mit den Angaben der Tabelle 43 angeschrieben. In dieser ist das Verhältnis $b'_k/c'_{k-1} = \varkappa_k$. Das Seitenverhältnis c/b_k wird mit λ_k bezeichnet. Darnach ist

$$\left. \begin{aligned} \delta_{kk}^{(n)} &= \int M_k^{(0)} M_k^{(n)} \frac{J_c}{J} ds = \frac{b'_k (2 + \varkappa_k)}{3 + 2\varkappa_k} + \frac{2\varkappa_{k+1}}{3 + 2\varkappa_{k+1}} c'_k, \\ \delta_{k(k-1)}^{(n)} &= \frac{\varkappa_k}{3 + 2\varkappa_k} c'_{k-1}, \quad \delta_{k(k+1)}^{(n)} = \frac{\varkappa_{k+1}}{3 + 2\varkappa_{k+1}} c'_k. \end{aligned} \right\} (793a)$$

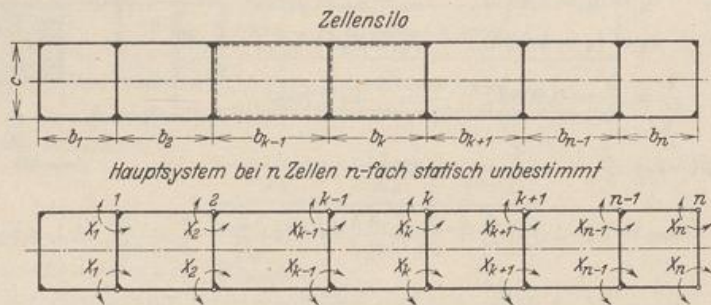


Abb. 485.

Hiervon weicht ab:

$$\delta_{nn}^{(n)} = \frac{b'_n (2 + \varkappa_n)}{3 + 2\varkappa_n} + c'_n, \quad (793b)$$

bei $c'_k = b'_k = 1$ ist $\delta_{kk}^{(n)} = 1, \quad \delta_{k(k-1)}^{(n)} = \delta_{k(k+1)}^{(n)} = \frac{1}{5}.$

Die Belastungszahlen sind bei beliebiger Füllung der Zellen, also bei verschiedenen großen Wanddrücken p_{k-1}, p_k :

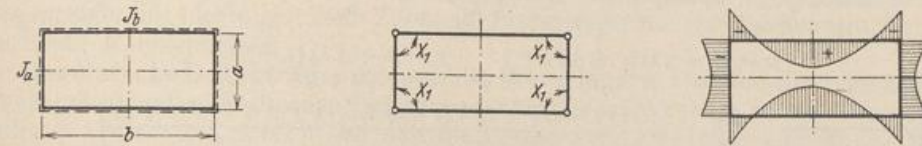
$$\left. \begin{aligned} \delta_{k0}^{(n)} &= -\frac{p_{k-1} c^2}{12} c'_{k-1} \frac{\varkappa_k}{3 + 2\varkappa_k} - \frac{p_k b_k^2}{12} \left[\frac{b'_k (3 + \varkappa_k - \lambda_k^2)}{3 + 2\varkappa_k} + \frac{2\lambda_k^2 \varkappa_{k+1}}{3 + 2\varkappa_{k+1}} \right] \\ &\quad - \frac{p_{k+1} b_{k+1}^2}{12} b'_{k+1} \frac{3 - 2\lambda_{k+1}^2}{3 + 2\varkappa_{k+1}}, \\ \delta_{n0}^{(n)} &= -\frac{p_{n-1} c^2}{12} c'_{n-1} \frac{\varkappa_n}{3 + 2\varkappa_n} - \frac{p_n b_n^2}{12} \left[\frac{b'_n (3 + \varkappa_n - \lambda_n^2)}{3 + 2\varkappa_n} + \lambda_n^2 c'_n \right], \end{aligned} \right\} (794)$$

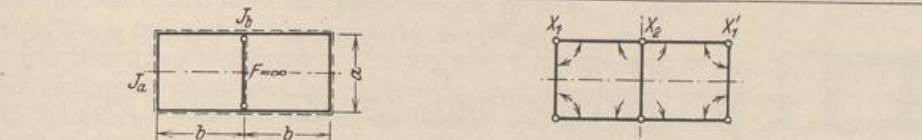
bei $c'_k = b'_k = 1$ ist

$$\delta_{k0}^{(n)} = -\frac{1}{60} [\rho_{k-1} c^2 + \rho_k b_k^2 (4 + \lambda_k^2) + \rho_{k+1} b_{k+1}^2 (3 - 2\lambda_{k+1}^2)],$$

$$\delta_{n0}^{(n)} = -\frac{1}{60} [\rho_{n-1} c^2 + \rho_n b_n^2 4 (1 + \lambda_n^2)].$$

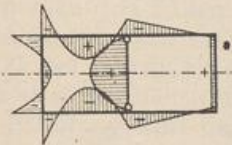
Tabelle 38. Die Eckmomente einfacher Bauformen bei gleichförmigem Innendruck.



$$a' = a \frac{J_c}{J_a}, \quad b' = b \frac{J_c}{J_b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \lambda' = \frac{a'}{b'}, \quad X_1 = -\frac{\rho l^2}{12} \frac{1 + \lambda^2 \lambda'}{1 + \lambda'}$$


$$a' = a \frac{J_c}{J_a}, \quad b' = b \frac{J_c}{J_b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \lambda' = \frac{a'}{b'}, \quad \mu = 1 + 2\lambda', \quad \nu = 2 + 3\lambda'$$

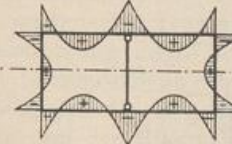
Füllung der linken Kammer:



$$X_1 = -\frac{\rho b^2}{24} \left[\frac{1 + 2\lambda^2 \lambda'}{\mu} \pm 3 \frac{1 + \lambda^2 \lambda'}{\nu} \right],$$

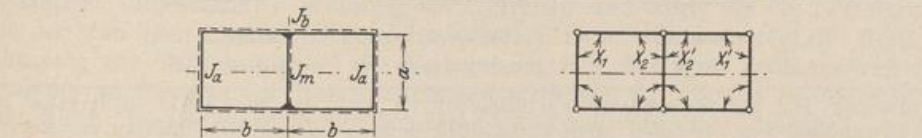
$$X_2 = -\frac{\rho b^2}{24} \frac{1 + 3\lambda' - \lambda^2 \lambda'}{\mu}$$

Füllung beider Kammern:



$$X_1 = X_1' = -\frac{\rho b^2}{12} \frac{1 + 2\lambda^2 \lambda'}{\mu},$$

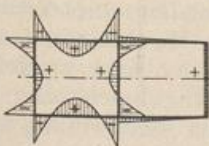
$$X_2 = -\frac{\rho b^2}{12} \frac{1 + 3\lambda' - \lambda^2 \lambda'}{\mu}$$



$$a' = a \frac{J_c}{J_a}, \quad b' = b \frac{J_c}{J_b}, \quad a'' = a \frac{J_c}{J_m}, \quad \frac{a}{b} = \lambda, \quad \frac{a'}{b'} = \lambda', \quad \frac{a''}{b'} = \lambda'',$$

$$\mu = 1 + 2\lambda', \quad \nu = \mu + 2\lambda''(2 + 3\lambda')$$

Füllung der linken Kammer:



$$X_1 = -\frac{\rho b^2}{24} \left[\frac{1 + 2\lambda^2 \lambda'}{\mu} \pm \frac{1 + 6\lambda'' + 2\lambda^2(\lambda' + 3\lambda'\lambda'' - \lambda'')}{\nu} \right],$$

$$X_2 = -\frac{\rho b^2}{24} \left[\frac{1 + 3\lambda' - \lambda^2 \lambda'}{\mu} \pm \frac{1 + 3\lambda' - \lambda^2(\lambda' - 6\lambda'\lambda'' - 4\lambda'')}{\nu} \right],$$

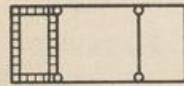
Füllung beider Kammern:

Die Überzähligen sind ebenso groß wie bei gelenkig angeschlossener Zwischenwand.



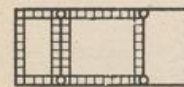
$$a' = a \frac{J_c}{J_a}; \quad b'_1 = b_1 \frac{J_c}{J_b}; \quad b'_2 = b_2 \frac{J_c}{J_b}; \quad \lambda = \frac{a}{b_1}; \quad \beta = \frac{b_2}{b_1}; \quad \lambda' = \frac{a'}{b'_1}.$$

$$\mu = (2 + 3\lambda)(2 + 3\beta) - 1; \quad \nu = (2 + 3\lambda)(2 + \beta) - 1.$$



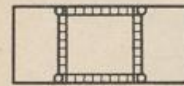
$$X_1 = X'_1 = -\frac{p b_1^2}{8} \left[\frac{1 + 3\beta + \lambda^2 \lambda' (2 + 3\beta)}{\mu} \pm \frac{1 + \beta + \lambda^2 \lambda' (2 + \beta)}{\nu} \right],$$

$$X_2 = X'_2 = -\frac{p b_1^2}{8} (1 + 3\lambda - \lambda^2 \lambda') \left(\frac{1}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right).$$



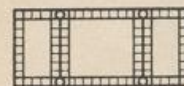
$$X_1 = X'_1 = -\frac{p b_1^2}{8} \left[\frac{1 + 3\beta - 2\beta^3 + \lambda^2 \lambda' (2 + 3\beta)}{\mu} \pm \frac{1 + \beta + \lambda^2 \lambda' (2 + \beta)}{\nu} \right],$$

$$X_2 = X'_2 = -\frac{p b_1^2}{8} \left[\frac{1 + 3\lambda + 2\beta^3 (2 + 3\lambda) - \lambda^2 \lambda'}{\mu} \pm \frac{1 + 3\lambda - \lambda^2 \lambda'}{\nu} \right].$$



$$X_1 = X'_1 = +\frac{p b_1^2}{4} \frac{\beta^3}{\mu},$$

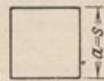
$$X_2 = X'_2 = -\frac{p b_1^2}{4} \frac{\beta^3}{\mu} (2 + 3\lambda),$$



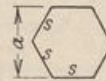
$$X_1 = X'_1 = -\frac{p b_1^2}{4} \frac{1 + 3\beta - \beta^3 + \lambda^2 \lambda' (2 + 3\beta)}{\mu},$$

$$X_2 = X'_2 = -\frac{p b_1^2}{4} \frac{1 + 3\lambda + (2 + 3\lambda) \beta^3 - \lambda^2 \lambda'}{\mu}.$$

Eckmomente für konstanten Innendruck



Quadrat
0,08333 p a²



Sechseck
0,02778 p a²



Achteck
0,01430 p a²

Marcus, H.: Die Berechnung von Silozellen. Z. Arch. Ing.-Wes. 1911. — Ritter, A.: Zur Berechnung von Silozellen. Arm. Beton 1913 S. 21. — Derselbe: Beitrag zur Berechnung rechteckiger Silozellen. Stuttgart 1916. — Schwarz, R.: Zur Berechnung der Zwickelzellen von Silos mit kreiszylindrischen Behältern. Bauing. 1930 S. 87.

54. Die Bogenträger.

Der Brücken- und Hochbau verwendet den Bogenträger als einzelnes Element oder in Verbindung mit Pfosten als Teil einer Bogenstellung. Die Mittellinie wird entweder geometrisch als Parabel, Kreis und Kettenlinie oder nach statischen Gesichtspunkten als Mittelkraftlinie einer gegebenen Belastung beschrieben. Sie ist in der Regel zu einer senkrechten Achse rechtwinklig oder schiefwinklig symmetrisch.

Die Bogenwirkung entsteht durch die waagerechte Abstützung der Träger gegen starre oder elastische Widerlager, die damit einen wichtigen Bestandteil

des Tragwerks bilden. Ihr Verschiebungszustand ist daher bei der statischen Untersuchung ebenso zu bewerten wie die Belastung. Er wird durch die Verschiebung und Verdrehung der Kämpferquerschnitte beschrieben. Diese sind durch die elastischen Eigenschaften der Pfeiler, der Widerlager und der Zugglieder bestimmt, welche die Bogenenden verbinden. Die einfachen und mehrteiligen Bogenträger werden nach der Art ihrer Abstützung unterteilt. Ihre Verbindung mit biegesteifen geraden Stäben bedeutet die Erweiterung der Aufgabe. Man unterscheidet Bogenträger mit biegesteifem Zugband, Bogenträger mit durchgehendem Streckgurt und Rahmenträger.

Der einfache Bogenträger mit starren Widerlagern. Der einfache Bogenträger ist ein gekrümmter, elastischer Stab, dessen Stärke d im Vergleich zum Krümmungsradius ρ klein ist ($d \leq 0,1 \rho$), so daß die Verzerrung $\varepsilon_0, d\psi$ eines elementaren Abschnitts ds mit großer Genauigkeit nach denselben Funktionen der Schnittkräfte (N, M, Q) wie beim geraden Stabe angegeben werden kann (51). Dasselbe gilt auch für den durch zwei Längsschnitte im Abstand l begrenzten, der Quere nach gleichförmig belasteten Abschnitt des Gewölbes.

Die Belastung besteht aus Kräften und Kräftepaaren, die in der Trägerebene oder senkrecht dazu wirken. Außerdem sind Eigenspannungen aus Temperatur und Schwinden möglich. Die Schnittkräfte sind bei Abstützung des Trägers nach S. 196 dreifach statisch unbestimmt. Die Anzahl der statisch überzähligen Größen wird durch die Anordnung von Gelenken vermindert. Man verwendet den Ein-, Zwei- und Dreigelenkbogen. Die statisch bestimmte Anordnung ist in Abschn. 16 behandelt worden.

In allen drei Fällen wird oft nach derjenigen Bogenform gesucht, deren Randspannungen in jedem Querschnitt bei der ungünstigsten Belastung einander gleich und kleiner sind als ein vorgeschriebener Grenzwert, um die Festigkeitseigenschaften des homogenen Baustoffs vollständig auszunutzen. Bei einer einzelnen vorgeschriebenen Belastung wird daher deren Mittelkraftlinie mit der Bogenachse zusammenfallen oder diese in zahlreichen Punkten schneiden, sobald Eigenspannungen aus Temperaturänderung, Schwinden und Stützenbewegung wegfallen. Die Biegespannungen des Trägers sind dann Null oder nahezu Null. Um unter derselben Voraussetzung auch bei veränderlicher, gleichmäßig verteilter Nutzlast p gleich große Grenzwerte zu erhalten, wird die Mittelkraftlinie aus ständiger Last und halber Nutzlast $p/2$ als Bogenachse verwendet. Da sich diese jedoch infolge der Längskräfte und der Eigenspannungen elastisch verkürzt, wird das Ziel auf diese Weise bei statisch unbestimmter Stützung nicht erreicht und daher oft die Mittelkraftlinie der ständigen Last als Bogenachse gewählt. Durch die nachträgliche Berücksichtigung der Verkürzung bei der Formgebung läßt sich eine Verkleinerung der absoluten Grenzwerte der Randspannungen erreichen. Im übrigen ist die Bogenform durch die Abmessungen am Scheitel ($J = J_c; \alpha = 0$) und Kämpfer ($J = J_k; \alpha = \alpha_k$) bestimmt, die in eine für jedes Gewölbe ausgezeichnete Kennziffer $n = J_c/J_k \cos \alpha_k$ eingehen. Die Abmessungen der Querschnitte im Scheitel und Kämpfer werden auf Grund von Erfahrungen und Überschlagsrechnungen gewählt und stetig ineinander übergeführt.

Um die Vorzahlen und Belastungszahlen zur Berechnung der statisch unbestimmten Größen formal integrieren zu können, wird die Mittellinie $y(x)$ in einfacher Weise als Parabel, Kreisbogen oder Kettenlinie mathematisch beschrieben (S. 514 ff.). Dasselbe geschieht dann auch für das Trägheitsmoment J des Querschnitts. Die Approximation des Trägheitsmomentes J richtet sich nach dem mathematischen Ausdruck $y(x)$ der Mittellinie. Bei einem Kreisbogen ($\rho = \text{const}$) wird J konstant, bei einer Parabel wird $J_c/J \cos \alpha$ nach einer Parabel zweiter oder höherer ($2r$ -ter) Ordnung angenommen. Der Parameter r kann, falls man sich nicht von vornherein für $r = 1$ entschließt, aus Abb. 486 abgeleitet werden. In dieser

wird die Funktion $\frac{1}{1-n} \frac{J_c}{J \cos \alpha}$ des vorgeschriebenen Gewölbes mit den Funktionen $\zeta^*(n, r) = \frac{1}{1-n} - \xi^{2r}$ und angenommenem r verglichen. Bei einer Kettenlinie wird

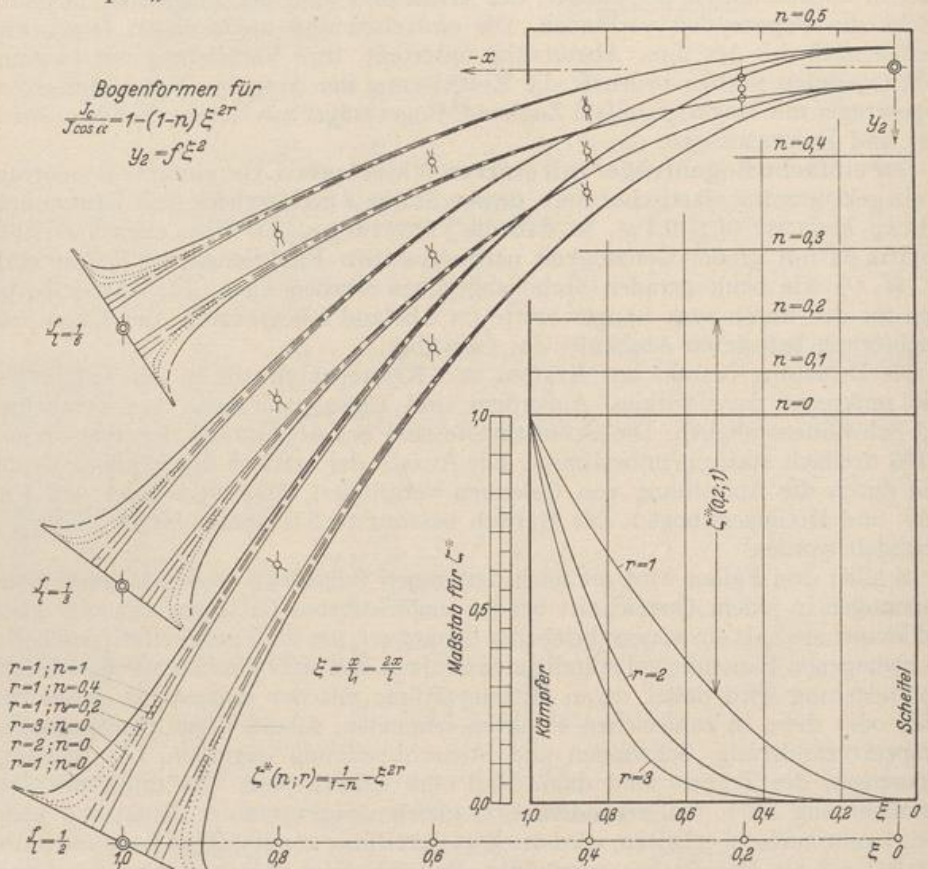


Abb. 486.

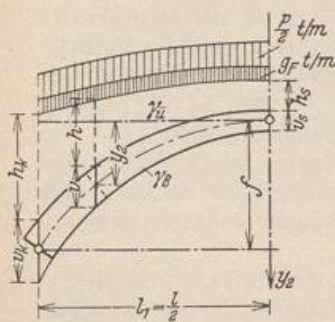


Abb. 487.

$J_c/J \cos \alpha$ durch eine hyperbolische Funktion approximiert, um einfache Integrationen zu erhalten.

Die Bogenachse als Mittelkraftlinie einer vorgeschriebenen Belastung. Die Mittelkraftlinie einer Gruppe von Kräften kann nach Abschn. 13 berechnet und aufgezeichnet werden, sobald diese, im vorliegenden Falle also die Kräfte aus Eigengewicht von Träger ($v \cdot \gamma_B$), Überbau ($h \cdot \gamma_u$) und Fahrbahntafel (g_F) bekannt sind (Abb. 487). Da aber die Bogenform zunächst bestimmt werden soll, kann die Aufgabe nur durch allmähliche Annäherung gelöst werden. Diese ist um so kürzer, je besser die erste Annahme mit dem endgültigen Ergebnis übereinstimmt. Die Stützweite ($l = l_1 + l_2$) und die Ordinate $y = f$ des

Bogens im Scheitel sind gegeben. Dasselbe kann auch für die Belastung im Scheitel (q_s) und im Kämpfer (q_k) auf Grund eines Vorentwurfs angenommen werden. Für das Brückengewölbe (Abb. 487) ist unter Berücksichtigung der halben Verkehrslast

$$q_s = \frac{1}{2} p + g_F + h_s \gamma_u + v_s \gamma_B; \quad q_k = \frac{1}{2} p + g_F + h_k \gamma_u + v_k \gamma_B. \quad (795)$$

Darnach darf die stetige Belastung eines symmetrischen Gewölbes angenähert durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$q = q_s + \frac{y_2}{f} (q_k - q_s) = \frac{1}{2} \hat{p} + g_F + h_s \gamma_{\bar{u}} + v_s \gamma_B + \frac{y_2}{f} [(h_k - h_s) \gamma_{\bar{u}} + (v_k - v_s) \gamma_B]. \quad (796)$$

Der Ansatz gilt auch für einen Bogen mit aufgelöstem Überbau und den auf die Längeneinheit bezogenen gemittelten Gewichten q_s, q_k , nur darf nicht dieselbe Übereinstimmung zwischen der angenommenen und der berechneten Bogenform, wie bei stetiger Belastung des Bogenträgers, erwartet werden.

Die Differentialgleichung der Mittelkraftlinie ist nach (93)

$$H \frac{d^2 y_2}{dx^2} = q = q_s + \frac{y_2}{f} (q_k - q_s). \quad (797)$$

Sie beschreibt eine Kettenlinie. Die Lösung liefert bei symmetrischer Belastung und symmetrischer Bogenform folgendes Ergebnis:

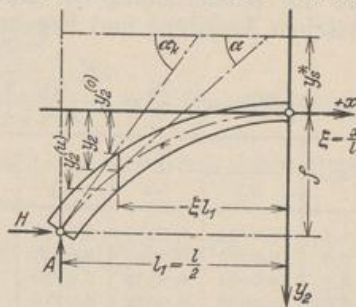


Abb. 488.

$$\left. \begin{aligned} x/l_1 = \xi; \quad q_k/q_s = \kappa = \text{Co}f c; \quad \text{Sin} c = \sqrt{\kappa^2 - 1}; \\ y_s^* = f/(\kappa - 1); \quad c = \text{ArCo}f \kappa = \ln(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}); \\ y_2 = y_s^* (\text{Co}f \xi c - 1) = y_s^* \left[\frac{(\xi c)^2}{2!} + \frac{(\xi c)^4}{4!} + \frac{(\xi c)^6}{6!} + \dots \right]; \\ \text{tg} \alpha = \frac{dy_2}{dx} = \frac{c}{l_1} y_s^* \text{Sin} \xi c = \frac{c}{l_1} y_s^* \left[\xi c + \frac{(\xi c)^3}{3!} + \frac{(\xi c)^5}{5!} + \dots \right]; \\ \text{tg} \alpha_k = \frac{c}{l_1} y_s^* \text{Sin} c; \quad \frac{y_2}{f} = \frac{\text{Co}f \xi c - 1}{\kappa - 1}; \end{aligned} \right\} \quad (798)$$

$$A = B = \int_0^{l_1} q dx = q_s \frac{l_1}{c} \text{Sin} c; \quad H = q_s \varrho_s = q_s \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{1}{y_s^*}. \quad (800)$$

$$v = v_s + (y_2/f) (v_k - v_s) \quad (\text{Abb. 487}). \quad (801)$$

Darnach wird nach der Abschätzung von q_s, q_k zunächst der für den Bogenträger charakteristische Leitwert c aus der Tabelle 39 entnommen oder nach den bekannten Funktionstafeln¹ festgestellt. Mit diesem sind die Stützkräfte $A = B, H$ und die

Tabelle 39. $c = \text{ArCo}f \kappa, \quad \kappa = q_k/q_s.$

κ	c	κ	c	κ	c	κ	c	κ	c	κ	c
—	—	2,0	1,317	3,0	1,763	4,0	2,063	6,0	2,478	8,0	2,769
1,1	0,444	2,1	1,373	3,1	1,797	4,2	2,114	6,2	2,511	8,5	2,830
1,2	0,622	2,2	1,425	3,2	1,831	4,4	2,162	6,4	2,543	9,0	2,887
1,3	0,756	2,3	1,475	3,3	1,863	4,6	2,207	6,6	2,574	9,5	2,942
1,4	0,867	2,4	1,522	3,4	1,895	4,8	2,251	6,8	2,605	10,0	2,993
1,5	0,962	2,5	1,567	3,5	1,925	5,0	2,292	7,0	2,634	11,0	3,089
1,6	1,047	2,6	1,609	3,6	1,954	5,2	2,332	7,2	2,662	12,0	3,176
1,7	1,123	2,7	1,650	3,7	1,983	5,4	2,371	7,4	2,690	13,0	3,257
1,8	1,193	2,8	1,689	3,8	2,010	5,6	2,408	7,6	2,717	14,0	3,331
1,9	1,257	2,9	1,727	3,9	2,037	5,8	2,443	7,8	2,743	15,0	3,400

¹ Taschenbuch f. Bauing. Bd. I 5. Aufl. S. 35 ff.

Ordinaten y_2 der Mittellinie bestimmt. Diese können oft auch für abgerundete Leitwerte c nach Tabelle 40 angeschrieben werden. Die Bogenlaibungen

$$y_2^{(0)} = y_2 \left(1 - \frac{v_k - v_b}{2f} \right) - \frac{v_b}{2}; \quad y_2^{(u)} = y_2 \left(1 + \frac{v_k - v_b}{2f} \right) + \frac{v_b}{2} \quad (802)$$

sind ebenfalls Kettenlinien (Abb. 488). Damit ist eine geeignete Grundlage für die Form von Träger und Überbau vorhanden, nach der die Mittellinie aus Eigengewicht oder aus Eigengewicht + $p/2$ berechnet werden kann (S. 75). Der Vergleich mit der angenommenen Kettenlinie ist in der Regel so günstig, daß die Wiederholung der Untersuchung zu keinem wesentlichen Unterschiede zwischen Annahme und Ergebnis führt.

Tabelle 40. $\frac{y_2}{f} = \frac{\text{Cof} \frac{x}{l_1} c - 1}{x - 1}$ mit $c = \text{Ar Cof } x$ und $x = \frac{q_k}{q_s}$ als Leitwert.

x	$\xi = x/l_1 =$								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,5	0,0094	0,0372	0,0840	0,1500	0,2358	0,3426	0,4708	0,6220	0,7976
2,0	0,0087	0,0349	0,0791	0,1420	0,2248	0,3288	0,4559	0,6083	0,7887
2,5	0,0081	0,0330	0,0750	0,1353	0,2153	0,3170	0,4429	0,5961	0,7804
3,0	0,0078	0,0314	0,0716	0,1296	0,2071	0,3068	0,4316	0,5852	0,7727
3,5	0,0074	0,0300	0,0686	0,1246	0,2000	0,2978	0,4215	0,5756	0,7661
4,0	0,0071	0,0288	0,0659	0,1202	0,1937	0,2898	0,4125	0,5671	0,7602
4,5	0,0069	0,0277	0,0636	0,1162	0,1881	0,2827	0,4045	0,5594	0,7548
5,0	0,0066	0,0268	0,0615	0,1128	0,1830	0,2762	0,3972	0,5523	0,7498
6,0	0,0062	0,0252	0,0579	0,1066	0,1742	0,2649	0,3843	0,5397	0,7408
7,0	0,0058	0,0237	0,0548	0,1014	0,1667	0,2552	0,3732	0,5288	0,7330
8,0	0,0055	0,0225	0,0522	0,0969	0,1602	0,2468	0,3635	0,5193	0,7261
9,0	0,0052	0,0214	0,0499	0,0930	0,1545	0,2394	0,3550	0,5107	0,7199
10,0	0,0050	0,0205	0,0479	0,0896	0,1495	0,2328	0,3472	0,5031	0,7143

Bülow, F. v., u. J. Wiggers: Zahlentafel zur günstigen Formgebung gewölbter Brücken und Durchlässe bei beliebigem Pfeilverhältnis und beliebiger Überschüttungshöhe. Beton u. Eisen 1930 S. 409.

55. Der Zweigelenkbogen.

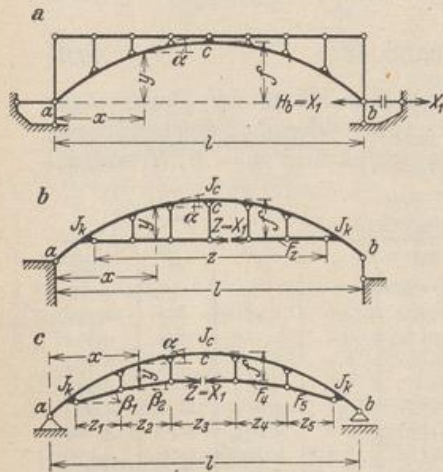


Abb. 489.

Die Gelenke des Trägers liegen in der Regel am Kämpfer. Eines von beiden ist längsbeweglich, wenn die Bogenkraft durch ein gerades oder gesprengtes Zugglied aufgenommen wird, das meist die Bogenkämpfer, in besonderen Fällen aber auch zwei beliebige Querschnitte verbindet.

Die Schnittkräfte sind einfach statisch unbestimmt, da der Verschiebungszustand des Bogenträgers in der Regel als unabhängig von dem zur Eintragung der Lasten notwendigen Überbau angesehen werden darf. Als überzählige Größe X_1 dient die Komponente H einer Stützkraft oder die waagerechte Komponente der Längskraft im Zugglied. Bei Symmetrie des Bogenträgers kann nach S. 196 auch $X_1 = 1/2 \cdot (H_a + H_b)$ gewählt werden, so daß bei Antimetrie der

Belastung $X_1 = 0$, also $H_a = -H_b$, bei Symmetrie der Belastung $X_1 = H_a = H_b$ erhalten wird. Dasselbe gilt auch bei Verwendung der Längskraft N_c im Bogen-

scheitel c als statisch unbestimmte Schnittkraft. Sie wird in jedem Falle aus der Formänderung eines statisch bestimmten Balkenträgers berechnet. Bei ruhender Belastung ist auch das Biegemoment M_c im Bogenscheitel als statisch überzählige Größe geeignet.

$$X_1 = \frac{\delta_{1\otimes}}{\delta_{11}} = \frac{\delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s}}{\delta_{11}}. \quad (803)$$

Vorzahl δ_{11} : a) Bogenträger mit zwei Kämpfergelenken (Abb. 489 a)

$$X_1 = H_b: \quad \delta_{11} = \int y^2 \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{F_c} \int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds = \delta'_{11} + \delta''_{11}. \quad (804)$$

b) Bogenträger mit geradem Zugglied (Abb. 489 b)

$$X_1 = Z: \quad \delta_{11} = \int y^2 \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{F_c} \int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds + \frac{E_b}{E_s} \frac{J_c}{F_s} z = \delta'_{11} + \delta''_{11} + \delta'''_{11}. \quad (805)$$

c) Bogenträger mit gesprengtem Zugglied (Abb. 489 c). (Ohne Berücksichtigung der Längenänderungen der Hängestangen.)

$$\begin{aligned} X_1 = Z: \quad \delta_{11} &= \int y^2 \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{F_c} \int \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha} \frac{F_c}{F} ds + \frac{J_c}{F_s} \sum z_h \sec^2 \beta_h \cdot \frac{F_s}{F_h} \\ &= \delta'_{11} + \delta''_{11} + \delta'''_{11}. \end{aligned} \quad (806)$$

Belastungsglieder:

$$\delta_{10} = \int M_0 y \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{F_c} \int N_0 \cos \alpha \frac{F_c}{F} ds = \delta'_{10} + \delta''_{10}. \quad (807)$$

$$\delta_{1t} = E J_c \alpha_t t l; \quad \delta_{1s} = -E J_c \Delta l. \quad (\text{Gleichhohe Kämpfer.}) \quad (808)$$

Darnach ist δ_{1t} bei gleichförmiger Temperaturänderung des Bogenträgers unabhängig von der Bogenform, die Verschiebung δ_{1s} bei Anordnung der Lager in gleicher Höhe unabhängig von senkrechten Verschiebungen. Die Ansätze für δ_{11} , δ_{10} werden bei beliebiger Bogenform und ständiger Belastung nach S. 95 oder 96 numerisch integriert oder zeichnerisch durch einen Verschiebungsplan des Hauptsystems nach S. 139 oder durch eine waagerechte Biegelinie bestimmt. Der Anteil $J_c/F_c \cdot \int \cos^2 \alpha F_c/F ds$ ist gegenüber dem Anteil aus den Biegemomenten klein und kann angenähert gleich $l \cdot J_c/F_c$ gesetzt werden.

Die Einflußlinie $X_1 \delta_{11} = \delta_{1m}$ wird als Biegelinie δ_{m1} des Balkenträgers für $-X_1 = 1$ mit $M_1 = 1 \cdot y$ in der Regel nach S. 131 berechnet und aufgezeichnet.

$$6 \mathfrak{B}_{k1} = c_k \frac{J_c}{J_k \cos \alpha_k} (y_{k-1} + 2y_k) + c_{k+1} \frac{J_c}{J_{k+1} \cos \alpha_{k+1}} (2y_k + y_{k+1}). \quad (809)$$

Die Mitwirkung der Längskräfte $N_1 = 1 \cdot \cos \alpha$ kann durch die elastischen Gewichte von der Form (238) untersucht werden. Sie ist jedoch ohne große Bedeutung.

Wird die Biegelinie $\delta_{m1} = H_w y_w$ nach S. 136 als Seileck zu einem Richtungsbuschel der elastischen Gewichte $6 \mathfrak{B}_{k1}$ mit der Polweite $H_w = 6 \delta_{11}$ in \mathfrak{B} -Einheiten aufgezeichnet, so sind die Ordinaten y_w des Seilecks nach S. 125 auch Ordinaten der Einflußlinie von X_1 , d. h. der Betrag der Längen y_w ist im Maßstab der Zeichnung gemessen gleichbedeutend mit dem Betrage von X_1 in t oder mt .

Die Grenzwerte der Spannungen des Querschnitts werden nach S. 28 aus den Kernmomenten und aus der Querkraft berechnet. Bei Bogenträgern mit gleich hoch liegenden Kämpfern ist

$$N = N_0 - X_1 \cos \alpha, \quad M = M_0 - X_1 y, \quad Q = Q_0 - X_1 \sin \alpha, \quad (810)$$

so daß sich der Spannungszustand zu einer vorgeschriebenen Belastung ebenso wie auf S. 174 durch $M = X_1(M_0/X_1 - y)$ angeben läßt. Die Einflußlinien

werden nach Abb. 490 folgendermaßen aufgezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} N &= \cos \alpha \left(\frac{N_0}{\cos \alpha} - X_1 \right), & N_0 &= -V_0 \sin \alpha, & N &= -\cos \alpha (V_0 \operatorname{tg} \alpha + X_1), \\ M &= y \left(\frac{M_0}{y} - X_1 \right), & Q &= \sin \alpha \left(\frac{Q_0}{\sin \alpha} - X_1 \right) = \sin \alpha (V_0 \operatorname{ctg} \alpha - X_1). \end{aligned} \right\} \quad (811)$$

M_0, V_0 sind Ordinaten der Einflußlinien für die Schnittkräfte des geraden Balkenträgers. Die Ergebnisse lassen sich nach S. 170 leicht auch für Bogenträger mit Stützpunkten in verschiedener Höhe ableiten.

Um den Einfluß der Längskräfte N_1, N_0 auf den Betrag der statisch überzähligen Schnittkraft X_1 abzuschätzen, wird für den Nenner Gl. (803):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= (1 + \nu) \int y^2 \frac{J_c}{J} ds = (1 + \nu) \delta'_{11} \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{\delta''_{11}}{\delta'_{11}}, \\ &\text{bei Bogenträgern mit Zugglied mit} \quad \nu = (\delta''_{11} + \delta'''_{11}) / \delta'_{11} \end{aligned} \right\} \quad (812)$$

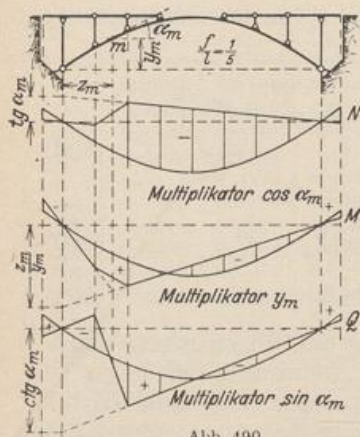


Abb. 490.

angeschrieben. Der Anteil $\nu \delta'_{11}$ der Längskräfte ist, verglichen mit demjenigen aus den Biegemomenten, stets klein und nur bei flachen Bogenträgern von Bedeutung. Er kann daher stets ohne Bedenken als Näherung für einen Kreisbogen mit gleichbleibendem Querschnitt und dem Zentriwinkel $2\alpha_0$ angegeben werden. In diesem Falle ist ($F_c/F \approx 1$)

$$\begin{aligned} \delta''_{11} &= \frac{J_c}{F_c} \int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds \\ &= \frac{J_c}{F} \frac{l}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0} + \cos \alpha_0 \right) \approx \frac{J_c}{F} l. \end{aligned} \quad (813)$$

Der Einfluß der Längskräfte auf den Betrag δ_{10} ist selbst verglichen mit deren Anteil auf δ_{11} klein und daher ohne Bedeutung.

Die Rechnung ist für einen Bogen, dessen Mittellinie mit der Mittelkraftlinie aus einer vorgeschriebenen Belastung q und zwei gleichgroßen, entgegengesetzt gerichteten Kräften $H_a = M_{0c}/f$ zusammenfällt, besonders einfach. Da $M_0 = 0, N_0 = -H_a/\cos \alpha$, ist

$$Z = H_a + X_1; \quad X_1 = - \frac{H_a \left(\frac{J_c}{F_c} \int \frac{F_c}{F} ds + \frac{E_b}{E_z} \frac{J_c}{F_z} z \right)}{(1 + \nu) \int y^2 \frac{J_c}{J} ds}; \quad M = -X_1 \cdot y, \quad (814)$$

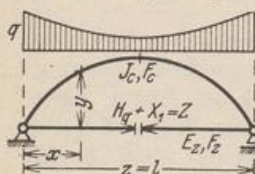


Abb. 491.

$\cos^2 \alpha \approx 1$ [gleichbedeutend mit $\delta''_{10} = 0$ in (807)] liefert:

$$\left(\frac{J_c}{F_c} \int \frac{F_c}{F} ds + \frac{E_b}{E_z} \frac{J_c}{F_z} z \right) : \int y^2 \frac{J_c}{J} ds \approx \nu; \quad (815)$$

und damit

$$X_1 = - \frac{\nu}{1 + \nu} H_a; \quad M = \frac{\nu}{1 + \nu} H_a \cdot y. \quad (816)$$

Für Bogenträger ohne Zugband ist $E_b J_c z / E_z F_z = 0$; $Z \equiv H_b$ (Abb. 491).

Bei einem Bogenträger mit einem oberhalb der Kräfte angeschlossenen Zugglied ist die in (814) verwendete Ordinate y der Abstand zwischen Bogennittellinie und Zugglied (Abb. 489b). Außerhalb dieses Bereichs sind M_1, N_1 Null, die Biegelinie δ_{m1} ist daher geradlinig.

Tabelle 41. Zweigelenkbogenträger mit analytisch bestimmter Mittellinie.

Hauptsystem (Abb. 491): Balken auf zwei Stützen, festes Lager in a . Überzählige Größe X_1 : Komponente H_b der Stützkraft oder Längskraft Z im Zugband.

1. Die Mittellinie ist eine Parabel mit $y = 4f\xi\xi'$; $\xi = x/l$. Die Stützweite des Bogenträgers ist l , der Querschnitt im Scheitel bestimmt durch J_c, F_c , am Kämpfer bestimmt durch α_k, J_k, F_k, n . Die elastischen Eigenschaften eines Zugliedes ergeben sich aus dessen Länge z , dem Querschnitt F_z , dem Elastizitätsmodul des Baustoffes E_z . Die Ansätze (804) u. (807) für δ_{11}, δ_{10} lassen sich dann formal integrieren.

a) Bogenform: $J_c/J \cos \alpha = 1; n = 1; l = z$.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad y = 4f\xi\xi', \quad \delta_{11} = \frac{8}{15}f^2l(1+\nu),$$

$$\nu = \frac{15}{8} \frac{1}{f^2} \frac{J_c}{F_c} \quad \text{oder} \quad \nu = \frac{15}{8} \frac{1}{f^2} \left(\frac{J_c}{F_c} + \frac{E_b}{E_z} \frac{J_c}{F_z} \right).$$

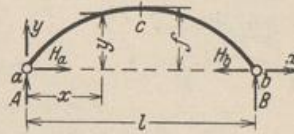
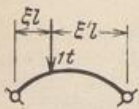


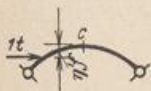
Abb. 492.

$$\delta_{1m} = \frac{fl^2}{3} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) = \frac{fl^2}{3} \omega_R (1 + \omega_R) = \frac{fl^2}{3} \omega_p', \quad (\omega_p' \text{ Tab. 22}).$$



Gleichung der Einflußlinie: $X_1 = H_a = H_b$

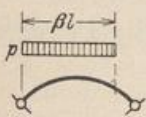
$$H_a = \frac{5}{8} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu} \omega_p'; \quad M_c = \frac{l}{8} \left(4\xi - \frac{5}{1+\nu} \omega_p' \right).$$



$$H_a = -\frac{1}{2} \left[\pm 1 + \frac{5-\eta'}{4(1+\nu)} \eta'^{\frac{3}{2}} \right];$$

$$M_c = -\frac{f\eta'}{2} \left[1 - \frac{5-\eta'}{4(1+\nu)} \sqrt{\eta'} \right].$$

$$H_a = \frac{pl^2}{16f(1+\nu)} \beta^2 (5 - 5\beta^2 + 2\beta^3).$$



$$A = \frac{pl}{2} \beta (2 - \beta),$$

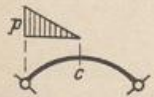
$$B = \frac{pl}{2} \beta^2.$$



$$H_a = \frac{pl^2}{8f(1+\nu)},$$

$$A = B = \frac{pl}{2},$$

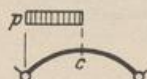
$$M_c = \frac{pl^2}{8} \frac{\nu}{1+\nu}.$$



$$H_a = 0,02279 \frac{pl^2}{f(1+\nu)},$$

$$A = \frac{5}{24} pl,$$

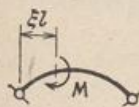
$$B = \frac{1}{24} pl.$$



$$H_a = \frac{pl^2}{16f(1+\nu)},$$

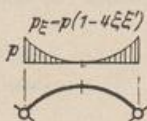
$$A = 3B = \frac{3}{8} pl,$$

$$M_c = \frac{pl^2}{16} \frac{\nu}{1+\nu}.$$



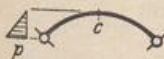
$$H_a = \frac{5}{8f} \frac{M}{1+\nu} (1 - 6\xi^2 + 4\xi^3),$$

$$A = -B = -\frac{M}{l}.$$



$$H_a = 0,02381 \frac{pl^2}{f(1+\nu)}$$

$$A = B = \frac{pl}{6}.$$

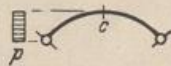


$$H_a = -0,4008 pl,$$

$$H_b = +0,0992 pl,$$

$$A = -B = -pl^2/6l,$$

$$M_c = -0,01587 pl^2.$$



$$H_a = -0,7143 pl,$$

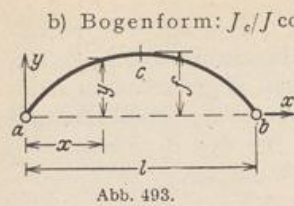
$$H_b = +0,2857 pl,$$

$$A = -B = -pl^2/2l,$$

$$M_c = -0,0357 pl^2.$$

Temperaturänderung t und Stützenverschiebung Δl :

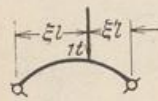
$$H_a = \frac{15 E J_c (\alpha_t t l - \Delta l)}{8 f^2 l (1 + \nu)}, \quad A = B = 0, \quad M_c = -H f.$$



$$y = 4f \xi \xi'; \quad n = J_c/J_k \cos \alpha_k; \quad l = z.$$

$$\delta_{11} = \frac{8}{15} \frac{6+n}{7} f^2 l (1+v);$$

$$v = \frac{15}{8} \frac{7}{6+n} \frac{1}{f^2} \frac{J_c}{F_c} \quad \text{oder} \quad v = \frac{15}{8} \frac{7}{6+n} \frac{1}{f^2} \left(\frac{J_c}{F_c} + \frac{E_b J_c}{E_a F_a} \right).$$



$$\delta_{1m} = \frac{f l^2}{3} \omega_p'' + \frac{f l^2}{15} (n-1)(1+\omega_R - 8\omega_R^2).$$

Gleichung der Einflußlinie: $H_a = H_b = X_1$.

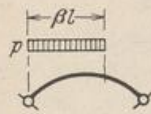
$$X_1 = \frac{l}{f(1+v)} \frac{7 \omega_R}{8(6+n)} [5(1+\omega_R) + (n-1)(1+\omega_R - 8\omega_R^2)] = \frac{l}{f(1+v)} \kappa.$$

Die Funktion κ ist symmetrisch. Sie wird für den Leitwert n und ausgezeichnete Abszissen ξl der Lastpunkte angegeben.

Funktion κ für $0,1 \leq n \leq 1,2$.

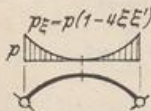
n	Werte κ für die Lastpunkte $\xi =$						
	0,1	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5
0,1	0,0585	0,1134	0,1377	0,1590	0,1710	0,1895	0,1994
0,2	0,0588	0,1138	0,1379	0,1590	0,1708	0,1890	0,1990
0,3	0,0591	0,1141	0,1382	0,1590	0,1707	0,1886	0,1986
0,4	0,0595	0,1144	0,1385	0,1590	0,1706	0,1882	0,1982
0,5	0,0598	0,1147	0,1387	0,1590	0,1705	0,1878	0,1978
0,6	0,0602	0,1150	0,1388	0,1590	0,1703	0,1874	0,1973
0,7	0,0605	0,1153	0,1389	0,1590	0,1701	0,1870	0,1968
0,8	0,0608	0,1156	0,1390	0,1590	0,1699	0,1867	0,1963
0,9	0,0610	0,1158	0,1390	0,1590	0,1697	0,1863	0,1959
1,0	0,0613	0,1160	0,1391	0,1590	0,1696	0,1860	0,1954
1,2	0,0619	0,1166	0,1392	0,1590	0,1693	0,1855	0,1948

Streckenlast p . (Für $\beta = \frac{1}{2}$ und $\beta = 1$ wird X_1 von n unabhängig. Es gelten dann die Formeln auf S. 515):



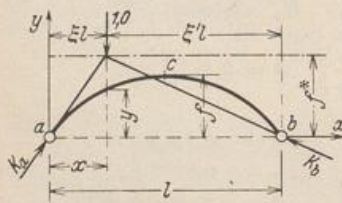
$$X_1 = \frac{p l^2}{16 f (1+v)} \frac{7}{6+n} \beta^2$$

$$\cdot \left[4 + n - 5 n \beta^2 - (8 - 10 n) \beta^3 + 8(1-n) \beta^4 \left(1 - \frac{2}{7} \beta \right) \right].$$



$$X_1 = \frac{p l^2}{36 f (1+v)} \frac{5+n}{6+n}.$$

c) Bogenform zur vereinfachten Ableitung der Einflußlinien. Ohne Rücksicht auf die vorhandene Bogenform kann zur näherungsweise Berechnung der Einflußlinien auch



$$\frac{J_c}{J \cos \alpha} \cdot y = \text{const} = f$$

und

$$\cos \alpha \frac{F_c}{F} = \text{const} = 1$$

gesetzt werden. Nach (803) ist dann mit

$$y = 4f \xi \xi', \quad \eta = y/f$$

$$X_1 = \frac{\int M_0 y \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx}{\int y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx + \frac{J_c}{F_c} \int \cos \alpha \frac{F_c}{F} dx} = \frac{f \int M_0 dx}{f \int y dx + \frac{J_c}{F_c} \int dx} = \frac{\int M_0 dx}{\frac{2}{3} f l (1+v)}; \quad v = \frac{3}{2} \frac{J_c}{F_c f^2}.$$

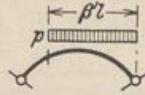
Gleichung der Einflußlinie:

$$X_1 = \frac{3}{4} \frac{l}{f} \frac{\omega_R}{1+\nu} = \frac{3}{16} \frac{l}{f(1+\nu)} \frac{y}{f} \quad (\text{Parabel.})$$

Die Stützkkräfte K_a, K_b aus $P_m = 1$ (Abb. 494) schneiden sich auf der Kämpferdrucklinie, in diesem Falle einer Parallelen zu $a \div b$ im Abstände

$$f^* = \frac{l}{H} \omega_R = \frac{4}{3} f(1+\nu), \quad H = X_1 = \frac{l}{f^*} \cdot \omega_R.$$

$$X_1 = \frac{p l^2}{8f} \frac{1}{1+\nu} \beta'^2 (3 - 2\beta'), \quad \beta' = 1,0: \quad X_1 = \frac{p l^2}{8f} \frac{1}{1+\nu}.$$



Das Ergebnis ist trotz der Vereinfachung der Integranden brauchbar. Der Fehler läßt sich für die Einflußlinie X_1 und $J_c/J \cos \alpha = 1$ anschreiben:
Mit

$$X_1 = \frac{\int M_0 y dx}{\int y^2 dx (1+\nu)} = \frac{\int M_0 dx}{\frac{2}{3} \cdot f l (1+\nu)} \left[1 + \frac{x-\chi}{1-x} \right] \quad \text{und} \quad y' = f - y,$$

$$x = \frac{\int y y' dx}{\int y dx}, \quad \chi = \frac{\int M_0 y' dx}{\int M_0 dx}, \quad \text{wird} \quad \varphi = \frac{x-\chi}{1-x} = \frac{5\omega_R - 1}{6}.$$

Der größte Fehler beträgt daher: ($\xi = \xi' = \frac{1}{3}$), $\varphi = 1/24 \approx 4\%$. Er wird für Bogenform b S. 516 mit wachsendem $n = J_c/J_k \cos \alpha$ (sichelförmige Träger) immer geringer und für $n = 10/3$ nahezu Null.

Einflußlinie des Biegemomentes im Querschnitt r :

$$\psi = \frac{3}{16} \frac{l}{f(1+\nu)}, \quad \eta_r = \frac{y_r}{f},$$

$$M_r = \psi \eta_r \left(\frac{M_{0r}}{\psi \eta_r} - y \right) = \psi \eta_r \cdot \bar{y},$$

mit

$$\frac{M_{0r,r}}{\psi \eta_r} = \frac{4}{3} f(1+\nu) = f^*$$



Abb. 495.

als ausgezeichnete Ordinate in r (Abb. 495). Die Einflußlinien der Biegemomente in den Querschnitten $r \rightarrow h$ mit ξ_h oder $\xi'_h \leq (1+\nu)/3$ erhalten daher eine Lastscheide $E_h(\epsilon_h, \epsilon'_h)$ (Abb. 496). Die Lastscheiden der übrigen Querschnitte $r \rightarrow h$ werden mit $C_k(\zeta_k, \zeta'_k)$; $E_k(\epsilon_k, \epsilon'_k)$ bezeichnet.

Bestimmung der Lastscheiden:

$$\epsilon_h = (1+\nu)/3 \xi'_h, \quad \epsilon'_h = 1 - \epsilon_h,$$

$$\epsilon_k = (1+\nu)/3 \xi'_k, \quad \epsilon'_k = 1 - \epsilon_k,$$

$$\zeta_k = 1 - \zeta'_k, \quad \zeta'_k = (1+\nu)/3 \xi_k.$$

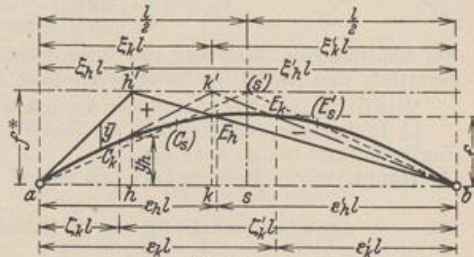


Abb. 496.

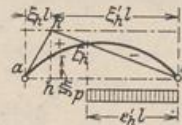
Grenzwerte der Biegemomente für gleichförmig verteilte Nutzlast.

Für $\nu = 0$ sind der positive und negative Anteil der Einflußfläche einander gleich. Daher ist für gleichförmig verteilte Nutzlast p :

$r \rightarrow h$: eine Lastscheide

$$\epsilon'_h = 1 - \frac{1}{3 \xi'_h}, \quad H_h = \frac{p l^2}{8f} \epsilon_h^2 (3 - 2 \epsilon'_h),$$

$$\max |M_h| = \frac{p l^2}{2} \epsilon_h^2 \xi_h - H_h y_h.$$



$r \rightarrow h$: zwei Lastscheiden

$$\epsilon'_k = 1 - 1/3 \xi'_k, \quad \zeta_k = 1 - 1/3 \xi_k,$$

$$H_k = \frac{p l^2}{8f} [\epsilon_k^2 (3 - 2 \epsilon'_k) + \zeta_k^2 (3 - 2 \zeta_k)],$$

$$\max |M_k| = \frac{p l^2}{2} [(\epsilon_k^2 - \zeta_k^2) \xi_k + \zeta_k^2] - H_k y_k.$$



$e'_r; \zeta_r; H_r$ und $\max |M_r|$ für $p = \text{const}$ in den Schnitten $\xi_r = 0,1 \dots 0,5$.

ξ_r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
e'_r	$\frac{17}{27}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$
ζ_r				$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
H_r	$0,690 p l^2/8 f$	$0,624 p l^2/8 f$	$0,536 p l^2/8 f$	$0,491 p l^2/8 f$	$0,519 p l^2/8 f$
$\max M_r $	$0,01123 p l^2$	$0,01587 p l^2$	$0,01508 p l^2$	$0,01109 p l^2$	$0,00925 p l^2$

2. Die Mittellinie ist ein Kreisbogen mit gleichbleibendem Querschnitt (F, J), von dem $l = 2l_1$ und f gegeben sind.

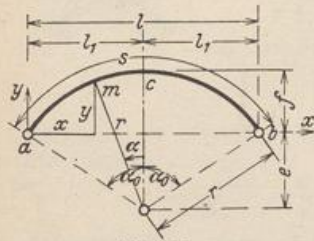


Abb. 497.

$$r = \frac{f}{2} \left[1 + \left(\frac{l_1}{f} \right)^2 \right], \quad e = r - f, \quad s = 2r\alpha_0.$$

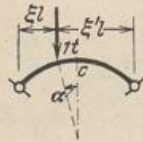
$$\sin \alpha_0 = l_1/r, \quad \cos \alpha_0 = e/r.$$

$$x = l_1 - r \sin \alpha, \quad \xi = x/l,$$

$$y = r \cos \alpha - e, \quad \eta = y/f.$$

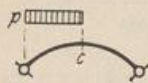
Damit wird nach (805)

$$\delta_{11} = r^3 (\alpha_0 - 3 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0) + r \frac{J}{F} (\alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) + l \frac{E_b J}{E_z F_z};$$



Einzellast $l t$ im Punkt m (α) ohne Berücksichtigung von N_0 :

$$\delta_{m1} = \frac{r l^2}{2} \omega_B + e r^2 [(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) - (\cos \alpha_0 + \alpha_0 \sin \alpha_0)].$$



Halbseitige Belastung durch p :

$$\delta_{10} = \frac{p r^4}{4} \left[\sin \alpha_0 \left(\frac{4}{3} \sin^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 \right) + \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 - 2 \sin^2 \alpha_0) \right] - \frac{p l_1^3 J}{3 r F}.$$

Bei vollständiger Belastung des Bogenträgers durch p ist δ_{10} doppelt so groß. Das Ergebnis gestattet, den Anteil der Längskräfte auch in allgemeinen Ansätzen für δ_{10}, δ_{11} abzuschätzen.

Winddruck. (Der Anteil der Längskräfte in δ_{10} wird vernachlässigt.)

a) Einseitiger Winddruck w im Bereich a bis c . Das feste Auflager von Bogenträgern mit Zugband liegt bei a . Abb. 498.

Hauptsystem: Balkenträger mit festem Auflager in a .

Für $w = w_0 \sin^2 \alpha$ winkelrecht zur Mittellinie ist: $\delta_{10} = \frac{w_0 r^4}{3} \Phi$,

$$\Phi = -\sin \alpha_0 \left(\frac{2}{3} + 3 \cos \alpha_0 - \frac{7}{6} \cos^2 \alpha_0 \right) + \alpha_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cos \alpha_0 + 2 \cos^2 \alpha_0 - \cos^3 \alpha_0 \right).$$

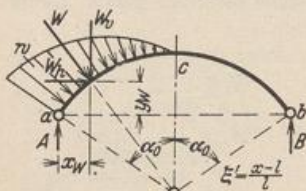


Abb. 498.

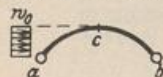
$$W_h = \frac{w_0 r}{3} [2 - \cos \alpha_0 (3 - \cos^2 \alpha_0)], \quad W_v = \frac{w_0 r}{3} \sin^3 \alpha_0.$$

$$y_w = \frac{3}{4} l_1 \frac{\sin^3 \alpha_0}{2 - \cos \alpha_0 (3 - \cos^2 \alpha_0)} - e = \frac{3}{4} l_1 \frac{W_v}{W_h} - e,$$

$$x_w = \frac{l_1}{4}.$$

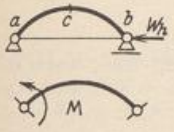
$$B = \frac{1}{l} (W_v l_1 - W_h e); \quad a \text{ bis } c: M_0 = B l \xi' + \frac{w_0 r^2}{3} (1 - \cos \alpha)^2; \quad c \text{ bis } b: M_0 = B l \xi'.$$

Für die waagerechte Belastung $w = w_0 = \text{const}$ auf die Höhe f ist $\delta_{10} = \frac{w_0 r^4}{2} \Phi$.



$$W_h = w_0 \cdot f; \quad a \text{ bis } c: M_0 = \frac{w_0 f^2}{2} (2 \eta - \xi - \eta^2); \quad c \text{ bis } b: M_0 = \frac{w_0 f^2}{2} \xi'.$$

b) Einseitiger Winddruck w im Bereich c bis b eines Bogenträgers mit Zugband. Das feste Auflager liegt bei a . Der Belastungsfall entsteht durch Überlagerung des Kräftebildes aus Belastungsfall a mit dem Kräftebild aus W_h in b . Hauptsystem wie unter a. $\delta'_{10} = 0$.



$$M_0 = W_h y; \quad \delta_{10} = -W_h r^3 (\alpha_0 - 3 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0).$$

$$\delta_{10} = -r l_1 M \left(1 - \alpha_0 \frac{c}{l_1}\right) \quad \left| \quad \delta_{1t} = E J_c \alpha_t l, \quad \delta_{1s} = E J_c \cdot \Delta l.$$

Statische Untersuchung eines Brückenträgers mit Zugband (Abb. 499).

Beispiel zur Anwendung der Tabelle 41 S. 514ff. unter Berücksichtigung folgender Ausführungsmöglichkeiten:

1. Genietetes Zugband. $F_z = F_{ez}$. Anschluß am Kämpfer vor Ausrüstung des Bogens.
2. Zugband aus Eisenbeton. Anschluß am Kämpfer vor Ausrüstung des Bogens.
3. Genietetes Zugband $F_z = F_{ez}$, vor dem Anschluß am Bogenkämpfer um die Länge Δz gereckt und nach Ausrüstung des Bogens einbetoniert.

$l = 68,00 \text{ m}, \quad f = 11,33 \text{ m}, \quad F_c = 1,39 \text{ m}^2, \quad J_c = 0,47 \text{ m}^4, \quad J_c/J \cos \alpha = 1.$
 Zugband: $F_{ez} = 0,045 \text{ m}^2, \quad F_{bz} = 1,40 \text{ m}^2, \quad F_{tz} = F_{bz} + F_{ez} \cdot E_c/E_b = 1,85 \text{ m}^2.$
 $E_b = 2100000 \text{ tm}^2,$
 $E_t/E_e = 1/10, \quad \alpha_t = 0,00061.$

A. Belastung durch gleichförmig verteiltes Eigengewicht (Gleichgewichtsgruppe q , H_0) unter Berücksichtigung des Schwindens. $q = 10,7 \text{ t/m}.$
 $H_0 = q l^2/8 f = 545,861 \text{ t};$ Schwindwirkung nach S. 35 mit $t = -15^\circ.$

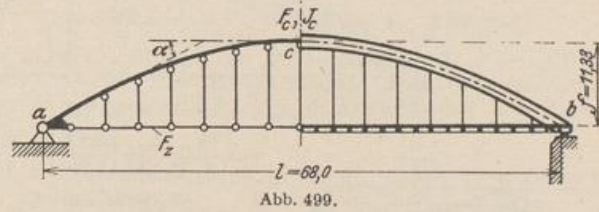


Abb. 499.

Nach (816) ist:

$$X_1 = -\frac{\nu}{1+\nu} H_0, \quad X_{1t} = \frac{15}{8} \frac{E J_c \alpha_t l}{f^2 l (1+\nu)}$$

$Z = H_0 + X_1 + X_{1t}, \quad M = -\nu (X_1 + X_{1t}), \quad \nu$ nach S. 515.

Lösung 1. $\nu = \frac{15}{8} \frac{1}{11,33^2} \left(\frac{0,47}{1,39} + \frac{1}{10} \frac{0,47}{0,045} \right) = 0,00494 + 0,01526 = 0,02020.$
 $X_1 = -10,808 \text{ t}, \quad X_{1t} = -2,120 \text{ t}, \quad Z = 532,933 \text{ t},$
 $M = +12,928 \cdot \nu, \quad \Delta z = Z l / E_e F_{ez} = 0,0383 \text{ m}.$

Einsenkung der Scheitelquerschnitte. $\delta_c = \delta_{c,1} + \delta_{c,2} + \delta_{c,3}.$ Nach (186) ist

$$\delta_{c,1} = \int \bar{M} M dx = -\frac{5}{48} f l^2 (X_1 + X_{1t}) = -5457,28 (X_1 + X_{1t}) = 70552,$$

Die Anteile $\delta_{c,2}$ und $\delta_{c,3}$ werden für einen Kreisbogen als Achse mit $r = 56,65, \cos \alpha_0 = 0,8$ und $F = F_c = \text{const}$ angegeben.

$$\delta_{c,2} = \frac{J_c}{F_c} \int \bar{N} N \frac{F_c}{F} ds = -\frac{J_c}{F_c} H_0 r \left[\ln \cos \alpha_0 - \frac{X_1 + X_{1t}}{H_0} \frac{l^2}{8 r^2} \right] \approx -\frac{J_c}{F_c} H_0 r \ln \cos \alpha_0 = 2331,$$

$$\delta_{c,3} = E J_c \int \bar{N} \alpha_t ds = -E J_c \alpha_t r (1 - \cos \alpha_0) = 1677,$$

$$\delta_c / E J_c = 0,0715 + 0,0024 + 0,0017 = 0,0756 \text{ m}.$$

Lösung 2. Die Längskraft Z des Verbundquerschnittes entfällt zum Teil auf die Rundisenbewehrung (Z_e), zum Teil auf den Betonquerschnitt (Z_b). Da hierbei nach Versuchen von E. Mörsch die mittlere Beanspruchung σ_{bz} des Betons 80 t/m^2 nicht überschreitet, ist die mittlere Zugkraft in der Stahlbewehrung $Z_e = Z - 80 F_b$. Der Ansatz für ν Seite 515 enthält die Dehnung des Zugbandes mit $F_z E_z$ für den Verbundquerschnitt. Sie wird durch die Einführung eines ideellen Elastizitätsmoduls E^* auf die Dehnung der Stahlbewehrung bezogen ($F_z E_z = F_e E^*$).

$$\frac{1}{l} \int_0^l \varepsilon ds = \frac{Z}{F_e E^*} = \frac{Z_e}{F_e E_e} \quad \text{und daher} \quad \frac{1}{F_e E^*} = \frac{1}{F_e E_e} \frac{Z_e}{Z} \approx \frac{1}{F_e E_e} \frac{H_0 - 80 F_b}{H_0} = \frac{1}{0,0566 E_e};$$

$$v = \frac{15}{8} \frac{1}{11,33^2} \left(\frac{0,47}{1,39} + \frac{1}{10} \frac{0,47}{0,0566} \right) = 0,00494 + 0,01192 = 0,01686,$$

$$X_1 = -9,050 \text{ t}; \quad X_{1t} = -2,127 \text{ t}; \quad Z = 534,684 \text{ t},$$

$$M = +11,177 \cdot y; \quad \Delta z = 0,0385 \text{ m}; \quad \delta_c/EJ_c = 0,0659 \text{ m}.$$

Lösung 3. Das Biegemoment M_c im Scheitel ist in erster Annäherung Null, wenn die Reckung Δz des Zugbandes durch Pressen so groß gewählt wird, daß $Z = H_q = 545,861 \text{ t}$. Der Beton des Zugbandes ist bei unbelasteter Brücke spannungslos.

Schwinden: $EJ_c \Delta z_1 = -EJ_c \alpha_c l = -\delta_{1t}$; Belastung q, H_q :

$$EJ_c \Delta z_2 = H_q \left[\frac{J_c}{F_c} \int \frac{F_c}{F} ds + \frac{E_b}{E_z} \frac{F_c}{F_z} z \right] \approx H_q \left[\frac{J_c}{F_c} l + \frac{E_b}{E_z} \frac{J_c}{F_z} l \right] = H_q (\delta_{11}'' + \delta_{11}''').$$

$$\delta_{11}'' = 22,9928; \quad \delta_{11}''' = 71,0222; \quad \delta_{1t} = +10067,4.$$

$$\Delta z = [H_q (\delta_{11}'' + \delta_{11}''') - \delta_{1t}] / E_c J_c = 0,0622 \text{ m}; \quad M_c \approx 0; \quad \delta_c/EJ_c = 0,0041 \text{ m}.$$

B. Veränderliche Belastung. Gleichung der Einflußlinie nach S. 515:

$$X_1 = \frac{5}{8} \frac{68,0}{11,33} \frac{1}{1+v} \omega_p'' = 3,7511 \frac{1}{1+v} \omega_p''.$$

Lösung 1. $v = 0,02020$; $X_1 = 3,6768 \omega_p''$; $\xi = 0,5$; $X_1 = 1,1490 \text{ t}$.

Lösung 2. $v = 0,01686$; $X_1 = 3,6889 \omega_p''$; $\xi = 0,5$; $X_1 = 1,1528 \text{ t}$.

Lösung 3. Die Längskraft H_q aus dem Eigengewicht wird von dem Stahlband allein aufgenommen. Für die Längskraft $Z - H_q = X_1$ aus der Verkehrsbelastung gilt das Zugband als homogener Querschnitt ($F_z E_z = F_{tz} E_b$), solange der Beton rissefrei bleibt. Daher ist

$$v = \frac{15}{8} \frac{1}{11,33^2} \left(\frac{0,47}{1,39} + 1 \frac{0,47}{1,85} \right) = 0,00494 + 0,00371 = 0,00865;$$

$$X_1 = 3,7189 \omega_p''; \quad \xi = 0,5; \quad X_1 = 1,1622 \text{ t}.$$

C. Anwendung der vereinfachten Annahmen S. 516.

Die Einflußlinie X_1 ist eine Parabel. Für Lösung 3 wird

$$v = \frac{3}{2} \frac{1}{f^2} \left(\frac{J_c}{F_c} + \frac{E_b}{E_z} \frac{J_c}{F_z} \right) = 0,00395 + 0,00302 = 0,00697.$$

$$X_1 = \frac{3}{4} \frac{l}{f} \frac{\omega_R}{1+v} = 4,470 \omega_R; \quad \xi = 0,5; \quad X_1 = 1,1175 \text{ t}.$$

Einflußlinie M_r :

$$\psi = \frac{3}{16} \frac{l}{f} \frac{1}{1+v} = 1,1175, \quad f^* = \frac{4}{3} f (1+v) = 15,2120 \text{ m},$$

$$M_r = 1,1175 \eta_r \cdot \bar{y}; \quad \eta_r = \eta_r/f \text{ (Abb. 500a)}.$$

Grenzwerte M_r : Für $v = 0$ und $p = 2,25 \text{ t/m}$ werden H_r und $\max |M_r|$ aus der Tabelle S. 518 erhalten (Abb. 500 b u. c).

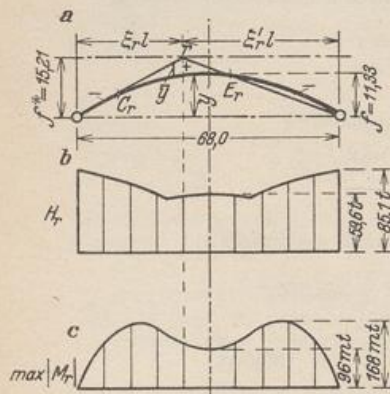


Abb. 500.

Statische Untersuchung eines Hallenbinders mit Zugband (Abb. 501).

Krümmung und Querschnitt sind konstant. Binderabstand 5,0 m. Beispiel zur Anwendung der Tabelle 41 S. 518:

$$l = 30,0 \text{ m}, \quad l_1 = 15,0 \text{ m}, \quad f = 5,6 \text{ m}, \quad J = 0,017 \text{ m}^4, \quad F = 0,320 \text{ m}^2, \quad F_z = 0,00687 \text{ m}^2.$$

$$r = \frac{5,6}{2} \left[1 + \left(\frac{15,0}{5,6} \right)^2 \right] = 22,89 \text{ m}, \quad c = 22,89 - 5,60 = 17,29 \text{ m},$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{15,0}{22,89} = 0,6553, \quad \cos \alpha_0 = \frac{17,29}{22,89} = 0,7554,$$

$$\alpha_0 \approx 40^\circ 56' 25'', \quad \text{arc } \alpha_0 = 0,7145, \quad s = 2 \cdot 22,89 \cdot 0,7145 = 32,71,$$

$$\delta_{11} = 22,89^3 (0,7145 - 3 \cdot 0,6553 \cdot 0,7554 + 2 \cdot 0,7145 \cdot 0,7554^2)$$

$$+ 22,89 \frac{0,017}{0,32} (0,7145 + 0,6553 \cdot 0,7554) + 30,0 \frac{1}{10} \frac{0,017}{0,00687}$$

$$= 538,497 + 1,471 + 7,424 = 547,392.$$

Das Ergebnis δ_{11} zerfällt in den Anteil δ'_{11} aus den Biegemomenten, den Anteil δ''_{11} aus der Längskraft im Bogen und in den Anteil δ'''_{11} aus der Längskraft im Zugband. Nach S. 514 ist

$$v = \frac{\delta'_{11} + \delta''_{11}}{\delta'_{11}} = \frac{1,471 + 7,424}{538,497} = 0,01652.$$

a) Halbseitige gleichförmige Belastung durch Schnee:

$$\delta_{10} = \delta'_{10} + \delta''_{10} = p \frac{22,89^4}{4} \left\{ 0,6553 \left(\frac{4}{3} \cdot 0,6553^2 - 0,7554^2 \right) + 0,7145 \cdot 0,7554 (1 - 2 \cdot 0,6553^2) \right\}$$

$$- p \frac{15,0^3}{3 \cdot 22,89} \frac{0,017}{0,32} = p [5316,12 - 2,61] = 5313,51 p, \quad X_1 = \delta_{10}/\delta_{11},$$

$$p = 5,0 \cdot 0,075 = 0,375 \text{ t/m}, \quad X_1 = 3,640 \text{ t}, \quad M = X_1 \left(\frac{M_0}{X_1} - y \right).$$

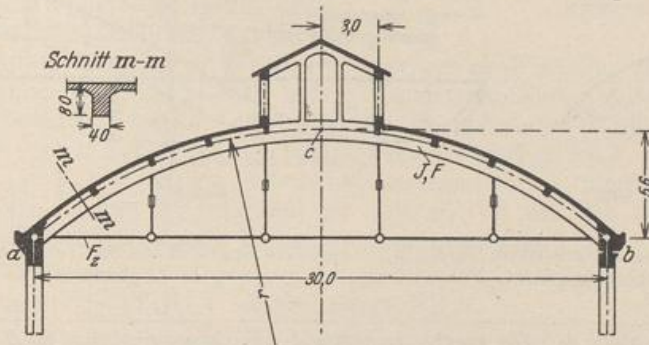


Abb. 501.

b) Gleichförmige volle Belastung des Trägers durch Eigengewicht $p = 3,6 \text{ t/m}$. Die Rechnung dient gleichzeitig zum Studium des Einflusses der Längenänderung von Bogenträger und Zugband auf die Schnittkräfte.

$$\delta'_{10} = 2 \cdot 5316,12 p, \quad \delta''_{10} = -2 \cdot 2,61 p, \quad \delta_{10} = 2 \cdot 5313,51 p,$$

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 69,890 \text{ t}, \quad M_c = \frac{3,6 \cdot 30,0^2}{8} - 69,890 \cdot 5,6 = 13,62 \text{ mt}.$$

Der Anteil δ'_{10} der Längskräfte im Zähler ist sehr klein. Ohne diesen wird

$$X_1 = \frac{\delta'_{10}}{\delta_{11}} = 69,924 \text{ t}, \quad M_c = \frac{3,6 \cdot 30,0^2}{8} - 69,924 \cdot 5,6 = 13,43 \text{ mt}.$$

Der Anteil δ''_{10} wird daher stets vernachlässigt. Dagegen spielt bei der endgültigen Festsetzung der Schnittkraft M_c das Schwinden des Baustoffes eine wichtige Rolle. Mit $t = -15^\circ$ ist nach S. 519

$$\delta_{1t} = E J_c \alpha_t t l = -170,10, \quad \bar{X}_1 = \frac{\delta_{10} + \delta_{1t}}{\delta_{11}} = 69,579 \text{ t}, \quad \bar{M}_c = 15,36 \text{ mt}.$$

Werden die Längenänderungen von Träger und Zugband bei der Bauausführung ausgeglichen, so ist

$$X_1^* = \frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = 71,079 \text{ t}, \quad M_c^* = \frac{3,6 \cdot 30,0^2}{8} - 71,079 \cdot 5,6 = 6,96 \text{ mt}.$$

Um den mit dem Betrage M_c^* verbundenen wirtschaftlichen Vorteil auszunutzen, kann das Zugglied durch Sprengung an den Hängestangen um $E J_c \Delta z = \delta_{1s}$ verkürzt werden, so daß

$$X_1 = \frac{\delta'_{10} + \delta''_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s}}{\delta'_{11} + \delta''_{11} + \delta'''_{11}} = \frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = X_1^* \quad \text{und} \quad M_c = M_c^*$$

erhalten wird. $\delta_{1s} = X_1^* (\delta'''_{11} + \delta''_{11}) - \delta'_{10} - \delta_{1t}$. Bei Eigengewicht $p = 3,6 \text{ t/m}$ ist

$$\delta_{1s} = 71,079 (1,471 + 7,424) + 18,792 + 170,100 = 821,140, \quad \Delta z = \delta_{1s}/E J_c = 0,0230 \text{ m}.$$

Die Verkürzung wird bei Anordnung des Zugbandes nach Abb. 502a durch eine Sprengung

$$f_s = \sqrt{z_1 \Delta z} = \sqrt{10,0 \cdot 0,023} = 0,480 \text{ m;}$$

bei Anordnung des Zugbandes nach Abb. 502b durch Sprengung nach einem Kreisbogen mit einem Pfeil von

$$f_s = \sqrt{\frac{3}{8} z \Delta z} = \sqrt{\frac{3}{8} \cdot 30,0 \cdot 0,023} = 0,509 \text{ m, } r_s = 221,28 \text{ m}$$

erreicht.

Die Biegemomente aus Eigengewicht und Schwinden sind in Abb. 503 bei geradem und bei nachträglich gesprengtem Zugband miteinander verglichen worden.

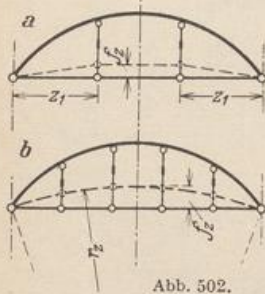


Abb. 502.

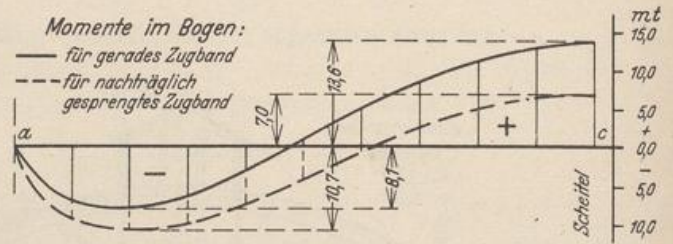


Abb. 503.

Die Erhöhung der positiven Momente bei geradem Zugband aus der Verlagerung der Bogenachse bleibt unberücksichtigt. Für nachträglich gesprengtes Zugband ist sie verschwindend klein.

Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 2. Abt. S. 513. Leipzig 1908. — Hartmann, F.: Statisch unbestimmte Systeme. Berlin 1913. — Kuball, H.: Zweigelenrahmen aus Eisenbeton mit Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes. Berlin 1920. — Troche, A.: Der Einfluß der Temperatur auf den Horizontalschub parabolischer Zweigelenbogen. Bauing. 1925. — Derselbe: Der Horizontalschub kreisförmiger Zweigelenbogen. Beton u. Eisen 1925. — Vgl. auch die Literatur auf S. 557.

56. Der beiderseits eingespannte Bogenträger.

Die Bogenform ist gegeben, der Verschiebungszustand des Trägers unabhängig von denjenigen Bauteilen, welche zur Eintragung der Lasten dienen. Die Bogenkämpfer sind auf starre Widerlager abgestützt oder elastisch in den Enden eines Balkenträgers eingespannt. Wird dieser außerdem durch Zugglieder mit dem Bogenträger verbunden, so überschreitet die Berechnung den Umfang einer einfachen statischen Aufgabe (Abschn. 58).

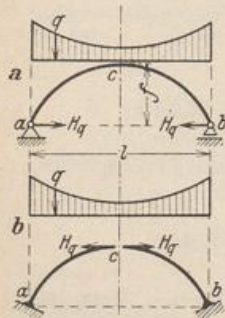


Abb. 504.

Der beiderseits eingespannte Bogenträger ist dreifach statisch unbestimmt. Die Schnittkräfte werden aus einem statisch bestimmten oder einem zweifach statisch unbestimmten Hauptsystem berechnet. Die statisch überzähligen Größen sind bei der Wahl eines Dreigelenkbogens als Hauptsystem am kleinsten, so daß nach S. 170 die besten Ergebnisse bei der Überlagerung der statisch bestimmten Anteile aus Belastung und überzähligen Größen erzielt werden. Dafür ist die Berechnung und Aufzeichnung der Einflußlinien als Biegelinie des Hauptsystems durch die Art der Randbedingungen nicht so einfach wie beim Balkenträger auf zwei Stützen und wie beim Freitragerpär. Diese werden daher als Hauptsystem in der Regel vorgezogen. Um dabei trotzdem relativ kleine überzählige Größen aus einer vorgeschriebenen Belastung q zu erhalten, wird diese durch geeignete Zusatzkräfte H_q ergänzt, die bekannt sind, untereinander im Gleichgewicht stehen und einen Anteil der inneren Kräfte des Trägers bedeuten (Abb. 504).

Ableitung der Schnittkräfte aus einem statisch bestimmten Hauptsystem.

Die überzähligen Größen X_1, X_2, X_3 sind entweder nach (475) durch eine mechanische Transformation statisch unbestimmter Schnittkräfte oder nach S. 274 als Gruppenlasten derart bestimmt, daß die Nebenglieder $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$ der Matrix der Elastizitätsgleichungen Null sind. In diesem Falle ist dann

$$X_1 = \frac{\delta_{1\infty}}{\delta_{11}}, \quad X_2 = \frac{\delta_{2\infty}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = \frac{\delta_{3\infty}}{\delta_{33}}. \quad (817)$$

Dieses einfache Ergebnis darf jedoch nur verwendet werden, wenn die Nebenbedingungen

$$\delta_{12} = 0, \quad \delta_{23} = 0, \quad \delta_{31} = 0 \quad (818)$$

nachgeprüft und vollständig erfüllt sind.

Lösung bei Symmetrie des Tragwerks.

a) Das Hauptsystem ist ein Balkenträger auf zwei Stützen (Abb. 505).

Die überzählige Größe X_1 besteht nach S. 274 aus den beiden, um die Strecke $y_{1,0}$ parallel verschobenen, statisch unbestimmten Komponenten H der Stützkkräfte, als Gruppenlast nach S. 283 aus den Kräften H und zwei gleich großen Biegemomenten $Y_{a1} = Y_{b1} = -H \cdot y_{1,0}$. Die beiden anderen, von X_1 unabhängigen überzähligen Größen X_2 und X_3 beziehen sich mit $X_1 = 0$ auf den beiderseits eingespannten Balkenträger, dessen Einspannungsmomente in a und b durch Y_a, Y_b bezeichnet werden.

$$X_2 = \frac{1}{2}(Y_a - Y_b), \quad X_3 = \frac{1}{2}(Y_a + Y_b).$$

Die Verschiebung δ_{13} ist nach S. 196 Null für

$$y_{1,0} = \int_c^a y_1 \frac{J_c}{J} ds : \int_c^a \frac{J_c}{J} ds. \quad (819)$$



Abb. 505.

b) Das Hauptsystem ist ein Freitragerpaaar (Abb. 506).

Die überzählige Größe X_1 besteht nach S. 274 aus den beiden um die Strecke $y_{2,0}$ parallel verschobenen Längskräften $-N_c$ im Bogenscheitel c oder nach S. 283 aus einer Gruppenlast, die sich aus der Längskraft $-N_c$ und dem Biegemoment $Y_{c1} = -N_c y_{2,0}$ im Bogenscheitel zusammensetzt. Die überzählige, von X_1 unabhängige Größe X_3 ist das Biegemoment Y_c im Scheitel des beiderseits eingespannten Balkenträgers.

Als überzählige Größe X_2 wird eine Funktion der Querkraft Q_c im Bogenscheitel verwendet. $X_2 = +Q_c l_1$. Die Verschiebung δ_{13} ist nach (471) Null, wenn

$$y_{2,0} = \int_c^a y_2 \frac{J_c}{J} ds : \int_c^a \frac{J_c}{J} ds. \quad (820)$$



Abb. 506.

c) Das Hauptsystem ist ein Dreigelenkbogenträger (Abb. 507).

Die statisch unbestimmten Biegemomente M_a, M_b, M_c sind nach (468) Funktionen dreier statisch überzähliger Gruppenlasten, von denen X_1 und X_3 symmetrisch, X_2 antisymmetrisch ist. Sie werden daher nach folgender Transformation angeschrieben (Abschn. 36):

$$\left. \begin{aligned} -M_a &= Y_a = X_3 + X_2 + Y_{a1} X_1; \\ -M_b &= Y_b = X_3 - X_2 + Y_{b1} X_1; \quad -M_c = Y_c = X_3 + X_1. \end{aligned} \right\} (821)$$

Infolge der Symmetrie ist

$$Y_{a1} = Y_{b1}, \quad \delta_{12} = 0, \quad \delta_{23} = 0$$



Abb. 507.

und nach S. 284 auch $\delta_{13} = 0$, wenn:

$$Y_{a1} = -\frac{\delta_{c1}}{\delta_{a1} + \delta_{b1}} = -\frac{\int y_1 \frac{J_c}{J} ds}{\int y_2 \frac{J_c}{J} ds} = -\frac{y_{1,0}}{y_{2,0}}. \quad (822)$$

Daher sind die Biegemomente infolge von $-X_1 = 1$

$$M_1 = \frac{y_1}{f} - \frac{y_2}{f} \frac{y_{1,0}}{y_{2,0}} = \frac{1}{y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0}) = \frac{1}{y_{2,0}} (y_{2,0} - y_2) = \frac{1}{y_{2,0}} y \quad (823)$$

bis auf einen konstanten Beiwert ebenso groß wie in den beiden Fällen a) und b).

Die Schnittkräfte werden nach der Begründung auf S. 522 nur für das erste und zweite Hauptsystem angegeben. Die Lösungen stimmen in formaler Beziehung überein, wenn die Einflußlinien N_0, M_0, Q_0 des Balkenträgers oder Freitragerspaars unter Beachtung der Vorzeichen aufgetragen und die Schnittkräfte N_0, M_0, Q_0 aus einer vorgeschriebenen Belastung q und den erwähnten Zusatzkräften H_q berechnet werden. $H_q = M_{0c}/f$. In diesem Ausdruck bedeutet M_{0c} das Moment der äußeren Kräfte aus der Belastung q eines Balkenträgers, bezogen auf den Schwerpunkt des Scheitelquerschnitts c .

Die Hauptglieder $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$ der Matrix der Elastizitätsgleichungen werden nach (299) gebildet.

$$\left. \begin{aligned} \text{Belastungszustand } -X_1 = 1: & \quad M_1 = y, \quad N_1 = \cos \alpha, \quad Q_1 = \sin \alpha. \\ \text{Belastungszustand } -X_2 = 1: & \quad M_2 = -x/l_1, \quad N_2 = 1/l_1 \cdot \sin \alpha, \quad Q_2 = -1/l_1 \cdot \cos \alpha. \\ \text{Belastungszustand } -X_3 = 1: & \quad M_3 = 1, \quad N_3 = 0, \quad Q_3 = 0. \\ \delta_{11} = \frac{J_c}{F_c} \int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx; & \quad \delta_{22} = \frac{J_c}{F_c} \int \frac{\sin^2 \alpha}{l_1^2} \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int \frac{x^2}{l_1^2} \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx; \\ & \quad \delta_{33} = \int \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \end{aligned} \right\} (824)$$

$$\int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds \approx l, \quad \int \frac{\sin^2 \alpha}{l_1^2} x \frac{F_c}{F} ds \approx 0.$$

Die Belastungszahlen ergeben sich nach (299) mit M_0, N_0 für die äußeren Kräfte

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} = \frac{J_c}{F_c} \int N_0 \cos \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int M_0 y \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx; & \quad \int N_0 \cos \alpha \frac{F_c}{F} ds \approx 0, \\ \delta_{20} = \frac{J_c}{F_c} \int N_0 \frac{\sin \alpha}{l_1} ds - \int M_0 \frac{x}{l_1} \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx; & \quad \int N_0 \frac{\sin \alpha}{l_1} \frac{F_c}{F} ds \approx 0, \\ & \quad \delta_{30} = \int M_0 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx. \end{aligned} \right\} (825)$$

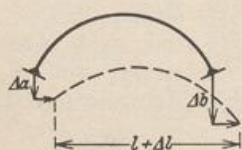


Abb. 508.

Belastungszahlen aus Temperaturänderung t , Δt und Stützenbewegung:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1t} = E J_c \left(\alpha_t t l + \int y \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds \right); \\ \delta_{2t} = 0; \quad \delta_{3t} = E J_c \int \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds. \end{aligned} \right\} (826)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1s} = E J_c [y_{1,0} (\varphi_a - \varphi_b) - \Delta l], \\ \delta_{2s} = -E J_c \left[(\varphi_a + \varphi_b) + \frac{2}{l} (\Delta a - \Delta b) \right], \\ \delta_{3s} = -E J_c (\varphi_a - \varphi_b). \end{aligned} \right\} (827)$$

Die Vorzeichen und Belastungszahlen werden bei einer beliebig vorgeschriebenen Bogenform durch numerische Integration nach S. 95, am besten mit den Rechenverfahren des Zahlenbeispiels S. 545 bestimmt.

Unter Umständen empfiehlt sich auch die Verwendung von n Stufen konstanter elastischer Wirkung nach S. 96 (Abb. 509)

$$c = e_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} = \frac{1}{n} \sum_0^l \frac{J_c}{J \cos \alpha} \Delta x \quad \text{oder} \quad \bar{c} = \bar{e}_m \frac{F_c}{F_m} = \frac{1}{n} \sum_0^l \frac{F_c}{F} \Delta x. \quad (828)$$

Dabei bedeuten die Summanden die mittleren Ordinaten einer beliebigen Unterteilung Δx des Integrationsbereiches l (also auch $l = r \cdot \Delta x$) der beiden Funktionen $J_c/J \cos \alpha$ (Abb. 509a) und F_c/F (Abb. 509b). Die Vorzahlen werden dann durch einfache Summenbildung über die mittleren Ordinaten (m') der Intervalle e_m oder \bar{e}_m erhalten (Rechenvorschrift S. 550).

$$\delta_{11} = \frac{J_c}{F_c} \bar{c} \sum_1^n \cos \alpha + c \sum_1^n y^2,$$

$$\delta_{22} = \frac{J_c}{F_c} \bar{c} \sum_1^n \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + c \sum_1^n \left(\frac{x}{l_1}\right)^2, \quad (829)$$

$$y_{2,0} = \frac{1}{n} \sum_1^n y_2, \quad \delta_{33} = n c.$$

$$\delta_{10} = \frac{J_c}{F_c} \bar{c} \sum_1^n N_0 + c \sum_1^n M_0 y,$$

$$\delta_{20} = \frac{J_c}{F_c} \bar{c} \sum_1^n N_0 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_1} - c \sum_1^n M_0 \frac{x}{l_1}, \quad (830)$$

$$\delta_{30} = c \sum_1^n M_0.$$

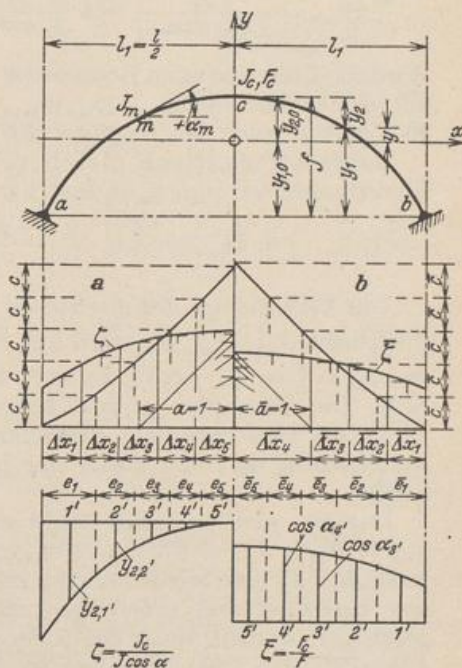


Abb. 509.

Symmetrie der Belastung: $\delta_{20} = 0, X_2 = 0, X_1 \neq 0, X_3 \neq 0, Q_c = 0.$

Antimetrie der Belastung: $\delta_{10} = 0, \delta_{30} = 0, X_1 = 0, X_3 = 0, X_2 \neq 0.$

Die Einflußlinien der überzähligen Größen stimmen bis auf einen Multiplikator mit den Biegelinien überein, welche für die Belastung $-X_1 = 1, -X_2 = 1$ oder $-X_3 = 1$ eines Balkenträgers auf zwei Stützen oder eines Freitragerpaares festgestellt werden. Dies geschieht rechnerisch oder zeichnerisch nach Abschn. 21. Dabei werden die elastischen Gewichte $\mathfrak{W}_{m1}, \mathfrak{W}_{m2}, \mathfrak{W}_{m3}$ verwendet, die nach (206) aus den stetigen elastischen Kräften $w_1 = y \cdot J_c/J \cos \alpha, w_2 = -\xi \cdot J_c/J \cos \alpha, w_3 = 1 \cdot J_c/J \cos \alpha$ entwickelt werden. Ohne Rücksicht auf die Längskräfte aus $-X_1 = 1$ usw. ist bei geometrisch verschiedenen großen Intervallen $c'_m \equiv c_m$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{W}_{m1} &= \frac{c'_m}{6} \left(y_{m-1} \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 2 y_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} \right) \\ &\quad + \frac{c'_{m+1}}{6} \left(2 y_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + y_{m+1} \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}} \right), \\ - \mathfrak{W}_{m2} &= \frac{c'_m}{6} \left(\frac{x_{m-1}}{l_1} \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 2 \frac{x_m}{l_1} \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} \right) \\ &\quad + \frac{c'_{m+1}}{6} \left(2 \frac{x_m}{l_1} \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + \frac{x_{m+1}}{l_1} \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}} \right), \\ \mathfrak{W}_{m3} &= \frac{c'_m}{6} \left(\frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 2 \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} \right) \\ &\quad + \frac{c'_{m+1}}{6} \left(2 \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (831)$$

Sonderfall geometrisch gleich großer Intervalle $c'_m = c'$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{6}{c'} \mathfrak{B}_{m1} &= y_{m-1} \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 4 y_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + y_{m+1} \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}}, \\ - \frac{6}{c'} \mathfrak{B}_{m2} &= \frac{x_{m-1}}{l_1} \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 4 \frac{x_m}{l_1} \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + \frac{x_{m+1}}{l_1} \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}}, \\ \frac{6}{c'} \mathfrak{B}_{m3} &= \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 4 \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (832)$$

Wird die Funktion w im Bereiche $(m-1) \dots (m+1)$ durch einen Parabelabschnitt mit den Ordinaten w_{m-1}, w_m, w_{m+1} ersetzt, so treten an die Stelle von (832) die \mathfrak{B} -Gewichte nach den Angaben (207).

Sonderfall elastisch gleich großer Intervalle $c = e_m J_c / J_m \cos \alpha_m$ mit den Funktionswerten $y_{m'}$, $x_{m'}/l_1$ und 1 in den Mittelpunkten m' der Intervalle e_m .

$$\frac{1}{c} \mathfrak{B}_{m1} = y_{m'}, \quad - \frac{1}{c} \mathfrak{B}_{m2} = \frac{x_{m'}}{l_1}, \quad \frac{1}{c} \mathfrak{B}_{m3} = 1. \quad (833)$$

Die Verwendung der elastischen Gewichte zur Berechnung der Ordinaten der Biegelinien $\delta_{m1}, \delta_{m2}, \delta_{m3}$ wird auf S. 550 gezeigt. Da $\delta_{12} = \int y \cdot J_c / J \cos \alpha \cdot dx = 0$ und $\delta_{13} = \int xy \cdot J_c / J \cos \alpha \cdot dx = 0$, ist $A_{w,1} = 0$; $B_{w,1} = 0$ und $Q_{w,1}$ in Bogenmitte Null. Die Tangenten an die Biegelinie der beiden Hauptssysteme infolge von $-X_1 = 1$ sind daher am Bogenkämpfer und am Bogenscheitel waagrecht. Die Verschiebung δ_{11} kann durch eine horizontale Biegelinie geometrisch nachgeprüft werden.

Dagegen sind, wie sich leicht einsehen läßt, δ_{22} und δ_{33} in den Biegelinien $\delta_{m2} = \mathfrak{M}_{w2}$, $\delta_{m3} = \mathfrak{M}_{w3}$ bereits geometrisch enthalten. Die Ordinaten der Einflußlinien X_1 usw. werden daraus nach (817), also durch Division von δ_{m1} mit δ_{11} usw. berechnet und aufgetragen. Sie können nach S. 125 auch unmittelbar aufgezeichnet werden, wenn das Richtungsbüschel der Biegelinien δ_{m1} usw. nicht die Polweite $|E J_c| \mathfrak{B}_1$ -Einheiten, sondern $|\delta_{11}| \mathfrak{B}_1$ -Einheiten erhält. Dasselbe gilt für die Einflußlinien X_2 und X_3 . Die Polweiten der beiden anderen Richtungsbüschel sind $H_{w2} = |\delta_{22}| \mathfrak{B}_2$ -Einheiten, $H_{w3} = |\delta_{33}| \mathfrak{B}_3$ -Einheiten. Der Betrag der elastischen Gewichte kann auch nach den Ansätzen S. 135 entwickelt werden.

Die Schnittkräfte des Balkenträgers oder Freitragerpaares aus einer vorgeschriebenen Belastung q , den Zusatzkräften H_q und den zugeordneten statisch überzähligen Größen sind

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 - X_1 \cos \alpha - X_2 \frac{\sin \alpha}{l_1}, & Q &= Q_0 - X_1 \sin \alpha + X_2 \frac{\cos \alpha}{l_1}, \\ M &= M_0 - X_1 y + X_2 \frac{x}{l_1} - X_3. \end{aligned} \right\} \quad (834)$$

Symmetrie der Belastung:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= 0, & Q_c &= 0, & N_c &= N_{c0} - X_1, & M_c &= M_{c0} - X_1 y_{2,0} - X_3, \\ M_a &= M_b = -X_3 + X_1 y_{1,0}, & M &= {}^{(1)}M_0 - X_1 y - X_3. \end{aligned} \right\} \quad (835)$$

Antimetrie der Belastung:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= 0, & X_3 &= 0, & M_c &= 0, & N_c &= 0, & Q_c &= Q_{c0} + X_2/l_1, \\ M_a &= -M_b = -X_2, & M &= {}^{(2)}M_0 + X_2 x/l_1. \end{aligned} \right\} \quad (836)$$

Die Buchstaben x, y bezeichnen die Koordinaten des Bezugspunktes des Biegemomentes. Die Vorzeichen richten sich nach dem Achsensystem der Abb. 505. Sie beziehen sich bei der Bildung der Kernmomente auf einen der beiden Kernpunkte des Querschnitts (vgl. S. 28).

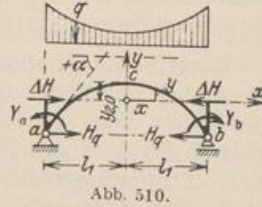
Die Biegemomente für vorgeschriebene Belastungen lassen sich nach den Regeln auf S. 71 aufzeichnen. Darnach ist mit $\xi = x/l_1$

$$M = X_1 \left(\frac{M_0 + X_2 \xi - X_3}{X_1} - y \right) = X_1 \left(\frac{M_0^{(2)}}{X_1} - y \right). \quad (837)$$

Fällt die Mittelkraftlinie aus der Belastung q und den Zusatzkräften H_q mit der Mittellinie des Bogens zusammen, so ist mit $X_1 = \Delta H$ (Abb. 510)

$$M_0 = 0, \quad N_0 = -H_q / \cos \alpha,$$

$$\left. \begin{aligned} H &= H_q + X_1, & X_1 &= -H_q \frac{J_c}{F_c} \int \frac{F_c}{F} ds / \delta_{11}, \\ M &= -X_1 y, \end{aligned} \right\} \quad (838)$$



$$\delta_{11} = \frac{J_c}{F_c} \int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int y^2 \frac{J_c}{J} ds = (1 + \nu) \int y^2 \frac{J_c}{J} ds. \quad (839)$$

Mit

$$\frac{J_c}{F_c} \int \frac{F_c}{F} ds : \int y^2 \frac{J_c}{J} ds = \frac{J_c}{F_c} \int (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \frac{F_c}{F} ds / \delta'_{11} \approx \nu \quad (840)$$

ist

$$X_1 = -\frac{\nu}{1+\nu} H_q, \quad M = \frac{\nu}{1+\nu} H_q y, \quad (841)$$

$$N = -\frac{H_q}{\cos \alpha} \frac{1 + \nu \sin^2 \alpha}{1 + \nu} \approx -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{H_q}{1 + \nu}. \quad (842)$$

Ableitung der Schnittkräfte aus einem statisch unbestimmten Hauptsystem. Die Schnittkräfte lassen sich auch aus einem statisch unbestimmten Hauptsystem mit der Längskraft $-N_c$ als überzähliger Größe X_1 in dem beiderseits eingespannten Träger entwickeln. Die Belastung erzeugt die Schnittkräfte $N_0^{(2)}, M_0^{(2)}, Q_0^{(2)}$ und die Spannungsmomente $M_{a0}^{(2)}, M_{b0}^{(2)}$, die Kräftegruppe $-X_1 = 1$ die Schnittkräfte $N_1^{(2)}, M_1^{(2)}, Q_1^{(2)}$ und die Spannungsmomente $M_{a1}^{(2)}, M_{b1}^{(2)}$. Sie werden bei beliebiger Trägerform nach (345), bei Symmetrie nach (359) mit den überzähligen Größen Y_a, Y_b eines statisch bestimmten Hauptsystems berechnet. Wird diese für die folgenden Angaben ebenso vorausgesetzt wie auf S. 523, so ist

$$\left. \begin{aligned} Y_{a0} &= \frac{1}{2} (M_{a0}^{(2)} + M_{b0}^{(2)}), & Y_{b0} &= \frac{1}{2} (M_{a0}^{(2)} - M_{b0}^{(2)}), \\ Y_{a1} &= \frac{1}{2} (M_{a1}^{(2)} + M_{b1}^{(2)}), & Y_{b1} &= \frac{1}{2} (M_{a1}^{(2)} - M_{b1}^{(2)}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (843)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{a1} &= M_{a1}^{(2)} = M_{b1}^{(2)} = -1 \cdot y_{1,0} = -\int y_1 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx : \int \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \\ X_1 &= \delta_{10}^{(2)} / \delta_{11}^{(2)}, & X_1 &= \delta_{m1}^{(2)} / \delta_{11}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (844)$$

Zähler und Nenner werden nach (305) berechnet.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10}^{(2)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_0^{(2)} \cos \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int M_0^{(2)} y \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \\ \delta_{11}^{(2)} &= \frac{J_c}{F_c} \int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int y_1 (y_1 - y_{1,0}) \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \end{aligned} \right\} \quad (845)$$

$$\delta_{1t}^{(2)} = E J_c \alpha_t t l, \quad \delta_{1s}^{(2)} = E J_c [y_{1,0} (\varphi_a - \varphi_b) - \Delta l] \quad (\text{Abb. 508}). \quad (846)$$

Die Biegelinie $\delta_{m1}^{(2)}$ des beiderseits eingespannten Trägers wird ebenso wie auf S. 525 aus der stetigen Belastung $w_1^{(2)} = y J_c / J \cos \alpha$ entwickelt.

$$N = N_0^{(2)} - X_1 \cos \alpha, \quad M = M_0^{(2)} - X_1 y, \quad Q = Q_0^{(2)} - X_1 \sin \alpha. \quad (847)$$

Bei veränderlicher Belastung sind $N_0^{(2)}, M_0^{(2)}, Q_0^{(2)}$ Einflußlinien des beiderseits eingespannten Trägers. Bei vorgeschriebener Belastung werden die Biegemomente wieder nach S. 71 aufgezeichnet.

$$M = X_1 \left(\frac{M_0^{(2)}}{X_1} - y \right). \tag{848}$$

Damit ist gleichzeitig auch die Mittelkraftlinie der Belastung unter Beachtung der vorgeschriebenen statischen Randbedingungen gefunden worden.

Elastische Einspannung des symmetrischen Bogenträgers. Die elastische Bewegung der Widerlager führt zur Erweiterung des elastischen Systems. Dasselbe gilt daher auch für die virtuellen Arbeiten $l_1 \delta_{11}, l_2 \delta_{22}, l_3 \delta_{33}$. Jeder Anschlußquerschnitt a, b des Bogenträgers verschiebt sich infolge einer hier angreifenden Kraft 1 in waagerechter Richtung um die Strecke ϵ_{11}/EJ_c , infolge eines hier angreifenden Kräftepaars um die Strecke ϵ_{12}/EJ_c . Dabei verdreht sich der Querschnitt um den Winkel ϵ_{22}/EJ_c . Die Buchstaben $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{22}$ bezeichnen daher den EJ_c -fachen Betrag der Verschiebungen. Ihr Einfluß auf den Parameter $y_{1,0}$ ist auf S. 277 abgeleitet.

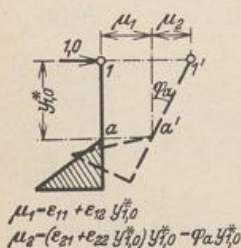


Abb. 511.

$$y_{1,0}^* = \left(\int_c^a y_1 \frac{J_c}{J} ds - \epsilon_{21} \right) : \left(\int_c^a \frac{J_c}{J} ds + \epsilon_{22} \right) \tag{Abb. 511}.$$

Die Vorzahlen des Ansatzes (824) werden in $\delta_{11}^*, \delta_{22}^*, \delta_{33}^*$ abgeändert. Sie sind nach Abb. 511

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^* &= \delta_{11} + 2 [(\epsilon_{11} + \epsilon_{12} y_{1,0}^*) + (\epsilon_{21} + \epsilon_{22} y_{1,0}^*) y_{1,0}^*], \\ \delta_{11}^* &= \delta_{11} + 2 (\epsilon_{11} + 2 \epsilon_{12} y_{1,0}^* + \epsilon_{22} y_{1,0}^{*2}), \\ \delta_{22}^* &= \delta_{22} + 2 \epsilon_{22}, \quad \delta_{33}^* = \delta_{33} + 2 \epsilon_{22}, \\ X_1 &= \delta_{10} / \delta_{11}^*, \quad X_2 = \delta_{20} / \delta_{22}^*, \quad X_3 = \delta_{30} / \delta_{33}^*. \end{aligned} \right\} \tag{849}$$

Bogenträger mit ungleich hohen Kämpfern. Die unabhängige Berechnung der drei statisch überzähligen Größen ist auf S. 274 gezeigt worden. Dasselbe Ergebnis kann auch durch die Bildung von statisch überzähligen Gruppenlasten nach Abschn. 36 erzielt werden. Der Ansatz ist auf S. 286 angeschrieben. Daneben läßt sich auch mit Vorteil der beiderseits eingespannte Balkenträger als Hauptsystem verwenden. Die Untersuchung bedarf nach den Bemerkungen auf S. 275 keiner Erläuterung.

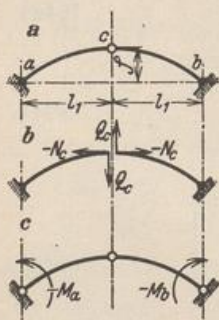


Abb. 512.

Der Eingelenkbogen. Der beiderseits eingespannte Bogenträger mit Scheitelgelenk hat nur Bedeutung für Bauwerke mit kleinem Pfeilverhältnis, deren Spannungen aus dem Schwinden des Baustoffs und aus Temperaturänderung im Vergleich zum Bogenträger ohne Gelenke vermindert werden sollen und deren Bogenstärken nächst dem Bogenscheitel nur klein sein können. Um die waagerechte Stützkraft des Eingelenkbogens herabzusetzen, kann dieser bei kleinen Stützweiten als Kragträger ausgerüstet werden. In diesem Falle entstehen waagerechte Kräfte nur aus Temperaturänderung und Nutzlast.

Die statische Untersuchung bedarf nach den ausführlichen Bemerkungen dieses Abschnitts keiner Erläuterung. Die beiden statisch überzähligen Größen können nach Abschn. 35 und 36 stets unabhängig voneinander angegeben werden. Bei Symmetrie des Tragwerks sind entweder $X_1 = -N_c, X_2 = Q_c$ äußere Kräfte eines Freitragerspaars oder $X_1 = \frac{1}{2} (M_a + M_b), X_2 = \frac{1}{2} (M_a - M_b)$ die statisch unbestimmten Gruppenlasten eines Dreigelenkbogenträgers (Abb. 512).

Besondere Bogenformen des beiderseits eingespannten Bogenträgers.

Um die Vorzeichen und die Belastungszahlen des Ansatzes formal integrieren zu können, wird die Funktion y der Mittellinie nach S. 508 als Parabel, Kreisbogen oder Kettenlinie mathematisch beschrieben und die für den Querschnitt maßgebende Funktion $J_c/J \cos \alpha = \zeta(x)$ nach

$$\zeta(x) = 1 - (1 - n) \xi^{2r} \quad (\text{Abb. 486}) \quad \text{oder} \quad \zeta(x) = \mu(1 - \varphi \mathfrak{C}_0 \xi c)$$

angenommen. Die Beiwerte n und r sind auf S. 509, die Beiwerte μ , φ und c auf S. 534 erläutert worden. Die Rechnung wird für $n = 1$ oder für $\mu = 1$ am einfachsten. Die Ergebnisse sind in Tabelle 42 enthalten.

Nach dem Ergebnis der Zahlenrechnung auf S. 538ff. stimmen die Einflußlinien der überzähligen Größen und ihr Betrag für ausgezeichnete Belastungen für die beiden Annahmen der Bogenkrümmung nach einer Parabel oder nach einer Kettenlinie nahezu überein. Sie sind also nur unwesentlich von der Bogenachse abhängig, können daher angenähert auch dann nach den einfachen Ansätzen beim Parabelbogen berechnet werden, wenn die Bogenachse nach einer Kettenlinie gekrümmt ist. Dies gilt jedoch nicht für die Wirkungslinie von X_1 , also für den Abstand $y_{1,0}$ (819) und für die Biegemomente. Diese sind von der Bogenform wesentlich abhängig und, wie zu erwarten, bei einem überschütteten Bogen mit der Kettenlinie als Achse günstiger als bei der Parabel. Dies liegt an dem Einfluß des Eigengewichts.

Tabelle 42. Beiderseits eingespannter Bogenträger mit analytisch bestimmter Mittellinie.

1. Die Mittellinie des Bogenträgers ist eine Parabel¹.

$$\xi = x/l_1, \quad \xi' = 1 - \xi,$$

$$\eta_{1,0} = y_{1,0}/f, \quad \eta_{2,0} = 1 - \eta_{1,0},$$

$$y = f(1 - \xi^2) - \eta_{1,0}.$$

Hauptsystem: Balkenträger auf zwei Stützen ($l = 2l_1$).

$$X_1 = H,$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(Y_a - Y_b),$$

$$X_3 = \frac{1}{2}(Y_a + Y_b),$$

$$A = A_0 + \frac{X_2}{l_1}, \quad B = B_0 - \frac{X_2}{l_1}, \quad M_a = X_1 y_{1,0} \mp X_2 - X_3.$$

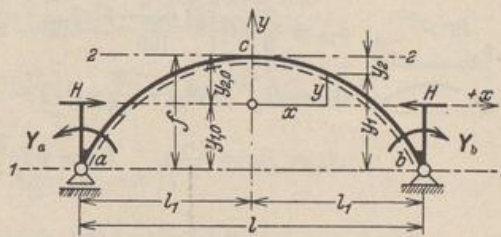


Abb. 513.

Die Integration der Ansätze (824ff.) liefert in Verbindung mit (819) folgende Ergebnisse:

a) Bogenform mit $J_c/J \cos \alpha = 1 - (1 - n) \xi^{2r}$,

$$r = 1, 2, 3 \dots \infty, \quad n = J_c/J_a \cos \alpha_a \quad (\text{Abb. 486}).$$

$$\eta_{1,0} = \frac{2}{3} \frac{4r(2+r) + 3n}{(3+2r)(n+2r)}, \quad \eta_{2,0} = 1 - \eta_{1,0} = \frac{1}{3} \frac{(1+2r)(3n+2r)}{(3+2r)(n+2r)},$$

$$\cos^2 \alpha \approx 1: \quad v = \frac{J_c}{F_c} \frac{2l_1}{\delta_{11}} = \frac{J_c}{F_c} f^2 \frac{1}{\left[\frac{8}{15} - \frac{8(1-n)}{(1+2r)(3+2r)(5+2r)} - \eta_{1,0}^2 \left(1 - \frac{1-n}{1+2r} \right) \right]},$$

$$\delta_{11} = 2l_1 f^2 (1+v) \left[\frac{8}{15} - \frac{8(1-n)}{(1+2r)(3+2r)(5+2r)} - \eta_{1,0}^2 \left(1 - \frac{1-n}{1+2r} \right) \right],$$

$$\delta_{22} = 2l_1 \left[\frac{1}{3} - \frac{1-n}{3+2r} \right], \quad \delta_{33} = 2l_1 \left[1 - \frac{1-n}{1+2r} \right].$$

¹ Anwendung: Beispiel S. 535 und S. 538.

Beyer, Baustatik, 2. Aufl., 2. Neudruck.

Gleichungen der Biegelinien:

$$\frac{d^2 \delta_{m1}}{dx^2} = -\gamma_2 [1 - (1-n)\xi^{2r}], \quad \frac{d^2 \delta_{m2}}{dx^2} = +\frac{x}{l_1} [1 - (1-n)\xi^{2r}],$$

$$\frac{d^2 \delta_{m3}}{dx^2} = -[1 - (1-n)\xi^{2r}].$$

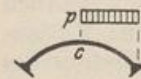
Die Integration ergibt

$$\delta_{m1} = \frac{l_1^3}{12} f \left\{ 6\eta_{2,0}(1-\xi^2) - (1-\xi^4) - 6(1-n) \left[\frac{\eta_{2,0}}{1+2r} \frac{1-\xi^{2(1+r)}}{1+r} - \frac{1}{3+2r} \frac{1-\xi^{2(2+r)}}{2+r} \right] \right\},$$

$$\delta_{m2} = -\frac{l_1^3}{6} \xi \left[(1-\xi^2) - \frac{3(1-n)}{3+2r} \frac{1-\xi^{2(1+r)}}{1+r} \right],$$

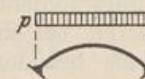
$$\delta_{m3} = \frac{l_1^3}{2} \left[(1-\xi^2) - \frac{1-n}{1+2r} \frac{1-\xi^{2(1+r)}}{1+r} \right].$$

Belastungszahlen für besondere Belastungsfälle:



$$\delta_{10} = \frac{p l_1^3}{4f} \frac{1}{1+\nu} \delta_{11},$$

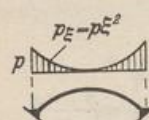
$$\delta_{20} = -\frac{p l_1^3}{24} \left[1 - \frac{6(1-n)}{(3+2r)(2+r)} \right],$$

$$\delta_{30} = \frac{p l_1^3}{3} \left[1 - \frac{3(1-n)}{(1+2r)(3+2r)} \right],$$


$$\delta_{10} = \frac{p l_1^3}{2f} \frac{1}{1+\nu} \delta_{11},$$

$$\delta_{20} = 0,$$

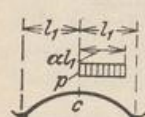
$$\delta_{30} = \frac{2}{3} p l_1^3 \left[1 - \frac{3(1-n)}{(1+2r)(3+2r)} \right],$$



$$\delta_{10} = \frac{2}{3} f l_1^3 \left[\frac{21\eta_{2,0}-5}{105} - (1-n) \left(\frac{\eta_{2,0}}{(1+2r)(5+2r)} - \frac{1}{(3+2r)(5+2r)} \right) \right],$$

$$\delta_{20} = 0, \quad \delta_{30} = \frac{2}{15} p l_1^3 \left[1 - \frac{5(1-n)}{(1+2r)(5+2r)} \right],$$

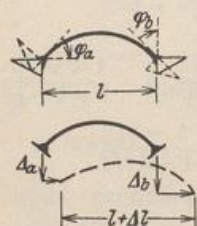
$$A_0 = B_0 = \frac{p l_1}{3}; \quad V_0 = p l_1 \frac{\xi^3}{3}; \quad M_0 = \frac{p l_1^2}{12} (1-\xi^4).$$



$$\delta_{20} = -\frac{p l_1^3}{12} \alpha^2 \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) - \frac{3(1-n)}{(3+2r)(1+r)} \left(1 - \frac{\alpha^{2(1+r)}}{2+r} \right) \right];$$

$$\delta_{30} = +\frac{p l_1^3}{2} \alpha \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) - \frac{1-n}{(1+2r)(1+r)} \left(1 - \frac{\alpha^{2(1+r)}}{3+2r} \right) \right];$$

$$\delta_{10} = \frac{p l_1^3 f}{12} \left\{ 6\eta_{2,0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) - \left(1 - \frac{\alpha^4}{5} \right) - 6(1-n) \left[\frac{\eta_{2,0}}{(1+2r)(1+r)} \left(1 - \frac{\alpha^{2(1+r)}}{3+2r} \right) - \frac{1}{(3+2r)(2+r)} \left(1 - \frac{\alpha^{2(2+r)}}{5+2r} \right) \right] \right\};$$



$$\delta_{1s} = +E J_c [(\varphi_a - \varphi_b) \eta_{1,0} f - \Delta l]; \quad l = 2l_1;$$

$$\delta_{2s} = -E J_c [(\varphi_a + \varphi_b) + \frac{2}{l} (\Delta_a - \Delta_b)];$$

$$\delta_{3s} = -E J_c (\varphi_a - \varphi_b);$$

$$\delta_{1t} = E J_c \alpha_s t l; \quad \delta_{2t} = \delta_{3t} = 0.$$

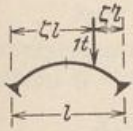
b) Bogenform mit $J_c/J \cos \alpha = 1 - (1 - n) \xi^2$; $n = J_c/J_a \cos \alpha_a$ (Abb. 486).

$$\eta_{1,0} = \frac{2}{5} \frac{4+n}{2+n}; \quad \nu = \frac{175}{4} \frac{J_c}{F_c \cdot f^2} \frac{2+n}{n(8+n)+8/3};$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{175} l f^2 (1+\nu) \frac{n(8+n)+8/3}{2+n};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{15} l(2+3n); \quad \delta_{33} = \frac{1}{3} l(2+n).$$

Gleichungen der Einflußlinien:

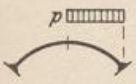


$$X_1 = \frac{35}{4} \frac{l}{f} \xi^2 \xi'^2 \frac{3n(4+n)+8(1-n)(2+n)\xi\xi'}{[3n(8+n)+8](1+\nu)};$$

$$X_2 = -\frac{l}{2} \xi \xi' (1-2\xi') \left(1 + 6\xi' \xi \frac{1-n}{2+3n}\right);$$

$$X_3 = \frac{l}{2} \xi \xi' \left(1 + 2\xi' \xi \frac{1-n}{2+n}\right).$$

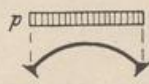
Besondere Belastungsfälle:



$$X_1 = \frac{p l^2}{16f} \frac{1}{1+\nu};$$

$$X_2 = -\frac{p l^2}{64} \frac{3+2n}{2+3n};$$

$$X_3 = \frac{p l^2}{40} \frac{4+n}{2+n}.$$



$$X_1 = \frac{p l^2}{8f} \frac{1}{1+\nu};$$

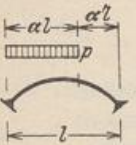
$$X_2 = 0;$$

$$X_3 = \frac{p l^2}{20} \frac{4+n}{2+n}.$$



$$X_1 = \frac{p l^2}{72f} \frac{1}{1+\nu} \frac{8(1+4n)+5n^2}{3n(8+n)+8};$$

$$V_0, M_0 \text{ (S. 530). } X_2 = 0; \quad X_3 = \frac{1}{420} p l^2 \frac{16+5n}{2+n}.$$



$$X_2 = \frac{p l^2}{4} \alpha^2 \alpha'^2 \left(1 + 4 \frac{1-n}{2+3n} \alpha \alpha'\right);$$

$$X_3 = \frac{p l^2}{60} \alpha^2 \left\{5(1+2\alpha') + 2 \frac{1-n}{2+n} \alpha [1+3\alpha'(1+2\alpha')]\right\};$$

$$X_1 = \frac{p l^2}{8f} \alpha^3 \frac{7n(4+n)[1+3\alpha'(1+2\alpha')] + 4(1-n)(2+n)\alpha\{1+2\alpha'[2+5\alpha'(1+2\alpha')]\}}{[3n(8+n)+8](1+\nu)}.$$

Temperaturänderung und Stützensenkung wie unter 1, a) S. 530.

c) Bogenform mit $J_c/J \cos \alpha = 1$ (Abb. 486).

$$\eta_{1,0} = \frac{2}{3}; \quad \nu = \frac{45}{4} \frac{J_c}{F_c f^2}; \quad \delta_{11} = \frac{4}{45} l f^2 (1+\nu); \quad \delta_{22} = \frac{l}{3}; \quad \delta_{33} = l.$$

Gleichungen der Einflußlinien: (Abb. 514, S. 532).

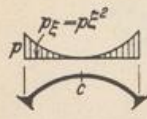
$$X_1 = \frac{15}{4} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu} \xi^2 \xi'^2; \quad X_2 = -\frac{l}{2} \xi \xi' (1-2\xi'); \quad X_3 = \frac{l}{2} \xi \xi'.$$

$$A = \xi'^2 (1+2\xi); \quad B = \xi^2 (1+2\xi'); \quad H = X_1.$$

$$M_a = l \xi \xi'^2 \left[\frac{5}{2(1+\nu)} \xi - 1 \right]; \quad M_b = l \xi^2 \xi' \left[\frac{5}{2(1+\nu)} \xi' - 1 \right];$$

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}; \quad M_c = \frac{l}{2} \xi^2 \left[1 - \frac{5}{2(1+\nu)} \xi'^2 \right].$$

Besondere Belastungsfälle:



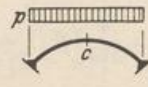
$$A = B = \frac{pl}{6},$$

$$H = \frac{pl}{56} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu},$$

$$M_a = M_b = -\frac{pl^2}{420} \frac{7\nu+2}{1+\nu},$$

$$M_c = -\frac{pl^2}{1680} \frac{3-7\nu}{1+\nu}.$$

$$\nu = 0: \max M_m = +\frac{pl^2}{509}; \zeta_m = 0,233.$$

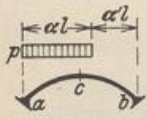


$$A = B = \frac{pl}{2},$$

$$H = \frac{pl}{8} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu};$$

$$M_a = M_b = -\frac{pl^2}{12} \frac{\nu}{1+\nu},$$

$$M_c = +\frac{pl^2}{24} \frac{\nu}{1+\nu}.$$



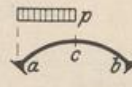
$$A = \frac{pl}{2} \alpha [1 + \alpha' (1 + \alpha \alpha')];$$

$$B = \frac{pl}{2} \alpha^2 (1 - \alpha'^2),$$

$$H = \frac{pl^2}{8f} \alpha^3 \frac{1 + 3\alpha'(1 + 2\alpha')}{1 + \nu},$$

$$M_a = -\frac{pl^2}{12} \alpha^2 \frac{6\alpha'^3 + \nu(1 + 2\alpha' + 3\alpha'^2)}{1 + \nu},$$

$$M_b = \frac{pl^2}{12} \alpha^3 \frac{6\alpha'^2 - \nu(1 + 3\alpha')}{1 + \nu}.$$



$$A = \frac{13}{32} pl,$$

$$B = \frac{3}{32} pl,$$

$$H = \frac{pl}{16} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu},$$

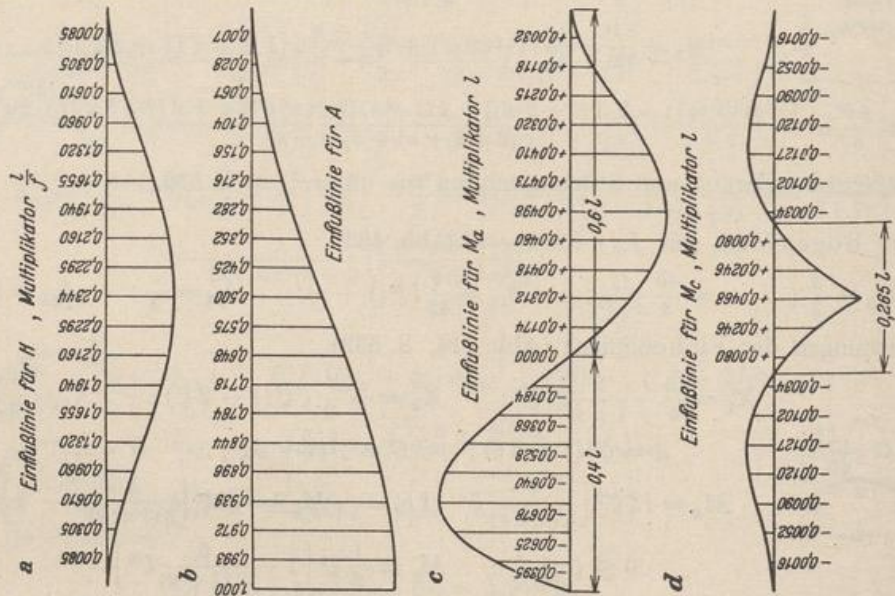
$$M_a = -\frac{pl^2}{192} \frac{3 + 11\nu}{1 + \nu},$$

$$M_b = \frac{pl^2}{192} \frac{3 - 5\nu}{1 + \nu},$$

$$M_c = \frac{pl^2}{48} \frac{\nu}{1 + \nu}.$$

Temperaturänderung und Stützensenkung wie unter 1, a), S. 530.

Abb. 514. Einflußlinien für Bogen mit $Jc/J\cos\alpha = 1$ (S. 531).



2. Die Mittellinie des Bogenträgers ist ein symmetrischer Kreisbogen mit $l = 2 l_1$, f und $2 \alpha_0$ (Abb. 515)¹.

$$\xi = x/l_1, \quad \xi' = 1 - \xi,$$

$$ds = r d\alpha.$$

$$r = \frac{f}{2} \left[1 + \left(\frac{l_1}{f} \right)^2 \right], \quad e = r - f,$$

$$\sin \alpha_0 = l_1/r, \quad \cos \alpha_0 = e/r.$$

$$x = r \cdot \sin \alpha,$$

$$y_1 = r (\cos \alpha - \cos \alpha_0).$$

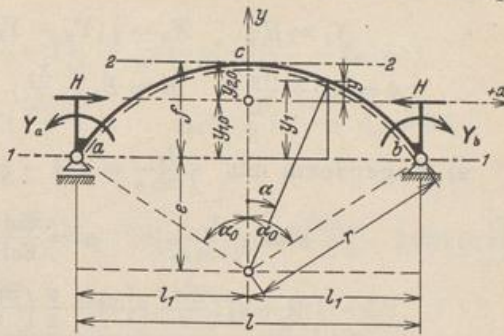


Abb. 515.

Hauptsystem: Balkenträger auf zwei Stützen ($l = 2 l_1$)

$$X_1 = H, \quad X_2 = \frac{1}{2} (Y_a - Y_b), \quad X_3 = \frac{1}{2} (Y_a + Y_b),$$

$$A = A_0 + \frac{X_2}{l_1}, \quad B = B_0 - \frac{X_2}{l_1}, \quad M_b^a = X_1 y_{1,0} \mp X_2 - X_3.$$

Die Bogenstärke wird konstant angenommen: $J_c/J = 1$.

$$y_{1,0} = r \left(\frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} - \cos \alpha_0 \right), \quad y = r \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \right].$$

$$\delta_{11} = 2 \int_0^{\alpha_0} y^2 ds = r^3 \alpha_0 \left[1 + \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \cos \alpha_0 - 2 \left(\frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \right)^2 \right] + \frac{J}{F} r \alpha_0 \left(1 + \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \cos \alpha_0 \right),$$

$$\delta_{22} = 2 \int_0^{\alpha_0} \left(\frac{x}{l_1} \right)^2 ds = \frac{r \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0} \left(1 - \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \cos \alpha_0 \right); \quad \delta_{33} = 2 \int_0^{\alpha_0} ds = 2 r \alpha_0.$$

Die Einflußlinien ergeben sich aus den Biegelinien δ_{m1} , δ_{m2} , δ_{m3} , deren Gleichungen nach (195) angeschrieben werden.

$$\frac{d^2 \delta_{m1}}{dx^2} = - \frac{\left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \right)}{\cos \alpha}, \quad \frac{d^2 \delta_{m2}}{dx^2} = \frac{r \sin \alpha}{l_1 \cos \alpha}, \quad \frac{d^2 \delta_{m3}}{dx^2} = - \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Durch Integration ist mit Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$\delta_{m1} = r^3 \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \left[(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) - (\cos \alpha_0 + \alpha_0 \sin \alpha_0) + \frac{\alpha_0}{2 \sin \alpha_0} (\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha) \right],$$

$$\delta_{m2} = - \frac{r^2}{2 \sin \alpha_0} \left[(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha) - \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} (\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \alpha_0) \right],$$

$$\delta_{m3} = r^2 [(\cos \alpha_0 + \alpha_0 \sin \alpha_0) - (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha)].$$

3. Die Mittellinie des Bogenträgers ist eine symmetrische Kettenlinie²:

$$y_2 = y_s^* (\text{Cof} \xi c - 1), \quad \xi = x/l_1.$$

Sie ist bestimmt durch $l = 2 l_1$, f und die Belastungshöhen im Scheitel q_s , im Kämpfer q_k . Verhältnis $q_k/q_s = \kappa$. Abb. 487.

$$y_s^* = \frac{1}{\kappa - 1} f,$$

$$c = \text{ArCof} \kappa,$$

$$\text{Cof} c = \kappa, \quad \text{Sin} c = \sqrt{\kappa^2 - 1}.$$

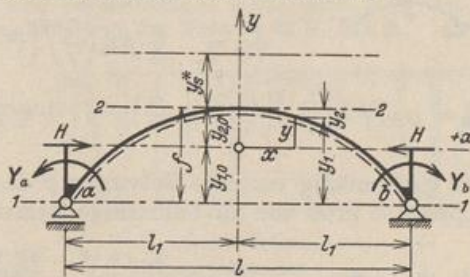


Abb. 516.

¹ Wegen der Fehlerempfindlichkeit der Formeln empfiehlt sich die Verwendung einer Rechenmaschine.

² Anwendung: Beispiel S. 540.

Hauptsystem: Balkenträger auf zwei Stützen ($l = 2l_1$)

$$X_1 = H, \quad X_2 = \frac{1}{2}(Y_a - Y_b), \quad X_3 = \frac{1}{2}(Y_a + Y_b).$$

$$A = A_0 + \frac{X_2}{l_1}, \quad B = B_0 - \frac{X_2}{l_1}, \quad M_0^a = X_1 y_{1,0} \mp X_2 - X_3.$$

a) Bogenform mit $\frac{J_c}{J \cos \alpha} = \mu (1 - \varphi \mathfrak{Cof} \xi c)$,

$$n = \frac{J_c}{J_a \cos \alpha_a}, \quad \mu = \frac{\mathfrak{Cof} c - n}{\mathfrak{Cof} c - 1}, \quad \varphi = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

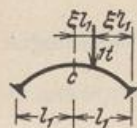
$$y_{2,0} = y_s^* \frac{(1 + \varphi) \left(\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} - 1 \right) - \frac{\varphi}{2} \left(\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \mathfrak{Cof} c - 1 \right)}{1 - \varphi \frac{\mathfrak{Sin} c}{c}}, \quad \psi = 1 + \frac{y_{2,0}}{y_s^*}.$$

Zur Abschätzung des Einflusses der Längskräfte genügen die Werte ν für parabolisch gekrümmte Mittellinie und gleich großes n der Tabelle 42, 1, b) S. 531.

$$\delta_{11} = 2 \mu l_1 y_s^{*2} (1 + \nu) \left[\psi^2 - 2 \psi \left(1 + \frac{\varphi \psi}{2} \right) \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} + \frac{1}{2} (1 + 2 \varphi \psi) \left(\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \mathfrak{Cof} c + 1 \right) - \frac{\varphi}{3} \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} (2 + \mathfrak{Cof}^2 c) \right],$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{3} \mu l_1 \left\{ 1 - 3 \varphi \left[\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} + \frac{2}{c^2} \left(\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} - \mathfrak{Cof} c \right) \right] \right\}, \quad \delta_{33} = 2 \mu l_1 \left(1 - \varphi \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \right).$$

Gleichungen der Biegelinien:

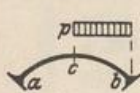


$$\delta_{m1} = \frac{\mu}{2} y_s^* \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left\{ \left[c^2 \left(\psi + \frac{\varphi}{2} \right) - 2 (1 + \varphi \psi) \mathfrak{Cof} c + \frac{\varphi}{4} \mathfrak{Cof} 2c \right] - \left[\left(\psi + \frac{\varphi}{2} \right) (\xi c)^2 - 2 (1 + \varphi \psi) \mathfrak{Cof} \xi c + \frac{\varphi}{4} \mathfrak{Cof} 2 \xi c \right] \right\},$$

$$\delta_{m2} = -\frac{\mu}{6c} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \xi c \left\{ \left[c^2 - 6 \varphi \left(\mathfrak{Cof} c - 2 \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \right) \right] - \left[(\xi c)^2 - 6 \varphi \left(\mathfrak{Cof} \xi c - 2 \frac{\mathfrak{Sin} \xi c}{\xi c} \right) \right] \right\},$$

$$\delta_{m3} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left\{ \left[c^2 - 2 \varphi \mathfrak{Cof} c \right] - \left[(\xi c)^2 - 2 \varphi \mathfrak{Cof} \xi c \right] \right\}.$$

Besondere Belastungsfälle:



$$\delta_{20} = -\frac{\mu}{24} p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left[c^2 - 12 \varphi \left(\mathfrak{Cof} c - 4 \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} + 6 \frac{\mathfrak{Cof} c - 1}{c^2} \right) \right],$$

$$\delta_{30} = \frac{\mu}{3} p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left[c^2 - 3 \varphi \left(\mathfrak{Cof} c - \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \right) \right],$$

$$\delta_{10} = \mu y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left[\frac{c^2}{3} \left(\psi + \frac{\varphi}{2} \right) - (1 + \varphi \psi) \left(\mathfrak{Cof} c - \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \right) + \frac{\varphi}{8} \left(\mathfrak{Cof} 2c - \frac{\mathfrak{Sin} 2c}{2c} \right) \right].$$

Für gleichmäßig verteilte Belastung p des ganzen Trägers ist $\delta_{20} = 0$, δ_{10} und δ_{30} doppelt so groß wie für halbseitige Belastung.



$$H_a = \frac{q_s}{y_s^*} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2; \quad (\text{S. 511}) \quad M = \frac{\nu}{1 + \nu} H_a \cdot y;$$

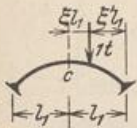
$$N = -\frac{H_a}{\cos \alpha} \frac{1 + \nu \sin^2 \alpha}{1 + \nu} \approx -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{H_a}{1 + \nu}; \quad (\text{S. 527}).$$

b) Bogenform mit $\frac{J_c}{J \cos \alpha} = 1$.

$$\eta_0 = 1 - \frac{\gamma_{2,0}}{f}, \quad \gamma_{2,0} = y_s^* \left(\frac{\sin c}{c} - 1 \right); \quad y = y_s^* \left(\frac{\sin c}{c} - \cos \xi c \right).$$

$$\delta_{11} = l_1 y_s^{*2} (1 + \nu) \left[1 + \frac{\sin c}{c} \cos c - 2 \left(\frac{\sin c}{c} \right)^2 \right]; \quad \delta_{22} = \frac{2}{3} l_1; \quad \delta_{33} = 2 l_1.$$

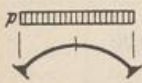
Gleichungen der Einflußlinien:



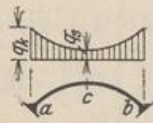
$$X_1 = \frac{y_s^*}{2} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{1}{\delta_{11}} \left[\left(c^2 \frac{\sin c}{c} - 2 \cos c \right) - \left((\xi c)^2 \frac{\sin c}{c} - 2 \cos \xi c \right) \right];$$

$$X_2 = -\frac{l_1}{4} \xi (1 - \xi^2) = -\frac{l_1}{4} \omega_D; \quad X_3 = \frac{l_1}{4} (1 - \xi^2).$$

Besondere Belastungsfälle:



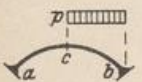
$$X_2 = 0; \quad X_3 = \frac{p l_1^2}{3};$$



$$H_a = \frac{q_s}{y_s^*} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2;$$

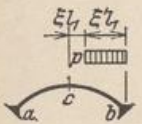
$$M = \frac{\nu}{1 + \nu} H_a \cdot y;$$

$$X_1 = y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{2}{\delta_{11}} \left[\left(1 + \frac{c^2}{3} \right) \frac{\sin c}{c} - \cos c \right]. \quad N \approx -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{H_a}{1 + \nu} \text{ (s. unter a).}$$



$$X_1 = y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{1}{\delta_{11}} \left[\left(1 + \frac{c^2}{3} \right) \frac{\sin c}{c} - \cos c \right];$$

$$X_2 = -\frac{p l_1^2}{16}; \quad X_3 = \frac{p l_1^2}{6}.$$



$$X_1 = y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{1}{\delta_{11}} \times \left[\left(1 + \frac{c^2}{3} \right) \frac{\sin c}{c} - \cos c - \frac{\sin \xi c - \xi c \cos c}{c} + \frac{c^2}{6} \xi (\xi^2 - 3) \frac{\sin c}{c} \right];$$

$$X_2 = -\frac{p l_1^2}{16} (1 - \xi^2)^2; \quad X_3 = \frac{p l_1^2}{12} \xi'^2 (3 - \xi').$$

Temperaturänderung und Stützensenkung wie unter 1, a) S. 530.

Statische Untersuchung eines beiderseits eingespannten Gewölbes (Abb. 517) mit parabolisch gekrümmter Mittellinie und verschiedenen Annahmen über die Bogenform als Beispiel für die Anwendung der Tabelle 42 S. 529 ff.

$$y_1 = f(1 - \xi^2).$$

Der Querschnitt ist nach S. 510 bestimmt durch

$$J_c / J \cos \alpha = 1 - (1 - n) \xi^{2r}.$$

Die Untersuchung wird durchgeführt für

$$n = J_c / J_k \cos \alpha_k = 0$$

und veränderliches r ($r = 1, 2, 3$ und ∞). $r = \infty$

liefert mit $J_c / J \cos \alpha = 1$ dieselbe Bogenform

wie $n = 1$. Die geometrische Bedeutung der

Annahmen für die Bogenform zeigt Abb. 486 S. 510. Die Zahlenrechnung nach S. 529 wird für

$r = 2$ angegeben, im übrigen auf die Mitteilung der Ergebnisse beschränkt.

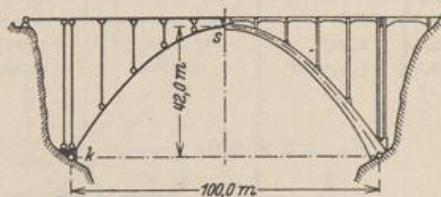


Abb. 517.

1. Geometrische Grundlagen. $l = 2l_1 = 100,0 \text{ m}$; $f = 42,0 \text{ m}$.

$$F_s = F_c = 2,1 \text{ m}^2; \quad J_s = J_c = 0,772 \text{ m}^4; \quad J_c/J \cos \alpha = 1 - \xi^2 r.$$

2. Hauptsystem nach S. 529: Balken auf 2 Stützen (Abb. 513)

$\eta_{1,0} = \frac{2}{3} \frac{4+2r}{3+2r};$
$\eta_{2,0} = \frac{1}{3} \frac{1+2r}{3+2r};$

$r =$	1	2	3	∞
$\eta_{1,0} =$	0,800	0,762	0,741	0,666
$\eta_{2,0} =$	0,200	0,238	0,259	0,333

3. Vorzahlen für $r = 2$ nach S. 529

$$k = \left[\frac{8}{15} - \frac{8}{(1+2r)(3+2r)(5+2r)} - \eta_{1,0}^2 \left(1 - \frac{1}{1+2r} \right) \right] = \frac{8}{15} - \frac{8}{5 \cdot 7 \cdot 9} - 0,762^2 \left(1 - \frac{1}{5} \right)$$

$$= 0,04342; \quad r = \frac{0,772}{2,1} \frac{1}{42,0^2 k} = 0,004800;$$

$$\delta_{11} = 100,0 \cdot 42,0^2 (1+r) k = 7695,98;$$

$$\delta_{22} = 100,0 \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right] = 19,0476; \quad \delta_{33} = 100,0 \left[1 - \frac{1}{5} \right] = 80,00.$$

$r =$	1	2	3	∞
$k =$	0,03047	0,04342	0,05115	0,08889
$r =$	0,006840	0,004800	0,004074	0,002345
$\delta_{11} =$	5411,60	7695,98	9059,55	15716,89
$\delta_{22} =$	13,3333	19,0476	22,2222	33,3333
$\delta_{33} =$	66,6667	80,0000	85,7143	100,000

4. Einflußlinien der überzähligen Größen für $r = 2$.

a) X_1 nach S. 530 mit $\eta_{2,0} = 0,238$; $6\eta_{2,0} = 1,428$.

$$\frac{6\eta_{2,0}}{(1+2r)(1+r)} = 0,0952, \quad X_1 = \frac{l_1^2 f}{12\delta_{11}} \cdot K_1 = 1,13696 \cdot K_1,$$

$$\frac{6}{(3+2r)(2+r)} = 0,21429, \quad \xi^2, \xi^4 \text{ vgl. Tab. 22 S. 116.}$$

ξ	ξ^2	ξ^4	ξ^6	ξ^8	$1 - \xi^2$	$1 - \xi^4$	$1 - \xi^6$	$1 - \xi^8$
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,2	0,04	0,0016	0,00006	0,00000	0,96	0,9984	0,99994	1,000000
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

ξ	$1,428(1-\xi^2)$	$-(1-\xi^4)$	$-0,0952(1-\xi^6)$	$+0,21429(1-\xi^8)$	$\{\Sigma\} = K_1$	$X_1 = 1,137 \cdot K_1$
0,0	1,428	-1,0000	-0,09520	0,21429	0,54709	0,62201
0,2	1,37088	-0,9984	-0,09519	0,21429	0,49157	0,55890
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

b) X_2 nach S. 530

$$\frac{3}{3+2r} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{7} = 0,14286,$$

$$X_2 = -\frac{l_1^2}{6\delta_{22}} \xi \cdot K_2 = -21,875 \cdot K_2 \cdot \xi.$$

c) X_3 nach S. 530

$$\frac{1}{1+2r} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{15} = 0,06667,$$

$$X_3 = +\frac{l_1^2}{2\delta_{33}} \cdot K_3 = 15,625 \cdot K_3.$$

ξ	$1 - \xi^2$	$-0,14285 (1 - \xi^6)$	$[\Sigma] = K_2$	$K_2 \cdot \xi$	$X_2 = -21,875 \cdot K \cdot \xi$
0,0	1,00	- 0,14286	0,85714	0,00000	- 0,0000
0,2	0,96	- 0,14285	0,81715	0,16343	- 3,5750
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ξ	$1 - \xi^2$	$-0,06667 (1 - \xi^6)$	$[\Sigma] = K_3$	$X_3 = 15,625 \cdot K_3$
0,0	1,00	- 0,06667	0,93333	14,583
0,2	0,96	- 0,06666	0,89334	13,958
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Ergebnisse für die Abb. 518

ξ	X_1 [t]			X_2 [mt]			X_3 [mt]		
	$r = 1$	$r = 2$	$r = \infty$	$r = 1$	$r = 2$	$r = \infty$	$r = 1$	$r = 2$	$r = \infty$
0,0	0,647	0,622	0,557	- 0,00	- 0,00	- 0,00	15,63	14,58	12,50
0,2	0,572	0,559	0,513	- 4,13	- 3,58	- 2,40	14,88	13,96	12,00
0,4	0,383	0,392	0,393	- 6,85	- 6,11	- 4,20	12,71	12,09	10,50
0,6	0,170	0,186	0,228	- 7,10	- 6,61	- 4,80	9,28	9,01	8,00
0,8	0,030	0,036	0,072	- 4,57	- 4,46	- 3,60	4,91	4,86	4,50
1,0	0,000	0,000	0,000	- 0,00	- 0,00	- 0,00	0,00	0,00	0,00

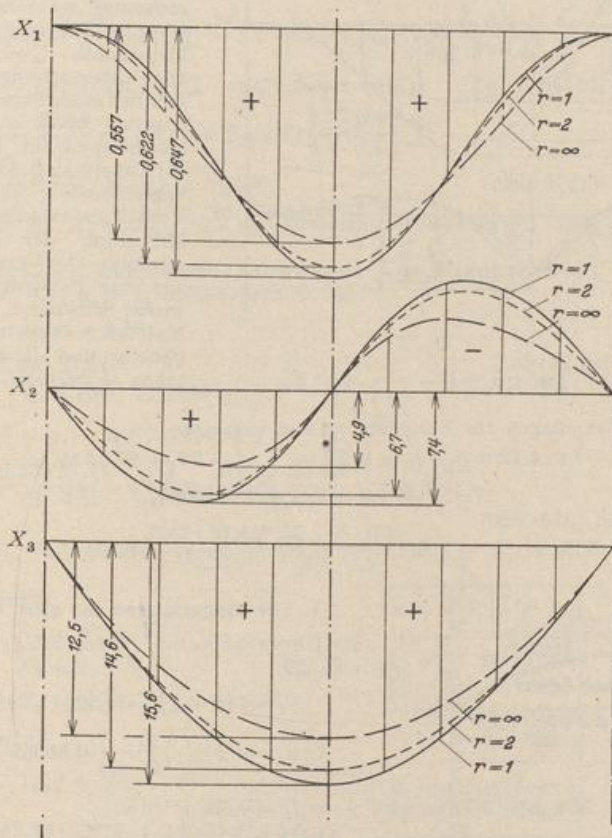
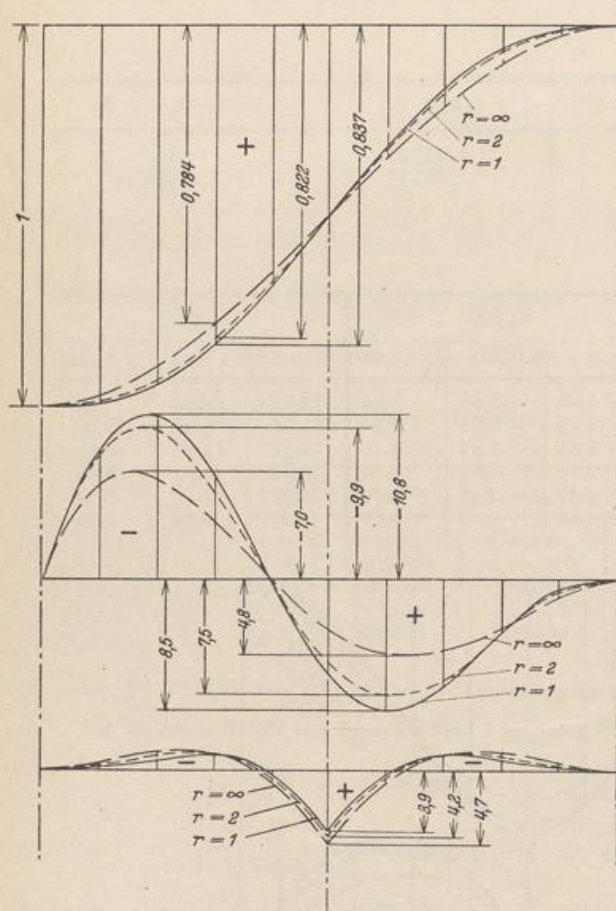


Abb. 518.

5. Einflußlinien der Stützkraft A und der Biegemomente im Kämpfer und Scheitel (Abb. 519).

$$A = A_0 + X_2/l_1 = A_0 + X_2/50,0.$$

$$M_a = X_1 \cdot y_{1,0} - X_2 - X_3; \quad M_c = M_{c0} - X_1 y_{2,0} - X_3.$$



A Schnittkräfte und Randspannungen eines symmetrischen Bogenträgers als Funktion der Bogenform.

Um den Spannungszustand eines Bogenträgers als Funktion einer mathematisch beschriebenen Mittellinie und Querschnittsänderung zu studieren, werden sechs Träger untersucht, von denen drei nach der quadratischen Parabel, drei andere nach der Kettenlinie gekrümmt sind, die mit großer Annäherung als Stützlinie für Eigengewicht angesehen werden kann. Das Verhältnis

$$n = J_c/J_k \cos \alpha_k$$

(S. 509) wird mit 0,4, 1,0 und 1,29 gewählt. Das Verhältnis $n = 0,4$ ist bei zahlreichen Bauwerken eingehalten, das Verhältnis $n = 1,0$ vereinfacht die Zahlenrechnung, während $n = 1,29$ für $f/l \approx 1/5$ Bogenträger mit gleichbleibendem Querschnitt liefert. Die Untersuchung des Bogenträgers mit einer Parabel oder Kettenlinie als Achse und $n = 0,4$ wird als Beispiel für die Anwendung der Tabelle 42 S. 529 ff. ausführlich angeschrieben, für die anderen Verhältniszahlen n jedoch auf die Mitteilung der Ergebnisse beschränkt. Der Vergleich stützt sich auf eine Belastung aus Eigengewicht, Schwinden und halbseitiger Nutzlast. Diese ist relativ ungünstig und daher zur summarischen Bewertung geeignet.

Abb. 519.

Gemeinsame Grundlagen für Formgebung und Belastung.

$$f = 4,12 \text{ m}, \quad l_1 = 13,72 \text{ m}, \quad l = 2l_1 = 27,44 \text{ m},$$

$$d_c = 0,52 \text{ m}, \quad J_c = 0,0118 \text{ m}^4.$$

Belastungsordinaten (Abb. 520)

$$\text{Scheitel: } q_s = 2,55 \text{ t/m}^2; \quad \text{Kämpfer: } q_k = 11,02 \text{ t/m}^2.$$

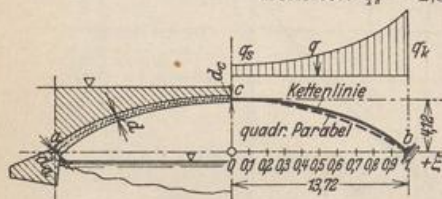


Abb. 520.

$$\cos \alpha_a = 0,8562.$$

Mit $d_a = 0,77 \text{ m}$ wird $J_a = J_b = 0,038 \text{ m}^4$ und

$$n = \frac{J_c}{J_a \cos \alpha_a} = \frac{0,0118}{0,038 \cdot 0,8562} = 0,36 \approx 0,4.$$

I. Die Bogenachse ist eine Parabel.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 513) nach S. 529.

$$y_1 = f(1 - \xi^2) = 4,12(1 - \xi^2);$$

$$\text{tg } \alpha = -2 \left(\frac{f}{l_1} \right) \xi = -0,60058 \xi;$$

Approximation des Querschnittes (Abb. 486) nach Tab. 42, 1, b: $J_e/J \cos \alpha = 1 - 0,6 \xi^2$.

Hieraus Gewölbbestärken d (Abb. 520), Querschnitte F und Widerstandsmomente W .

2. Hauptsystem nach S. 529 Balken auf 2 Stützen (Abb. 513).

$$\eta_{1,0} = \frac{2}{5} \frac{4 + 0,4}{2 + 0,4}$$

$$y = y_1 - y_{1,0}$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$\eta_{1,0} =$	0,73333	0,66667	0,64316
$y_{1,0} =$	3,02132	2,74668	2,64982

3. Vorzahlen nach S. 531. Bogenträger $n = 0,4$; $F_c = 0,52 \text{ m}^2$; $f^2 = 16,9744$:

$$v = \frac{175}{4} \frac{0,0118}{0,52 \cdot 16,9744} \frac{2 + 0,4}{0,4(8 + 0,4) + 8/3} = 0,02329;$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{175} \cdot 27,44 \cdot 16,9744 \cdot 1,02329 \frac{0,4(8 + 0,4) + 8/3}{2 + 0,4}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{15} 27,44 (2 + 3 \cdot 0,4);$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{3} 27,44 (2 + 0,4).$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$v =$	0,02329	0,01504	0,01313
$\delta_{11} =$	27,35682	42,02512	48,03193
$\delta_{22} =$	5,85387	9,14667	10,73819
$\delta_{33} =$	21,95200	27,44000	30,09253

4. Einflußlinien der überzähligen Größen nach S. 531. Bogenträger $n = 0,4$:

$$X_1 = \frac{35}{4} \frac{27,44}{4,12} \omega_R^2(\zeta) \frac{3 \cdot 0,4(4 + 0,4) + 8(1 - 0,4)(2 + 0,4) \omega_R(\zeta)}{[3 \cdot 0,4(8 + 0,4) + 8] \cdot 1,02329}$$

$$= 16,63150 \omega_R^2(\zeta) + 36,28690 \omega_R(\zeta) \quad (\text{Abb. 524a});$$

$$X_2 = -\frac{27,44}{2} \omega_R(\zeta) (1 - 2\zeta') \left[1 + 6 \omega_R(\zeta) \frac{1 - 0,4}{2 + 3 \cdot 0,4} \right]$$

$$= -1,715 \omega_R(\zeta) (1 - 2\zeta') [8 + 9 \omega_R(\zeta)] \quad (\text{Abb. 524b});$$

$$X_3 = \frac{27,44}{2} \omega_R(\zeta) \left[1 + 2 \omega_R(\zeta) \frac{1 - 0,4}{2 + 0,4} \right]$$

$$= 6,86 [2 \omega_R(\zeta) + \omega_R^2(\zeta)] \quad (\text{Abb. 524c}).$$

Die Einflußlinien X_1 , X_2 und X_3 für $n = 1,29$ unterscheiden sich nur wenig von den Ergebnissen für $n = 1,0$.

5. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht.

Bogenträger $n = 0,4$; $q_k - q_s = 8,47$ nach S. 531:

a) $p = \text{const} = q_s = 2,55$:

$$X'_1 = \frac{2,55 \cdot 27,44^2}{8 \cdot 4,12} \frac{1}{1,02329}; \quad X'_2 = 0; \quad X'_3 = \frac{2,55 \cdot 27,44^2}{20} \frac{4 + 0,4}{2 + 0,4}$$

b) $p\xi = p\xi^2 = (q_k - q_s)\xi^2 = 8,47\xi^2$:

$$X''_1 = \frac{8,47 \cdot 27,44^2}{72 \cdot 4,12} \frac{1}{1,02329} \frac{8(1 + 4 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,16)}{3 \cdot 0,4(8 + 0,4) + 8}$$

$$X''_2 = 0; \quad X''_3 = \frac{8,47 \cdot 27,44^2}{420} \frac{16 + 5 \cdot 0,4}{2 + 0,4}$$

c) Hieraus folgt:

$$X_1 = X'_1 + X''_1;$$

$$X_2 = 0;$$

$$X_3 = X'_3 + X''_3.$$

d) Längskräfte:

$$V_0 = l_1 \left[q_s \xi + \frac{q_k - q_s}{3} \xi^3 \right]$$

$$= 13,72 [2,55 \xi + 2,8233 \xi^3];$$

$$N = -[V_0 \sin \alpha + X_1 \cos \alpha] \quad (\text{Abb. 523}).$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$X'_1 =$	56,9277	57,3903	57,4984
$X''_1 =$	25,1003	27,2322	27,8100
$X_1 =$	82,0280	84,6225	85,3084
$X'_3 =$	176,0025	160,0028	154,3612
$X''_3 =$	113,8842	106,2919	103,6150
$X_3 =$	289,8867	266,2947	257,9762

e) Momente:

$$M_0 = \frac{l_1^3}{12} [q_k + 5 q_s - 6 q_s \xi^2 - (q_k - q_s) \xi^4]$$

$$= 372,8688 - 240,0039 \xi^2 - 132,8649 \xi^4;$$

$$M = M_0 - X_1 y - X_3 \quad (\text{Abb. 525}).$$

f) Um die Bauwürdigkeit der drei Gewölbe miteinander zu vergleichen, werden die Randspannungen $\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}$ (Abb. 527) für den homogenen Querschnitt angegeben, wenn auch $\sigma_{bz} > 5 \text{ kg/cm}^2$.

6. Schnittkräfte aus einseitiger Verkehrslast $p = 1,0 \text{ t/m}^2$. Bogenträger $n = 0,4$:

a) Überzählige Größen: $X_1 = 1,0 \frac{27,44^2}{16 \cdot 4,12} \frac{1}{1,02329};$

$$X_2 = -1,0 \frac{27,44^2}{64} \frac{3 + 2 \cdot 0,4}{2 + 3 \cdot 0,4}; \quad X_3 = 1,0 \frac{27,44^2}{40} \frac{4 + 0,4}{2 + 0,4};$$

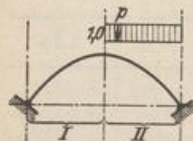


Abb. 521.

n =	0,4	1,0	1,29
$X_1 =$	11,1623	11,2530	11,2742
$X_2 =$	-13,9708	-11,7649	-11,1837
$X_3 =$	34,5103	31,3731	30,26669

b) Längskräfte:

$$A_0 = \frac{p l_1}{4} = 3,43; \quad V_{0I} = A_0; \quad V_{0II} = A_0 (1 - 4 \xi).$$

$$N = -[V_0 \sin \alpha + X_1 \cos \alpha + X_2/l_1 \sin \alpha] \quad (\text{Abb. 523}).$$

c) Momente:

$$M_{0I} = A l_1 (1 + \xi); \quad M_{0II} = A l_1 (1 + \xi - 2 \xi^2).$$

$$M = M_0 - X_1 y + X_2 \xi - X_3 \quad (\text{Abb. 526}).$$

7. Schnittkräfte aus Schwinden ($t = -15^\circ$).

Bogenträger $n = 0,4$: $\alpha_t = 0,00001$, $E = 2100000 \text{ t/m}^2$.

a) $\delta_{1t} = -2100000 \cdot 0,011815 \cdot 0,00001 \cdot 27,44 = -101,99448;$

n =	0,4	1,0	1,29
X_{1t}	-3,72830	-2,42699	-2,12347

$$X_{2t} = X_{3t} = 0.$$

b) Längskräfte:

$$N_t = -X_{1t} \cos \alpha \quad (\text{Abb. 523});$$

c) Momente:

$$M_t = -X_{1t} \cdot y \quad (\text{Abb. 525}).$$

8. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden.

Momente: Abb. 528; Randspannungen: Abb. 529.

II. Die Bogenachse ist eine Kettenlinie.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 516 S. 533)

$$\text{Cof } c = \kappa = \frac{q_k}{q_s} = 4,32, \quad c = \text{Ar Cof } \kappa = 2,14273, \quad y_s^* = \frac{l}{\kappa - 1} = 1,241.$$

$$y_2 = 1,241 (\text{Cof } 2,14273 \xi - 1).$$

$$\text{Sin } c = \sqrt{\kappa^2 - 1} = 4,20267, \quad \text{tg } \alpha = -\frac{c}{l_1} y_s^* \text{Sin } \xi c = -0,19382 \text{ Sin } \xi c.$$

$$\cos \alpha_s = 0,77534. \quad \text{Mit } d_s = 0,77 \text{ m wird } J_s = J_b = 0,038 \text{ m}^4 \text{ und}$$

$$n = \frac{J_c}{J_s \cdot \cos \alpha_s} = \frac{0,0118}{0,038 \cdot 0,77534} = 0,4.$$

Approximation des Querschnitts nach S. 534 mit:

$$\mu = \frac{4,32 - 0,4}{4,32 - 1} = 1,18072, \quad \varphi = \frac{1,18072 - 1}{1,18072} = 0,15306,$$

$$\frac{J_c}{J \cos \alpha} = 1,18072 (1 - 0,15306 \cos 2,14273 \xi).$$

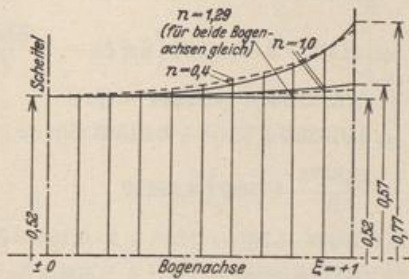
Hieraus Gewölbbestärken d (Abb. 522), Querschnitte F und Widerstandsmomente W .

Zahlen für die Ansätze nach Tabelle 42, 3 S. 533:

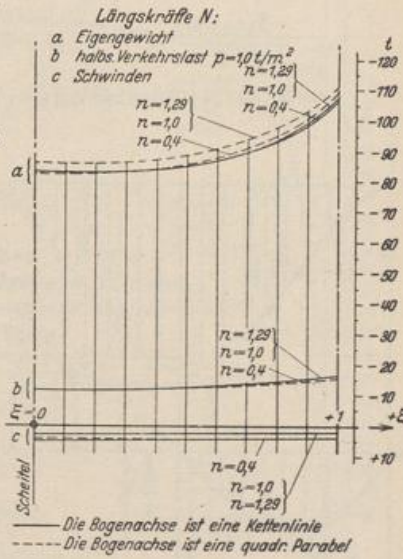
$$y_a^* = 1,540, \quad c^2 = 4,59129, \quad (l_1/c)^2 = 40,999,$$

$$\cos c = 4,32, \quad \cos^2 c = 18,6624, \quad \cos 2c = 36,32531,$$

$$\sin c = 4,20267, \quad \frac{\sin c}{c} = 1,96136, \quad \frac{\sin 2c}{2c} = 8,47320.$$



Die Bogenachse ist eine Kettenlinie
Die Bogenachse ist eine quadr. Parabel
Abb. 522. Gewölbbestärken d .



Die Bogenachse ist eine Kettenlinie
Die Bogenachse ist eine quadr. Parabel
Abb. 523.

2. Hauptsystem nach S. 533 Balken auf 2 Stützen (Abb. 516)

$$y_{2,0} = 1,241 \frac{(1 + 0,15306)(1,96136 - 1) - \frac{0,15306}{2}(1,96136 \cdot 4,32 - 1)}{1 - 0,15306 \cdot 1,96136},$$

$$y_{2,0} = 0,95158, \quad y_{1,0} = 4,12 - 0,951581 = 3,168419,$$

$$\psi = 1 + \frac{0,951581}{1,241} = 1,766786, \quad \begin{cases} \varphi \psi = 0,270424, \\ \psi^2 = 3,121533, \end{cases}$$

$y = y_{2,0} - y_2,$	$n =$	0,4	1,0	1,29
	$y_{2,0} =$	0,95158	1,19305	1,28204

3. Vorzahlen. Die Ergebnisse v aus I, 3 können mit hinreichender Genauigkeit für die Achse nach einer Kettenlinie verwendet werden. $n = 0,4$ ergab $v = 0,02329$, somit:

$$\delta_{11} = 2 \cdot 1,18072 \cdot 13,72 \cdot 1,54 \cdot 1,02329 \left[3,12153 - 2 \cdot 1,76679 \left(1 + \frac{0,27042}{2} \right) 1,19136 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 + 2 \cdot 0,27042) (1,96136 \cdot 4,32 + 1) - \frac{0,15306}{3} 1,96136 (2 + 18,6624) \right] = 24,73071,$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{3} 1,18072 \cdot 13,72 \left\{ 1 - 3 \cdot 0,15306 \left[1,96136 + \frac{2}{4,59129} (1,96136 - 4,22) \right] \right\} = 6,16833,$$

$$\delta_{33} = 2 \cdot 1,18072 \cdot 13,72 (1 - 0,15306 \cdot 1,96136) = 22,67247.$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$\delta_{11} =$	24,73071	38,15818	43,77720
$\delta_{22} =$	6,16833	9,14667	10,58675
$\delta_{33} =$	22,67247	27,44000	29,74524

4. Einflußlinien der überzähligen Größen. Biegelinie des Bogenträgers $n = 0,4$:

$$\begin{aligned} \delta_{m1} &= \frac{1,18072}{2} \cdot 1,241 \cdot 40,999 \left\{ \left[4,59129 \left(1,76679 + \frac{0,15306}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left(1 + 0,270424 \right) 4,32 + \frac{0,15306}{4} 36,32531 \right] - \left[\left(1,76679 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{0,15306}{2} \right) (\xi c)^2 - 2 \left(1 + 0,27042 \right) \mathfrak{Cof}(\xi c) + \frac{0,15306}{4} \mathfrak{Cof}(2\xi c) \right] \right\} \\ &= 30,03738 \{ [2,540848 \mathfrak{Cof}(\xi c) - 0,038265 \mathfrak{Cof}(2\xi c) - 1,84332 (\xi c)^2 - 1,12325], \end{aligned}$$

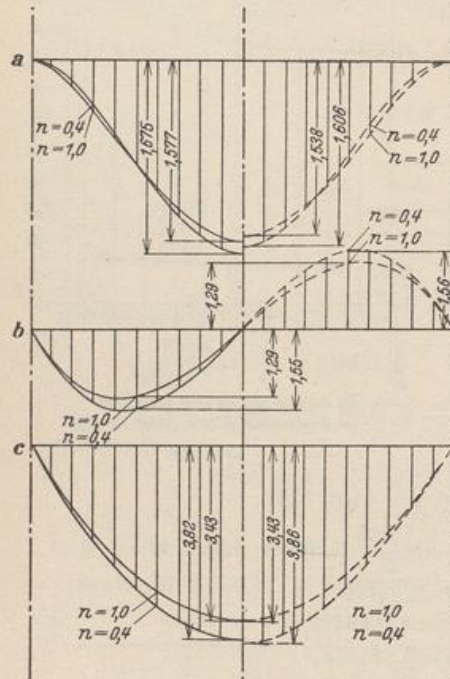


Abb. 524. Einflußlinien X_1, X_2, X_3 .
 — Die Bogenachse ist eine Kettenlinie.
 - - - Die Bogenachse ist eine quadratische Parabel.

$$\begin{aligned} \delta_{m2} &= -\frac{1,18072}{6 \cdot 2,14273} 40,999 \xi c \times \\ &\quad \times \left\{ [4,59129 - 6 \cdot 0,15306 (4,32 - 2 \cdot 1,96136)] \right. \\ &\quad \left. - [(\xi c)^2 - 6 \cdot 0,15306 (\mathfrak{Cof} \xi c - 2 \frac{\mathfrak{Sin} \xi c}{\xi c})] \right\} \\ &= -3,7653165 \xi c [4,22644 - (\xi c)^2 \\ &\quad + 0,91836 \mathfrak{Cof}(\xi c)] + 6,91583 \mathfrak{Sin} \xi c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{m3} &= \frac{1,18072}{2} 40,999 \{ [4,59129 \\ &\quad - 2 \cdot 0,15306 \cdot 4,32] - [(\xi c)^2 - 2 \cdot 0,15306 \mathfrak{Cof} \xi c] \} \\ &= 24,20417 [3,26885 - (\xi c)^2 + 0,30612 \mathfrak{Cof} \xi c], \end{aligned}$$

$$X_1 = \frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}} \quad (\text{Abb. 524a}),$$

$$X_2 = \frac{\delta_{m2}}{\delta_{22}} \quad (\text{Abb. 524b}),$$

$$X_3 = \frac{\delta_{m3}}{\delta_{33}} \quad (\text{Abb. 524c}).$$

Die Einflußlinien X_1, X_2 und X_3 für $n = 1,29$ unterscheiden sich nur sehr wenig von den entsprechenden Werten für $n = 1,0$.

5. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht. Bogenträger $n = 0,4, q_k - q_s = 8,47$, daher nach S. 534:

$$\text{a) } H_q = \frac{8,47}{4,12} 40,999 = 84,247 \text{ t}, \quad 1 + \nu = 1,02329.$$

$$\text{b) Längskräfte: } N \approx -\frac{H_q}{1 + \nu} \frac{1}{\cos \alpha} = -82,330 \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\text{Abb. 523}).$$

$$\text{c) Momente: } M = \frac{\nu}{1 + \nu} H_q \cdot y = 1,91746 \cdot y \quad (\text{Abb. 525}).$$

$$\text{d) Randspannungen: } \sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} \quad (\text{Abb. 527}).$$

6. Schnittkräfte aus halbseitiger Verkehrslast $p = 1,0 \text{ t/m}^2$.

a) Belastungszahlen und überzählige Größen $X_k = \delta_{k0}/\delta_{kk}$:

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= 1,18072 \cdot 1,241 \cdot 40,999 \cdot 1,0 \cdot 13,72 \left[\frac{4,59129}{3} \left(1,766786 + \frac{0,15306}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (1 + 0,270424) (4,32 - 1,96136) + \frac{0,15306}{8} (36,32531 - 8,47320) \right] = 294,652. \end{aligned}$$

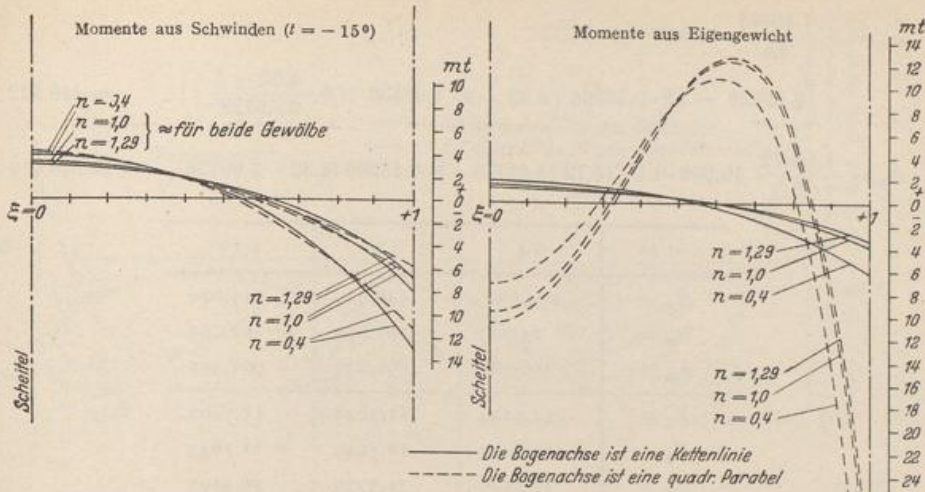


Abb. 525.

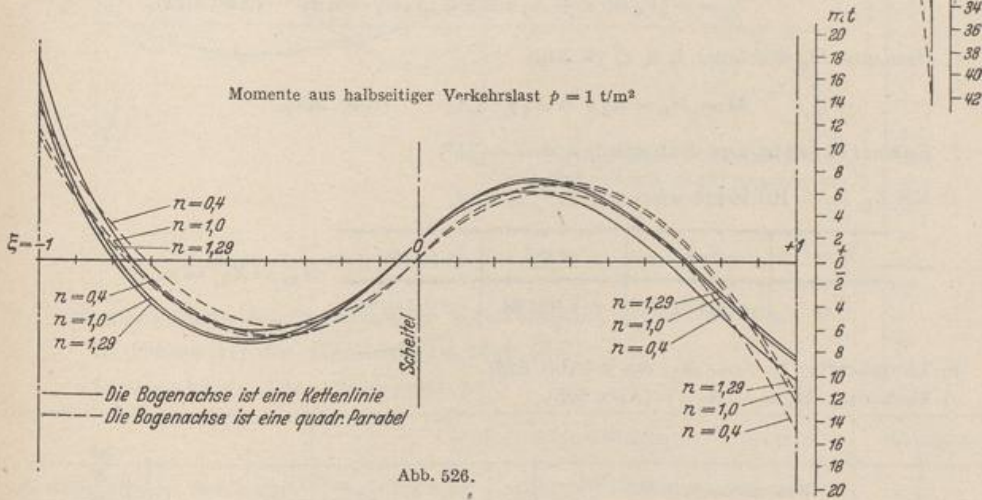


Abb. 526.

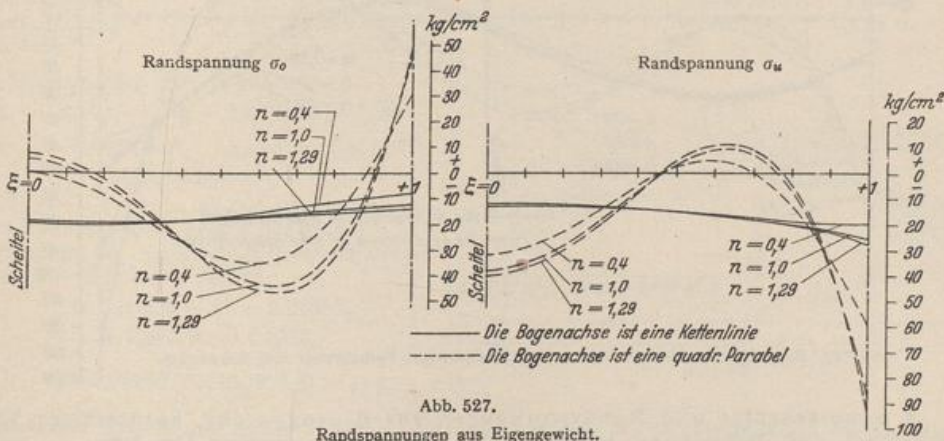


Abb. 527.

Randspannungen aus Eigengewicht.

$$\delta_{20} = -\frac{1.18072}{24} 40.999 \cdot 1.0 \cdot 13.72 \times \left[4.59129 - 12 \cdot 0.15306 \left(4.32 - 4 \cdot 1.96136 + 6 \frac{4.32 - 1}{4.59129} \right) \right] = 448.922,$$

$$\delta_{30} = \frac{1.18072}{3} 40.999 \cdot 1.0 \cdot 13.72 [4.59129 - 3 \cdot 0.15306 (4.32 - 1.96136)] = 513.079,$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$\delta_{10} =$	294,652	448,922	513,079
$\delta_{20} =$	- 85,723	- 107,610	- 118,193
$\delta_{30} =$	776,681	860,876	901,592
$X_1 =$	11,9144	11,7648	11,7202
$X_2 =$	- 13,8972	- 11,7649	- 11,1643
$X_3 =$	34,2566	31,3730	30,3105

b) Längskräfte V_0 wie unter I, 6, b) (S. 540)

$$N = -[V_0 \sin \alpha + X_1 \cos \alpha + X_2/l_1 \cdot \sin \alpha] \quad (\text{Abb. 523}),$$

c) Momente M_0 wie unter I, 6, c) (S. 540)

$$M = M_0 - X_1 y + X_2 \xi - X_3 \quad (\text{Abb. 526}),$$

7. Schnittkräfte aus Schwinden ($t = -15^\circ$).

a) Mit $\delta_{1t} = -101,99448$ wie unter I, 7, a) wird:

$n =$	0,4	1,0	1,29	$X_{2t} = X_{3t} = 0.$
X_{1t}	- 4,12420	- 2,67294	- 2,32985	

b) Längskräfte: $N_t = -X_{1t} \cos \alpha$ (Abb. 523).

c) Momente: $M_t = -X_{1t} \cdot y$ (Abb. 525).

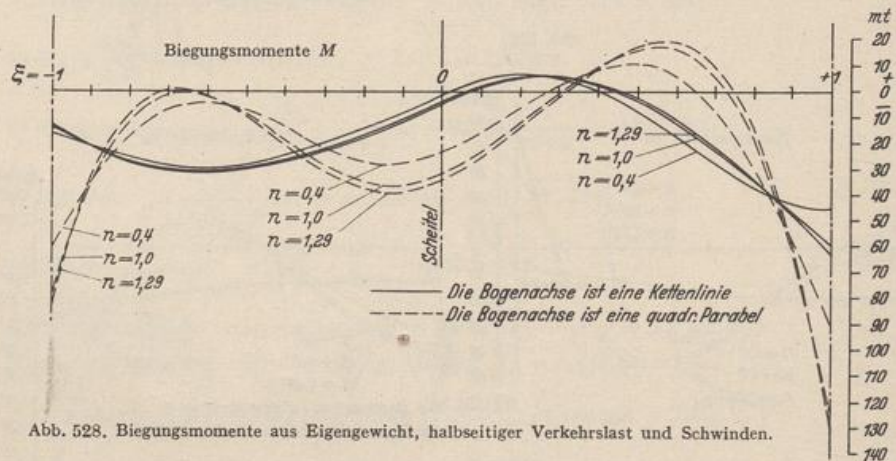


Abb. 528. Biegemomente aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden.

8. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden. Momente: Abb. 528, Randspannungen: Abb. 529.

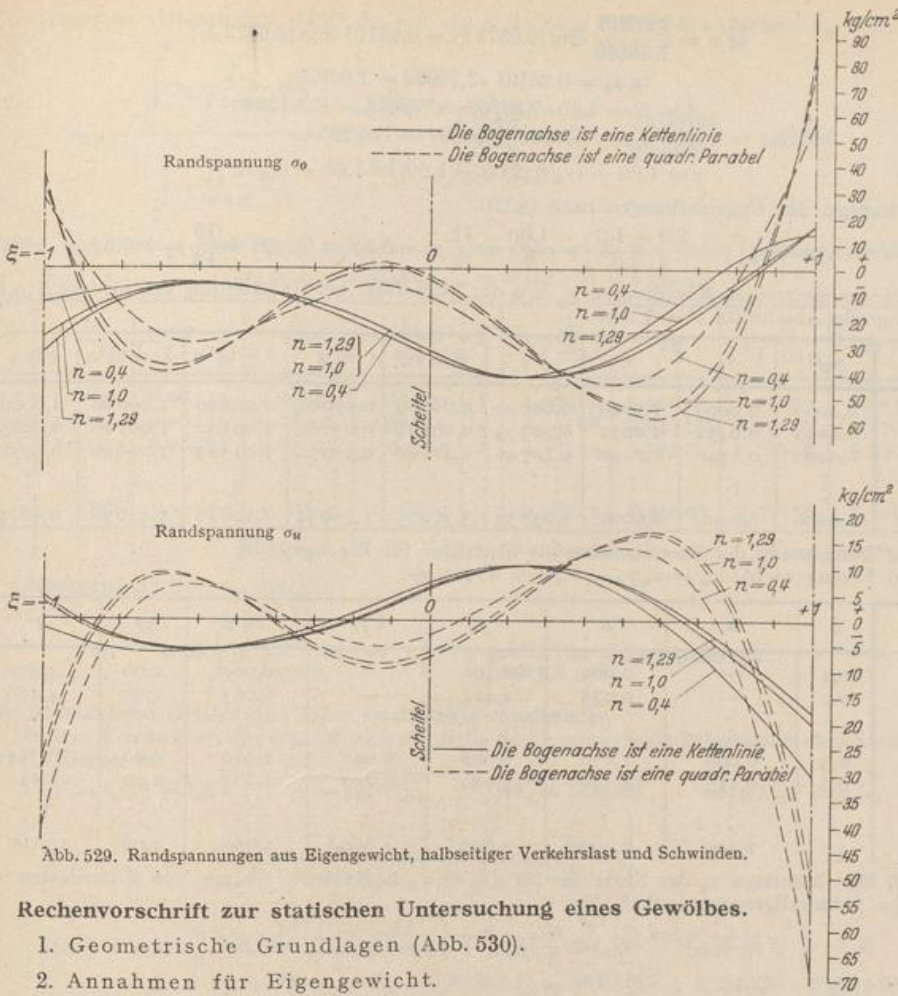


Abb. 529. Randspannungen aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden.

Rechenvorschrift zur statischen Untersuchung eines Gewölbes.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 530).
2. Annahmen für Eigengewicht.

		Abmessungen:	Scheitel	Kämpfer
Gewölbe einschl. Isolierung	$\gamma_v = 2,4 \text{ t/m}^3$	senkrecht gemessen	1,00 m	2,00 m
Ausgleichbeton	$\gamma_b = 2,0 \text{ t/m}^3$		0,00 m	2,30 m
Überschüttung	$\gamma_a = 1,8 \text{ t/m}^3$		0,00 m	3,20 m
Fahrbahn	$g_F = 2,0 \text{ t/m}^2$		—	—

Eigengewicht $q_s = 4,40 \text{ t/m}$;
 $q_k = 17,16 \text{ t/m}$; $\kappa = 17,16/4,4 = 3,90$.
 $J_c = J_s = 0,08333 \text{ m}^4$, $J_c/J \cos \alpha$: Seite 547,
 $F_c = F_s = 1,0 \text{ m}^2$.

3. Bogenform: a) Die Bogenachse y_2 wird nach S. 510 in erster Annäherung als Kettenlinie für Eigengewicht angenommen: $\kappa = 3,90$; $\text{Ein } c = 3,769651$.

$$y_2^* = 6,0 / (3,9 - 1) = 2,06897;$$

$$c = \text{Ar } \text{Coj } 3,90 = 2,0373;$$

$$y_2 = 2,06897 [\text{Coj } (2,0373 \xi) - 1];$$

angegenäherte Berechnung dieser Funktion mit $y_2 = 6,0$ (y_2/f) durch Interpolation der Tabelle S. 512. $l_1/c = 7,36269$.

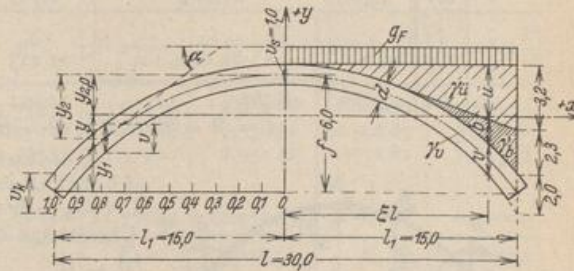


Abb. 530.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,06897}{7,36269} \operatorname{Sin}(2,0373 \xi) = 0,28101 \operatorname{Sin}(2,0373 \xi);$$

$$\operatorname{tg} \alpha_k = 0,28101 \cdot 3,76962 = 1,05929;$$

$$A = B = 4,40 \cdot 7,36269 \cdot 3,769615 = 122,120 \text{ t};$$

$$H = 4,40 \cdot 7,36269^2 / 2,06897 = 115,285 \text{ t}.$$

$$v = 1,00 + (y_2/f)(2,00 - 1,00) = 1,00 + (y_2/f);$$

Gleichungen der Bogenlaibungen nach (802):

$$y_2^{(v)} = y_2 \left(1 - \frac{2,0 - 1,0}{2 \cdot 6,0} \right) - \frac{1,00}{2} = \frac{11}{12} y_2 - 0,5; \quad y_2^{(u)} = \frac{13}{12} y_2 + 0,5;$$

Die geometrischen Koordinaten y_2, v, α der Bogenform bei Unterteilung der Strecke l_1 in 10 gleichgroße Abschnitte $c' = 1,5 \text{ m}$:

ξ	y_2/f	y_2	v	$c \xi$	$\operatorname{Sin} c \xi$	$\operatorname{tg} \alpha$	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$	$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\cos \alpha$
0,0	0,0000	0,0000	1,0000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	1,00000	1,0000
0,1	0,0072	0,0432	1,0072	0,20373	0,20514	0,05765	1,00332	1,00166	0,9983
0,2	0,0290	0,1740	1,0290	0,40746	0,41883	0,11770	1,01385	1,00690	0,9931
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,0	1,0000	6,0000	2,0000	2,03730	3,76975	1,05934	2,12220	1,45678	0,6864

b) Berechnung der Gewölbeachse als Stützlinie für Eigengewicht.

a) Eigengewicht: $q_m = v_m \gamma_v + b_m \gamma_b + \bar{u} \gamma_u + g_F$;

m	ξ	b	\bar{u}	$v \gamma_v$	$b \gamma_b$	$\bar{u} \gamma_u$	g_F	q
0	0,1	—	0,000	2,400	—	0,000	2,00	4,400
1	0,2	—	0,035	2,417	—	0,063	2,00	4,480
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	0,5	0,000	1,070	2,868	0,000	1,926	2,00	6,794
6	0,6	0,115	1,490	3,099	0,230	2,682	2,00	8,011
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1,0	2,300	3,200	4,800	4,600	5,760	2,00	17,160

β) Die Ordinaten y_2 der Stützlinie für die zu q_m äquivalente Gruppe von Einzellasten G_m in den Intervallgrenzen nach S. 75:

$$G_1 = \frac{c'}{6} (2q_1 + q_2); \quad G_m = \frac{c'}{6} (q_{m-1} + 4q_m + q_{m+1}); \quad G_n = \frac{c'}{6} (q_{n-1} + 2q_n);$$

$$\bar{V}_{0m} = \sum_0^{m-1} G_m, \quad \bar{M}_{0m} = \sum_0^m (\bar{V}_{0m} \cdot c'), \quad H = \bar{M}_{0,10}/f, \quad y_2 = \bar{M}_{0m}/H.$$

m	ξ	q_m	$q_9 + 2q_{10}$	$2q_1 + q_2$	G_m	\bar{V}_{0m}	$\bar{V}_{0m} \cdot c'$	\bar{M}_{0m}	y_2
			$q_{m-1} + 4q_m + q_{m+1}$						
0	0,0	4,400	—	13,280	3,320	0,000	0,000	0,000	0,00000
1	0,1	4,480		27,069	6,767	3,320	4,980	4,980	0,04335
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	0,9	14,042		84,893	21,223	88,316	132,474	524,510	4,56880
10	1,0	17,160	48,362	—	12,091	109,539	164,309	688,819	6,00000

$$A = B = 121,630 \text{ t}; \quad H = 688,819/6,0 = 114,803 \text{ t}.$$

4. Hauptsystem zur Berechnung der statisch überzähligen Größen. Balkenträger auf 2 Stützen $l = 2l_1 = 30,0 \text{ m}$.

Überzählige Größen nach S. 523:

$$X_1 = H, \quad X_2 = \frac{1}{2} (Y_a - Y_b), \quad X_3 = \frac{1}{2} (Y_a + Y_b),$$

$$M_1 = +y, \quad M_2 = -\xi, \quad M_3 = 1,$$

$$N_1 = \cos \alpha, \quad N_2 = 1/l_1 \cdot \sin \alpha, \quad N_3 = 0.$$

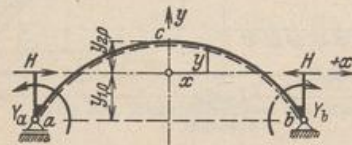


Abb. 581.

Der Träger ist symmetrisch, daher $\delta_{12} = 0, \delta_{23} = 0$. Nach S. 523 ist außerdem $\delta_{13} = 0$, wenn

$$y_{2,0} = \frac{\int_c^a y_2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx}{\int_c^a \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx} = \frac{\Sigma (\lambda \cdot y_2 \frac{J_c}{J \cos \alpha})}{\Sigma (\lambda \cdot \frac{J_c}{J \cos \alpha})} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} = \frac{32,06796}{22,48201} = 1,42638.$$

Zähler und Nenner sind durch numerische Integration nach Simpson (181) entstanden.
($J_c = J_s = 0,08333, J = d^2/12, d = v \cos \alpha$.)

ξ	d	J	$\frac{J_c}{J}$	$\frac{J_c}{J \cos \alpha}$	λ	$\lambda \cdot \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	y_2	$y_2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	$\lambda \cdot y_2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$
0,0	1,0000	0,08333	1,00000	1,00000	1	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	1,0055	0,08471	0,98375	0,98542	4	3,94168	0,04335	0,04272	0,17088
0,2	1,0219	0,08893	0,93707	0,94357	2	1,88714	0,17516	0,16528	0,33056
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,0	1,3728	0,21564	0,38645	0,56311	1	0,56311	6,00000	3,37866	3,37866
				$\Sigma_1 =$		22,48201		$\Sigma_2 =$	32,06796

Nachprüfung von $y_{2,0}$ durch:

$$0 = \int_c^a y \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx = \Sigma (\lambda \cdot y \frac{J_c}{J \cos \alpha}) = -0,00003 \approx 0,0.$$

Die überzähligen Größen sind daher unabhängig voneinander.

5. Die Vorzahlen δ_{kk} ergeben sich ebenfalls durch numerische Integration nach Simpson (181). Hierbei ist

$$c' = l_1/10 = 1,5 \text{ m}, \quad y = y_{20} - y_2, \quad J_c/F_c = 0,08333, \quad \cos \alpha F_c/F = v_s/v,$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \left\{ \int_c^a y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx + \frac{J_c}{F_c} \int_c^a \cos \alpha \frac{F_c}{F} dx \right\} \\ &= 2 \frac{c'}{3} \Sigma (\lambda \cdot y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}) + 2 \frac{c'}{3} \frac{J_c}{F_c} \Sigma (\lambda \cdot \cos \alpha \frac{F_c}{F}) \\ &= \delta'_{11} + \delta''_{11} = 1,0 \Sigma_4 + 0,08333 \Sigma_5 = 58,01617 + 2,01833 = 60,03450, \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = 2 \int_c^a \xi^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx = 2 \frac{c'}{3} \Sigma (\lambda \cdot \xi^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}) = 1,0 \Sigma_3 = 6,13492,$$

$$\delta_{33} = 2 \int_c^a \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx = 2 \frac{c'}{3} \Sigma (\lambda \cdot \frac{J_c}{J \cos \alpha}) = 1,0 \Sigma_1 = 22,48201.$$

ξ	$\xi^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	λ	$\lambda \cdot \xi^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	y	y^2	$y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	$\lambda \cdot y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	$\cos \alpha \frac{F_c}{F}$	$\lambda \cdot \cos \alpha \frac{F_c}{F}$
0,0	0,00000	1	0,00000	1,42638	2,03456	2,03456	2,03456	1,00000	1,00000
0,1	0,00985	4	0,03940	1,38303	1,91277	1,88488	7,53952	0,99285	3,97140
0,2	0,03774	2	0,07548	1,25122	1,56555	1,47721	2,95442	0,97182	1,94364
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,0	0,56311	1	0,56311	-4,57362	20,91800	11,77913	11,77913	0,50000	0,50000
	$\Sigma_3 =$		6,13492			$\Sigma_4 =$	58,01617	$\Sigma_5 =$	24,21992

6. Die Einflußlinien der überzähligen Größen X_k werden nach S. 525 als Biegelinien δ_{mk} des Balkenträgers berechnet. Hierzu dienen die elastischen Gewichte w_{m1}, w_{m2}, w_{m3} , die in eine äquivalente Gruppe von Einzelkräften $\mathfrak{B}_{m,1}, \mathfrak{B}_{m,2}, \mathfrak{B}_{m,3}$ verwandelt werden.

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{c'}{24} (w_1 + 10 w_0 + w_{-1}), \quad \mathfrak{B}_{10} = \frac{c'}{24} (7 w_{10} + 6 w_9 - w_8)$$

$$\mathfrak{B}_m = \frac{c'}{12} (w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}),$$

$$Q_{w,m} = Q_{w,0} + \sum_0^{m-1} \mathfrak{B}_h = A_w - \sum_m^{10} \mathfrak{B}_h, \quad M_{w,(m-1)} = M_{w,m} + Q_{w,m} \cdot c'$$

Der Anteil der Längskräfte an den elastischen Gewichten wird vernachlässigt.

a) $X_1 = \frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}} = \frac{M_w}{60,03450}, \quad w_{m1} = y_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m}$ (Abb. 532).

Mit $\delta_{13} = 2 \int_0^a y \frac{J_c}{J} ds = 0$ und $\delta_{12} = 2 \int_0^a \xi y \frac{J_c}{J} ds$ ist für $\xi = 0$: $Q_w = 0$ und für $\xi = \pm 1$

neben M_w auch $Q_w = 0$. Die Einflußlinie besitzt daher für $\xi = 0$ und $\xi = \pm 1$ waagerechte Tangenten. Dies kann für $\frac{d}{dx} (\delta_{m1})$ auch unmittelbar bewiesen werden.

m	ξ	(1)	(2)		(3)	(4)	(5)
		w_{m1}	$10 w_0 + 2 w_1$	$7 w_{10} + 6 w_9 - w_8$	\mathfrak{B}'_m	Verbesserung $\Delta \mathfrak{B}'_m$	\mathfrak{B}_m
			$w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}$				
0	0,0	1,42638	16,98954	—	1,06185	+ 0,00033	1,06218
1	0,1	1,36287	16,23569		2,02946	+ 0,00064	2,03010
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
9	0,9	- 1,72804	- 20,97682		- 2,62210	+ 0,00082	- 2,62128
10	1,0	- 2,57545	—	- 27,27542	- 1,70471	+ 0,00053	- 1,70418

$$\sum \mathfrak{B}'_m = \int_0^a y \frac{J_c}{J} ds \neq 0. \text{ Daher Verbesserung um } \Delta \mathfrak{B}'_m = -k |\mathfrak{B}'_m|$$

mit $k = \frac{\sum_0^{10} \mathfrak{B}'_m}{\sum_0^{10} |\mathfrak{B}'_m|}$
 $= \frac{-0,00457}{14,62223}$
 $= -0,00031254.$

m	(6)	(7)	(8)	(9)
	$Q_{w,m}$	$Q_{w,m} \cdot c'$	$M_{w,m}$	$X_1 [t]$
0	0,00000	0,00000	72,88861	1,21411
1	1,06218	1,59327	71,29534	1,18757
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	4,32546	6,48819	2,55627	0,04258
10	1,70418	2,55627	0,00000	0,00000

b) $X_2 = \frac{\delta_{m2}}{\delta_{22}} = \frac{M_w}{6,13492}, \quad w_{m2} = -\xi_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m}$ (Abb. 532).

Die Funktion w_{m2} ist antimetrisch. Daher ist M_w nicht nur für $\xi = \pm 1$, sondern auch für $\xi = 0$ Null. Die gegenseitige Verdrehung der Endtangente der Biegelinie δ_{m2} ist δ_{22} .

m	ξ	(1)	(2)		(3)	(4)
		w_{m2}	$10 w_0$	$7 w_{10} + 6 w_9 - w_8$	\mathfrak{B}_m	$\xi \cdot \mathfrak{B}_m$
			$w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}$			
0	0,0	0,00000	0,00000	—	0,00000	0,00000
1	- 0,1	0,09854	1,17411		0,14676	0,01468
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
9	- 0,9	0,49493	5,96339		0,74542	0,67088
10	- 1,0	0,56311	—	6,46037	0,40371	0,40377
$A_w =$						3,06767

Da $w_1 = -w_{-1}$:

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{c'}{24} 10 w_0,$$

$$A_w = \sum_0^{10} (\xi \mathfrak{B}_m),$$

	(5)	(6)	(7)	(8)
m	$Q_{w,m}$	$Q_{w,m} \cdot c'$	$M_{w,m}$	X_2 [mt]
0	-1,82992	-	0,00000	0,00000
1	-1,82992	-2,74488	2,74488	0,44742
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	1,91848	2,87772	3,99585	0,65133
10	2,66390	3,99585	0,00000	0,00000
(a)	(3,06767)			

c) $X_3 = \frac{\delta_{m3}}{\delta_{33}} = \frac{M_w}{22,48201}$, $w_{m3} = 1 \frac{J_0}{J_m \cos \alpha_m}$. (Abb. 532).

Die Funktion w_{m3} ist symmetrisch, daher für $\xi = 0$: $Q_w = 0$, für $\xi = \pm 1$: $Q_w = \pm \frac{1}{2} \delta_{33}$. Die Biegelinie erhält in $\xi = 0$ eine waagerechte Tangente.

m	ξ	w_{m3}	$10 w_0 + 2 w_1$	$7 w_{10} + 6 w_9 - w_8$	\mathfrak{B}_m	$Q_{w,m}$	$Q_{w,m} \cdot c'$	$M_{w,m}$	X_3 [mt]
0	0,0	1,00000	11,97084	-	0,74818	0,00000	0,00000	94,78360	4,21598
1	0,1	0,98542		11,79777	1,47472	0,74818	1,12227	93,66133	4,16606
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	0,9	0,54992		6,62604	0,82826	9,99538	14,99307	16,23546	0,72215
10	1,0	0,56311	-			10,82364	16,23546	0,00000	0,00000

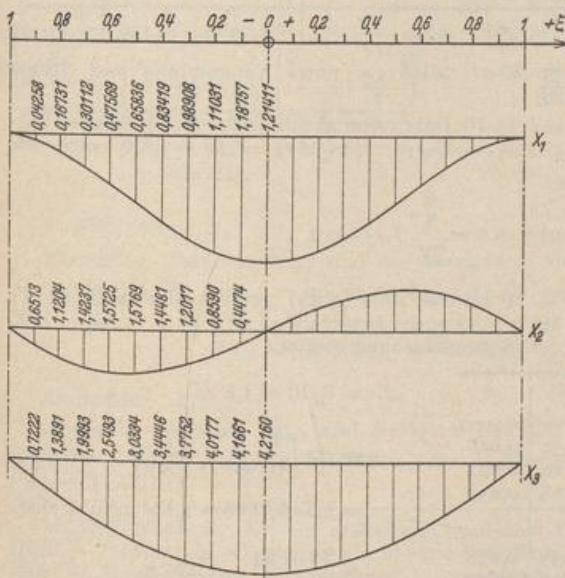


Abb. 532. Einflußlinien X_1, X_2, X_3 .

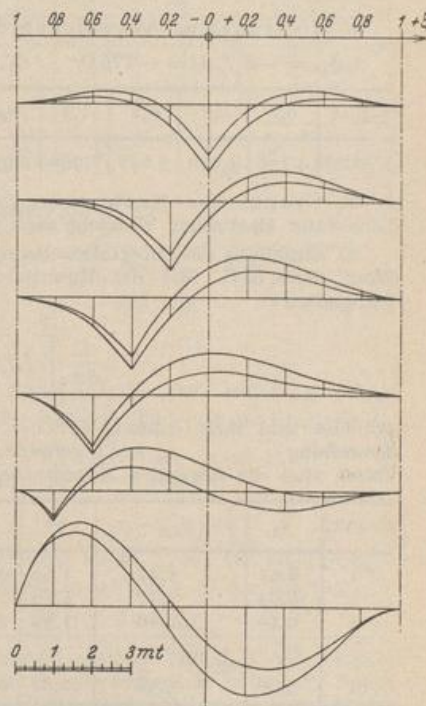


Abb. 533. Einflußlinien für die Kernmomente. Die oberen Linien gelten für die oberen Kernpunkte.

7. Einflußlinie der Schnittkräfte. a) Kernmomente (Abb. 533) im Querschnitt m :

$$M_m = M_{m0} - X_1 \gamma_m + X_2 \xi_m - X_3,$$

im Scheitel c :

$$M_c = M_{c0} - X_1 y_{20} - X_3$$

am Kämpfer (a und b):

$$M_a = + X_1 y_{10} - X_2 - X_3$$

$$M_b = + X_1 y_{10} + X_2 - X_3$$

b) Querkräfte:

$$Q_m = Q_{m0} - X_1 \sin \alpha_m + \frac{X_2}{l_1} \cos \alpha_m$$

8. a) Biegemomente aus Eigengewicht (S. 527).

$$\nu = \frac{\delta''_{11}}{\delta'_{11}} = \frac{2,01833}{58,01617} = 0,03479; \quad X_1 = \Delta H = -\frac{\nu}{1+\nu} H_c = -0,03362 H_c$$

Nach Seite 546 ist $H_c = 114,803$ t. Dabei ist die geringe Abweichung durch Änderung der Bogenform nicht berücksichtigt.

$$H = H_c + X_1 = 114,803 - 3,859 = 110,944 \text{ t}, \quad M = -X_1 y = +3,859 \cdot y \text{ mt.}$$

$\pm \xi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M [mt]	5,505	5,338	4,829	3,959	2,692	0,976	-1,257	-4,102	-7,675	-12,128	-17,652

Der Einfluß der Längskräfte auf δ_{10} ist nach S. 524 klein von zweiter Ordnung, fällt daher in der Rechnung weg.

b) Biegemomente aus Schwinden (S. 524).

$$\alpha_t = 0,00001; \quad t = -15^\circ; \quad \delta_{1t} = E J_c \alpha_t t l = -787,5; \\ \delta_{2t} = \delta_{3t} = 0; \quad X_{1t} = \delta_{1t} / \delta_{11} = -13,117 \text{ t}; \quad M = -X_{1t} \cdot y$$

$\pm \xi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M [mt]	18,710	18,141	16,412	13,455	9,148	3,318	-4,273	-13,941	-26,083	-41,218	-59,992

c) Horizontales Ausweichen der Widerlager um $\Delta l = 0,001$ m.

$$\delta_{1s} = -E J_c \Delta l = -175,0; \quad \delta_{2s} = \delta_{3s} = 0; \quad X_{1s} = -2,915 \text{ t}; \quad M = -X_{1s} y$$

$\pm \xi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M [mt]	4,158	4,032	3,647	2,990	2,032	0,736	-0,949	-3,097	-5,796	-9,159	-13,331

9. Graphische Nachprüfung der Einflußlinien unter Verwendung von Stufen konstanter elastischer Wirkung nach (828).

a) Einteilung des Integrationsbereiches l_1 in 10 Teile e von gleichbleibender elastischer Wirkung (Abb. 534). Mit der Unterteilung $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = \Delta x = l_1/10$ wird die Integralkurve

$$\frac{1}{\Delta x} \int_0^x J_e / J \cos \alpha \cdot dx = \sum_0^x J_e / J \cos \alpha$$

gebildet und ihre Ordinate für $x = l_1$ in 10 gleiche Teile ($c/\Delta x$) geteilt. Hierdurch ist die Einteilung e_1, e_2, \dots, e_{10} von l_1 gefunden. Mittelpunkte der Intervalle e_m sind $1', 2' \dots m' \dots 10'$. Ihnen sind die folgenden Koordinaten der Bogenachse zugeordnet:

Punkt	y_2	$y = y_{2,0} - y_2$	y^2	ξ	ξ^2
1'	0,01	1,41	1,99	0,032	0,010
2'	0,05	1,37	1,88	0,110	0,012
3'	0,16	1,26	1,59	0,188	0,035
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10'	5,00	-3,58	12,82	0,933	0,870
Σ	14,24	-0,04	25,06	—	2,736

$$\Delta x = l_1/10 = 1,5 \text{ m.}$$

$$c = \Delta x \left[\frac{1}{10} \sum_c^b \frac{J_e}{J \cos \alpha} \right] = 1,5 \cdot 0,7496 = 1,124 \text{ m (Abb. 534).}$$

$$y_{2,0} = \frac{2 \cdot 14,24}{2 \cdot 10} = 1,424 \text{ m.}$$

$$\delta'_{11} = 2 \cdot 1,124 \cdot 25,06 = 56,35, \quad \delta''_{11} = 2,02 \text{ (S. 525)*}, \quad \delta_{11} = \delta'_{11} + \delta''_{11} = 58,37$$

* Der Anteil δ''_{11} kann auch nach den Angaben der S. 514 berechnet werden.

Mit $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \approx 0$ wird

$$\delta_{22} = 2 \cdot 1,124 \cdot 2,736 = 6,153, \quad \delta_{33} = 2 \cdot 10 \cdot 1,124 = 22,49.$$

b) Einflußlinie X_1 :

Verwendung der $(1/c)$ fachen \mathfrak{B} -Gewichte; Elastische Gewichte $\mathfrak{B}_{m1}/c = \overline{\mathfrak{B}}_{m1}$ sind die Ordinaten y in den Punkten $1', 2' \dots m'$. Mit $H_{11} = \delta_{11}/c$ Einheiten des $\overline{\mathfrak{B}}_{m1}$ ist 1 m im Maßstab der Zeichnung der Maßstab für 1 t der Einflußlinie. Um die Einflußlinie auf den 5fachen Betrag zu vergrößern, wird daher $H_{11} = 58,37/(5 \cdot 1,124) = 10,39$ aufgetragen.

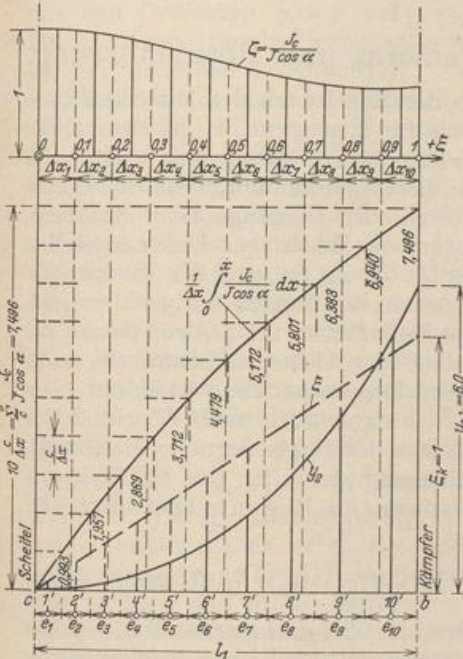


Abb. 534.

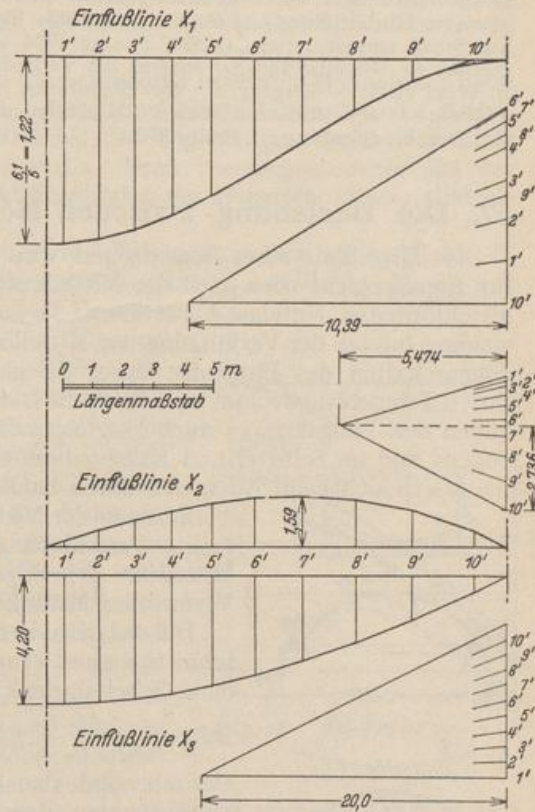


Abb. 535.

c) Einflußlinie X_2 :

Elastische Gewichte $\overline{\mathfrak{B}}_{m2}$ sind die Abszissen ξ der Punkte $1', 2' \dots m'$. Mit $H_{11} = \delta_{22}/c$ Einheiten des $\overline{\mathfrak{B}}_{m2}$ ist 1 m im Maßstab der Zeichnung der Maßstab für 1 m/t der Einflußlinie.

$$H_{11} = 6,153/1,124 = 5,474; \quad A_{11} = \sum_{i=1}^n \xi^2 = 2,736.$$

Einflußlinie X_3 :

Elastische Gewichte $\overline{\mathfrak{B}}_{m3}$ sind die Werte l in den Punkten $1', 2' \dots m'$. Mit $H_{11} = \delta_{33}/c$ Einheiten des $\overline{\mathfrak{B}}_{m3}$ ist 1 m im Maßstab der Zeichnung der Maßstab für 1 m/t der Einflußlinie. $H_{11} = 22,49/1,124 = 20,0$.

Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Bd. 2, 2. Abt. Leipzig 1908. — Ritter, M.: Beiträge zur Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger. Berlin 1909. — Schönhöfer, R.: Statische Untersuchung von Bögen und Wölbtragwerken. Berlin 1911. — Gaber, E.: Bau und Berechnung gewölbter Brücken und ihre Lehrgerüste. Berlin 1914. — Schächterle, K.: Beiträge zur Berechnung der im Eisenbetonbau üblichen elastischen Bogen und Rahmen. Berlin 1914. — Färber: Statische Berechnung von Gewölben. Dtsch. Bauztg. 1915 S. 156. — Derselbe: Rasche Ermittlung der Formen und Normalkräfte von

Gewölben. Dtsch. Bauztg. 1915 S. 6. — Schürch, H.: Wärmeeinfluß und Wärmebeobachtungen bei Betongewölben. Arm. Beton 1916. — Hawranek, A.: Berechnung von Bogenbrücken bei räumlichem Kraftangriff. Beton u. Eisen 1918. — Derselbe: Nebenspannungen von Eisenbetonbogenbrücken. Berlin 1919. — Straßner, A.: Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke und der elastischen Bogenträger Bd. 2. Berlin 1921. — Neumann, G.: Bogenform und Momentenbild. Beton u. Eisen 1922. — Pirlet, J.: Kompendium der Statik der Baukonstruktionen Bd. 2. Berlin 1923. — Proksch, E.: Beitrag zur Querschnittsbemessung der Betongewölbe. Beton u. Eisen 1923. — Derselbe: Der Einfluß elastischer Widerlager auf den eingespannten Bogen. Beton u. Eisen 1923. — Craemer, H.: Der Einfluß einseitig verschieden schwerer Hinterfüllung auf elastische Gewölbe. Beton u. Eisen 1924. — Kasarnowsky, S.: Zur Statik eingespannter Gewölbe. Bauing. 1924. — Hartmann, F.: Die genauere Berechnung gelenkloser Gewölbe und der Einfluß des Verlaufs der Achse und der Gewölbstärke. Leipzig u. Wien 1925. — Kögler, F.: Gewölbetabellen, 2. Aufl. Berlin 1928. — Gesteschi, Th., u. J. Melan: Bogenbrücken. Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 11 4. Aufl. Berlin 1932. — Bergdorfer, E.: Der Eingelenkbogen. Berlin 1929.

57. Die Beziehung zwischen Bogenform und Formänderung.

Die Mittellinie eines Bogenträgers wird in der Regel nach der Mittelkraftlinie für Eigengewicht oder nach der Mittelkraftlinie für Eigengewicht und der halben gleichförmigen Nutzlast p bestimmt. Diese Form ändert sich jedoch mehr oder weniger infolge der Verkürzung der Mittellinie, hervorgerufen durch die elastischen Eigenschaften des Baustoffs, durch die physikalischen Vorgänge beim Erhärten, durch Temperaturwechsel und durch die Bewegung der Widerlager. Daher entstehen neben den Längskräften auch Biegemomente, die im Scheitel des Zweigelenkbogens und im Scheitel und Kämpfer des eingespannten Bogens am größten sind. Sie lassen sich beim Ausrüsten durch bauliche Maßnahmen vermeiden, welche die

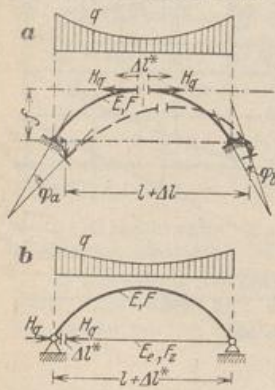


Abb. 536.

Verkürzung der Mittellinie ausgleichen und damit die senkrechte Verschiebung des Bogenscheitels verhindern. Die Mittellinie des Bogens ist dann auch nach Abschluß der Verformung Mittelkraftlinie der ausgezeichneten Belastung.

Die relative Verschiebung der Ufer des Scheitelquerschnitts c eines eingespannten Bogenträgers mit und ohne Scheitelgelenk ist

$$\Delta l^* = H_q \int \frac{ds}{EF} - \alpha_t t l + \Delta l - f(\varphi_a - \varphi_b). \quad (\text{Abb. 536a}) \quad (850)$$

Danach sind die Ufer des Scheitelquerschnitts c eines eingespannten Bogenträgers mit und ohne Scheitelgelenk beim Ausrüsten um den Betrag Δl^* gegenseitig zu entfernen. Der Anteil aus der Verdrehung der Widerlager fällt beim Zweigelenkbogen weg. Die relative Verschiebung der Ufer des Anschlußquerschnitts des Zuggliedes eines Zweigelenkbogens ist mit $(l + \Delta l^*) > l$

$$- \Delta l^* = H_q \int \frac{ds}{EF} - \alpha_t t l + \frac{H_q l}{E_t F_z}, \quad (\text{Abb. 536b}) \quad (851)$$

um die Biegemomente aus der Längenänderung von Bogen und Zugglied zu vermeiden.

Der Ausgleich wird beim Ausrüsten des beiderseits eingespannten Bogenträgers durch Druckpressen erreicht, welche im Bogenscheitel eingebaut werden. Sie liegen beim Ausrüsten des Zweigelenkbogens mit Zugband hinter dem Bogenkämpfer, um hier zunächst die Längskraft des relativ zum Bogenträger beweglichen Zuggliedes aufzunehmen und diesem zuzuführen. Dabei wird die Reckung des Zuggliedes und die Verkürzung des Bogenträgers ausgeglichen, so daß in der Fahrbahn keine Nebenspannungen aus der Formänderung der Hauptträger durch Eigengewicht entstehen (Beispiel S. 519).

Der Einfluß der Formänderung auf den Spannungszustand der drei statisch unbestimmten Bogenträger kann auch durch Überhöhung der Mittellinie um Δf^* und durch vorläufige Anordnung dreier Gelenke ausgeglichen werden. Der Betrag

$$\Delta f^* = \Delta l^* \cdot l_1 / 2f \quad (852)$$

hängt naturgemäß von bestimmten Annahmen über die physikalischen Eigenschaften von Baustoff und Baugrund ab und kann nachträglich nicht mehr geändert werden. Die Bewegung der Gelenke und der hierfür notwendige Spielraum lassen sich leicht nach Abschn. 18 berechnen.

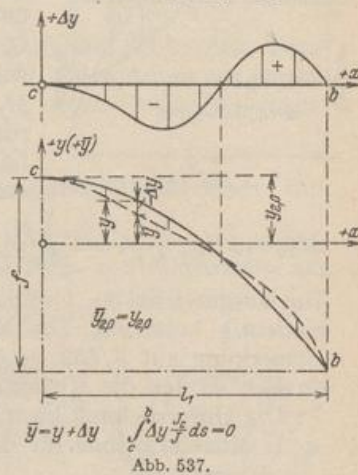
Verlagerung der Bogenachse. Um die besonderen baulichen Maßnahmen beim Ausrüsten der Bogenträger zu umgehen, ist mehrfach versucht worden, die Mittellinie mit den Ordinaten y als Mittellinie des Bogenträgers durch eine Linie mit den Ordinaten $\bar{y} = y + \Delta y$ zu ersetzen, deren Biegemomente aus der Formänderung durch Eigengewicht und Schwinden des Baustoffs kleiner sind als bei der Mittellinie y (Abb. 537).

Zähler und Nenner des Ausdrucks (817) für X_1 können ebenso wie auf S. 513 in die Anteile $\delta'_{10}, \delta'_{11}$ aus den Biegemomenten und in die Anteile $\delta_{1t}, \delta''_{10}, \delta''_{11}$ aus Schwinden und Längskraft zerlegt werden. Darnach läßt sich neben der Bogenkraft $X_1(N, M, t)$ außerdem noch die Bogenkraft $X_1(M) = \delta'_{10}/\delta'_{11}$ anschreiben. Sie ist gleich der Kraft H_q , wenn die Mittellinie des Trägers mit der Mittellinie für die ausgezeichnete Belastung q, H_q zusammenfällt. Da nun $X_1(N, M, t) < X_1(M)$ ist und daher nach S. 524 im Bereich des Scheitels positive, im Bereich des Kämpfers negative Biegemomente entstehen, so kann an Stelle der Mittellinie y mit $X_1(M) = H_q$ eine Mittellinie $\bar{y} = y + \Delta y$ mit einer größeren Bogenkraft $\bar{X}_1(M) = \delta'_{10}/\delta'_{11}$ derart bestimmt werden, daß $\bar{X}_1(N, M, t) \approx H_q$, also $\delta'_{11} < \delta'_{11}$ ist. Die Mittellinie \bar{y} erhält daher unter Beibehaltung der Ordinaten y_a, y_c, y_b (Abb. 537) im Scheitel und Kämpfer eine größere und in der Mitte des Bogenschenkels eine kleinere Krümmung. Sie unterscheidet sich von der Mittellinie zu q, H_q , so daß, abgesehen von den Biegemomenten $M(q, H_q)$ des Trägers auch Biegemomente $M_0(q, H_q)$ im Hauptsystem entstehen. Während also bei der Ausrüstung des Trägers mit Vorspannung durch Pressen die Biegespannungen aus einem ausgezeichneten Belastungs- und Verschiebungszustand nach S. 552 vermieden werden können, läßt sich keine Funktion $\Delta y(x)$ mit dem gleichen Ergebnis anschreiben. Dies liegt an dem Anteil der Längskräfte in der Bedingung

$$A_i^* = \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EF} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EJ} + \int N \alpha_t t ds = \min \quad (853)$$

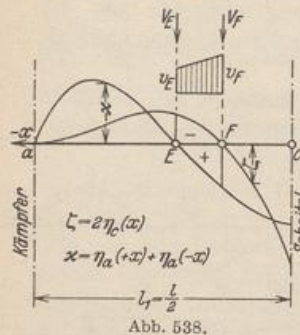
für die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_1, X_2, X_3 . A_i^* wird nicht bei $M = 0, |N| = H_q \cos \alpha$, sondern bei $|N| < H_q \cos \alpha, M \neq 0$ zum Minimum. Die Verlagerung Δy der Mittellinie des Bogenträgers gegen die Mittellinie y kann daher stets nur eine Verminderung der größten Biegemomente herbeiführen.

Die Funktion $\Delta y(x)$ ist im Scheitel mit $x = 0$ durch die Randbedingungen $\Delta y, d(\Delta y)/dx = 0$, im Kämpfer mit $x = l_1$ durch $\Delta y = 0$ bestimmt (Abb. 537). Um die Lösung auf die x -Achse der vorgegebenen Mittellinie y zu beziehen, muß $\int \bar{y}(J_c/J) ds = 0$, also auch $\int \Delta y(J_c/J) ds = 0$ sein. Um die Biegemomente im Scheitel und Kämpfer zu begrenzen, ist ΔX_1 nach (841) Null oder der Größe nach



vorgeschrieben. Für $\Delta y(x)$ bestehen daher fünf Bedingungen, die durch eine Kurve vierten Grades, z. B. die Parabel vierten Grades, befriedigt werden können. Diese Lösung ist von F. Campus vorgeschlagen worden.

Dasselbe Ziel läßt sich nach M. Ritter auch durch statische Überlegungen erreichen. Die den Einflußlinien η_c, η_a der Biegemomente des Bogenträgers im Scheitel (c) und Kämpfer (a) zugeordneten Summeneinflußlinien ζ, \varkappa für zwei symmetrisch angreifende Lasten überschneiden sich auf einer Strecke \overline{EF} mit negativen Ordinaten ζ und positiven Ordinaten \varkappa (Abb. 538). Daher erzeugen in diesem Bereiche Zusatzlasten $V, v(x)$ negative Biegemomente im Scheitel und positive Biegemomente im Kämpfer, vermindern also die aus der Verkürzung der Bogenmittellinie herrührenden positiven Biegemomente im Scheitel und die negativen Biegemomente im Kämpfer. Dieselbe Wirkung entsteht auch unter



der vorhandenen Belastung q, H_q eines Bogenträgers, dessen Mittellinie als Mittelkraftlinie von q in Verbindung mit einer virtuellen Belastung $-v(x)$ und $(H_q + H_v)$ aufgezeichnet worden ist. Die Funktion $v(x)$ ist zunächst beliebig. Sie wird derart gewählt, daß sich die Biegemomente M_0 aus (q, H_q) nicht wesentlich ändern. Die Größe der virtuellen Belastung v im Bereiche \overline{EF} hängt von dem zu tilgenden Anteil der Biegemomente M_{cq}, M_{aq} ab, die im Scheitel und Kämpfer aus der Längenänderung der Mittellinie y bei der Belastung q oder aus der Längenänderung bei Belastung, Schwinden und Stützenverschiebung Δl entstehen. Nach (841) ist allgemein

$$M_{cq} = \left(H_q \frac{v}{1+v} - \frac{\delta_{11} + \delta_{12}}{\delta_{11}} \right) (f - y_{1,0}); \quad -M_{aq} = \left(H_q \frac{v}{1+v} - \frac{\delta_{11} + \delta_{12}}{\delta_{11}} \right) y_{1,0}. \quad (854)$$

Die ausgezeichneten Ordinaten v_E, v_F einer linearen Funktion $v(x)$ sind darnach eindeutig bestimmt. Die Mittellinie aus $q, (-v), (H_q + H_v)$ wird im Sinne der Bemerkung auf S. 553, verglichen mit derjenigen für q, H_q , im Bogenschenkel gestreckt, so daß die Krümmung am Scheitel und Kämpfer zunimmt.

Die Untersuchung besteht aus folgenden Teilen:

1. Mittelkraftlinie für die vorgeschriebene Belastung q, H_q mit den Ordinaten

$$y_{1q} = M_{0q}/H_q. \quad (855)$$

2. Berechnung von M_{cq}, M_{aq} nach (854). Annahme über den zu tilgenden Anteil und Berechnung von v_E, v_F aus der Bedingung

$$\Delta M_{cq} + \int_F^E \zeta v dx = 0, \quad \Delta M_{aq} + \int_E^F \varkappa v dx = 0. \quad (856)$$

3. Mittelkraftlinie für die virtuelle Belastung

$$y_{1v} = M_{0v}/H_v. \quad (857)$$

4. Ordinaten \bar{y}_1 der gesuchten Mittellinie oder Verlagerung $\Delta y = \bar{y}_1 - y_{1q}$

$$\bar{y}_1 = \frac{M_{0q} + M_{0v}}{H_q + H_v}, \quad \Delta y = (y_{1v} - y_{1q}) \frac{H_v}{H_q + H_v}. \quad (858)$$

M_{0v} und H_v sind negativ einzusetzen, da die virtuelle Belastung $v(x)$ zur vorgeschriebenen Belastung $q(x)$ entgegengesetzt gerichtet ist (Rechenvorschrift S. 555).

Die wirtschaftlich günstigste Bogenform ist bei der ungünstigsten Zusammenfassung aller äußeren Ursachen einschließlich Nutzlast und Temperaturwechsel durch gleich große Randspannungen ausgezeichnet, welche den für den Baustoff zulässigen Grenzwert erreichen. Sie wird aus vorgegebenen Abmessungen

(y_h, J_h) mit

$$y_h^* = y_h + \Delta y_h, \quad J_h^* = J_h + \Delta J_h \quad (859)$$

derart bestimmt, daß in r Querschnitten die Bedingungen

$$-\sigma_o = \frac{\max M_{ku}}{W_o} = \frac{\min M_{ko}}{W_u} = \sigma_u; \quad \max M_{ku} = -\sigma_{zul} W_o \quad (860)$$

erfüllt sind. Dies ist für

$$X^* = X + \sum \frac{\partial X}{\partial y_h} \Delta y_h + \sum \frac{\partial X}{\partial J_h} \Delta J_h; \quad M^* = M + \sum \frac{\partial M}{\partial y_h} \Delta y_h + \sum \frac{\partial M}{\partial J_h} \Delta J_h \quad (861)$$

der Fall, so daß bei Vernachlässigung der höheren Potenzen $2r$ lineare Gleichungen mit $2r$ unbekanntem geometrischen Bestimmungsstücken $\Delta y_h, \Delta J_h$ entstehen. Die Lösung ist durch allmähliche Annäherung einfacher. Die Bedingungen (860) werden dann zunächst für die einzelnen Querschnitte (h) erfüllt, so daß bei Bogenträgern mit $W_o = W_u$ folgende Gleichung entsteht.

$$\begin{aligned} -H_q \Delta y_h + \max M_{ku} &= +H_q \Delta y_h + |\min M_{ko}|, \\ -\Delta y_h &= \frac{|\min M_{ko}| - \max M_{ku}}{2H_q}. \end{aligned} \quad (862)$$

Darin enthält $\min M_{ko}$ den Anteil aus Eigengewicht, Nutzlast, Schwinden, Temperaturabfall (t), Ausweichen der Widerlager (Δl), $\max M_{ku}$ den Anteil aus Eigengewicht, Nutzlast und Temperaturzunahme (t). $y + \Delta y_h$ ist die Ordinate der verbesserten Bogenform.

Bestimmung der Mittellinie eines beiderseits eingespannten Bogenträgers mit $M_c \approx 0, M_k \approx 0$.

Als Beispiel dient der Bogenträger mit einer Kettenlinie als Achse und $n = 0,4$ nach S. 538. (Abb. 520). Die Einflußlinien der überzähligen Größen und die Stütz- und Schnittkräfte aus Eigengewicht sind bekannt und werden übernommen.

1. Einflußlinien der Momente im Kämpfer und Scheitel.

$$M_a = 1 \eta_a = X_1 y_{1,0} - X_2 - X_3,$$

$$M_c = 1 \eta_c = M_{0c} - X_1 y_{2,0} - X_3 \quad (\text{Abb. 540}).$$

2. Summeneinflußlinien der Kämpfermomente und Scheitelmomente für zwei symmetrisch angreifende Einzellasten (Abb. 539).

$$\left. \begin{aligned} M_{a\Sigma} &= 1 \cdot \kappa = \eta_a(\xi) + \eta_a(-\xi), \\ M_{c\Sigma} &= 1 \cdot \zeta = \eta_c(\xi) + \eta_c(-\xi) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Abb. 541}).$$

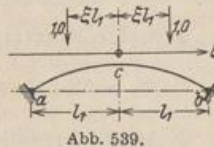
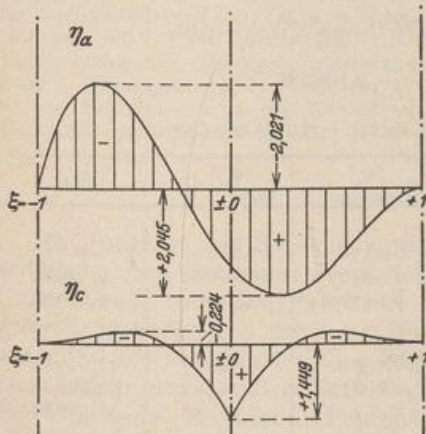
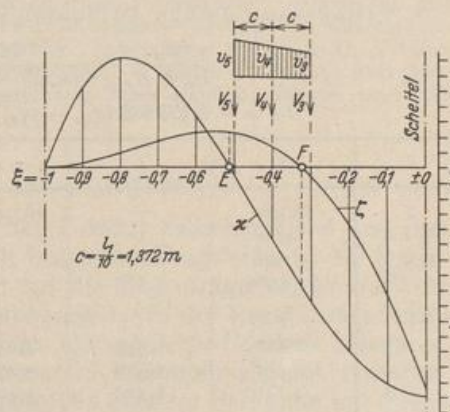


Abb. 539.

Abb. 540. Die Einflußlinien der Biegemomente des Bogenträgers im Kämpfer (η_a) und Scheitel (η_c).Abb. 541. Die Summeneinflußlinien der Kämpfermomente (κ) und Scheitelmomente (ζ) für zwei symmetrisch angreifende Lasten.

m	ξ	η_a	ξ	η_a	ξ	η_c	κ_m	ζ_m
0	$\pm 0,0$	1,49159	$\pm 0,0$	1,49159	$\pm 0,0$	+ 1,44934	+ 2,98318	+ 2,89868
...
3	- 0,3	- 0,27915	+ 0,3	+ 2,04547	$\pm 0,3$	+ 0,05682	+ 1,76632	+ 0,11364
4	- 0,4	- 0,93256	+ 0,4	+ 1,89128	$\pm 0,4$	- 0,13679	+ 0,95872	- 0,27358
5	- 0,5	- 1,49927	+ 0,5	+ 1,59751	$\pm 0,5$	- 0,22220	+ 0,09824	- 0,44440
...
9	- 0,9	- 1,13420	+ 0,9	+ 0,10490	$\pm 0,9$	- 0,02710	- 1,02930	- 0,05420
10	- 1,0	$\mp 0,00000$	+ 1,0	+ 0,00000	$\pm 1,0$	$\mp 0,00000$	$\mp 0,00000$	$\mp 0,00000$

3. Kämpfer- und Scheitelmoment aus Eigengewicht.

Nach II, 5, c) S. 542 ist: $M_{a_0} = - 6,07532$, $M_{c_0} = + 1,82462$.

4. Berechnung von $v(x)$, V aus (856) und aus der Bedingung $M_a \approx 0$, $M_c \approx 0$. $\Delta M_{a_0} = M_{a_0}$, $\Delta M_{c_0} = M_{c_0}$. Mit Simpson (S. 95) ist:

$$-\Delta M_{a_0} \approx I_1 \int_{0,3}^{0,5} \kappa v d\xi = \frac{c}{3} \sum_{0,3}^{0,5} \lambda \cdot \kappa v = \frac{c}{3} [\kappa_5 v_5 + 4 \kappa_4 \frac{v_5 + v_3}{2} + \kappa_3 v_3],$$

$$-\Delta M_{c_0} \approx I_1 \int_{0,3}^{0,5} \zeta v d\xi = \frac{c}{3} \sum_{0,3}^{0,5} \lambda \cdot \zeta v = \frac{c}{3} [\zeta_5 v_5 + 4 \zeta_4 \frac{v_5 + v_3}{2} + \zeta_3 v_3],$$

$$+ 6,07532 = 0,45733 [0,09824 v_5 + 2 \cdot 0,95872 v_5 + 2 \cdot 0,95872 v_3 + 1,76632 v_3],$$

$$- 1,82462 = 0,45733 [- 0,44440 v_5 - 2 \cdot 0,27358 v_5 - 2 \cdot 0,27358 v_3 + 0,11364 v_3].$$

$$v_5 = 3,21649, \quad v_3 = 1,84616, \quad \text{nach linearer Einschaltung: } v_4 = 2,53133;$$

$$V_5 = \frac{c}{6} (2 v_5 + v_4) = 2,04984, \quad V_3 = \frac{c}{6} (v_4 + 2 v_3) = 1,42314,$$

$$V_4 = \frac{c}{6} (v_5 + 4 v_4 + v_3) = 3,47299, \quad A_v = \sum_3^5 V_m = 6,94597.$$

5. Mittelkraftlinie nach (135) für die virtuelle Belastung $\Sigma(-V_m)$.

$$H_e = M_{0c} \Sigma(-V) / f = \frac{- 56,31940}{4,12} = - 13,66976, \quad y_{1v} = \frac{M_{0c} \Sigma(-V)}{H_e}, \quad (\text{Abb. 542}).$$

6. Mittelkraftlinie aus Eigengewicht (q_k, q_s) nach (538).

$$H_e = 84,247 \text{ t (S. 542)}, \quad y_{1e} = y_1 = f - y_2, \quad y_2 \text{ (S. 540)}.$$

7. Verlagerung Δy und Ordinaten \bar{y}_1 der gesuchten Mittellinie.

$$\frac{H_e}{H_e + H_v} = \frac{- 13,670}{84,247 - 13,670} = - 0,193689,$$

$$\Delta y = - 0,193689 (y_{1v} - y_{1e}), \quad \bar{y}_1 = y_{1e} + \Delta y \quad (\text{Abb. 542}).$$

ξ	x	c	P	V_0	$V_0 \cdot c$	M_{0e}
0	13,720	—	(6,94597)	—	—	—
- 1,0	13,720	0	—	6,94597	0,00000	0,00000
- 0,9	12,348	1,372	—	6,94597	9,52987	9,52987
- 0,8	10,976	1,372	—	6,94597	9,52987	19,05974
...
- 0,5	6,860	1,372	2,04984	6,94597	9,52987	47,64935
- 0,4	5,488	1,372	3,47299	4,89613	6,71749	54,36684
- 0,3	4,116	1,372	1,42314	1,42314	1,95255	56,31939
...
0,0	0,000	1,372	—	0,00000	0,00000	56,31939

ξ	-1,0	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	$\mp 0,0$
y_{1e}	0,000	1,002	1,804	2,442	2,945	3,337	3,636	3,855	4,004	4,091	4,120
\bar{y}_1	0,000	1,062	1,884	2,510	2,975	3,308	3,569	3,803	3,982	4,086	4,120
Δy	0,000	+ 0,060	+ 0,080	+ 0,068	+ 0,030	- 0,029	- 0,067	- 0,052	- 0,022	- 0,005	0,000

8. Nachprüfung der Ergebnisse. Eine Nachrechnung ergibt, daß die Bedingungen $M_e \approx 0$; $M_s = M_b \approx 0$ nahezu erfüllt sind (Abb. 542). Der Grad der Annäherung hängt von der Rechengenauigkeit ab.

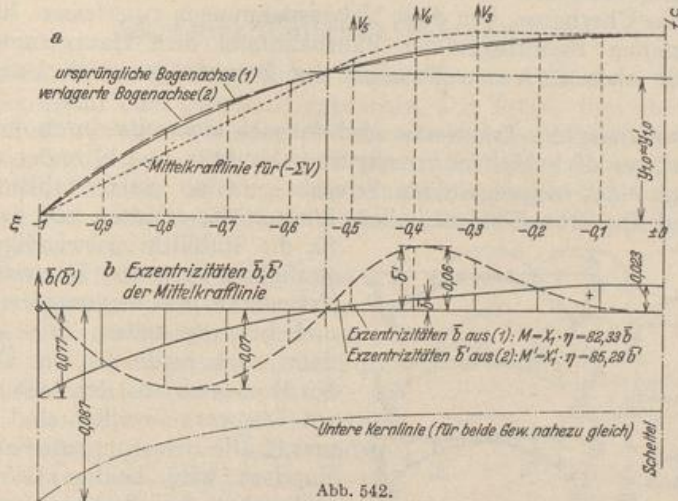


Abb. 542.

Färber: Der Gewölbebau. Neue Hilfsmittel für Berechnung und Bauausführung. Berlin 1916. — Ostenfeld, A.: Die günstigste Bogenform für statisch unbestimmte Bögen. Beton u. Eisen 1923. — Proksch, E.: Verfahren zum Aufsuchen der Bogenlinie gleicher Anstrengungen. Beton u. Eisen 1924 S. 33. — Ritter: Die Formgebung von Brückengewölben. Beitrag zum Internat. Brückenbaukongr. in Zürich 1926. — Krebitz, J.: Die günstigste Form statisch unbestimmter Bogenträger. Verhandlg. des 2. Internat. Kongr. f. Techn. Mech. Zürich 1927 u. Beton u. Eisen 1927 S. 199. — Kögler, F.: Die Formgebung der eingespannten Brückengewölbe. Bauing. 1928 S. 98. — Miozzi, E.: Die rationelle Bestimmung der Stützlinie in Gewölben. Bericht über die 2. Internat. Tagung f. Brückenbau und Hochbau. Wien 1929. — Campus, F.: La fibre moyenne des grandes voutes hyperstatiques. Beitrag zum Internat. Brückenbaukongr. in Lüttich 1930. — Krebitz, J.: Die neue Wandau—Enns-Brücke. Beton u. Eisen 1930 S. 75. — Buschmann, W.: Über die Formgebung eingespannter Gewölbe. Bauing. 1931 S. 198. — Dischinger, F.: Beseitigung der zusätzlichen Biegemomente im Zweigelenbogen mit Zugband. Abhandlung der Internat. Vereinigung f. Brückenbau und Hochbau Bd. 1 S. 69. Zürich 1932 u. Beton u. Eisen 1932 S. 309. — Miozzi, E.: Methode zur Verbesserung des Gleichgewichtszustandes der Gewölbe. Abhandlung der Internat. Vereinigung f. Brückenbau u. Hochbau Bd. 1 S. 337. Zürich 1932. — Mehmel: Bericht über Messungen bei Anwendung des Gewölbeexpansionsverfahrens beim Bau der Brücke über den Roguefluß. Bauing. 1933 S. 247.

58. Erweiterung der Aufgabe.

Die Nutzlast der Brücken wird in der Regel durch Zwischenmittel aus Erdschüttung und Betonmauerwerk oder durch besondere Tragwerke in die Bogenträger eingetragen. Die Fahrbahntafel wird auf die Bogenträger abgestützt oder daran aufgehängt und bei der statischen Untersuchung in der Regel derart idealisiert, daß die Schnittkräfte der Bogenträger unabhängig vom Überbau berechnet, also Auflast und Nutzlast dem Bogenträger statisch bestimmt zugeführt werden. Die Schüttung gilt daher als kohäsionslos, der Aufbau quer zur Fahrbahn in Streifen zerlegt, der Überbau als Folge von einzelnen Trägern, die untereinander und mit den Pfosten frei drehbar verbunden sind.

Diese Voraussetzung ist ganz oder auch teilweise nur in einzelnen Fällen verwirklicht worden. Die Fahrbahn stützt sich vielmehr auf durchlaufende Träger, deren Zwischenstützen mit diesem frei oder elastisch drehbar verbunden sind, so daß Bogenträger und Überbau elastisch voneinander abhängen. Um die Berechnung zu vereinfachen, werden die Formänderungen der Bogenträger bei der Untersuchung des Überbaues vernachlässigt und die Auflasten der Bogenträger durch den Überbau statisch bestimmt angenommen. Der elastische Zusammenhang von Bogenträger und Fahrbahn entlastet in der Regel den Bogenträger und erhöht die Spannungen des Überbaues. Um diese Nebenspannungen zu erfassen, liegt es nahe, die biegungssteifen Randträger der Fahrbahn dem Haupttragwerk einzugliedern, dafür aber auch den Baustoff der Bogenträger wirtschaftlich auszunützen.

Diese Entwicklung des Tragwerks wird darnach einerseits durch den biegungssteifen Bogenträger mit schlaffem Streckgurt (Abb. 543a und b) andererseits durch die Verbindung eines biegungssteifen Streckträgers mit einer Stabkette begrenzt (Abb. 543c und d), deren Elemente allein Längskräfte erhalten und daher nur die

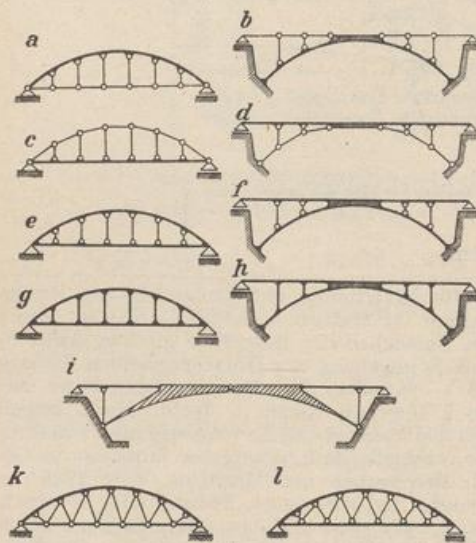


Abb. 543.

für die Stabilität notwendige Biegungssteifigkeit besitzen. Dazwischen liegen Tragwerke mit biegungssteifem Bogen und biegungssteifem Streckträger, die dann auch beide an der Übertragung des Momentes aus den äußeren Kräften am Tragwerk beteiligt sind (Abb. 543e und f). Die Belastung aus Fahrbahn und Nutzlast wird beiden Gurten durch senkrechte, frei drehbar angeschlossene Pfosten zugeführt. Der biegungssteife Anschluß (Abb. 543g und h) erzeugt in den Pfosten neben Längskräften auch Querkräfte und dadurch eine Entlastung der Gurte von Biegunsmomenten. Diese ist bei schrägen Verbindungen (Abb. 543k und l) oder schrägen und senkrechten Verbindungen beider Gurte noch größer. Das Tragwerk wird zum Fachwerkträger mit biegungssteifen Gurten, in denen die Biegunsspannungen nur Neben-

spannungen bedeuten. Um nicht die schönheitliche Wirkung der Bogenträger mit angehängter Fahrbahn durch die Überschneidung starker Wandglieder bei schräger Blickrichtung zu beeinträchtigen, sind schlaffe Stäbe aus Stahl verwendet worden, die nicht in der Lage sind, Druckkräfte zu übertragen, sondern dabei elastisch ausschalten. Die Gliederung des Tragwerks ist um so weniger veränderlich, je größer das Eigengewicht der Fahrbahn im Verhältnis zur Nutzlast ist.

Die Form der Träger wird in der Regel derart gewählt, daß die Pfosten und Bogenstäbe bei Eigengewicht im wesentlichen nur Längskräfte erhalten. Die Mittellinie des Stabbogens ist dann die Mittelkraftlinie aus Eigengewicht. Zur Berechnung dienen die Methoden der Abschnitte 24ff. Wenn dabei auch keine sachlichen Schwierigkeiten entstehen, so ist die Zahlenrechnung bei steif angeschlossenen Pfosten sehr umfangreich und fehlerempfindlich. Sie wird nach S. 485 bei gelenkig angeschlossenen Pfosten bereits wesentlich einfacher und bietet in den Beispielen Abb. 543d und i auch in formaler Beziehung keine Schwierigkeiten mehr. Der Einfluß gelenkig angeschlossener Hängestangen auf die Schnittkräfte eines Bogen-

trägers mit biegeungssteifem Zugband oder Streckträger ist auf S. 270 abgeschätzt worden.

Bleich, F.: Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke mit der Methode des Viermomentensatzes, 2. Aufl. Berlin 1925. — Girkmann, K.: Berechnung von Rahmen-Bogenträgern mit beliebigen Gurtquerschnitten. Stahlbau 1929 S. 253. — Maillart: Leichte Eisenbetonbrücken in der Schweiz. Bauing. 1931 S. 165. — Nielsen, O. F.: Bogenträger mit schräggestellten Hängestangen. Abhandlung d. Internat. Vereinigung f. Brückenbau u. Hochbau Bd. 1 S. 355. Zürich 1932.

59. Durchlaufende Bogenträger.

Die Mittellinie der durchlaufenden Bogenträger des Brücken- und Hochbaues ist stetig gekrümmt oder geradlinig gebrochen. Die Träger sind über den Stützen starr oder frei drehbar verbunden und stützen sich auf Pfeiler oder senkrechte Pfosten. Die Stützenquerschnitte sind starr oder frei drehbar, beweglich oder unverschieblich, elastisch drehbar oder elastisch verschieblich angeschlossen, so daß der wesentliche Anteil des Widerstandes entweder den Pfosten oder den Riegelstäben des Tragwerks zufällt.

Ist die Formänderung der Pfeiler ohne Einfluß auf den Spannungszustand der Träger, so werden die Schnittkräfte am einfachsten aus den geometrischen Bedingungen für die Formänderung eines statisch bestimmten oder unbestimmten Hauptsystems abgeleitet. Diese Rechnung verdient auch in allen anderen Fällen den Vorzug, wenn das Lösungsergebnis nicht durch ungünstige Fehlerfortpflanzung beeinträchtigt wird. Als statisch unbestimmte Hauptsysteme dienen die Rahmen und Bogenträger, deren Schnittkräfte aus den Tabellen in Abschn. 55, 56 und 61 bekannt sind oder in erster Stufe mit dreigliedrigen Bedingungen angegeben werden können.

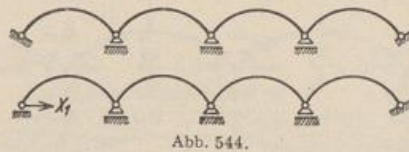


Abb. 544.

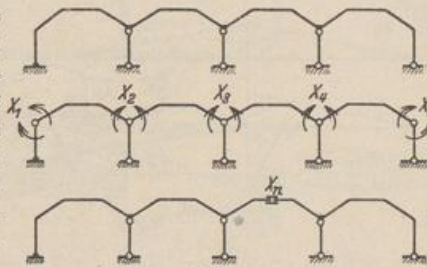


Abb. 545.

1. Der durchlaufende Bogen mit frei drehbarer Verbindung der Träger über den beweglich gelagerten Zwischenstützen ist einfach statisch unbestimmt. Die Bogenwirkung ist gering, da die Verschiebung δ_{10} aus der Belastung eines Feldes ebenso groß ist wie beim Zweigelenkbogen, dagegen die Verschiebung δ_{11} mit der Anzahl der Felder wächst (Abb. 544).

2. Der durchlaufende Bogen mit starrer Verbindung der Träger und beweglicher Lagerung der Zwischenstützen kann aus der Formänderung eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems berechnet werden. Das eine besteht aus der Reihe einfacher Träger, das andere ist ein durchlaufender Balkenträger mit der Bogenkraft X_n als überzähliger Größe (Abb. 545).



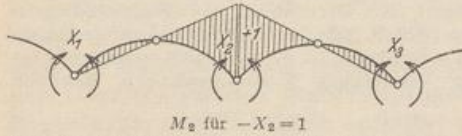
Abb. 546. Durchgehender Bogenträger auf frei drehbaren Stützpunkten mit oder ohne Scheitelgelenk.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte des Hauptsystems können daher nach Abschn. 47 mit einer Gruppe dreigliedriger Bedingungen abgeleitet werden. Damit sind die Biegemomente $M_0^{(n-1)}$, $M_n^{(n-1)}$ also nach (305) auch die Verschiebungen $\delta_{n0}^{(n-1)}$, $\delta_{nn}^{(n-1)}$ bestimmt, so daß

$$X_n = \delta_{n0}^{(n-1)} / \delta_{nn}^{(n-1)} \quad \text{und} \quad M = M_0^{(n-1)} - X_n M_n^{(n-1)}.$$

3. Der durchlaufende Bogenträger mit frei drehbaren, aber unverschieblichen Zwischenstützen kann aus den geometrischen Bedingungen für die Form-

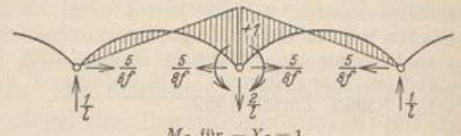
änderung eines Hauptsystems untersucht werden, an dem die Stützenmomente als überzählige Größen wirken. Der Ansatz ist dreigliedrig. Es besteht daher keine Veranlassung, die Schnittkräfte nach Abschn. 41 aus den Knotendrehwinkeln



M_2 für $-X_2 = 1$

Abb. 547. Das statisch bestimmte Hauptsystem bei Anordnung von Scheitelgelenken. Die überzähligen Größen sind die Stützenmomente. Die Bedingungsgleichungen lauten bei Parabelform des Bogens und bei einer Querschnittsveränderung nach $f_c: f \cos \alpha = 1$

$$-X_1 l_1^2 + 4 X_2 (l_1^2 + l_2^2) - X_3 l_2^2 = 30 \delta_{20}^{(0)}$$



M_2 für $-X_2 = 1$

Abb. 548. Das statisch unbestimmte Hauptsystem besteht bei einem Träger ohne Scheitelgelenke aus einer Reihe von Zweigelenkbogen. Die überzähligen Größen sind die Stützenmomente. Die Bedingungsgleichungen lauten bei Parabelform des Bogens und bei einer Querschnittsveränderung nach $f_c: f \cos \alpha = 1$

$$-X_1 l_1^2 + 3 X_2 (l_1^2 + l_2^2) - X_3 l_2^2 = 24 \delta_{20}^{(5)}$$

abzuleiten, denn die statischen Bedingungsgleichungen (583) mit $\psi_0 = 0$ sind ebenfalls dreigliedrig. Dagegen läßt sich leicht dabei erkennen, daß der Spannungszustand eines Abschnittes von dem der anschließenden Felder weniger abhängt als beim durchlaufenden Balkenträger und daß die starre Einspannung der Trägerenden die Zerlegung des Trägers in statisch voneinander unabhängige Abschnitte bedeutet (Abb. 546 bis 548).

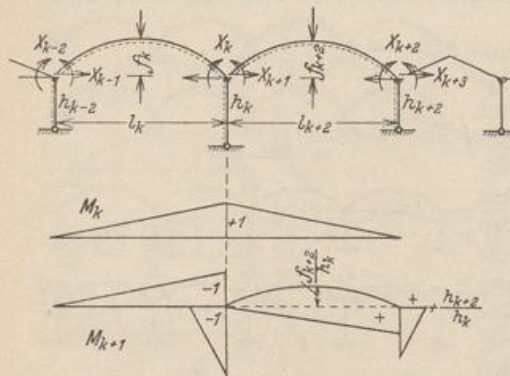


Abb. 549.

4. Der durchlaufende Bogenträger mit Pfosten auf frei drehbaren Enden läßt sich aus den geometrischen Verträglichkeitsbedingungen des statisch bestimmten Hauptsystems Abb. 549 berechnen. Der Ansatz erhält folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} &+ l_k^2 X_{k-2} + 2 \frac{h_k + f_k}{h_{k-2}} l_k X_{k-1} + 2 (l_k + l_{k+2}) X_k \\ &- \left(2 l_k - \frac{h_{k+2} + 2 f_{k+2}}{h_k} l_{k+2} \right) X_{k+1} + l_{k+2} X_{k+2} - l_{k+2} X_{k+3} = 6 \delta_{k0} \\ &- l_k^2 X_{k-2} - 2 \left(\frac{h_k}{h_{k-2}} h_k' + \frac{h_k + f_k}{h_{k-2}} l_k \right) X_{k-1} - \left(2 l_k - \frac{h_{k+2} + 2 f_{k+2}}{h_k} l_{k+2} \right) X_k \\ &+ 2 \left[l_k + h_k' + \frac{h_{k+2}}{h_k^2} (l_{k+2} + h_{k+2}') + \frac{8}{5} \frac{f_{k+2}^2}{h_k^2} l_{k+2} + 2 \frac{f_{k+2} h_{k+2}}{h_k^2} l_{k+2} \right] X_{k+1} \\ &+ 2 \frac{h_{k+2} + f_{k+2}}{h_k} l_{k+2} X_{k+2} - 2 \left(\frac{h_{k+2} + f_{k+2}}{h_k} l_{k+2} + \frac{h_{k+2}}{h_k} h_{k+2}' \right) X_{k+3} = 6 \delta_{(k+1)0} \end{aligned} \right\} \quad (863)$$

c

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

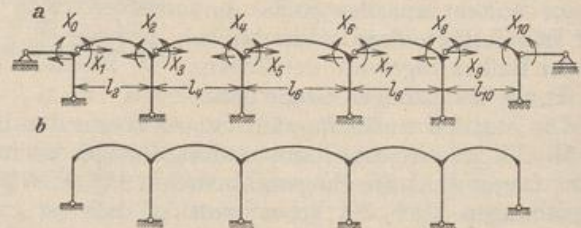


Abb. 550.

Je nachdem die Rahmenstellung nach Abb. 550a oder b abschließt, gilt in Abb. 550c die vollständige Matrix oder ihr umrandeter Kern. Der Ansatz wird

nach S. 219ff. aufgelöst. Der Abschluß der Rechnung nach S. 252 bedarf keiner Erläuterung. Dasselbe gilt bei Verwendung eines statisch unbestimmten Hauptsystems nach Abb. 551, dessen Spannungszustand für jeden Belastungsfall nach den Tabellen Abschn. 61 angeschrieben werden kann. Bei Symmetrie des Stabnetzes entsteht dann die folgende Rechenvorschrift:

Das Hauptsystem ist einfach statisch unbestimmt und die Bogenkraft H des mittleren Abschnitts überzählige Größe der ersten Eliminationsstufe. $H = Y_a$. Sie ist bei antimetrischer Belastung des Hauptsystems Null oder statisch bestimmt. Aus den symmetrisch liegenden statisch unbestimmten Schnittkräften der zweiten Eliminationsstufe (Abb. 551b) werden nach Abschn. 28 folgende Gruppenlasten gebildet:

$$X_1 = \frac{X_a + X_d}{2}, \quad X_2 = \frac{X_c - X_d}{2},$$

$$X_3 = \frac{X_b + X_c}{2}, \quad X_4 = \frac{X_b - X_c}{2}.$$

Nach Tabelle 45 ist für den mittleren Rahmen ($J_b = J_c/3$), $\kappa = 0,1333$, $\varphi = 0,45$, $\mu = 26,9430$ und mit den Werten Φ für $-X_1 = 1$: $H = -W\Phi = +0,25 \cdot 0,227 = 0,0567 \text{ t}$,

$$-X_3 = 1: H = \frac{M}{h} \Phi = \frac{1}{4,0} \cdot 0,724 = 0,1810 \text{ t},$$

$$-X_2 = 1: H_a = -H_b = \frac{1}{h} = 0,25 \text{ t},$$

$$-X_4 = 1: H = 0.$$

Bei gleichförmiger Belastung der Endfelder ist $H = 0$, bei gleichförmiger Belastung $p = 3 \text{ t/m}$ des mittleren Abschnitts (Abb. 552) nach S. 583

$$H = \frac{p l}{8} \lambda \Phi = \frac{3 \cdot 10,0}{8} \cdot \frac{10}{4} \cdot 0,505 = 4,731 \text{ t}.$$

Der symmetrische (1) und antimetrische (2) Anteil $w/2$ einer waagerechten Belastung $w = 0,75 \text{ t/m}$ des linken Endpfostens (Abb. 553) liefert nach S. 584

$$^{(1)}H = -W\Phi = -\frac{w}{2} \cdot \frac{4}{2} \Phi = -0,75 \cdot 0,227 = -0,170 \text{ t},$$

$$^{(2)}H_b = -^{(2)}H_a = \frac{W}{2} = \frac{0,75}{2} = 0,375 \text{ t}.$$

Damit sind die Schnittkräfte des Hauptsystems aus der vorgeschriebenen Belastung (Abb. 554) und aus $-X_1 = 1$ usw. bekannt, so daß die Verschiebungen $\delta_k^{(1)}$, $\delta_k^{(2)}$, $\delta_k^{(3)}$ des Hauptsystems nach S. 161 angegeben werden können.

Symmetrischer Anteil

X_1	X_3
15,870	6,467
6,467	7,263

Antimetrischer Anteil

X_2	X_4
19,937	3,000
3,000	10,000

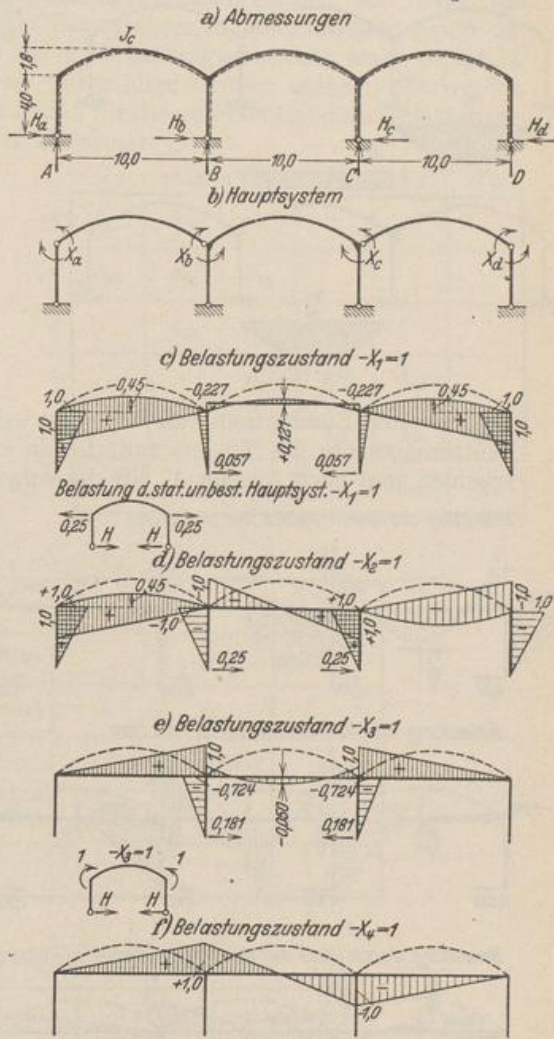


Abb. 551.

5. Die durchlaufenden Bogenträger auf elastisch drehbaren Stützen mit frei drehbaren oder eingespannten Enden lassen sich nach einheitlichen Regeln untersuchen, wenn die Längskräfte im Bogenscheitel als überzählige Größen

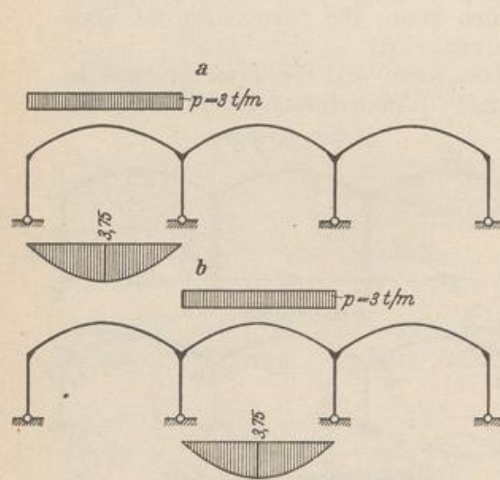


Abb. 552.

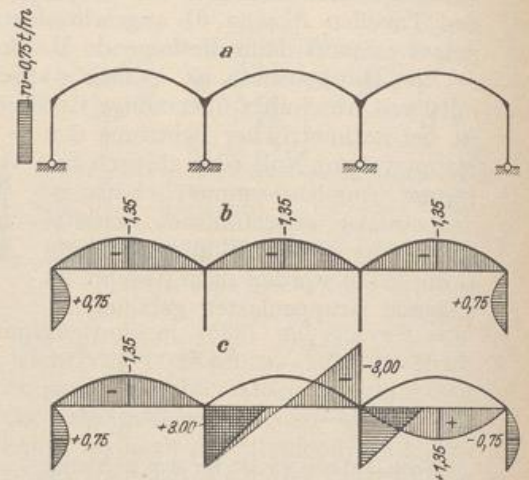
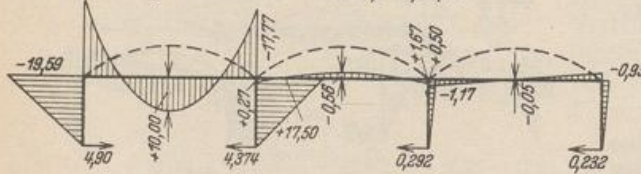


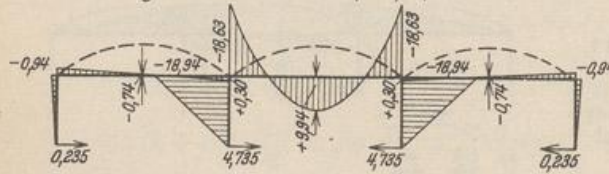
Abb. 553.

einer zweiten Eliminationsstufe bestimmt werden, so daß die statisch unbestimmten Stützenmomente des Trägers zunächst in einem durchlaufenden Balkenträger erscheinen und nach Abschn. 47 für die vorgeschriebene Belastung und die äußeren

Belastung des linken Feldes mit $p = 3,0 \text{ t/m}$



Belastung des Mittelfeldes mit $p = 3,0 \text{ t/m}$



Belastung durch Wind auf den linken Pfosten $nu = 0,755 \text{ t/m}$

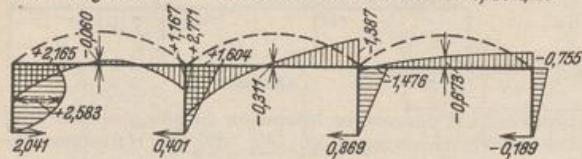
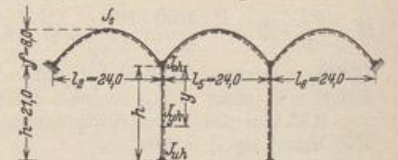


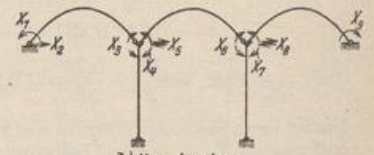
Abb. 554.

Kräfte $-X_3 = 1$ usw. aus dreigliedrigen Bedingungsbedingungen hervorgehen. In jedem Falle entsteht dann die folgende Rechenvorschrift:

Die geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabnetzes (Abb. 555) werden möglichst einfach gewählt, um



a) Abmessungen



b) Hauptsystem

Abb. 555.

übersichtlich zu rechnen. Die Mittellinie des Trägers wird daher als Parabel angenommen, für die Querschnitte gilt $J_s/J \cos \alpha = 1$. Die Querschnitte des Zwischenpfeilers mit J_{vh} sollen mit $n = J_{oh} : J_{uh}$ die Funktion $J_{oh}/J_{vh} = 1 - (1 - n) y^2/h^2$ erfüllen. Die waagerechte Verschiebung ϵ_{11} und die Verdrehung ϵ_{21} des Stützenkopfes durch eine waagerechte Kraft l ist daher im statisch bestimmten Haupt-

system nach Abschn. 18

$$\epsilon_{11} = \int y^2 \frac{J_c}{J} dy = \frac{h^2 h'}{15} (2 + 3n), \quad \epsilon_{21} = \int y \frac{J_c}{J} ds = \frac{h h'}{4} (1 + n).$$

Ein Kräftepaar 1 am Stützkopf führt zur Verdrehung

$$\epsilon_{22} = \int \frac{J_c}{J} dy = \frac{h'}{3} (2 + n), \quad h' = h \frac{J_s}{J_{oh}}$$

Das Tragwerk zählt neun statisch unbestimmte Schnittkräfte, von denen die Längskräfte X_2, X_5, X_8 im Scheitel der Bogenträger in einer zweiten Stufe berechnet werden, so daß die erste nur die Einspannungsmomente eines sechsfach statisch unbestimmten Balkenträgers als überzählige Größen enthält. Sie werden durch $X_1^{(6)} = Y_1 \dots X_6^{(6)} = Y_6$ bezeichnet und für die vorgeschriebenen Belastungen $P, -X_2 = 1$ aus dem folgenden Ansatz berechnet:

Die $6 EJ_s/l'$ -fachen Beträge der Verschiebungen sind

$$\delta'_{11} = 2, \quad \delta'_{12} = 1, \quad \delta'_{22} = 2 + \frac{6}{l} \epsilon_{22},$$

$$\delta'_{23} = -\frac{6}{l} \epsilon_{22}.$$

Mit $l = l' = 24,0 \text{ m}, h = 21,0 \text{ m},$

$$J_s = 0,018 \text{ m}^4, \quad J_{oh} = 0,0833 \text{ m}^4,$$

$$J_{wh} = 0,667 \text{ m}^4,$$

$$n = 0,0833/0,667 = 0,125, \quad h' = 4,54 \text{ m}$$

nach Abb. 555 ist

$$\epsilon_{11} = 317,0, \quad \epsilon_{12} = 26,8, \quad \epsilon_{22} = 3,21,$$

$$\delta'_{22} = 2,8025, \quad \delta'_{23} = -0,8025.$$

Bedingungsgleichungen der ersten Stufe:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
1	2	1				
3	1	2,8025	-0,8025			
4		-0,8025	2,8025	1		
6			1	2,8025	-0,8025	
7				-0,8025	2,8025	1
9					1	2

Konjugierte Matrix nach Abschnitt 29:

$$\begin{matrix} & -\kappa_{21} & -\kappa_{32} & -\kappa_{43} & -\kappa_{54} & -\kappa_{65} \\ \rightarrow & -0,394501 & +0,333525 & -0,396385 & +0,348534 & -0,500000 & \rightarrow \end{matrix}$$

1	+0,622859	-0,245718	-0,081953	+0,032485	+0,011322	-0,005661	
3	-0,245718	+0,491437	+0,163907	-0,064970	-0,022644	+0,011322	-0,500000 = - κ_{12}
4	-0,081953	+0,163907	+0,470274	-0,186410	-0,064970	+0,032485	+0,348534 = - κ_{24}
6	+0,032485	-0,064970	-0,186410	+0,470274	+0,163907	-0,081953	-0,396385 = - κ_{34}
7	+0,011322	-0,022644	-0,064970	+0,163907	+0,491437	-0,245718	+0,333525 = - κ_{45}
9	-0,005661	+0,011322	+0,032485	-0,081953	-0,245718	+0,622859	-0,394501 = - κ_{56}
	1	3	4	6	7	9	

Die Belastungszahlen $\delta'_{k0} = 6 \delta_{k0}/l$ sind für

$$\begin{aligned}
 -X_2 = 1: \quad & \delta'_{10} = 2f = 16,0, & \delta'_{20} = 2f - \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 9,30, & \delta'_{30} = \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 6,70, \\
 -X_5 = 1: \quad & \delta'_{20} = \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 6,70, & \delta'_{30} = 2f - \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 9,30 = \delta'_{40}, & \delta'_{50} = \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 6,70, \\
 -X_8 = 1: \quad & \delta'_{40} = \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 6,70, & \delta'_{50} = 2f - \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 9,30, & \delta'_{60} = 2f = 16,0.
 \end{aligned}$$

Infolge der Symmetrie wird daher nach (412)

$$\begin{aligned}
 Y_{11} = Y_{66} = 7,13148, & \quad Y_{21} = Y_{58} = 1,73705, & \quad Y_{31} = Y_{48} = 3,36421, \\
 Y_{41} = Y_{38} = -1,33282, & \quad Y_{51} = Y_{28} = -0,04356, & \quad Y_{61} = Y_{18} = 0,23237, \\
 Y_{15} = Y_{65} = -2,03050, & \quad Y_{25} = Y_{55} = 4,36445, & \quad Y_{35} = Y_{45} = 3,30281.
 \end{aligned}$$

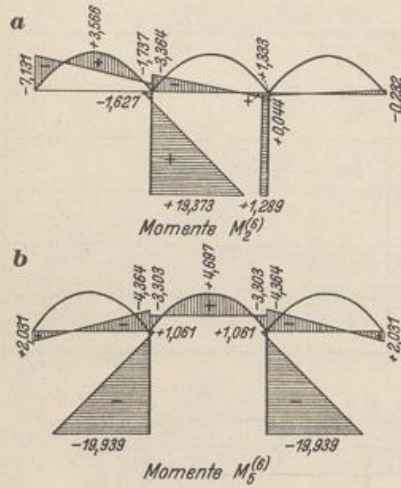


Abb. 556 a zeigt die Momente $M_2^{(6)}$ infolge von $-X_2 = 1$, das Spiegelbild die Momente $M_8^{(6)}$ infolge von $-X_8 = 1$, Abb. 556 b die Momente $M_5^{(6)}$ aus $-X_5 = 1$. Darnach können bei den einfachen elastischen Beziehungen ($J_x/J \cos \alpha$) des Riegels die Biegelinien $\delta_{m2}^{(6)}$, $\delta_{m5}^{(6)}$, $\delta_{m8}^{(6)}$ unmittelbar nach Tab. 12 angeschrieben werden. Dasselbe würde auch bei einer vorgeschriebenen Belastung \mathfrak{B} mit $\delta_{20}^{(6)}$, $\delta_{50}^{(6)}$, $\delta_{80}^{(6)}$ der Fall sein.

Die zweite Stufe des Ansatzes dient zur Berechnung der Längskräfte X_2, X_5, X_8 . Sie besteht aus drei geometrischen Bedingungen für die Formänderung eines sechsfach statisch unbestimmten Hauptsystems. Die Vorzeichen des Ansatzes werden nach S. 161 berechnet. Darnach ist:

$$\begin{aligned}
 \delta_{22}^{(6)} &= \int M_2^{(6)} M_2^{(6)} \frac{J_c}{J} ds \\
 &= 24,0 \left[\frac{8}{15} \cdot 8,0 \cdot 8,0 - \frac{1}{3} 8,0 (7,131 + 1,737) \right] \\
 &\quad - 26,8 \cdot 1,627 + 317 = + 525,036 = \delta_{88}^{(6)},
 \end{aligned}$$

$$\delta_{25}^{(6)} = 24,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8,0 (2,031 - 4,364) + 26,8 \cdot 1,061 - 317 = - 467,877 = \delta_{85}^{(6)},$$

$$\delta_{28}^{(6)} = 24,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8,0 (0,044 - 0,232) + 26,8 \cdot 1,289 = + 22,513,$$

$$\delta_{88}^{(6)} = 24,0 \cdot \frac{8}{15} \cdot 8,0 \cdot 8,0 - 24,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,0 \cdot 3,303 - 2 \cdot 26,8 \cdot 1,061 + 2 \cdot 317 = + 973,546.$$

Bedingungsgleichungen der zweiten Stufe:

	X_2	X_5	X_8
2	+ 525,036	- 467,877	+ 22,513
5	- 467,877	+ 973,546	- 467,877
8	+ 22,513	- 467,877	+ 525,036

Konjugierte Matrix:

	$\delta_{20}^{(6)}$	$\delta_{50}^{(6)}$	$\delta_{80}^{(6)}$
2	+ 0,006 106	+ 0,004 912	+ 0,004 116
5	+ 0,004 912	+ 0,005 749	+ 0,004 912
8	+ 0,004 116	+ 0,004 912	+ 0,006 106

Die Fehlerempfindlichkeit des Ansatzes wird nach S. 167 geprüft.

$$\varphi = \pm p \frac{\sum |\delta_{ik} D_{ik}|}{D'} \approx \pm p \frac{1024 \cdot 10^6}{48 \cdot 10^6} = \pm 21,4 p.$$

Sie ist nach S. 168 für das Ergebnis ungünstig. Berechnung der überzähligen Schnittkräfte:

$$X_2 = \beta_{22} \delta_{20}^{(6)} + \beta_{25} \delta_{50}^{(6)} + \beta_{28} \delta_{80}^{(6)}.$$

Einflußlinien (X_8 Spiegelbild zu X_2) (Abb. 557).

	Abschnitt l_2	Abschnitt l_5
X_2	$9,3788 \omega_p'' - 3,1397 \omega_D' - 3,0587 \omega_D$	$7,5448 \omega_p'' - 3,0027 \omega_D' - 2,1054 \omega_D$
X_5	$7,5448 \omega_p'' - 2,3511 \omega_D' - 3,2068 \omega_D$	$8,8305 \omega_p'' - 2,7807 (\omega_D' + \omega_D)$

	Abschnitt l_8
X_2	$6,3222 \omega_p'' - 2,7184 \omega_D' - 1,9960 \omega_D$
X_5	$7,5448 \omega_p'' - 2,3511 \omega_D' - 3,2068 \omega_D$

Die Lösung ist bei Ausnutzung der Symmetrie kürzer, jedoch hier mit Rücksicht auf andere Aufgaben allgemein durchgeführt worden.

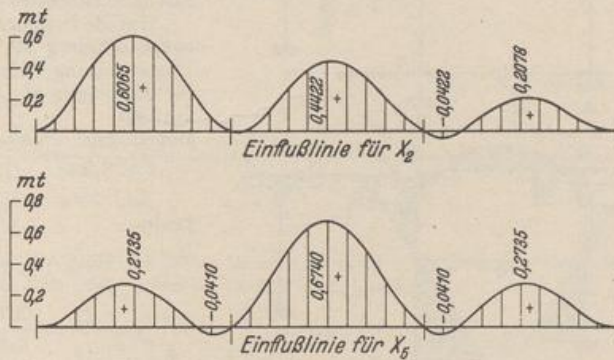


Abb. 557.

Eine angenäherte Untersuchung, bei welcher die Verdrehung φ_H der Stützköpfe H als klein gegen deren waagerechte Verschiebung u_H vernachlässigt wird, ist wesentlich einfacher. Nach S. 563 ist:

$$u_H = (X_k - X_h) \varepsilon_{11}^{(h)} + (X_{h+1} - X_{k-1}) \varepsilon_{12}^{(h)},$$

$$\varphi_H = (X_k - X_h) \varepsilon_{21}^{(h)} + (X_{h+1} - X_{k-1}) \varepsilon_{22}^{(h)},$$

mit

$$\bar{\varphi}_H = 0, \quad \bar{u}_H = (X_k - X_h) \left(\varepsilon_{11}^{(h)} - \frac{\varepsilon_{12}^{(h)} \varepsilon_{21}^{(h)}}{\varepsilon_{22}^{(h)}} \right).$$

Werden die einzelnen Bogenträger l_h, l_k wie bisher als symmetrisch angenommen, so lassen sich aus den statisch unbestimmten Schnittkräften X_{k-1}, X_k, X_{k+1} eines Abschnitts l_k (Abb. 558) nach S. 523 folgende voneinander unabhängige Gruppenlasten bilden:

$$Z_{k-1} = \frac{X_{k-1} - X_{k+1}}{2}, \quad Z_{k+1} = \frac{X_{k-1} + X_{k+1}}{2}.$$

$$Z_k: X_k \text{ in Verbindung mit } Z_{(k+1)k} = -X_k \gamma_0^{(k)}.$$

Da außerdem die Verdrehung der Stützköpfe nach Vorschrift ausgeschlossen wird, sind alle Gruppenlasten $\dots Z_{h-1}, Z_{k-1} \dots Z_{h+1}, Z_{k+1} \dots$ voneinander unab-

hängig. Nach S. 523 ist daher

$$Z_{k-1} = \delta_{(k-1)0} / \delta_{(k-1)(k-1)}, \quad Z_{k+1} = \delta_{(k+1)0} / \delta_{(k+1)(k+1)}.$$

Die überzähligen Größen Z_k sind Wurzeln des folgenden dreigliedrigen Ansatzes:

$$Z_h \delta_{kh} + Z_k \delta_{kk} + Z_r \delta_{kr} = \delta_{k0}.$$

Er enthält bei Belastung eines Abschnittes l_k außer δ_{k0} keine Belastungszahlen, so daß mit den Kennbeziehungen

$$Z_h / Z_k = -\kappa_{hk}, \quad Z_r / Z_k = -\kappa_{rk},$$

$$Z_k = \frac{\delta_{k0}}{-\delta_{kh} \kappa_{hk} + \delta_{kk} - \delta_{kr} \kappa_{rk}},$$

$$Z_k = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{kk}} + \frac{\delta_{k0}}{\delta_{kk}} \frac{\delta_{kh} \kappa_{hk} + \delta_{kr} \kappa_{rk}}{-\delta_{kh} \kappa_{hk} + \delta_{kk} - \delta_{kr} \kappa_{rk}} = Z_{k,0} + Z_{k,1}.$$

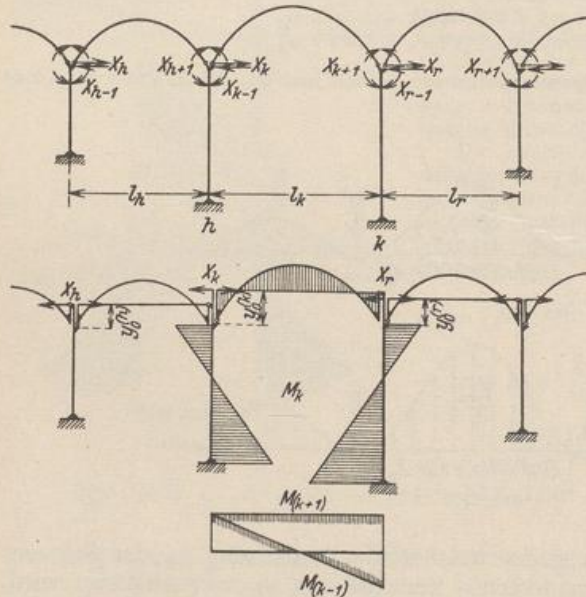


Abb. 558.

Der Anteil $Z_{k,1}$ beschreibt demnach den Einfluß der elastischen Eigenschaften aller übrigen Träger und Pfosten auf die Bogenkraft Z_k .

Um die Brauchbarkeit der Näherungsrechnung zu prüfen, wird die Bogenstellung Abb. 555 untersucht, für die bereits ein genaues Ergebnis vorliegt.

Bogenform: Parabel mit $l=24,0$ m,

$$f = 8,0 \text{ m}, \quad J_o = 0,018 \text{ m}^4,$$

$$J_u / J \cos \alpha = 1, \quad y_0^{(k)} = \frac{2}{3} f.$$

Pfeiler: $h = 21,0$ m,

$$\frac{J_o}{J_v} = 1 - (1-n) \frac{J^2}{h^2},$$

$$n = \frac{J_o}{J_u} = \frac{0,0833}{0,677} = 0,125,$$

$$\epsilon_{11} = 317,0, \quad \epsilon_{12} = 26,8, \quad \epsilon_{22} = 3,21, \quad \text{daher}$$

$$\delta_{22,1} = \frac{4}{45} f^2 l = 136,53,$$

$$\delta_{22,2} = \epsilon_{11} - \frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_{22}} = 93,25,$$

Matrix der Bedingungsgleichungen

	X_2	X_5	X_8
2	229,8	- 93,3	
5	- 93,3	323,0	- 93,3
8		- 93,3	229,8

Konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{hk} .

	$\delta_{20}^{(8)}$	$\delta_{50}^{(8)}$	$\delta_{80}^{(8)}$
2	+ 0,005018	+ 0,001642	+ 0,000667
5		+ 0,004044	+ 0,001642
8			+ 0,005018

Gleichung der Einflußlinien für die Bogenkräfte.

	Bogen l_2	Bogen l_5	Bogen l_8
	$\beta_{22} \delta_{m2}$	$\beta_{25} \delta_{m5}$	$\beta_{28} \delta_{m8}$
X_2	$\beta_{22} \frac{f l_2^2}{3} (\omega'_P - \omega_R)$ 7,7081 $(\omega'_P - \omega_R)$	$\beta_{25} \frac{f l_5^2}{3} (\omega'_P - \omega_R)$ 2,5221 $(\omega'_P - \omega_R)$	$\beta_{28} \frac{f l_8^2}{3} (\omega'_P - \omega_R)$ 1,0241 $(\omega'_P - \omega_R)$
X_5	2,5221 $(\omega'_P - \omega_R)$	6,2116 $(\omega'_P - \omega_R)$	2,5221 $(\omega'_P - \omega_R)$
X_8	1,0241 $(\omega'_P - \omega_R)$	2,5221 $(\omega'_P - \omega_R)$	7,7081 $(\omega'_P - \omega_R)$

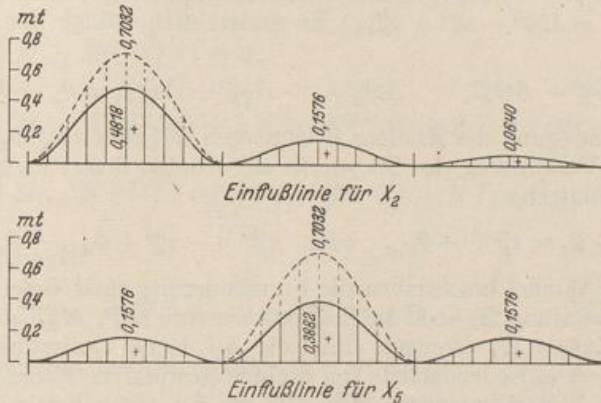


Abb. 559.

Zum Vergleich ist die Einflußlinie des beiderseits starr eingespannten Bogenträgers nach S. 531 berechnet und in Abb. 559 punktiert eingetragen worden.

$$X = \frac{15}{4} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu} \zeta^2 \zeta'^2 = \frac{15}{4} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu} \omega_R^2.$$

Das genaue Ergebnis steht auf S. 565 und kann nach S. 349 ebenfalls aus den Knoten- und Stabdrehwinkeln des Verschiebungszustandes abgeleitet werden. Auch hier bedeutet die Näherungsrechnung mit $\varphi_H = 0$ eine wesentliche Vereinfachung, die leicht im Ansatz der Lösung verfolgt werden kann.

Ritter, M.: Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitelfelenk. Berlin 1909. — Marcus, H.: Studien über mehrfach gestützte Rahmen und Bogenträger. Berlin 1911. — Müller-Breslau, H.: Zur Auflösung der mehrgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Anwendung auf mehrfach gestützte Rahmen. Eisenbau 1917 S. 193. — Straßner, A.: Der durchlaufende Bogen. Berlin 1919. — Hertwig, A.: Die Berechnung der Rahmengebilde. Eisenbau 1921 S. 122. — Schächterle, K.: Die Talbrücken der Verbindungsbahn Tuttlingen—Hattingen. Beton u. Eisen 1933 S. 7.

60. Der Rahmen.

Geschlossene und offene Stabzüge mit geraden oder gekrümmten, steif miteinander verbundenen Elementen, werden als Rahmen bezeichnet, wenn die ihnen nach S. 312 zuzuordnende Stabkette beweglich ist. Die geschlossenen Rahmen sind statisch bestimmt oder statisch unbestimmt gestützt, die Enden der offenen Stabzüge in der Regel frei drehbar angeschlossen oder eingespannt. Die Verbindung mehrerer biegungssteifer Stabzüge liefert mehrteilige Rahmen.

Die Schnittkräfte werden entweder nach (288) als Funktion statisch überzähliger Größen X_k oder nach (500) als Funktion der geometrischen Randwerte φ_j, ϑ_h der

Formänderung angegeben. Diese sind nach Abschn. 24ff. durch die geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems, jene nach Abschn. 38ff. durch die statischen Bedingungen für das Gleichgewicht der Anschlußkräfte an den Stabenden eines geometrisch bestimmten Hauptsystems bekannt. Beide Lösungen haben sich als ausreichendes und zuverlässiges Hilfsmittel zur Rahmenberechnung erwiesen. Trotzdem werden hierfür in der Literatur noch zahlreiche andere Ansätze vorgeschlagen, deren Eigenart durch die Auswertung der geometrischen Eigenschaften geschlossener Stabzüge und in der winkeltreuen Verformung der Stabknoten begründet, deren Kern jedoch stets in den allgemeinen Methoden enthalten ist.

Am Rahmenknoten K der Abb. 560a sind h Stäbe biegungssteif angeschlossen, von denen k und $(k+1)$ dem geschlossenen Stabzuge r zugeordnet sind. Sie bilden den Winkel $\Theta_K^{(r)} = 180^\circ - \alpha_k^{(r)} + \alpha_{k+1}^{(r)}$. Er ändert sich infolge der Formänderung des Stabwerks.

$$\Theta_K^{(r)} \rightarrow \Theta_K^{(r)} + \Delta\Theta_K^{(r)}; \quad \Delta\Theta_K^{(r)} = -\Delta\alpha_k^{(r)} + \Delta\alpha_{k+1}^{(r)} = \vartheta_k - \vartheta_{k+1}.$$

Die elastische Bewegung des Knotens K ist nach S. 305 durch u_K, v_K, φ_K bestimmt. Die winkeltreue Verformung des Stabwerks am Knoten liefert nach S. 306 ($h-1$) Bedingungsgleichungen:

$$\varphi_K = \tau_K^{(k)} + \vartheta_k = \tau_K^{(k+1)} + \vartheta_{k+1} \quad \text{oder} \quad \tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)} + \vartheta_{k+1} - \vartheta_k = 0. \quad (864)$$

Lösung a) Die Winkel beschreiben die Formänderung einer Gelenkkette \overline{JK} , an der neben der Belastung \mathfrak{P}_k noch die Stabendmomente $M_J^{(k)}, M_K^{(k)}$ als äußere Kräfte angreifen. Die Lasten \mathfrak{P}_k erzeugen allein die EJ_c fache Verdrehung $\tau_{J_0}^{(k)}, \tau_{K_0}^{(k)}$ der Endtangente J, K eines beiderseits frei drehbar gestützten Stabes l_k (Tabelle 17), die unbekannt Stabendmomente $M_J^{(k)}, M_K^{(k)}$ die EJ_c fache Verdrehung $\tau_{JM}^{(k)}, \tau_{KM}^{(k)}$. Die Stabendmomente werden in Übereinstimmung mit dem Drehsinn der Winkel nach S. 305 im Uhrzeiger positiv bezeichnet. Die Gleichung

$$\tau_{KM}^{(k+1)} - \tau_{KM}^{(k)} + \vartheta_{k+1} - \vartheta_k + \tau_{K_0}^{(k+1)} - \tau_{K_0}^{(k)} = 0, \quad (k = 1, \dots, h-1), \quad (865)$$

enthält daher 4 Stabendmomente als Unbekannte (Viermomentengleichung). Sie lautet bei geraden Stäben mit konstantem Trägheitsmoment J_k für

$$l'_k = l_k \frac{J_c}{J_k}, \quad \tau_{JM}^{(k)} = \frac{l'_k}{6} (2M_J^{(k)} - M_K^{(k)}), \quad \tau_{KM}^{(k)} = \frac{l'_k}{6} (2M_K^{(k)} - M_J^{(k)}), \quad (866)$$

$$l'_k M_J^{(k)} - 2l'_k M_K^{(k)} + 2l'_{k+1} M_K^{(k+1)} - l'_{k+1} M_L^{(k+1)} + 6\vartheta_{k+1} - 6\vartheta_k + 6\tau_{K_0}^{(k+1)} - 6\tau_{K_0}^{(k)} = 0 \quad (867)$$

und kann ebenso für Stäbe mit Zwischenstützung oder für gekrümmte Stäbe angeschlossen werden. Die EJ_c fachen Stabdrehwinkel $\vartheta_k, \vartheta_{k+1}$ sind nach (526) Funktionen der unabhängigen Komponenten ψ_c des Verschiebungszustandes. Sie werden gemeinsam mit den Stabendmomenten aus den geometrischen Bedingungen (867) und aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Schnittkräfte $\delta A_J = 0, \delta A_c = 0$ (523) berechnet.

Lösung b) Die Substitution der Stabendmomente in (867) durch Funktionen geeigneter statisch überzähliger Größen nach Abschn. 24 und der Stabdrehwinkel ϑ_k durch Funktionen der Parameter ψ_c liefert die von Fr. Bleich angegebene Lösung, bei welcher nach Elimination der ψ_c ($c = 1 \dots f$) ebenso viele Gleichungen als statisch überzählige Größen vorhanden sind.

Lösung c) Die Substitution der Stabdrehwinkel ϑ_k durch die unabhängigen Komponenten ψ_c in den geometrischen Bedingungen (864) und deren Elimination liefern für den Rahmen mit n geschlossenen, biegungssteifen Stabzügen $3n$ geometrische Bedingungen für die Drehwinkel $\tau_K^{(k)}$. Sie können auf Grund der Eigenart der Formänderung geschlossener Stabzüge auch unmittelbar angeschlossen werden.

Die Formänderungsenergie des Rahmens ist ebenso wie bei allen anderen Tragwerken ein Minimum, so daß für einen biegungssteifen geschlossenen Stabzug (r) mit den drei statisch unbestimmten Größen $X_{r+1}, X_{r+2}, X_{r+3}$ nach (314) die folgenden Bedingungen gelten:

$$\partial A_i / \partial X_{r+1} = 0, \quad \partial A_i / \partial X_{r+2} = 0, \quad \partial A_i / \partial X_{r+3} = 0. \quad (868)$$

Diese bedeuten mit X_{r+1} als Biegemoment des Querschnitts ($r+1$) und mit X_{r+2}, X_{r+3} als den Längskräften zweier anderer Querschnitte ($r+2$), ($r+3$) nach (162) geometrisch, daß die gegenseitige Verdrehung der Querschnitte ($r+1$) und die gegenseitige Verschiebung der Ufer der Querschnitte ($r+2$), ($r+3$) in Richtung der Stabantente eines ($3n-3$)fach statisch unbestimmten Hauptsystems Null sind.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{r+1}^{(3n)} &= \int M_{r+1} M^{(3n)} \frac{J_c}{J} ds = 0, \\ \delta_{r+2}^{(3n)} &= \int M_{r+2} M^{(3n)} \frac{J_c}{J} ds + \int N_{r+2} \left(N^{(3n)} \frac{J_c}{F} + E J_c \alpha_t t \right) ds = 0, \\ \delta_{r+3}^{(3n)} &= \int M_{r+3} M^{(3n)} \frac{J_c}{J} ds + \int N_{r+3} \left(N^{(3n)} \frac{J_c}{F} + E J_c \alpha_t t \right) ds = 0. \end{aligned} \right\} \quad (869)$$

Mit den Abkürzungen

$$M^{(3n)} \frac{J_c}{J} = w, \quad M^{(3n)} \frac{J_c}{J} ds = w ds = d\mathfrak{B}$$

und den Beziehungen der Abb. 560 für

$$\begin{aligned} M_{r+1} &= 1, & M_{r+2} &= a, & N_{r+2} &= \cos \alpha, \\ M_{r+3} &= c, & N_{r+3} &= \cos \gamma \end{aligned}$$

lauten die geometrischen Bedingungen (869) für $t=0$ ohne den relativ kleinen Anteil der Längskräfte:

$$\int_r d\mathfrak{B} = 0, \quad \int_r a d\mathfrak{B} = 0, \quad \int_r c d\mathfrak{B} = 0. \quad (870)$$

$d\mathfrak{B}$ ist der EJ_c fache Betrag eines Winkels, der in der Mechanik als Vektor senkrecht zur Ebene der Bewegung aufgetragen wird. Daher darf w als stetige, senkrecht zur Rahmenebene wirkende Linienbelastung, die relative Verdrehung \mathfrak{B}_g einzelner Stabglieder in Anschluß- oder Zwischengelenken (g) als Einzellast angesehen werden. Die Gleichungen (870) bedeuten auf diese Weise das Gleichgewicht der parallelen fiktiven Kräfte ($w^{(r)}, \mathfrak{B}_g^{(r)}$) an einem geschlossenen Stabzug (r) des Rahmens, da die algebraische Summe und das statische Moment der Kräfte für zwei Achsen b, d der Rahmenebene nach (870) Null sind.

Dies gilt ebenso für die stabweise (k) Zusammenfassung der Kräfte ($w^{(r)}, \mathfrak{B}_g^{(r)}$) zu den resultierenden Kräften $\mathfrak{B}^{(r,k)}$ mit den Abständen a_k, c_k von den Achsen b, d (Abb. 560 b, c) und deren Zerlegung nach den benachbarten Knotenpunkten J, K des Stabes k in $\mathfrak{B}_J^{(r,k)}, \mathfrak{B}_K^{(r,k)}$ mit

$$\int_k d\mathfrak{B}^{(r)} + \sum_k \mathfrak{B}_g^{(r)} = \mathfrak{B}^{(r,k)} = -(\mathfrak{B}_J^{(r,k)} + \mathfrak{B}_K^{(r,k)})$$

und

$$\mathfrak{B}_K^{(r,k)} + \mathfrak{B}_K^{(r,k+1)} = \mathfrak{B}_K^{(r)}.$$

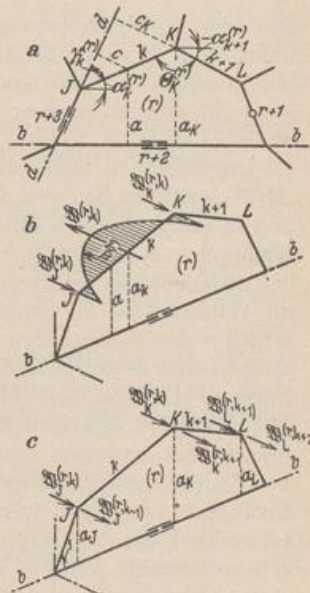


Abb. 560.

Die Gleichgewichtsbedingungen (870) können daher auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sum \mathfrak{B}_K^{(r)} = 0, \quad \sum a_K \mathfrak{B}_K^{(r)} = 0, \quad \sum c_K \mathfrak{B}_K^{(r)} = 0. \quad (871)$$

Sie bilden mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_J^{(r,k)} &= Q_{J,w}^{(r,k)} = \int_{r,k} M \frac{J_c}{J} \frac{x'}{l_k} ds = \tau_J^{(k)}, \\ -\mathfrak{B}_K^{(r,k)} &= Q_{K,w}^{(r,k)} = - \int M \frac{J_c}{J} \frac{x'}{l_k} ds = \tau_K^{(k)}, \\ \mathfrak{B}_K^{(r)} &= -Q_{K,w}^{(r,k)} + Q_{K,w}^{(r,k+1)} = \tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)} \end{aligned} \quad (872)$$

in Verbindung mit (864) u. (865) Bedingungen für die Komponenten des Verschiebungszustandes oder für die Änderungen $\Delta\theta_K^{(r)} = \vartheta_k - \vartheta_{k+1}$ der Stabzugwinkel $\theta_K^{(r)}$:

$$\begin{aligned} \sum_r (\tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)}) &= 0, & \sum_r a_K (\tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)}) &= 0, & \sum_r c_K (\tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)}) &= 0, \\ \sum_r \Delta\theta_K^{(r)} &= 0, & \sum_r a_K \Delta\theta_K^{(r)} &= 0, & \sum_r c_K \Delta\theta_K^{(r)} &= 0. \end{aligned} \quad (873)$$

Diese sind mit den geometrischen Bedingungen (869) äquivalent. Das Ergebnis (873) kann nach Abschn. 21 auch unmittelbar angeschrieben werden. Dabei lassen sich leicht auch die Stablängenänderungen $\Delta l_k \neq 0$ nach (234) berücksichtigen. Die Lösung eignet sich im wesentlichen nur für Rahmenstäbe mit gleichbleibendem Trägheitsmoment.

Um Rahmen nach (865) oder (867) zu berechnen, werden die Winkeländerungen $\Delta\theta_K^{(r)} = \mathfrak{B}_K^{(r)}$ in den von der Belastung allein abhängigen Anteil $\mathfrak{B}_{K0}^{(r)} = \tau_{K0}^{(k+1)} - \tau_{K0}^{(k)}$ und in einen von den unbekanntem Stabendmomenten $M_J^{(k)}$, $M_K^{(k)}$ und $M_{K+1}^{(k+1)}$, $M_L^{(k+1)}$ abhängigen Anteil $\mathfrak{B}_{KM}^{(r)} = \tau_{KM}^{(k+1)} - \tau_{KM}^{(k)}$ zerlegt. Ihr Betrag ist für konstantes Trägheitsmoment der Stäbe k auf S. 112 angegeben. Als Unbekannte dienen entweder die Winkel oder die Stabendmomente $M_K^{(k)}$, $M_J^{(k)}$. Ihre Anzahl ist größer als die Anzahl $3n$ der verfügbaren Bedingungsgleichungen, so daß diese ebenso wie bei Lösung a) durch die Bedingungen über das Gleichgewicht der Stabendmomente ergänzt werden müssen. Hierzu eignen sich wiederum am besten die Ansätze (523) $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen. Diese Gleichgewichtsbedingungen sind jedoch unnötig, wenn die Stabendmomente in den $3n$ Bedingungsgleichungen als Funktion von $3n$ geeigneten statisch überzähligen Größen X_k eingesetzt werden. Hierfür lassen sich Schnittkräfte oder Gruppenlasten verwenden, die nachträglich für einen vorhandenen Ansatz geometrischer Bedingungen ausgewählt werden. Dies ist hier ebenso bemerkenswert wie für die Lösung b), obwohl ihr mechanischer Sinn mit den allgemeinen geometrischen Bedingungen (869) zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke übereinstimmt.

Die Sonderbetrachtungen der Literatur zur Berechnung von Rahmen bieten nach diesen Bemerkungen im Vergleich zu den allgemeinen Methoden A oder B keine neue Erkenntnis. Sie benützen für den Ansatz nur eine mit dem vorgeschriebenen Tragwerk in geometrischer und statischer Beziehung äquivalente Stabkette, an der neben der Belastung \mathfrak{P} die Stabendmomente als äußere Kräfte angreifen. Diese werden unmittelbar oder als Funktion von statisch überzähligen Größen berechnet. Die Lösung bietet keinesfalls Vorteile, wenn die zur Superposition geeigneten statisch unbestimmten Größen X_k und die für den Ansatz notwendigen Schnittkräfte M_0 , M_k des statisch bestimmten oder unbestimmten Hauptsystems leicht angegeben werden können. Der Ansatz zeigt im Gegensatz zu den besonderen Rechenverfahren für Rahmen stets eine symmetrische Matrix und zählt weniger Be-

dingungsgleichungen als diese. Daher werden die einfachen Rahmen des Hochbaues am besten aus den Gleichungen (285) für die Formänderung eines Hauptsystems berechnet. Das gilt vor allem bei veränderlicher Belastung, für welche die Einflußlinien der Schnittkräfte gezeichnet werden.

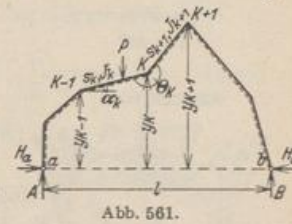
Diese Lösung ist für die symmetrischen Bauformen des offenen und geschlossenen Stabzugs mit konstantem Trägheitsmoment der Pfosten und Riegel sehr einfach und für die ausgezeichneten Schnittkräfte in den Tabellen Abschn. 61 für alle Belastungsfälle angeschrieben worden, die zum Nachweis der Sicherheit oder zur Verwendung des Tragwerks als statisch unbestimmtes Hauptsystem nötig sind. Die übrigen Schnittkräfte des Tragwerks werden analytisch oder zeichnerisch aus den äußeren Kräften des Hauptsystems, d. h. aus der vorgeschriebenen Belastung und den ihr zugeordneten, nunmehr bekannten statisch unbestimmten Größen berechnet. Dies ist auf S. 572 ff. an mehreren Beispielen gezeigt worden.

Allgemeine Bauform eines Stabzugs mit frei drehbaren Enden: 1. Lösung nach Abschn. 26:

$$M = M_0 - X_1 M_1, \quad N = N_0 - X_1 N_1, \\ Q = Q_0 - X_1 Q_1.$$

Nach Abb. 561 ist

$$X_1 = H_a = \delta_{10}/\delta_{11}, \quad H_b = H_{b0} - X_1, \quad M_1 = 1 y, \\ N_1 = 1 \cos \alpha, \quad Q_1 = 1 \sin \alpha.$$



Positive Momente erzeugen an der inneren Stabseite Zugspannungen. Bei stabweiser Integration wird ohne den Einfluß der Längskräfte auf die Formänderung

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{3} s'_k (y_{K-1}^2 + y_K y_{K-1} + y_K^2), & \delta_{1t} &= E J_c \alpha_t t l, & \delta_{1s} &= -E J_c \Delta l, \\ \delta_{10} &= \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \frac{1}{6} s'_k [M_{(k-1)0} (2y_{K-1} + y_K) + M_{k0} (y_{K-1} + 2y_K)] + C_{K-1}^{(k)} + C_K^{(k)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (874)$$

Der Anteil $C_{K-1}^{(k)} + C_K^{(k)}$ entsteht durch Belastung zwischen den Enden (K), (K-1) des Stabes s_k . Das Ergebnis kann bei Summierung über die den einzelnen Stabknoten zufallenden Beiträge einfacher, und zwar ebenso wie in 875 angeschrieben werden.

2. Lösung nach S. 135 mit Berücksichtigung der Längskräfte:

$$\sum_{K=1}^{K=n-1} \mathfrak{B}_K y_K = \sum_{K=1}^{K=n-1} y_K \left(\Delta \theta_K + \frac{\Delta s_k}{s_k} \operatorname{ctg} \alpha_k - \frac{\Delta s_{k+1}}{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \alpha_{k+1} \right) \\ = \sum y_K \Delta \theta_K + E J_c \sum \Delta s_k \cos \alpha_k = 0, \\ 6 \Delta \theta_K = (M_{K-1} + 2 M_K) s'_k + (2 M_K + M_{K+1}) s'_{k+1} - 6 \tau_{K0}^{(k)} + 6 \tau_{K0}^{(k+1)}, \\ 6 E J_c \Delta s_k = N_k s_k \frac{J_c}{F_k} + E J_c \alpha_t t s_k, \\ M_K = M_{K0} - X_1 y_K, \\ \sum \mathfrak{B}_K y_K = \sum \mathfrak{B}_{K0} y_K - X_1 \sum \mathfrak{B}_{K1} y_K = 0,$$

mit $\mathfrak{B}_K \approx \Delta \theta_K$ (Vernachlässigung der Längskräfte) und Summierung über die Stabknoten ist

$$\left. \begin{aligned} \sum_{K=0}^{K=n} \mathfrak{B}_{K0} y_K &= \sum_{K=0}^{K=n} \left\{ M_{K0} \frac{1}{6} [y_{K-1} s'_k + 2y_K (s'_k + s'_{k+1}) + y_{K+1} s'_{k+1}] \right. \\ &\quad \left. + C_K^{(k)} + C_K^{(k+1)} \right\} = \delta_{10}, \\ \sum_{K=0}^{K=n} \mathfrak{B}_{K1} y_K &= \sum_{K=0}^{K=n} y_K \frac{1}{6} [y_{K-1} s'_k + 2y_K (s'_k + s'_{k+1}) + y_{K+1} s'_{k+1}] = \delta_{11}, \end{aligned} \right\} (875)$$

$$C_K^{(k)} = -y_K \tau_{K0}^{(k)}, \quad C_K^{(k+1)} = y_K \tau_{K0}^{(k+1)}.$$

Berechnung eines Zweigelenrahmens.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 562) (Tab. 44 S. 581).

$$l = 5,6, \quad h = 2,6, \quad f = 1,0, \quad s = 2,973 \text{ m};$$

$$\lambda = \frac{5,6}{2,6} = 2,154, \quad \varphi = \frac{1,0}{2,6} = 0,385,$$

$$J_h = 8,94, \quad J_s = 13,35 \text{ dm}^4, \quad \varkappa = \frac{2,6}{2,973} \frac{13,35}{8,94} = 1,306,$$

$$\mu = 3 + 1,306 + 0,385 \cdot 3,385 = 5,609.$$

2. Halbseitige Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 563).

a) Schnittkräfte (Tab. 44 S. 582).

$$\Phi = \frac{8 + 5 \cdot 0,385}{4 \cdot 5,609} = 0,442,$$

$$A = \frac{3}{8} \cdot 1 \cdot 5,6 = 2,1 \text{ t}, \quad B = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 5,6 = 0,7 \text{ t},$$

$$H_{a,b} = \frac{1 \cdot 5,6}{16} \cdot 2,154 \cdot 0,442 = 0,333 \text{ t},$$

$$M_{e,a} = -\frac{1 \cdot 5,6^2}{16} \cdot 0,442 = -0,866 \text{ mt},$$

$$M_e = \frac{1 \cdot 5,6^2}{16} [1 - 1,385 \cdot 0,442] = 0,760 \text{ mt}.$$

b) Mittelkraftlinie nach S. 174.

$$M = S \cdot \bar{b}, \quad S = H_{a,b} = 0,333 \text{ t},$$

$$b_e = \frac{B}{S} \frac{l}{2} = \frac{0,7}{0,333} \cdot \frac{5,6}{2} = 5,89 \text{ m}.$$

3. Waagerechte Belastung $w = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 564).

a) Schnittkräfte (Tab. 44 S. 582).

$$\Phi = \frac{1}{4 \cdot 5,609} [6 \cdot 2,385 + 5 \cdot 1,306] = 0,929,$$

$$A = -B = -\frac{1 \cdot 2,6^2}{2 \cdot 5,6} = -0,604 \text{ t},$$

$$H_{a,b} = -\frac{1 \cdot 2,6}{2} [1 \pm 1 - 0,4645] = \begin{cases} -1,996 \text{ t}, \\ +0,604 \text{ t}, \end{cases}$$

$$M_{e,a} = \frac{1 \cdot 2,6^2}{4} [1 \pm 1 - 0,929] = \begin{cases} +1,810 \text{ mt}, \\ -1,570 \text{ mt}, \end{cases}$$

$$M_e = \frac{1 \cdot 2,6^2}{4} [1 - 1,385 \cdot 0,929] = -0,484 \text{ mt}.$$

b) Mittelkraftlinie nach S. 174.

$$M = S \cdot \bar{a}, \quad S = B = +0,604 \text{ t},$$

$$a_e = \frac{H_b}{S} (h + f) - \frac{l}{2} = \frac{0,604}{0,604} (3,6 - 2,8) = 0,8 \text{ m}.$$

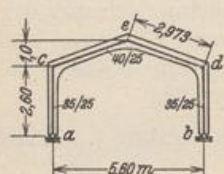


Abb. 562.

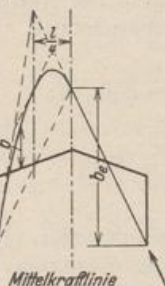
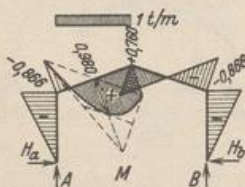


Abb. 563.

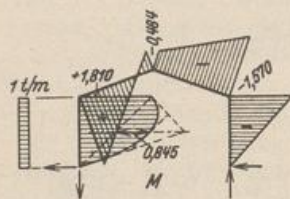


Abb. 564.

Berechnung eines Zweigelenrahmens mit Zugband.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 565) (Tab. 46 S. 585).

$$l = 27,0, \quad h = 18,0, \quad f = 4,0, \quad s = 10,77 \text{ m},$$

$$l_1 = 7,0, \quad h_1 = 14,0, \quad a = 10,0 \text{ m};$$

$$\lambda = \frac{10,0}{27,0} = 0,370, \quad \psi = \frac{14,0}{18,0} = 0,778, \quad \varphi = \frac{4,0}{14,0} = 0,286,$$

$$\lambda' = \frac{7,0}{27,0} = 0,260, \quad \psi' = \frac{4,0}{18,0} = 0,222, \quad v = \frac{27,0}{18,0} = 1,500,$$

$$J_A = 0,0333, \quad J_s = J_e = 0,0576 \text{ m}^4, \quad F_s = 0,00846 \text{ m}^2, \quad J_c = J_s.$$

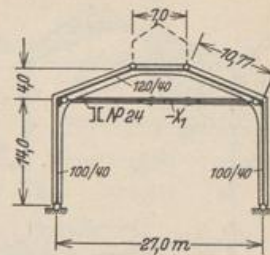


Abb. 565.

$$\kappa_1 = \frac{7,0}{10,77} = 0,650, \quad \kappa_2 = \frac{14,0}{10,77} \frac{576}{333} = 2,246; \quad \mu = 0,778^2 \cdot 3,246 + 1,778 + \frac{3}{2} \cdot 0,650 = 4,717$$

2. Hauptsystem: Zweigelenrahmen (Tab. 46 S. 585). Überzählige $X_1 = \frac{\delta_{10}^{(1)}}{\delta_{11}^{(1)}}$.

$$\delta_{11} = \int M_1^{(1)} \frac{J_c}{J} ds + \frac{E_b J_c}{E_s F_s} N_1^2 l = \int M_1^{(1)} M_1^{(0)} \frac{J_s}{J} ds + \frac{0,0576}{10 \cdot 0,00846} \cdot 1 \cdot 27,0 = \int M_1^{(1)} M_1^{(0)} \frac{J_s}{J} ds + 18,383.$$

3. Belastung des Hauptsystems mit $-X_1 = 1 \text{ t}$ (Abb. 566) (Tab. 46 S. 586).

$$\Phi = \frac{0,286}{2 \cdot 4,717} (3 \cdot 1,650 - 0,222) = 0,143,$$

$$A_1^{(1)} = B_1^{(1)} = 0,$$

$$H_{a,b}^{(1)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \psi \Phi = 0,778 \cdot 0,143 = 0,111 \text{ t},$$

$$M_{c,d}^{(1)} = -2 \frac{h_1}{2} \psi \Phi = -14,0 \cdot 0,777 \cdot 0,143 = -1,559 \text{ mt},$$

$$M_{e,f}^{(1)} = h_1 (\varphi - \Phi) = 14,0 (0,286 - 0,143) = 1,995 \text{ mt},$$

$$\int M_1^{(1)} M_1^{(0)} \frac{J_s}{J} ds = 2,002 \cdot 4,0 \cdot 7,0 + 2 \cdot \frac{1}{6} \times 4,0 (2 \cdot 2,002 - 1,558) 10,77 = 90,765,$$

$$\delta_{11}^{(1)} = 90,765 + 18,383 = 109,148.$$

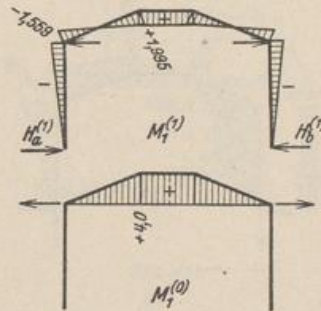


Abb. 566.

4. Halbseitige Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 567 u. 568).

a) Schnittkräfte im Hauptsystem (Tab. 46 S. 586).

$$\Phi = \frac{1}{4 \cdot 4,717} (5 + 3 \cdot 0,778 + 6 \cdot 0,650) = 0,595,$$

$$A_0^{(1)} = \frac{1 \cdot 10}{2} (2 - 0,370) = 8,148 \text{ t}; \quad B_0^{(1)} = 1,852 \text{ t},$$

$$H_{a,b}^{(1)} = \frac{1 \cdot 10^2}{4 \cdot 14,0} \cdot 0,778 \cdot 0,595 = 0,827 \text{ t},$$

$$M_{c,d}^{(1)} = -\frac{1 \cdot 10^2}{4} \cdot 0,778 \cdot 0,595 = -11,578 \text{ mt},$$

$$M_{e,f}^{(1)} = \frac{1 \cdot 10^2}{4} (1 \pm 0,260 - 0,595) = \begin{cases} 16,598 \text{ mt}, \\ 3,633 \text{ mt}. \end{cases}$$

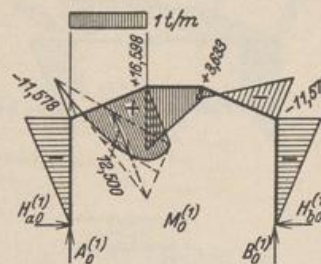


Abb. 567.

b) Berechnung von X_1 .

$$\delta_{10}^{(1)} = \frac{1}{2} (16,598 + 3,633) \cdot 7,0 + [\frac{1}{3} (2 \cdot 3,633 - 11,573) + \frac{1}{3} (2 \cdot 16,598 - 11,573) + \frac{1}{3} \cdot 12,5] \times 10,77 = 586,982.$$

$$X_1 = \frac{586,982}{109,148} = 5,378 \text{ t}. \quad H_{a,b} = H_{a,b}^{(1)} - X_1 H_{a,b}^{(1)}, \quad M = M_0^{(1)} - X_1 M_1^{(1)}.$$

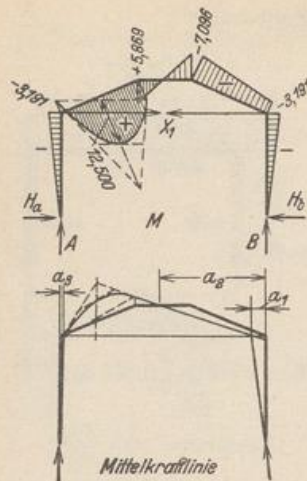


Abb. 568.

c) Schnittkräfte.

$$A = A_0^{(1)} = 8,148 \text{ t}, \quad B = B_0^{(1)} = 1,852 \text{ t},$$

$$H_{a,b} = 0,827 - 5,378 \cdot 0,111 = 0,228 \text{ t},$$

$$M_{c,a} = -11,578 + 5,378 \cdot 1,559 = -3,191 \text{ mt},$$

$$M_{e,f} = \left. \begin{array}{l} 16,598 \\ 3,633 \end{array} \right\} - 5,378 \cdot 1,995 = \left\{ \begin{array}{l} 5,869 \text{ mt} \\ -7,096 \text{ mt} \end{array} \right.$$

d) Mittelkraftlinie.

$$a_1 = \frac{14,0 \cdot 0,228}{1,852} = 1,724 \text{ m},$$

$$a_2 = \frac{18,0 \cdot 0,228 + 4,0 \cdot 5,378}{1,852} = 13,832 \text{ m},$$

$$a_3 = \frac{14,0 \cdot 0,228}{8,148} = 0,392 \text{ m}.$$

5. Waagerechte Belastung $w = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 569 u. 570).

a) Schnittkräfte im Hauptsystem (Tab. 46 S. 585).

$$\Phi = \frac{1}{4 \cdot 4,717} [4 \cdot 0,286 (3 \cdot 1,650 - 0,222) + 6 (1,650 + 0,778) + 3 \cdot 2,246 \cdot 0,778] = 1,326,$$

$$A_0^{(1)} = -B_0^{(1)} = -\frac{1 \cdot 14,0^2}{2 \cdot 27,0} = -3,630 \text{ t},$$

$$H_{a,b}^{(1)} = -\frac{1 \cdot 14,0}{2} \left(\pm 1 + \frac{0,778}{2} \cdot 1,326 \right) = \left\{ \begin{array}{l} -10,609 \text{ t} \\ + 3,392 \text{ t} \end{array} \right.,$$

$$M_{c,a}^{(1)} = -\frac{1 \cdot 14,0^2}{4} (1 \mp 1 - 0,778 \cdot 1,326) = \left\{ \begin{array}{l} +50,524 \text{ mt} \\ -47,476 \text{ mt} \end{array} \right.,$$

$$M_{e,f}^{(1)} = -\frac{1 \cdot 14,0^2}{4} (1 + 2 \cdot 0,286 \mp 0,260 - 1,326) = \left\{ \begin{array}{l} + 0,662 \text{ mt} \\ -24,750 \text{ mt} \end{array} \right.$$

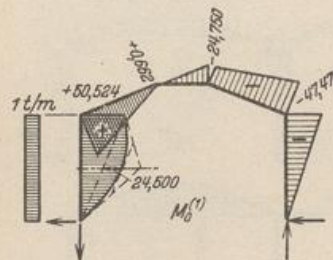


Abb. 569.

b) Berechnung von X_1 .

$$\delta_{10}^{(1)} = \frac{4,0}{2} (0,662 - 24,750) \cdot 7,0$$

$$+ \left[\frac{4,0}{6} (2 \cdot 0,662 + 50,524) - \frac{4,0}{6} (2 \cdot 24,750 + 47,476) \right] \times 10,77 = -661,292,$$

$$X_1 = \frac{-661,292}{109,148} = -6,059 \text{ t}.$$

c) Schnittkräfte.

$$A = -B = -3,630 \text{ t},$$

$$H_{a,b} = \left. \begin{array}{l} -10,609 \\ + 3,392 \end{array} \right\} + 6,059 \cdot 0,111 = \left\{ \begin{array}{l} - 9,934 \text{ t} \\ + 4,066 \text{ t} \end{array} \right.,$$

$$M_{c,a} = \left. \begin{array}{l} 50,524 \\ -47,476 \end{array} \right\} - 6,059 \cdot 1,559 = \left\{ \begin{array}{l} +41,077 \text{ mt} \\ -56,923 \text{ mt} \end{array} \right.,$$

$$M_{e,f} = \left. \begin{array}{l} 0,662 \\ -24,750 \end{array} \right\} + 6,059 \cdot 1,995 = \left\{ \begin{array}{l} 12,749 \text{ mt} \\ -12,663 \text{ mt} \end{array} \right.$$

d) Mittelkraftlinie.

$$a_1 = \frac{4,066 \cdot 14,0}{3,630} = 15,683 \text{ m},$$

$$a_2 = \frac{4,066 \cdot 18,0 - 6,059}{3,630} = 13,488 \text{ m}.$$

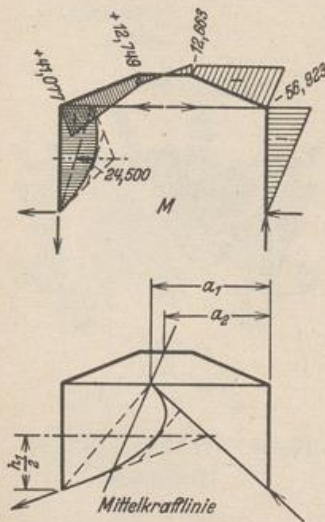


Abb. 570.

Berechnung eines geschlossenen, symmetrischen Rahmens.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 571) (Tab. 59 S. 605).

$$l_o = 6,0, \quad l_u = 9,0, \quad h = 3,0, \quad m = 1,5, \quad s = 3,3541 \text{ m},$$

$$\lambda_1 = \frac{1,5}{9,0} = 0,1667, \quad \lambda_2 = \frac{1,5}{6,0} = 0,2500,$$

$$\lambda'_1 = \frac{6,0}{9,0} = 0,6667, \quad \lambda''_1 = \frac{9,0}{6,0} = 1,5000,$$

$$\alpha_o = \frac{6,0}{3,3541} \frac{45^3}{40^3} = 2,5463, \quad \alpha_u = \frac{9,0}{3,3541} \frac{45^3}{60^3} = 1,1320,$$

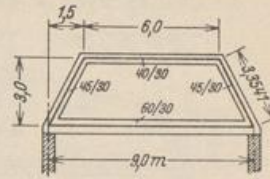


Abb. 571.

$$\mu = (2 + 3 \cdot 2,5463) (2 + 3 \cdot 1,1320) - 1 = 51,0115,$$

$$v = 2,5463 \cdot 0,6667^2 + 1,1320 + 2 (1 + 0,6667 + 0,6667^2) = 6,4862.$$

2. Belastung des oberen Riegels mit $p = 1 \text{ t/m}$. (Abb. 572).

a) Schnittkräfte (Tab. 59 S. 606).

$$H_{a,b} = \frac{1 \cdot 6,0^2}{2 \cdot 3,0} \left[\frac{2}{3} \frac{2,5463}{51,0115} (1 + 1,1320) + 0,2500 \right] = 2,458 \text{ t}$$

$$M_{a,b} = \frac{1 \cdot 6,0^2}{4} \frac{2,5463}{51,0115} = 0,449 \text{ mt},$$

$$M_{c,d} = -\frac{1 \cdot 6,0^2}{4} \frac{2,5463}{51,0115} (2 + 3 \cdot 1,1320) = -2,424 \text{ mt}.$$

b) Mittelkraftlinie $M = S \cdot \bar{b}$, $S = H_{a,b} = 2,458 \text{ t}$.

$$b_1 = \frac{2,424}{2,458} = 0,986 \text{ m}, \quad b_2 = \frac{0,449}{2,458} = 0,183 \text{ m}.$$

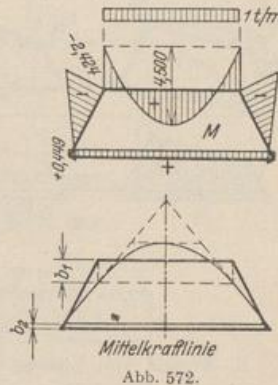


Abb. 572.

3. Waagerechte Belastung $w = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 573). $\Phi = \frac{1}{6,4862} (2 + 1,1320 - 0,1667) = 0,4572$.

a) Schnittkräfte (Tab. 59 S. 607).

$$H_{a,b} = \frac{1 \cdot 3,0}{4} \left[\frac{3}{2 \cdot 51,0115} (1,1320 - 2,5463) - 1 \mp 2 \right]$$

$$= \begin{cases} -0,781 \text{ t}, \\ +2,219 \text{ t}, \end{cases}$$

$$M_{a,b} = -\frac{1 \cdot 3,0^2}{4} \left[\frac{1 + 3 \cdot 2,5463}{2 \cdot 51,0115} \pm (1 - 0,4572) \right]$$

$$= \begin{cases} -1,412 \text{ mt}, \\ +1,031 \text{ mt}, \end{cases}$$

$$M_{c,d} = -\frac{1 \cdot 3,0^2}{4} \left[\frac{1 + 3 \cdot 1,1320}{2 \cdot 51,0115} \mp 0,6667 \cdot 0,4572 \right] = \begin{cases} +0,589 \text{ mt}, \\ -0,783 \text{ mt}. \end{cases}$$

b) Mittelkraftlinie. Pfosten und oberer Riegel (I): $M_I = S_I \cdot \bar{a}$.

$$S_I = \frac{1}{l_u} \left[M_a - M_b + \frac{w h^2}{2} \right] = \frac{w h^2}{2 l_u} \Phi,$$

$$S_I = \frac{1 \cdot 3,0^2}{2 \cdot 9,0} \cdot 0,4572 = 0,2286 \text{ t}, \quad a_1 = \frac{1,031}{0,2286} = 4,510, \quad a_2 = \frac{0,589}{0,2286} = 2,577 \text{ m},$$

$$a_3 = \frac{1,412}{0,2286} = 6,177 \text{ m},$$

Unterer Riegel (II):

$$M_{II} = S_{II} \bar{b}, \quad S_{II} = |H_a|,$$

$$b_1 = \frac{1,412}{0,781} = 1,808 \text{ m}.$$

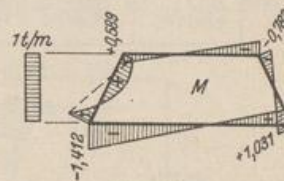


Abb. 573.

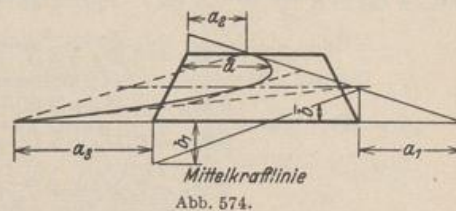


Abb. 574.

Berechnung eines geschlossenen, unsymmetrischen Rahmens.

A. Ansatz nach S. 154ff. mit den Überzähligen X_1, X_2, X_3 (Abb. 576).

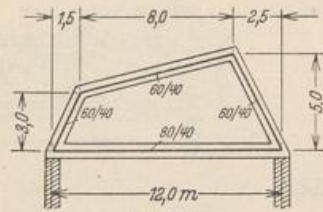


Abb. 575.

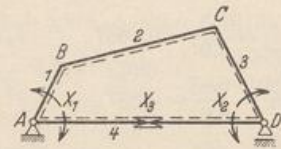


Abb. 576.

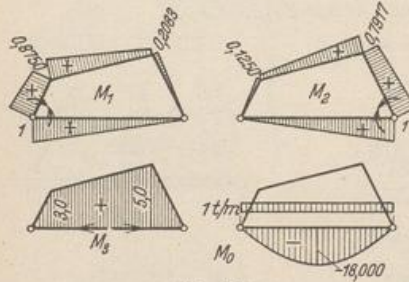


Abb. 577.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 575).

$$J_{1,2,3} = J_c = 0,0072, \quad J_4 = 0,0171 \text{ m}^4,$$

$$l_1 = l'_1 = 3,354, \quad l_2 = l'_2 = 8,246 \text{ m},$$

$$l_3 = l'_3 = 5,590, \quad l_4 = 12,0, \quad l'_4 = 5,063 \text{ m}.$$

2. Belastung. $p = 1 \text{ t/m}$ auf l_4 .

a) Vorzahlen und Belastungszahlen (Abb. 577).

$$\delta_{10} = -\frac{1}{3} \cdot 5,063 \cdot 18 = -30,375,$$

$$\delta_{20} = \delta_{10}, \quad \delta_{30} = 0.$$

$$\delta_{11} = 5,063 \cdot \frac{1}{3} + 3,354 \cdot \frac{1}{3} (1 + 0,8750 + 0,8750^2) + 8,246$$

$$\cdot \frac{1}{3} (0,8750^2 + 0,8750 \cdot 0,2083 + 0,2083^2) + 5,590 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,2083^2 = 7,4455, \text{ usw.}$$

b) Ansatz und Lösung.

X_1	X_2	X_3		
7,4455	3,2790	23,5025	-30,375	$X_1 = -M_A = -7,047 \text{ mt},$
3,2790	8,2502	28,4889	-30,375	$X_2 = -M_D = -7,967 \text{ mt},$
23,5025	28,4889	191,3351	0	$X_3 = +2,052 \text{ t}.$

$$M_B = 0,875 \cdot 7,047 + 0,125 \cdot 7,967 - 3,0 \cdot 2,052 = 1,006 \text{ mt},$$

$$M_C = 0,2083 \cdot 7,047 + 0,7917 \cdot 7,967 - 5,0 \cdot 2,052 = -2,485 \text{ mt}.$$

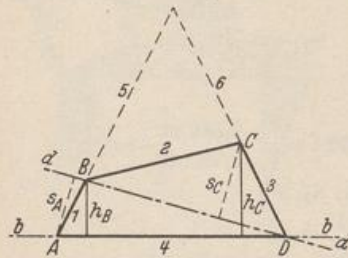


Abb. 578.

B. Lösung c auf S. 568, Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ auf l_4 .

$$\text{Gl. (871): } \mathfrak{B}_A + \mathfrak{B}_B + \mathfrak{B}_C + \mathfrak{B}_D = 0,$$

$$\text{(Abb. 578) } \mathfrak{B}_B h_B + \mathfrak{B}_C h_C = 0,$$

$$\mathfrak{B}_A s_A - \mathfrak{B}_C s_C = 0.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_J = 0$ liefern

$$M_A^{(1)} = -M_A^{(4)} = M_A, \quad M_B^{(2)} = -M_B^{(1)} = M_B,$$

$$M_C^{(3)} = -M_C^{(2)} = M_C, \quad M_D^{(4)} = -M_D^{(3)} = M_D.$$

$$\text{Mit } 6 \tau_{A0}^{(4)} = p \frac{l_4^3 l'_4}{4} = -6 \tau_{D0}^{(4)}, \quad \tau_{A0}^{(1)} = \tau_{B0}^{(1)} = \tau_{B0}^{(2)} = \tau_{C0}^{(2)} = \tau_{C0}^{(3)} = \tau_{D0}^{(3)} = 0 \text{ ist nach (866), (872)}$$

$$6 \mathfrak{B}_A = l'_4 M_D + 2 (l'_4 + l'_1) M_A + l'_1 M_B - \frac{p l_4^3 l'_4}{4},$$

$$6 \mathfrak{B}_B = l'_1 M_A + 2 (l'_1 + l'_2) M_B + l'_2 M_C,$$

$$6 \mathfrak{B}_C = l'_2 M_B + 2 (l'_2 + l'_3) M_C + l'_3 M_D,$$

$$6 \mathfrak{B}_D = l'_3 M_C + 2 (l'_3 + l'_4) M_D + l'_4 M_A - \frac{p l_4^3 l'_4}{4}.$$

Gleichgewichtsbedingungen $\delta_{Ac} = 0$.

$$\begin{aligned} (M_A^{(1)} + M_B^{(1)}) v_1 + (M_B^{(2)} + M_C^{(2)}) v_2 + (M_C^{(3)} + M_D^{(3)}) v_3 + (M_D^{(4)} + M_A^{(4)}) v_4 &= 0, \\ (M_A - M_B) v_1 + (M_B - M_C) v_2 + (M_C - M_D) v_3 + (M_D - M_A) v_4 &= 0. \\ v_1 = 1, \quad v_2 = -\frac{l_1}{l_5}, \quad v_3 = \frac{l_1 l_6}{l_5 l_3}, \quad v_4 = 0. \end{aligned}$$

Gleichungssystem für die Schnittkräfte M_A, M_B, M_C, M_D .

M_A	M_B	M_C	M_D	p	
$l_4 + l_1$	$l_1 + l_2$	$l_2 + l_3$	$l_3 + l_4$	$-\frac{l_2 l_4}{6}$	o
$l_1 h_B$	$2(l_1 + l_2) h_B + l_2 h_C$	$2(l_2 + l_3) h_C + l_3 h_B$	$l_3 h_C$	—	o
$2(l_4 + l_1) s_A$	$l_1 s_A - l_2 s_C$	$-2(l_2 + l_3) s_C$	$l_4 s_A - l_3 l_3 s_C$	$-\frac{l_2 l_4}{4} s_A$	o
1	$-1 - \frac{l_1}{l_5}$	$\frac{l_1}{l_5} + \frac{l_1 l_6}{l_5 l_3}$	$-\frac{l_1 l_6}{l_5 l_3}$	—	o

$$l_5 = 10,062, \quad l_6 = 7,826, \quad s_A = 3,297, \quad s_C = 4,121 \text{ m.}$$

M_A	M_B	M_C	M_D	$p = 1 \text{ t/m}$	
8,4166	11,6003	13,8364	10,6527	- 121,5	o
10,0623	110,8328	163,1026	27,9510	o	o
55,4940	- 22,9234	- 114,0341	- 6,3466	- 600,8236	o
1	- 1,333	0,8	- 0,4667	o	o

$$M_A = 7,047 \text{ mt}, \quad M_B = 1,006 \text{ mt}, \quad M_C = -2,845 \text{ mt}, \quad M_D = 7,967 \text{ mt} \quad (\text{Abb. 579}).$$

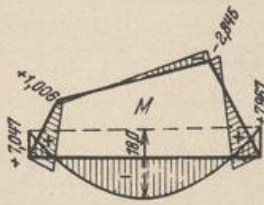


Abb. 579.

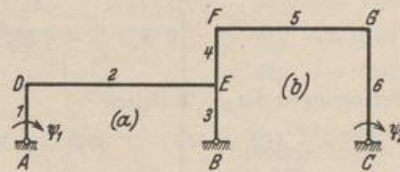


Abb. 580.

Berechnung des zweiteiligen Rahmens Abb. 580 nach Lösung a) auf S. 568.

Abmessungen nach S. 182. $l_1 = l_3 = l_4 = 4,5 \text{ m}$,

$$\begin{aligned} l_2 = 15,0, \quad l_5 = 12,0, \quad l_6 = 9,0, \quad l_1 = 27,0, \quad l_3 = l_4 = 9,0, \quad l_2 = 15,0 \text{ m,} \\ l_5 = 18,0, \quad l_6 = 18,0 \text{ m.} \end{aligned}$$

Es sind 9 Stabendmomente und 6 Stabdrehwinkel unbekannt.

a) Bedingungen für die Formänderung des Stabzuges (Viermomentengleichungen).

$$\begin{aligned} \tau_{DM}^{(2)} - \tau_{DM}^{(1)} + \vartheta_2 - \vartheta_1 + \tau_{D0}^{(2)} - \tau_{D0}^{(1)} &= 0, & \tau_{EM}^{(3)} - \tau_{EM}^{(2)} + \vartheta_3 - \vartheta_2 + \tau_{E0}^{(3)} - \tau_{E0}^{(2)} &= 0, \\ \tau_{EM}^{(4)} - \tau_{EM}^{(3)} + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \tau_{E0}^{(4)} - \tau_{E0}^{(3)} &= 0, & \tau_{FM}^{(5)} - \tau_{FM}^{(4)} + \vartheta_5 - \vartheta_4 + \tau_{F0}^{(5)} - \tau_{F0}^{(4)} &= 0, \\ \tau_{GM}^{(6)} - \tau_{GM}^{(5)} + \vartheta_6 - \vartheta_5 + \tau_{G0}^{(6)} - \tau_{G0}^{(5)} &= 0, & \tau_{EM}^{(4)} \text{ nach Gl. (866).} & \end{aligned}$$

Beyer, Baustatik, 2. Aufl., 2. Neudruck.

b) Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte, $\delta A_J = 0$.

$$M_D^{(1)} + M_D^{(2)} = 0, \quad M_E^{(2)} + M_E^{(3)} + M_E^{(4)} = 0, \quad M_F^{(4)} + M_F^{(5)} = 0, \quad M_G^{(5)} + M_G^{(6)} = 0.$$

c) Bedingungen für die Formänderung der Stabkette.

$$\vartheta_1 = \vartheta_3 = \psi_1, \quad \vartheta_2 = \vartheta_5 = 0, \quad \vartheta_6 = \psi_2, \quad \vartheta_4 = \psi_2 \frac{l_6}{l_4} - \psi_1 \frac{l_1}{l_4}.$$

d) Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte, $\delta A_c = 0$.

$$\psi_1 = 1, \quad M_D^{(1)} \cdot 1 + M_E^{(2)} \cdot 1 - (M_E^{(4)} + M_F^{(4)}) \frac{l_1}{l_4} = 0,$$

$$\psi_2 = 1, \quad M_G^{(5)} \cdot 1 + (M_E^{(4)} + M_F^{(4)}) \frac{l_6}{l_4} = 0.$$

Durch Substitution wird dieser allgemeine Ansatz auf 6 Gleichungen mit den unbekanntenen Eckmomenten M_D , M_E , M_G und Stabendmomenten $M_E^{(2)}$, $M_E^{(3)}$, $M_F^{(4)}$ zurückgeführt. Dabei ist es zweckmäßig, die \mathfrak{B} -Kräfte nach (872) in den Viermomentengleichungen einzuführen. Aus c) folgt:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\psi_1, \quad \vartheta_3 - \vartheta_2 = \psi_1, \quad \vartheta_4 - \vartheta_3 = \psi_2 \frac{l_6}{l_4} - \psi_1 \frac{l_1}{l_4},$$

$$\vartheta_5 - \vartheta_4 = -\psi_2 \frac{l_6}{l_4} + \psi_1 \frac{l_1}{l_4}, \quad \vartheta_6 - \vartheta_5 = \psi_2.$$

Damit gehen die Viermomentengleichungen über in

$$6 \mathfrak{B}_D^{(a)} - 6 \psi_1 = 0, \quad 6 \mathfrak{B}_E^{(a)} + 6 \psi_1 = 0, \quad 6 \mathfrak{B}_E^{(b)} + 6 \psi_2 \frac{l_6}{l_4} - 6 \psi_1 \frac{l_1}{l_4} = 0,$$

$$6 \mathfrak{B}_F^{(b)} + 6 \psi_1 \frac{l_1}{l_4} - 6 \psi_2 \frac{l_6}{l_4} = 0, \quad 6 \mathfrak{B}_G^{(b)} + 6 \psi_2 = 0,$$

oder nach Substitution von ψ_1 und ψ_2 aus der ersten und letzten:

$$6 \mathfrak{B}_D^{(a)} + 6 \mathfrak{B}_E^{(a)} = 0, \quad (1. \text{ Gl.})$$

$$-6 \mathfrak{B}_D^{(a)} \frac{l_6}{l_4} + 6 \mathfrak{B}_E^{(b)} - 6 \mathfrak{B}_G^{(b)} \frac{l_6}{l_4} = 0, \quad (2. \text{ Gl.})$$

$$6 \mathfrak{B}_D^{(a)} \frac{l_1}{l_4} + 6 \mathfrak{B}_F^{(b)} + 6 \mathfrak{B}_G^{(b)} \frac{l_6}{l_4} = 0. \quad (3. \text{ Gl.})$$

Die Bedingungen $\delta A_J = 0$ liefern:

$$M_D^{(2)} = -M_D^{(1)} = M_D, \quad M_F^{(5)} = -M_F^{(4)} = M_F, \quad M_G^{(6)} = -M_G^{(5)} = M_G$$

und

$$M_E^{(2)} + M_E^{(3)} + M_E^{(4)} = 0. \quad (4. \text{ Gl.})$$

Aus $\delta A_c = 0$ folgt damit

$$\psi_1 = 1, \quad -M_D + M_E^{(2)} - (M_E^{(4)} - M_F) \frac{l_1}{l_4} = 0, \quad (5. \text{ Gl.})$$

$$\psi_2 = 1, \quad M_G + (M_E^{(4)} - M_F) \frac{l_6}{l_4} = 0. \quad (6. \text{ Gl.})$$

\mathfrak{B} -Kräfte nach Gl. (866), (872) für das vorliegende System:

$$6 \mathfrak{B}_D^{(a)} = 2(l_1' + l_2') M_D - l_2' M_E^{(2)} + 6 \tau_{D0}^{(2)} + 6 \tau_{D0}^{(1)},$$

$$6 \mathfrak{B}_E^{(a)} = l_2' M_D - 2 l_2' M_E^{(2)} + 2 l_3' M_E^{(3)} + 6 \tau_{E0}^{(3)} - 6 \tau_{E0}^{(2)},$$

$$6 \mathfrak{B}_E^{(b)} = -2 l_3' M_E^{(3)} + 2 l_4' M_E^{(4)} + l_4' M_F + 6 \tau_{E0}^{(4)} - 6 \tau_{E0}^{(3)},$$

$$6 \mathfrak{B}_F^{(b)} = l_4' M_E^{(4)} + 2(l_4' + l_5') M_F + l_5' M_G + 6 \tau_{F0}^{(5)} - 6 \tau_{F0}^{(4)},$$

$$6 \mathfrak{B}_G^{(b)} = l_5' M_F + 2(l_5' + l_6') M_G + 6 \tau_{G0}^{(6)} - 6 \tau_{G0}^{(5)}.$$

Belastung: pt/m auf den Riegeln 2 und 5.

$$\tau_{D0}^{(1)} = \tau_{E0}^{(2)} = \tau_{E0}^{(3)} = \tau_{F0}^{(4)} = \tau_{G0}^{(5)} = 0,$$

$$6 \tau_{D0}^{(2)} = -6 \tau_{E0}^{(2)} = \frac{p l_2^2 l_2'}{4}, \quad 6 \tau_{F0}^{(5)} = -6 \tau_{G0}^{(5)} = \frac{p l_5^2 l_5'}{4}.$$

Das Gleichungssystem wird in Form einer Matrix angeschrieben.

	M_D	$M_E^{(2)}$	$M_E^{(3)}$	$M_E^{(4)}$	M_F	M_G	p	
1	$2 l_1' + 3 l_2'$	$-3 l_2'$	$2 l_3'$	0	0	0	$\frac{l_2^2 l_2'}{2}$	0
2	$-2 (l_1 + l_2) \frac{l_6}{l_4}$	$l_2' \frac{l_6}{l_4}$	$-2 l_3'$	$2 l_4'$	$l_4 - l_5' \frac{l_6}{l_4}$	$-2 (l_5 + l_6) \frac{l_6}{l_4}$	$-\frac{l_6}{l_4} \left(\frac{l_2^2 l_2'}{4} + \frac{l_5^2 l_5'}{4} \right)$	0
3	$2 (l_1 + l_2) \frac{l_1}{l_4}$	$-l_2' \frac{l_1}{l_4}$	0	l_4'	$2 (l_4 + l_5) + l_5' \frac{l_6}{l_4}$	$l_5 + 2 (l_5 + l_6) \frac{l_6}{l_4}$	$\frac{l_2^2 l_2'}{4} \frac{l_1}{l_4} + \frac{l_5^2 l_5'}{4} \left(1 + \frac{l_6}{l_5} \right)$	0
4	0	1	1	1	0	0	0	0
5	-1	0	1	$-\frac{l_1}{l_4}$	$\frac{l_6}{l_4}$	0	0	0
6	0	0	0	$\frac{l_6}{l_4}$	$-\frac{l_6}{l_4}$	1	0	0

	M_D	$M_E^{(2)}$	$M_E^{(3)}$	$M_E^{(4)}$	M_F	M_G	p	
1	99	-45	18	0	0	0	1687,5	0
2	-168	30	-18	18	-27	-144	-2983,5	0
3	84	-15	0	9	90	162	2787,75	0
4	0	1	1	1	0	0	0	0
5	-1	0	1	-1	1	0	0	0
6	0	0	0	2	-2	1	0	0

$M_D = -9,3269 p \text{ mt},$
 $M_E^{(2)} = +14,2645 p \text{ mt},$
 $M_E^{(3)} = -6,7899 p \text{ mt},$
 $M_E^{(4)} = -7,4746 p \text{ mt},$
 $M_F = -10,0116 p \text{ mt},$
 $M_G = -5,0739 p \text{ mt}.$

Darstellung des Momentenbildes s. Abb. 169 S. 182.

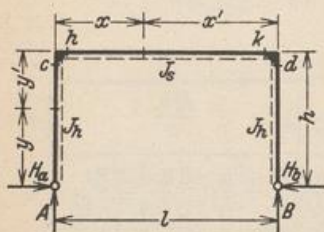
Die Stabendmomente sind die Wurzeln von 6 Gleichungen, die keine symmetrische Matrix besitzen und für jede Belastung besonders aufgelöst werden. Sie lassen sich jedoch durch Superposition der Stabendmomente aus den Anteilen der Belastung und der drei statisch unbestimmten Größen nachträglich auf 3 Normalgleichungen zurückführen. Diese konnten bei Untersuchung desselben Rahmens nach Abschn. 25 auf S. 182 ff. unmittelbar angeschrieben werden. Diese Lösung ist daher einfacher.

Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik, 3. Aufl. S. 512. Berlin 1928. — Kleinlogel, A.: Rahmenformeln, 6. Aufl. Berlin 1929. — Staack, J.: Rahmen und Balken. Berlin 1931.

61. Rahmentabellen.

Einfach statisch unbestimmte Rahmen.

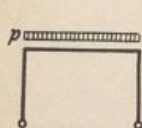
Tabelle 43. Symmetrischer Rahmen mit geradem Riegel.



$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \kappa = \frac{h}{l} \frac{J_s}{J_h}, \quad \lambda = \frac{l}{h},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \mu = 3 + 2\kappa, \quad \omega_R = \xi - \xi'^2.$$

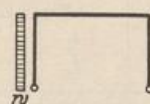
$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben.



$$A = B = \frac{pl}{2},$$

$$H_{a,b} = \frac{\lambda}{4\mu} pl,$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{4\mu}.$$



$$\Phi = \frac{1}{2\mu} (6 + 5\kappa),$$

$$A = -B = -\frac{wh^2}{2l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{wh}{2} \left(1 \pm 1 - \frac{1}{2} \Phi \right),$$

$$M_{c,d} = \frac{wh^2}{4} (1 \pm 1 - \Phi)$$



$$\Phi = \frac{\lambda}{2\mu} \left[3\omega_R - \left(\frac{a}{2l} \right)^2 \right],$$

$$A = pa\xi', \quad B = pa\xi,$$

$$H_{a,b} = pa\Phi,$$

$$M_{c,d} = -pa h \Phi,$$

$b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$: $\Phi = \frac{\lambda}{4\mu} \frac{a}{l} \left(3 - 2 \frac{a}{l} \right),$

$b_1 = b_2$: $\Phi = \frac{\lambda}{8\mu} \left(3 - \frac{a^2}{l^2} \right).$



$$\Phi = \frac{1}{\mu} \left\{ 3(1 + \kappa) - \kappa \left[\eta^2 + \left(\frac{a}{2h} \right)^2 \right] \right\},$$

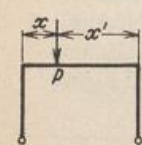
$$A = -B = -wa \frac{\eta}{\lambda},$$

$$H_{a,b} = -\frac{wa}{2} (1 \pm 1 - \eta \Phi),$$

$$M_{c,d} = \frac{wa h \eta}{2} (1 \pm 1 - \Phi),$$

$b_1 = 0$: $\Phi = \frac{1}{2\mu} \left[6(1 + \kappa) - \kappa \frac{a^2}{h^2} \right],$

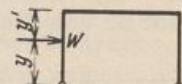
$b_2 = 0$: $\Phi = \frac{1}{2\mu} \left[6 + 5\kappa - \kappa \left(1 - \frac{a}{h} \right)^2 \right].$



$$A = P\xi', \quad B = P\xi,$$

$$H_{a,b} = \frac{3\lambda}{2\mu} P\omega_R,$$

$$M_{c,d} = -\frac{3}{2\mu} Pl\omega_R.$$



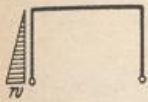
$$\Phi = \frac{1}{\mu} [3(1 + \kappa) - \kappa \eta^2],$$

$$A = -B = -W \frac{y}{l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} (1 \pm 1 - \eta \Phi),$$

$$M_{c,d} = \frac{Wh}{2} \eta (1 \pm 1 - \Phi),$$

$y = h$: $H_{a,b} = \mp \frac{W}{2}, \quad M_{c,d} = \pm \frac{Wh}{2}.$




$$\Phi = \frac{7\kappa}{10\mu},$$

$$A = -B = -\frac{w h^2}{6l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{w h}{12} (2 \pm 3 - \Phi),$$

$$M_{c,d} = \frac{w h^2}{12} (\pm 1 - \Phi).$$

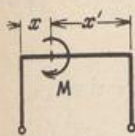


$$\Phi = \frac{\kappa}{10\mu} (10 - 3\eta^2),$$

$$A = -B = -\frac{w y^2}{6l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{w h}{12} \eta [3 \pm 3 - \eta(1 + \Phi)],$$

$$M_{c,d} = \frac{w h^2}{12} \eta^2 (\pm 1 - \Phi).$$



$$\Phi = \frac{3}{2\mu} (\xi'^2 - \xi^2),$$

$$A = -B = -\frac{M}{l},$$

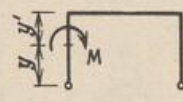
$$H_{a,b} = \frac{M}{h} \Phi,$$

$$M_{c,d} = -M \Phi,$$

$\kappa = 0:$

$$\Phi = \frac{3}{2\mu},$$

$$M_h = M \left(1 - \frac{3}{2\mu}\right).$$



$$\Phi = \frac{3}{\mu} [1 + \kappa (1 - \eta^2)],$$

$$A = -B = -\frac{M}{l},$$

$$H_{a,b} = \frac{M}{h} \frac{\Phi}{2},$$

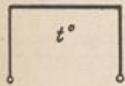
$$M_{h,k} = \frac{M}{2} (1 \pm 1 - \Phi),$$

$y = 0:$

$$\Phi = \frac{3}{\mu} (1 + \kappa),$$

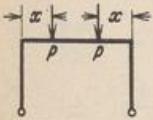
$y' > 0:$

$$M_c = M_h.$$



$$A = B = 0, \quad H_{a,b} = \frac{3}{\mu} \frac{E J_s}{h^2} \alpha_t t, \quad M_{c,d} = -\frac{3}{\mu} \frac{E J_s}{h} \alpha_t t.$$

Zwei symmetrische oder antimetrische Einzelwirkungen.

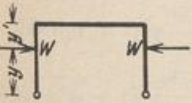


Der allgemeine Ausdruck für die horizontalen Gelenkkräfte infolge einer Einzelwirkung hat die Form

$$H_{a,b} = K (a \pm b + c \Phi)$$

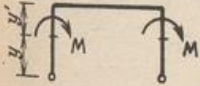
Damit ergibt sich für zwei symmetrische Einzelwirkungen

$$H_{a,b} = 2K (a + c \Phi),$$



für zwei antimetrische Einzelwirkungen

$$H_{a,b} = \pm 2K b.$$



Dasselbe gilt für die Eckmomente. Diese Beziehungen gelten auch für die folgenden symmetrischen Rahmenformen.

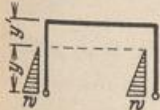
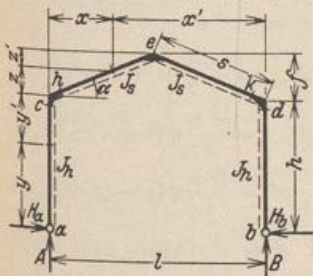


Tabelle 44. Symmetrischer Rahmen mit gebrochenem Riegel.

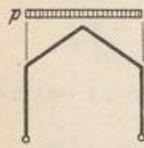


$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{f}, \quad \lambda = \frac{l}{h},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \zeta' = \frac{z'}{f}, \quad \varphi = \frac{f}{h},$$

$$\kappa = \frac{h}{s} \frac{J_s}{J_h}, \quad \mu = 3 + \kappa + \varphi (3 + \varphi).$$

$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben.



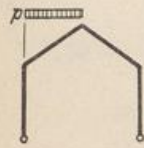
$$\Phi = \frac{8 + 5\varphi}{4\mu},$$

$$A = B = \frac{pl}{2},$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{8} \lambda \Phi,$$

$$M_{c,a} = -\frac{pl^2}{8} \Phi,$$

$$M_s = \frac{pl^2}{8} [1 - (1 + \varphi) \Phi].$$



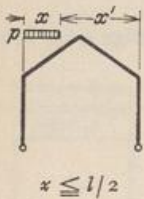
$$\Phi = \frac{8 + 5\varphi}{4\mu},$$

$$A = \frac{3}{8} pl, \quad B = \frac{1}{8} pl,$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{16} \lambda \Phi,$$

$$M_{c,a} = -\frac{pl^2}{16} \Phi,$$

$$M_s = \frac{pl^2}{16} [1 - (1 + \varphi) \Phi].$$



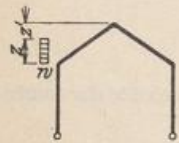
$$\Phi = \frac{\xi^2}{\mu} \left[\frac{3}{2} (2 + \varphi) - \xi (2 + \varphi \xi) \right],$$

$$A = \frac{pl}{2} \xi (2 - \xi), \quad B = \frac{pl}{2} \xi^2,$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{4} \lambda \Phi,$$

$$M_{c,a} = -\frac{pl^2}{4} \Phi,$$

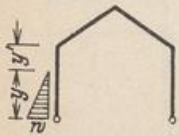
$$M_s = \frac{pl^2}{4} [\xi^2 - (1 + \varphi) \Phi].$$



$$\Phi = \frac{\varphi}{8\mu} \{ \xi^2 (4 + 3\varphi\xi) + 2\xi' [2(3 + 2\varphi) + \varphi\xi(1 + \varphi\xi)] \},$$

$$A = -B = -wz \frac{2h+z}{2l}, \quad H_{a,b} = -\frac{wf}{2} \xi (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_{c,a} = \frac{wf h}{2} \xi (\pm 1 + \Phi), \quad M_s = -\frac{wf h}{2} \xi \left[\varphi \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) - (1 + \varphi) \Phi \right].$$



$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \left[\varphi (3 + 2\varphi) - \kappa + \frac{3}{10} \kappa \eta^2 \right],$$

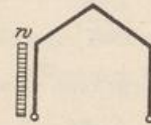
$$A = -B = -\frac{wy^2}{6l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{wh}{12} \eta [3 \pm 3 - \eta(1 - \Phi)],$$

$$M_{c,a} = \frac{wh^2}{12} \eta^2 [\pm 1 + \Phi],$$

$$M_s = -\frac{wh^2}{12} \eta^2 [\varphi - (1 + \varphi) \Phi],$$

$$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{1}{2\mu} \left[\varphi (3 + 2\varphi) - \frac{7}{10} \kappa \right].$$



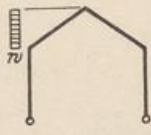
$$\Phi = \frac{1}{4\mu} [6(2 + \varphi) + 5\kappa],$$

$$A = -B = -\frac{wh^2}{2l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{wh}{2} \left(1 \pm 1 - \frac{\Phi}{2} \right),$$

$$M_{c,a} = \frac{wh^2}{4} (1 \pm 1 - \Phi),$$

$$M_s = \frac{wh^2}{4} [1 - (1 + \varphi) \Phi].$$



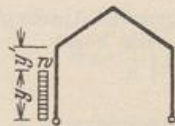
$$\Phi = \frac{\varphi}{8\mu} (4 + 3\varphi),$$

$$A = -B = -w f \frac{2h+f}{2l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{wf}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_{c,a} = \frac{wf h}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_s = -\frac{wf h}{2} \left[\frac{\varphi}{2} - (1 + \varphi) \Phi \right].$$



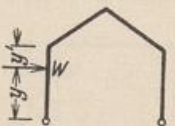
$$\Phi = \frac{1}{4\mu} [6(2 + \varphi + \kappa) - \kappa \eta^2],$$

$$A = -B = -\frac{wy^2}{2l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{wh}{2} \eta \left(1 \pm 1 - \frac{\eta}{2} \Phi \right),$$

$$M_{c,a} = \frac{wh^2}{4} \eta^2 (1 \pm 1 - \Phi),$$

$$M_s = \frac{wh^2}{4} \eta^2 [1 - (1 + \varphi) \Phi].$$



$$\Phi = \frac{1}{2\mu} [3(2 + \varphi + \kappa) - \kappa \eta^2],$$

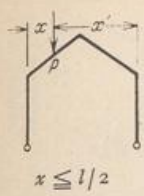
$$A = -B = -W \frac{y}{l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} (1 \pm 1 - \eta \Phi),$$

$$M_{c,a} = \frac{Wh}{2} \eta (1 \pm 1 - \Phi),$$

$$M_s = \frac{Wh}{2} \eta [1 - (1 + \varphi) \Phi],$$

$$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{1}{2\mu} [3(2 + \varphi) + 2\kappa].$$



$$\Phi = \frac{\xi}{\mu} \left[\frac{3}{2} (2 + \varphi) - \xi (3 + 2\varphi\xi) \right],$$

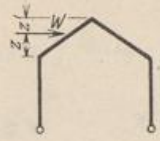
$$A = P\xi', \quad B = P\xi,$$

$$H_{a,b} = \frac{P}{2} \lambda \Phi,$$

$$M_{c,d} = -\frac{Pl}{2} \Phi,$$

$$M_e = \frac{Pl}{2} [\xi - (1 + \varphi)\Phi].$$

$x \leq l/2$



$$\Phi = \frac{\varphi}{2\mu} \zeta'^2 [3(1 + \varphi) - \varphi\zeta'],$$

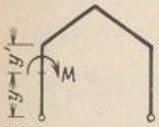
$$A = -B = -W \frac{h+z}{l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_{c,d} = \frac{Wh}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_e = -\frac{Wh}{2} [\varphi\zeta' - (1 + \varphi)\Phi],$$

$z = f: \Phi = 0, \quad M_e = 0.$



$$\Phi = \frac{3}{2\mu} [2 + \varphi + \kappa(1 - \eta^2)],$$

$$A = -B = -\frac{M}{l},$$

$$H_{a,b} = \frac{M}{2h} \Phi,$$

$$M_{h,k} = \frac{M}{2} (1 \pm 1 - \Phi),$$

$$M_e = \frac{M}{2} [1 - (1 + \varphi)\Phi].$$

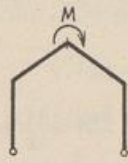
$y = 0:$

$$\Phi = \frac{3}{2\mu} (2 + \varphi + \kappa),$$

$y = h:$

$$\Phi = \frac{3}{2\mu} (2 + \varphi),$$

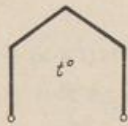
$$M_e = -\frac{3}{4\mu} M (2 + \varphi).$$



$$A = -B = -\frac{M}{l},$$

$$H_{a,b} = 0, \quad M_{c,d} = 0,$$

$$M_e = \mp \frac{M}{2} \left. \begin{array}{l} \text{links} \\ \text{rechts} \end{array} \right\} \text{ von } e.$$



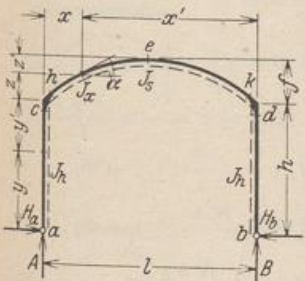
$$A = B = 0,$$

$$H_{a,b} = \frac{3}{2\mu} \frac{l}{s} \frac{E J_s}{h^2} \alpha_t t,$$

$$M_{c,d} = -\frac{3}{2\mu} \frac{l}{s} \frac{E J_s}{h} \alpha_t t,$$

$$M_e = M_{c,d} (1 + \varphi).$$

Tabelle 45. Symmetrischer Rahmen mit parabolisch gekrümmtem Riegel.

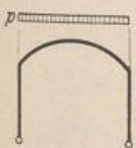


$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{f}, \quad \lambda = \frac{l}{h}, \quad \frac{J_a}{J_x \cos \alpha} = 1,$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \zeta' = \frac{z'}{f}, \quad \varphi = \frac{f}{h}, \quad \kappa = \frac{h}{l} \frac{J_a}{J_h},$$

$$\omega_R = \xi - \xi^2, \quad \mu = 5(3 + 2\kappa) + 4\varphi(5 + 2\varphi).$$

$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben.



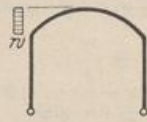
$$\Phi = \frac{2}{\mu} (5 + 4\varphi),$$

$$A = B = \frac{pl}{2},$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{8} \lambda \Phi,$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{8} \Phi,$$

$$M_e = \frac{pl^2}{8} [1 - (1 + \varphi)\Phi].$$



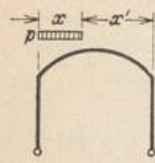
$$\Phi = \frac{4}{7} \frac{\varphi}{\mu} (7 + 6\varphi),$$

$$A = -B = -\frac{wf(2h+f)}{2l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{wf}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_{c,d} = \frac{wf h}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

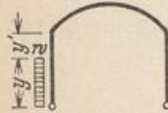
$$M_e = -\frac{wf h}{2} \left[\frac{\varphi}{2} - (1 + \varphi)\Phi \right].$$



$$\Phi = \frac{\xi^2}{\mu} [5(3+2\varphi) - 10\xi(1+\varphi\xi) + 4\varphi\xi^3],$$

$$A = \frac{px}{2}(2-\xi), \quad B = \frac{px}{2}\xi, \quad H_{a,b} = \frac{pl}{4}\lambda\Phi,$$

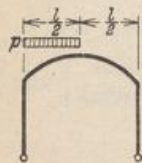
$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{4}\Phi, \quad x \leq \frac{l}{2}: \quad M_e = \frac{pl^2}{4}[\xi^2 - (1+\varphi)\Phi].$$



$$\Phi = \frac{5}{2\mu} \{2[3(1+\kappa) + 2\varphi] - \kappa\eta^2\},$$

$$A = -B = -\frac{wy^2}{2l}, \quad H_{a,b} = -\frac{wh}{2}\eta \left(1 \pm 1 - \frac{\eta}{2}\Phi\right),$$

$$M_{c,d} = \frac{wh^2}{4}\eta^2(1 \pm 1 - \Phi), \quad M_e = \frac{wh^2}{4}\eta^2[1 - (1+\varphi)\Phi].$$



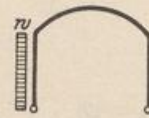
$$\Phi = \frac{2}{\mu}(5+4\varphi),$$

$$A = \frac{3}{8}pl, \quad B = \frac{1}{8}pl,$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{16}\lambda\Phi,$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{16}\Phi,$$

$$M_e = \frac{pl^2}{16}[1 - (1+\varphi)\Phi].$$



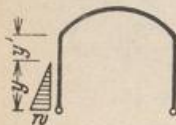
$$\Phi = \frac{5}{2\mu}(6+5\kappa+4\varphi),$$

$$A = -B = -\frac{wh^2}{2l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{wh}{2}\left(1 \pm 1 - \frac{\Phi}{2}\right),$$

$$M_{c,d} = +\frac{wh^2}{4}(1 \pm 1 - \Phi),$$

$$M_e = +\frac{wh^2}{4}[1 - (1+\varphi)\Phi].$$



$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \{10[3(1+\kappa) + 2\varphi] - 3\kappa\eta^2\},$$

$$A = -B = -\frac{wy^2}{6l},$$

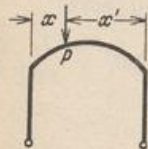
$$H_{a,b} = -\frac{wh}{4}\eta \left(1 \pm 1 - \frac{\eta}{3}\Phi\right),$$

$$M_{c,d} = \frac{wh^2}{12}\eta^2(1 \pm 1 - \Phi),$$

$$M_e = \frac{wh^2}{12}\eta^2[1 - (1+\varphi)\Phi],$$

$$y = h: \quad \eta = 1,$$

$$\Phi = \frac{1}{2\mu} [10(3+2\varphi) + 27\kappa].$$



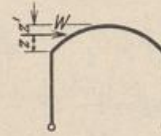
$$\Phi = \frac{5}{\mu}\omega_R[3+2\varphi(1+\omega_R)],$$

$$A = P\xi', \quad B = P\xi,$$

$$H_{a,b} = \frac{P}{2}\lambda\Phi,$$

$$M_{c,d} = -\frac{Pl}{2}\Phi,$$

$$x \leq \frac{l}{2}: \quad M_e = \frac{Pl}{2}[\xi - (1+\varphi)\Phi].$$



$$\Phi = 2\frac{\varphi}{\mu}\zeta'^{\frac{3}{2}}[5(1+\varphi) - \varphi\zeta'],$$

$$A = -B = -W\frac{h+z}{l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{W}{2}(\pm 1 + \Phi),$$

$$M_{c,d} = \frac{Wh}{2}(\pm 1 + \Phi),$$

$$M_e = -\frac{Wh}{2}[\varphi\zeta' - (1+\varphi)\Phi].$$



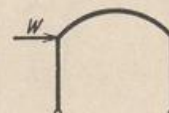
$$\Phi = \frac{5}{\mu}[3(1+\kappa) + 2\varphi - \kappa\eta^2],$$

$$A = -B = -W\frac{y}{l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{W}{2}(1 \pm 1 - \eta\Phi),$$

$$M_{c,d} = \frac{Wh}{2}\eta(1 \pm 1 - \Phi),$$

$$M_e = \frac{Wh}{2}\eta[1 - (1+\varphi)\Phi].$$



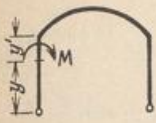
$$\Phi = 2\frac{\varphi}{\mu}(5+4\varphi),$$

$$A = -B = -W\frac{h}{l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{W}{2}(\pm 1 + \Phi),$$

$$M_{c,d} = \frac{Wh}{2}(\pm 1 + \Phi),$$

$$M_e = -\frac{Wh}{2}[\varphi - (1+\varphi)\Phi].$$

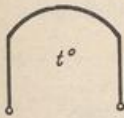


$$\Phi = \frac{5}{\mu} [3(1 + \kappa) + 2\varphi - 3\kappa\eta^2],$$

$$A = -B = -\frac{M}{l}, \quad H_{a,b} = \frac{M}{2h} \Phi,$$

$$M_{h,k} = \frac{M}{2} (1 \pm 1 - \Phi), \quad M_e = \frac{M}{2} [1 - (1 + \varphi)\Phi],$$

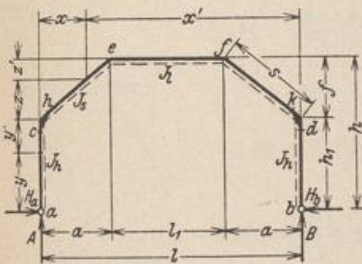
$$y = 0: \quad \eta = 0, \quad y' = 0: \quad \eta = 1, \quad M_c = -\frac{M}{2} \Phi.$$



$$A = B = 0, \quad H_{a,b} = \frac{15}{\mu} \frac{E J_s}{h^2} \alpha_i t,$$

$$M_{c,d} = -\frac{15}{\mu} \frac{E J_s}{h} \alpha_i t, \quad M_e = M_{c,d} (1 + \varphi).$$

Tabelle 46. Symmetrischer Rahmen mit mehrfach gebrochenem Riegel.



$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h_1}, \quad \zeta = \frac{z}{f}, \quad \lambda = \frac{a}{l},$$

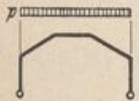
$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h_1}, \quad \zeta' = \frac{z'}{f}, \quad \lambda' = \frac{l_1}{l},$$

$$\psi = \frac{h_1}{h}, \quad \varphi = \frac{f}{h_1}, \quad \kappa_1 = \frac{l_1 J_s}{s J_a},$$

$$\psi' = \frac{f}{h}, \quad v = \frac{l}{h}, \quad \kappa_2 = \frac{h_1 J_s}{s J_h},$$

$$\mu = \psi^2 (1 + \kappa_2) + 1 + \psi + \frac{3}{2} \kappa_1.$$

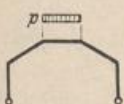
$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben.



$$\Phi = \frac{1}{4\mu} [2\lambda(2 + \psi + \kappa_1) - \lambda^2(3 + \psi + 2\kappa_1) + \kappa_1],$$

$$A = B = \frac{pl}{2}, \quad H_{a,b} = \frac{pl^2}{2h_1} \psi \Phi,$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{2} \psi \Phi, \quad M_{e,f} = \frac{pl^2}{2} [\lambda(1 - \lambda) - \Phi].$$



$$\Phi = \frac{1}{4\mu} \{2\lambda[2(1 + \kappa_1) + \psi] + \kappa_1\},$$

$$A = B = \frac{pl_1}{2}, \quad H_{a,b} = \frac{pl_1 l}{2h_1} \psi \Phi,$$

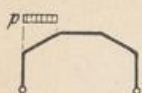
$$M_{c,d} = -\frac{pl_1 l}{2} \psi \Phi, \quad M_{e,f} = \frac{pl_1 l}{2} (\lambda - \Phi).$$



$$\Phi = \frac{1}{4\mu} \{4\varphi[3(1 + \kappa_1) - \psi'] + 6(1 + \kappa_1 + \psi) + 3\kappa_2\psi\},$$

$$A = -B = -\frac{wh_1^2}{2l}, \quad H_{a,b} = -\frac{wh_1}{2} \left(\pm 1 + \frac{\psi}{2} \Phi\right),$$

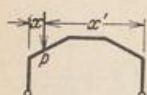
$$M_{c,d} = -\frac{wh_1^2}{4} (1 \mp 1 - \psi \Phi), \quad M_{e,f} = -\frac{wh_1^2}{4} (1 + 2\varphi \mp \lambda' - \Phi).$$



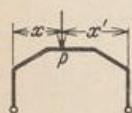
$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\mu} (5 + 3\psi + 6\alpha_1), \\ A &= \frac{pa}{2} (2 - \lambda), \quad B = \frac{pa}{2} \lambda, \\ H_{a,b} &= \frac{pa^2}{4h_1} \psi \Phi, \\ M_{c,d} &= -\frac{pa^2}{4} \psi \Phi, \\ M_{e,f} &= \frac{pa^2}{4} (1 \pm \lambda' - \Phi). \end{aligned}$$



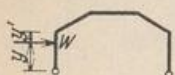
$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\mu} [3(1 + 2\alpha_1) + \psi], \\ A &= -B = -w f \frac{(2h_1 + l)}{2l}, \\ H_{a,b} &= -\frac{wf}{2} \left(\pm 1 + \frac{\psi'}{2} \Phi \right), \\ M_{c,d} &= \frac{wf h_1}{2} \left(\pm 1 + \frac{\psi'}{2} \Phi \right), \\ M_{e,f} &= -\frac{wf^2}{4} \left[1 \mp \lambda' \left(1 + \frac{2}{\varphi} \right) - \Phi \right]. \end{aligned}$$



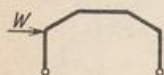
$$\begin{aligned} x \leq a, \quad \Phi &= \frac{1}{2\mu} \left[3(1 + \psi + \alpha_1) - \frac{\xi}{\lambda} \left(3\psi + \psi' \frac{\xi}{\lambda} \right) \right], \\ A &= P\xi', \quad B = P\xi, \quad H_{a,b} = \frac{Pl}{2h_1} \xi \psi \Phi, \\ M_{c,d} &= -\frac{Pl}{2} \xi \psi \Phi, \quad M_{e,f} = \frac{Pl}{2} \xi (1 \pm \lambda' - \Phi). \end{aligned}$$



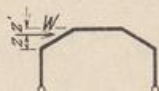
$$\begin{aligned} a \leq x \leq a + l_1, \quad \Phi &= \frac{1}{2\mu} \left[\lambda(2 + \psi) + 3 \frac{\alpha_1}{\lambda'} (\omega_R - \lambda^2) \right], \\ A &= P\xi', \quad B = P\xi, \quad H_{a,b} = \frac{Pl}{2h_1} \psi \Phi, \\ M_{c,d} &= -\frac{Pl}{2} \psi \Phi, \quad M_{e,f} = \frac{Pl}{2} \{ [1 \pm (1 - 2\xi)] \lambda - \Phi \}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2\mu} \{ \varphi [3(1 + \alpha_1) - \psi'] + 3\eta'(1 + \alpha_1 + \psi) + \alpha_2 \psi \eta'^2 (3 - \eta') \}, \\ A &= -B = -W \frac{y}{l}, \quad H_{a,b} = -\frac{W}{2} (\pm 1 + \psi \Phi), \\ M_{c,d} &= -\frac{Wh_1}{2} (1 - \eta \mp \eta - \psi \Phi), \quad M_{e,f} = \pm \frac{Wh_1}{2} (1 + \varphi - \eta \mp \lambda' \eta - \Phi). \end{aligned}$$



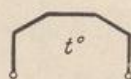
$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\varphi}{2\mu} [3(1 + \alpha_1) - \psi'], \\ A &= -B = -W \frac{h_1}{l}, \\ H_{a,b} &= -\frac{W}{2} (\pm 1 + \psi \Phi), \\ M_{c,d} &= \frac{Wh_1}{2} (\pm 1 + \psi \Phi), \\ M_{e,f} &= -\frac{Wh_1}{2} (\varphi \mp \lambda' - \Phi). \end{aligned}$$



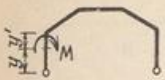
$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\xi'}{2\mu} (3\alpha_1 + 3\xi' - \psi' \xi'^2), \\ A &= -B = -W \frac{h_1 + z}{l}, \\ H_{a,b} &= -\frac{W}{2} (\pm 1 + \psi' \Phi), \\ M_{c,d} &= \frac{Wh_1}{2} (\pm 1 + \psi' \Phi), \\ M_{e,f} &= -\frac{Wf}{2} \left[\xi' \mp \lambda' \left(\frac{1}{\psi'} - \xi' \right) - \Phi \right]. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= -B = -W \frac{h}{l}, \\ H_{a,b} &= \mp \frac{W}{2}, \\ M_{c,d} &= \pm \frac{Wh_1}{2}, \\ M_{e,f} &= \pm \frac{Wh}{2} \lambda'. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= B = 0, \\ H_{a,b} &= \frac{3}{2\mu} \frac{l}{s} \frac{EJ_s}{h^2} \alpha_t t, \\ M_{c,d} &= -H_{a,b} h_1, \\ M_{e,f} &= -H_{a,b} h. \end{aligned}$$



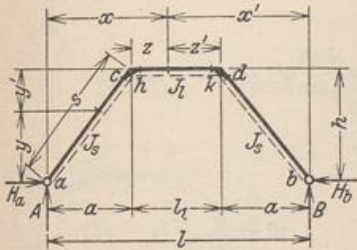
$$\Phi = \frac{3}{2\mu} [1 + \kappa_1 + \psi + \kappa_2 \psi (1 - \eta^2)],$$

$$A = -B = -\frac{M}{l}, \quad H_{a,b} = \frac{M}{2h} \Phi,$$

$$M_{h,k} = \frac{M}{2} (1 \pm 1 - \psi \Phi), \quad M_{e,f} = \frac{M}{2} (1 \pm \lambda' - \Phi),$$

$$y = 0: \quad \Phi = \frac{3}{2\mu} [1 + \kappa_1 + \psi (1 + \kappa_2)], \quad y = h: \quad \Phi = \frac{3}{2\mu} (1 + \kappa_1 + \psi), \quad M_c = -\frac{M}{2} \psi \Phi.$$

Tabelle 47. Symmetrischer Zweigelenrahmen mit schrägen Pfosten:

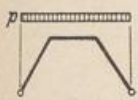


$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{l_1}, \quad \lambda = \frac{a}{l},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \zeta' = \frac{z'}{l_1}, \quad \lambda' = \frac{l_1}{l},$$

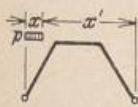
$$v = \frac{l}{h}, \quad \kappa = \frac{l_1 J_2}{s J_1}, \quad \mu = 1 + \frac{3}{2} \kappa.$$

$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben.



$$\Phi = \frac{1}{4\mu} [2\lambda(2 + \kappa) - \lambda^2(3 + 2\kappa) + \kappa],$$

$$A = B = \frac{pl}{2}, \quad H_{a,b} = \frac{pl}{2} v \Phi; \quad M_{c,d} = \frac{pl^2}{2} [\lambda(1 - \lambda) - \Phi].$$



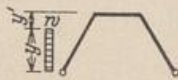
$$\Phi = \frac{1}{4\mu} \left[6(1 + \kappa) - \frac{\xi^2}{\lambda^2} \right],$$

$$A = \frac{px}{2} (1 + \xi'), \quad B = \frac{px}{2} \xi,$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{4} \xi^2 v \Phi,$$

$$M_{c,d} = \frac{pl^2}{4} \xi^2 (1 \pm \lambda' - \Phi),$$

$$x = a: \quad \xi = \lambda, \quad \Phi = \frac{1}{4\mu} (5 + 6\kappa).$$



$$\Phi = \frac{1}{4\mu} [6(1 + \kappa) - \eta^2],$$

$$A = -B = -\frac{wy^2}{2l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{wh}{2} \eta (1 \pm 1 - \frac{\eta}{2} \Phi),$$

$$M_{c,d} = \frac{wh^2}{4} \eta^2 (1 \pm \lambda' - \Phi),$$

$$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{1}{4\mu} (5 + 6\kappa).$$

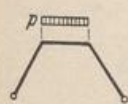


$$\Phi = \frac{1}{4\mu} \{ 4\lambda + \kappa [6\lambda + \lambda' \zeta (3 - 2\zeta)] \},$$

$$A = \frac{pz}{2} (1 + \lambda' \zeta'), \quad B = \frac{pz}{2} (1 - \lambda' \zeta'),$$

$$H_{a,b} = \frac{pl_1}{2} \zeta v \Phi,$$

$$M_{c,d} = \frac{pl_1}{2} \zeta [\lambda(1 \pm \lambda' \zeta') - \Phi].$$

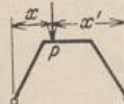


$$\Phi = \frac{1}{4\mu} [4\lambda(1 + \kappa) + \kappa],$$

$$A = B = \frac{pl_1}{2},$$

$$H_{a,b} = \frac{pl_1}{2} v \Phi,$$

$$M_{c,d} = +\frac{pl_1}{2} (\lambda - \Phi).$$

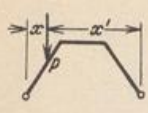


$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \left[2\lambda + 3 \frac{\kappa}{\lambda'} (\omega_R - \lambda^2) \right],$$

$$A = P \xi', \quad B = P \xi,$$

$$H_{a,b} = \frac{P}{2} v \Phi,$$

$$a \leq x \leq a + l_1 \quad M_{c,d} = \frac{Pl}{2} \{ [1 \pm (1 - 2\xi)] \lambda - \Phi \}.$$



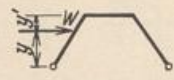
$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \left[3(1 + \kappa) - \frac{\xi^2}{\lambda^2} \right],$$

$$A = P\xi', \quad B = P\xi,$$

$$H_{a,b} = \frac{P}{2} \xi \nu \Phi,$$

$$M_{c,d} = \frac{Pl}{2} \xi (1 \pm \lambda' - \Phi).$$

$0 < x \leq a$



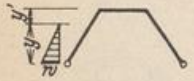
$$\Phi = \frac{\eta'}{2\mu} [3(\kappa + \eta') - \eta'^2],$$

$$A = -B = -W \frac{y}{l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_{c,d} = -\frac{Wh}{2} [\eta' \mp \eta \lambda' - \Phi],$$

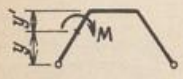
$y = h: \quad \eta = 1, \quad \eta' = 0, \quad \Phi = 0.$



$$\Phi = \frac{1}{2\mu} (10 - 3\eta^2), \quad A = -B = -\frac{wy^2}{6l}.$$

$$H_{a,b} = -\frac{wh}{120} \eta (30 \pm 30 - 10\eta - \eta\Phi), \quad M_{c,d} = \frac{wh^2}{120} \eta^2 (\pm 10\lambda' - \Phi),$$

$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{7}{2\mu}.$



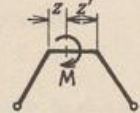
$$\Phi = \frac{3}{2\mu} (1 + \kappa - \eta^2),$$

$$A = -B = -\frac{M}{l},$$

$$H_{a,b} = \frac{M}{2h} \Phi,$$

$$M_{h,k} = \frac{M}{2} (1 \pm \lambda' - \Phi),$$

$y = 0: \quad \Phi = \frac{3}{2\mu} (1 + \kappa).$



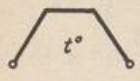
$$\Phi = \frac{3}{4} \frac{\kappa}{\mu} (1 - 2\zeta),$$

$$A = -B = -\frac{M}{l},$$

$$H_{a,b} = \frac{M}{h} \Phi,$$

$$M_{c,d} = -M (\pm \lambda + \Phi),$$

$z = 0: \quad \Phi = \frac{3\kappa}{4\mu}.$



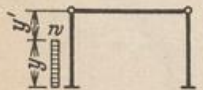
$$A = B = 0, \quad H_{a,b} = \frac{3}{2\mu} \frac{l}{s} \frac{EJ_s}{h^2} \alpha_i t, \quad M_{c,d} = -\frac{3}{2\mu} \frac{l}{s} \frac{EJ_s}{h} \alpha_i t.$$

Tabelle 48. Symmetrischer Rahmen mit geradem Riegel, Gelenke an den Traufpunkten.



$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \lambda = \frac{l}{h}.$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}.$$




$$\Phi = \frac{1}{4} \eta (4 - \eta),$$

$$H_{c,d} = \frac{wh}{4} \eta^2 \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{wh^2}{4} \eta^2 [1 \pm 1 - \Phi],$$

$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{3}{4}.$

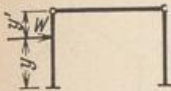


$$\Phi = \frac{3}{20} \eta (5 - \eta),$$

$$H_{c,d} = \frac{wh}{12} \eta^2 \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{wh^2}{12} \eta^2 [1 \pm 1 - \Phi],$$

$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{3}{5}.$

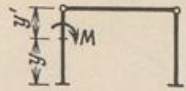


$$\Phi = \frac{\eta}{2} (3 - \eta),$$

$$H_{c,d} = \frac{W}{2} \eta \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{W h}{2} \eta [1 \pm 1 - \Phi],$$

$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = 1.$

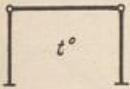


$$\Phi = \frac{3}{2} (1 - \eta'^2),$$

$$H_{c,d} = \frac{M}{2 h} \Phi,$$

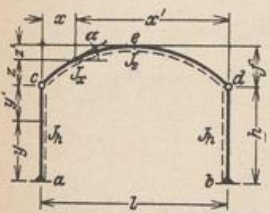
$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} [1 \pm 1 - \Phi].$$

$y = h: \quad \Phi = \frac{3}{2}.$



$$H_{c,d} = \frac{3}{2} \lambda \frac{E J_h}{h^2} \alpha_t t, \quad M_{a,b} = \frac{3}{2} l \frac{E J_h}{h^2} \alpha_t t.$$


Tabelle 49. Symmetrischer Rahmen mit parabolisch gekrümtem Riegel, Gelenke an den Traufpunkten.



$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{f}, \quad \lambda = \frac{l}{h},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \zeta' = \frac{z'}{f}, \quad \varphi = \frac{f}{h},$$

$$\frac{J_s}{J_x \cos \alpha} = 1, \quad \kappa = \frac{l J_h}{h J_s}, \quad \mu = 5 + 4 \kappa \varphi^2, \quad \nu = \frac{\mu}{\kappa \varphi}.$$

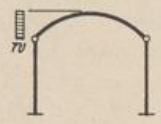


$$\Phi = \frac{4}{\nu},$$

$$H_{c,d} = \frac{p l}{8} \lambda \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{p l^2}{8} \Phi,$$

$$M_s = \frac{p l^2}{8} (1 - \varphi \Phi).$$




$$\Phi = \frac{24}{7} \frac{\varphi}{\nu},$$

$$H_{c,d} = -\frac{w f}{4} (\pm 2 + \Phi),$$

$$M_{a,b} = -\frac{w f h}{4} (\pm 2 + \Phi),$$

$$M_s = -\frac{w f^2}{4} (1 - \Phi).$$



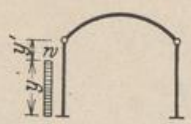
$$\Phi = \frac{\xi^2}{\nu} [5 - \xi^2 (5 - 2 \xi)],$$

$$H_{c,d} = \frac{p l}{4} \lambda \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{p l^2}{4} \Phi,$$

$x \leq \frac{l}{2}: \quad M_s = \frac{p l^2}{4} (\xi^2 - \varphi \Phi).$

$x = \frac{l}{2}: \quad \Phi = \frac{1}{\nu}.$



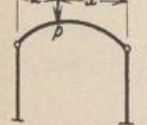
$$\Phi = \frac{5}{4 \mu} \eta (4 - \eta),$$

$$H_{c,d} = \frac{w h}{4} \eta^2 \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{4} \eta^2 [1 \pm 1 - \Phi],$$

$$M_s = -\varphi M_b,$$

$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{15}{4 \mu}.$

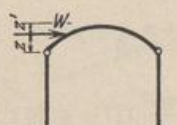


$$\Phi = \frac{5}{\nu} \omega_p'' ,$$

$$H_{c,d} = \frac{P}{2} \lambda \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{P l}{2} \Phi,$$

$x \leq \frac{l}{2}: \quad M_s = \frac{P l}{2} (\xi - \varphi \Phi).$

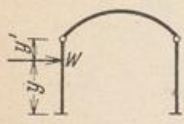


$$\Phi = \frac{\varphi}{\nu} \zeta'^{\frac{3}{2}} (5 - \zeta'),$$

$$H_{c,d} = \frac{W}{2} (\mp 1 - \Phi),$$

$$M_{a,b} = -\frac{W h}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_s = -\frac{W f}{2} (\zeta' - \Phi).$$



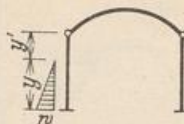
$$\Phi = \frac{5}{2\mu} \eta (3 - \eta),$$

$$H_{c,a} = \frac{W}{2} \eta \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{Wh}{2} \eta [1 \pm 1 - \Phi],$$

$$M_e = -\varphi M_b,$$

$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{5}{\mu}.$



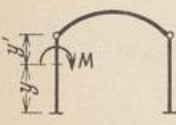
$$\Phi = \frac{3\eta}{4\mu} (5 - \eta),$$

$$H_{c,a} = \frac{wh}{12} \eta^2 \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{wh^2}{12} \eta^2 [1 \pm 1 - \Phi],$$

$$M_e = -\varphi M_b,$$

$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{3}{\mu}.$



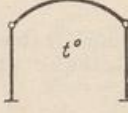
$$\Phi = \frac{15}{2\mu} (1 - \eta'^2),$$

$$H_{c,a} = \frac{M}{2h} \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} [1 \pm 1 - \Phi],$$

$$M_e = -\varphi M_b,$$

$y = h: \quad \Phi = \frac{15}{2\mu}.$

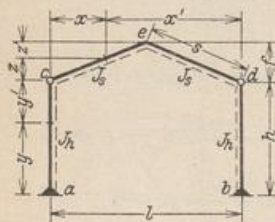


$$H_{c,a} = \frac{15}{2\mu} \lambda \frac{E J_s}{h^2} \alpha_1 t,$$

$$M_{a,b} = \frac{15}{2\mu} l \frac{E J_s}{h^2} \alpha_1 t,$$

$$M_e = -\varphi M_{a,b}.$$

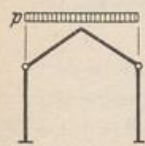
Tabelle 50. Symmetrischer Rahmen mit gebrochenem Riegel, Gelenke in den Traufpunkten.



$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{f}, \quad \lambda = \frac{l}{h},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \zeta' = \frac{z'}{f}, \quad \varphi = \frac{f}{h},$$

$$\kappa = \frac{s}{h} \frac{J_h}{J_s}, \quad \mu = 1 + \kappa \varphi^2, \quad \nu = \frac{\mu}{\kappa \varphi}.$$

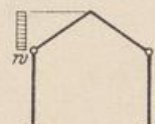


$$\Phi = \frac{5}{4\nu},$$

$$H_{c,a} = \frac{pl}{8} \lambda \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{8} \Phi,$$

$$M_e = \frac{pl^2}{8} (1 - \varphi \Phi).$$

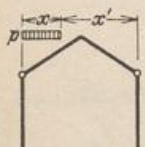


$$\Phi = \frac{3\varphi}{4\nu},$$

$$H_{c,a} = -\frac{wf}{4} (\pm 2 + \Phi),$$

$$M_{a,b} = -\frac{w \cdot f \cdot h}{4} [\pm 2 + \Phi],$$

$$M_e = -\frac{wf^2}{4} (1 - \Phi).$$



$$\Phi = \frac{\xi^2 (3 - 2\xi^2)}{2\nu},$$


$$H_{c,a} = \frac{pl}{4} \lambda \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{4} \Phi,$$

$$M_e = \frac{pl^2}{4} (\xi^2 - \varphi \Phi),$$

$x \leq \frac{l}{2}$

$x = \frac{l}{2}: \quad \Phi = \frac{5}{16\nu}.$



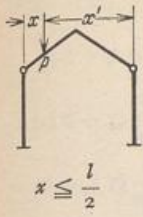
$$\Phi = \frac{\eta}{4\mu} (4 - \eta),$$

$$H_{c,a} = \frac{wh}{4} \eta^2 \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{wh^2}{4} \eta^2 [1 \pm 1 - \Phi],$$

$$M_e = -\varphi M_b,$$

$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{3}{4\mu}.$

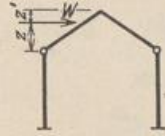


$$\Phi = \frac{\xi(3 - 4\xi^2)}{2\nu},$$

$$H_{e,a} = \frac{P}{2} \lambda \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{Pl}{2} \Phi,$$

$$M_e = \frac{Pl}{2} (\xi - \Phi).$$

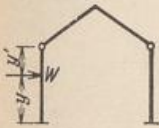


$$\Phi = \frac{\varphi}{2\nu} \zeta'^2 (3 - \zeta'),$$

$$H_{e,a} = -\frac{W}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_{a,b} = -\frac{Wh}{2} (\pm 1 + \Phi),$$

$$M_e = -\frac{Wf}{2} (\zeta' - \Phi).$$



$$\Phi = \frac{\eta}{2\mu} (3 - \eta),$$

$$H_{e,a} = \frac{W}{2} \eta \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{Wh}{2} \eta [1 \pm 1 - \Phi],$$

$$M_e = -\varphi M_b,$$

$y = h:$ $\eta = 1, \quad \Phi = \frac{1}{\mu}.$



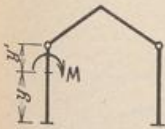
$$\Phi = \frac{3}{20\mu} \eta (5 - \eta),$$

$$H_{e,a} = \frac{wh}{12} \eta^2 \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{wh^2}{12} \eta^2 [1 \pm 1 - \Phi],$$

$$M_e = -\varphi M_b,$$

$y = h:$ $\eta = 1, \quad \Phi = \frac{3}{5\mu}.$



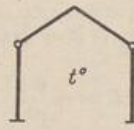
$$\Phi = \frac{3}{2\mu} (1 - \eta'^2),$$

$$H_{e,a} = \frac{M}{2h} \Phi,$$

$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} [1 \pm 1 - \Phi],$$

$$M_e = -\varphi M_b,$$

$y = h:$ $\Phi = \frac{3}{2\mu}.$

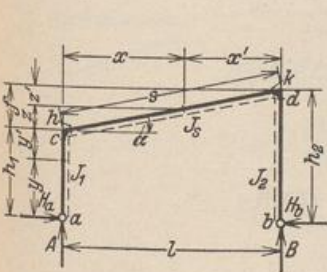


$$H_{e,a} = \frac{3}{2\mu} \lambda \frac{E J_s}{h^2} \alpha_t t,$$

$$M_{a,b} = \frac{3}{2\mu} l \frac{E J_s}{h^2} \alpha_t t,$$

$$M_e = -\varphi M_{a,b}.$$

Tabelle 51. Unsymmetrischer Rahmen mit geradem Riegel.



$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h_1}, \quad \zeta = \frac{z}{f}, \quad \varphi_1 = \frac{f}{h_1},$$

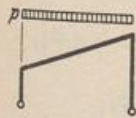
$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h_1}, \quad \zeta' = \frac{z'}{f}, \quad \varphi_2 = \frac{f}{h_2},$$

$$\lambda_1 = \frac{h_1}{h_2}, \quad \nu_1 = \frac{l}{h_1}, \quad \kappa_1 = \frac{h_1 J_s}{s J_1},$$

$$\lambda_2 = \frac{h_2}{h_1}, \quad \nu_2 = \frac{l}{h_2}, \quad \kappa_2 = \frac{h_2 J_s}{s J_2},$$

$$\mu = \lambda_1(1 + \kappa_1) + 1 + \lambda_2(1 + \kappa_2),$$

$M_{h,k} = M_{e,a}$, wenn nicht besonders angegeben.

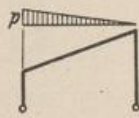


$$A = B = \frac{pl}{2},$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{8\mu} (\nu_1 + \nu_2),$$

$$M_e = -\frac{pl^2}{8\mu} (1 + \lambda_1),$$

$$M_d = -\frac{pl^2}{8\mu} (1 + \lambda_2).$$

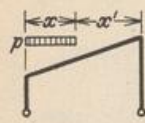


$$A = \frac{pl}{3}, \quad B = \frac{pl}{6},$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{120\mu} (7\nu_1 + 8\nu_2),$$

$$M_e = -\frac{pl^2}{120\mu} (7 + 8\lambda_1),$$

$$M_d = -\frac{pl^2}{120\mu} (7\lambda_2 + 8).$$



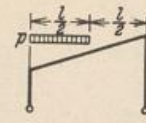
$$\Phi = \frac{\xi^2}{8\mu} [v_1(2-\xi^2) + v_2(2-\xi)^2],$$

$$A = \frac{p x}{2} (1 + \xi'), \quad B = \frac{p x}{2} \xi,$$

$$H_{a,b} = p l \Phi,$$

$$M_c = -p l^2 \frac{\Phi}{v_1},$$

$$M_d = -p l^2 \frac{\Phi}{v_2}.$$

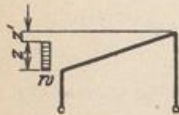


$$A = \frac{3}{8} p l, \quad B = \frac{1}{8} p l,$$

$$H_{a,b} = \frac{p l}{128 \mu} (7 v_1 + 9 v_2),$$

$$M_c = -\frac{p l^2}{128 \mu} (7 + 9 \lambda_1),$$

$$M_d = -\frac{p l^2}{128 \mu} (7 \lambda_2 + 9).$$

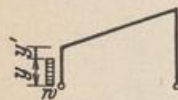


$$\Phi = \frac{1}{4\mu} \{4 [1 + 2 \lambda_1 (1 + \kappa_1)] + \varphi_2 \zeta [2 (3 + \varphi_1) - 4 \zeta - \varphi_1 \zeta^2]\},$$

$$A = -B = -\frac{w z}{2} \frac{2 + \varphi_1 \zeta}{v_1}, \quad H_{a,b} = -\frac{w z}{2} (1 \pm 1 - \Phi),$$

$$M_c = \frac{w z}{2} h_1 (2 - \Phi), \quad M_d = -\frac{w z}{2} h_2 \Phi,$$

$$z = f: \quad \zeta = 1, \quad \Phi = \frac{\lambda_1}{4\mu} [6 (2 + \varphi_1) + \varphi_1^2 + 8 \kappa_1].$$



$$\Phi = \frac{1}{4\mu} \{2 [1 + \lambda_1 (2 + 3 \kappa_1) - \lambda_1 \kappa_1 \eta^2]\},$$

$$A = -B = -\frac{w y^2}{2 l}, \quad H_{a,b} = -\frac{w y}{2} (1 \pm 1 - \eta \Phi),$$

$$M_c = \frac{w y^2}{2} (1 - \Phi), \quad M_d = -\frac{w y^2}{2} \lambda_2 \Phi,$$

$$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{1}{4\mu} [2 + \lambda_1 (4 + 5 \kappa_1)].$$

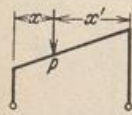


$$\Phi = \frac{1}{30\mu} \{10 + \lambda_1 [20 + 3 \kappa_1 (10 - \eta^2)]\},$$

$$A = -B = \frac{w y^2}{6 l}, \quad H_{a,b} = -\frac{w y}{4} (1 \pm 1 - \eta \Phi),$$

$$M_c = \frac{w y^2}{12} (2 - 3 \Phi), \quad M_d = -\frac{w y^2}{4} \lambda_2 \Phi,$$

$$y = h: \quad \eta = 1, \quad \Phi = \frac{1}{30\mu} [10 + \lambda_1 (20 + 27 \kappa_1)].$$



$$\Phi = \frac{1}{2\mu} (v_1 \omega_D + v_2 \omega'_D),$$

$$A = P \xi', \quad B = P \xi,$$

$$H_{a,b} = P \Phi,$$

$$M_c = -P l \frac{\Phi}{v_1},$$

$$M_d = -P l \frac{\Phi}{v_2}.$$



$$\Phi = \frac{1}{\mu} \{1 + \lambda_1 [2 + \kappa_1 (3 - \eta^2)]\},$$

$$A = -B = -\frac{W y}{l},$$

$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} (1 \pm 1 - \eta \Phi),$$

$$M_c = \frac{W y}{2} (2 - \Phi),$$

$$M_d = -\frac{W y}{2} \lambda_2 \Phi.$$

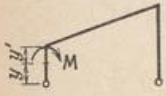


$$\Phi = \frac{1}{\mu} [1 + 2 \lambda_1 (1 + \kappa_1) + (1 - \lambda_1) \omega'_D + (\lambda_2 - 1) \omega_D],$$

$$A = -B = -W \frac{h_1 + z}{l}, \quad H_{a,b} = -\frac{W}{2} (1 \pm 1 - \Phi),$$

$$M_c = -H_a h_1, \quad M_d = -H_b h_2,$$

$$z = 0: \quad \Phi = \frac{1}{\mu} [1 + 2 \lambda_1 (1 + \kappa_1)].$$



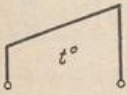
$$\Phi = \frac{1}{2\mu} [2 + \lambda_2 + 3 \kappa_1 (1 - \eta^2)],$$

$$A = -B = -\frac{M}{l}, \quad H_{a,b} = \frac{M}{h_2} \Phi,$$

$$M_c = M_h = M(1 - \lambda_1 \Phi), \quad M_d = -M \Phi,$$

$$y = 0: \quad \Phi = \frac{1}{2\mu} (2 + \lambda_2 + 3 \kappa_1),$$

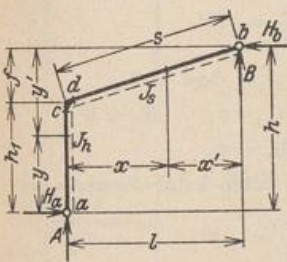
$$y = h: \quad \Phi = \frac{1}{2\mu} (2 + \lambda_2), \quad M_c = -M \lambda_1 \Phi.$$



$$A = B = 0, \quad H_{a,b} = \frac{3}{\mu} \frac{l}{s} \frac{E J_d}{h_1^2} \alpha_1 t,$$

$$M_c = -H_a h_1, \quad M_d = -H_b h_2.$$

Tabelle 52. Halbrahmen mit senkrechtem Pfosten.



$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \zeta = \frac{y}{h_1}, \quad \varphi = \frac{f}{h}, \quad \varrho = \frac{f}{l},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \zeta' = \frac{y'}{f}, \quad \varphi' = \frac{h_1}{h}, \quad \varrho' = \frac{h_1}{l},$$

$$v = \frac{h}{l}, \quad \psi = \frac{f}{h_1}, \quad \kappa = \frac{h_1}{s} \frac{J_c}{J_h}, \quad \mu = 1 + \kappa.$$

$M_d = M_e$, wenn nicht besonders angegeben.

$$\xi^2 - \frac{1}{2} \xi^4 = \omega_\varphi, \quad \text{vgl. Tab. 22, S. 116.}$$

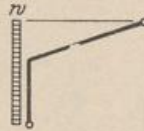


$$\Phi = \frac{1}{4\mu},$$

$$A, B = \frac{p l}{2} \left(1 \pm \frac{\Phi}{\varphi'} \right),$$

$$H_{a,b} = \frac{p l^2}{2 h_1} \Phi,$$

$$M_c = -\frac{p l^2}{2} \Phi.$$

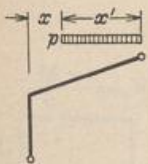


$$\Phi = \frac{\kappa + \psi^2}{4\mu},$$

$$A, B = \pm \frac{w h_1}{2} v (\psi + \Phi),$$

$$H_{a,b} = \frac{w h_1}{2} \left(\mp \frac{1}{\varphi'} + \psi + \Phi \right),$$

$$M_c = -\frac{w h_1^2}{2} \Phi.$$

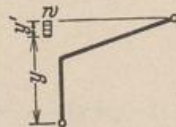


$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \left(\xi'^2 - \frac{1}{2} \xi'^4 \right),$$

$$A, B = \frac{p l}{2} \left[\xi' \mp \left(\omega_\xi - \frac{\Phi}{\varphi'} \right) \right],$$

$$H = \frac{p l^2}{2 h_1} \Phi,$$

$$M_c = -\frac{p l^2}{2} \Phi.$$



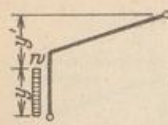
$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \left(\zeta'^2 - \frac{1}{2} \zeta'^4 \right),$$

$$A, B = \pm \frac{w f}{2} \varrho \left(\zeta'^2 + \frac{\Phi}{\varphi'} \right),$$

$$H_{a,b} = \frac{w f}{2} \left(\mp \zeta' + \zeta' + \psi \Phi \right),$$

$$M_c = -\frac{w f^2}{2} \Phi.$$

$$y = h_1: \quad \zeta' = 1, \quad \Phi = \frac{1}{4\mu}.$$



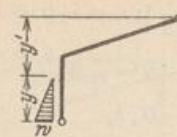
$$\Phi = \frac{\kappa}{2\mu} \left(\zeta^2 - \frac{1}{2} \zeta^4 \right),$$

$$A, B = \pm \frac{w h_1}{2} \varrho \left(\zeta^2 + \frac{\Phi}{\varphi} \right),$$

$$H_{a,b} = \frac{w h_1}{2} (\mp \zeta - \omega_R(\zeta) + \Phi),$$

$$M_c = -\frac{w h_1^2}{2} \Phi,$$

$y = h_1: \zeta = 1, \Phi = \frac{\kappa}{4\mu}.$



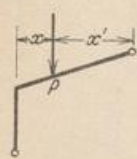
$$\Phi = \frac{\kappa}{\mu} \zeta (10 - 3 \zeta^2),$$

$$A, B = \pm \frac{w h_1}{120} \varrho \zeta (20 \varphi \zeta + \Phi),$$

$$H_{a,b} = \frac{w h_1}{120} \zeta (\mp 30 - 30 + 20 \zeta + \Phi),$$

$$M_c = -\frac{w h_1^2}{120} \zeta \Phi,$$

$y = h: \zeta = 1, \Phi = 7 \frac{\kappa}{\mu}.$

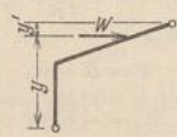


$$\Phi = \frac{1}{\mu} (\xi' - \xi'^3),$$

$$A, B = \frac{P}{2} \left[1 \mp (1 - 2 \xi' - \frac{\Phi}{\varphi'}) \right],$$

$$H_{a,b} = \frac{P}{2} \frac{l}{h_1} \Phi,$$

$$M_c = -\frac{P l}{2} \Phi.$$

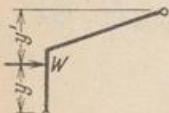


$$\Phi = \frac{1}{2\mu} (\zeta' - \zeta'^3),$$

$$A, B = \pm W \varrho \left(\zeta' + \frac{\Phi}{\varphi'} \right),$$

$$H_{a,b} = \frac{W}{2} (\mp 1 + 1 + 2 \varphi \Phi),$$

$$M_c = -W / \Phi.$$



$$\Phi = \frac{\kappa}{2\mu} (\zeta - \zeta^3),$$

$$A, B = \pm W \varrho \left(\zeta + \frac{\Phi}{\varphi} \right),$$

$$H_{a,b} = \frac{W}{2} [-1 \mp 1 + 2(\zeta + \Phi)],$$

$$M_c = -W h_1 \Phi.$$

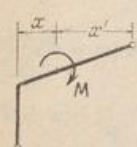


$$A = B = \pm W \varrho,$$

$$H_a = 0, \quad H_b = W,$$

$$M_c = 0.$$

Es treten keine Momente auf.



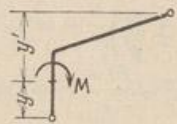
$$\Phi = \frac{\omega'_M}{2\mu},$$

$$A, B = \mp \frac{M}{l} \left(1 - \frac{\Phi}{\varphi'} \right),$$

$$H_{a,b} = \frac{M}{h_1} \Phi,$$

$$M_c = -M \Phi,$$

$x = l: \Phi = -\frac{1}{2\mu}.$



$$\Phi = \frac{\kappa}{2\mu} \omega_M(\zeta),$$

$$A, B = \pm \frac{M}{l} \varphi \left(1 - \frac{\Phi}{\varphi} \right),$$

$$H_{a,b} = \frac{M}{h_1} (1 - \Phi),$$

$$M_c = M \Phi,$$

$y = 0: \Phi = -\frac{\kappa}{2\mu},$

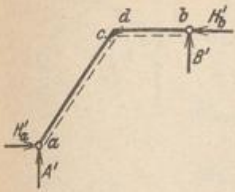
$y = h_1: \Phi = \frac{\kappa}{\mu}, \quad M_c = -\frac{M}{\mu}.$



$$\Phi = 3 \frac{E J_s}{l s} \frac{1 + \nu^2}{\varrho'^2 \mu} \alpha_1 t,$$

$$A, B = \pm \nu \Phi, \quad H_{a,b} = \Phi, \quad M_c = -h_1 \Phi.$$

Tabelle 53. Halbrahmen mit waagrechttem Riegel.

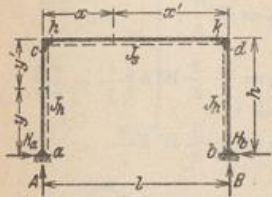


Mit den Werten $A, B, H_{a,b}, M$ der Tabelle 52 für den mit seiner Belastung um 90° gedrehten Halbrahmen ergibt sich:

$$\begin{aligned} A' &= H_b, \\ B' &= -H_a, \\ H'_a &= -B, \\ H'_b &= A, \\ M_{c,d} &= M_{d,c}. \end{aligned}$$

Dreifach statisch unbestimmte Rahmen.

Tabelle 54. Symmetrischer Rahmen mit geradem Riegel.



$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \omega \text{ Tabelle 22 S. 116}, \quad \kappa = \frac{h}{l} \frac{J_3}{J_h},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \mu = 2 + \kappa, \quad \nu = 1 + 6\kappa,$$

$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben.

$$\begin{aligned} H_{a,b} &= \frac{1}{4\mu} \frac{p l^2}{h}, \\ M_{a,b} &= \frac{p l^2}{12\mu}, \\ M_{c,d} &= -\frac{p l^2}{6\mu}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{a,b} &= \frac{1}{8\mu} \frac{p l^2}{h}, \\ M_{a,b} &= \frac{p l^2}{120} \left(\frac{5}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right), \\ M_{c,d} &= -\frac{p l^2}{120} \left(\frac{10}{\mu} \mp \frac{1}{\nu} \right). \end{aligned}$$

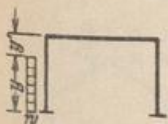
$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\mu} (3\xi^2 - 2\xi^3), \\ H_{a,b} &= \frac{1}{4} \frac{p l^2}{h} \Phi, \\ M_{a,b} &= \frac{p l^2}{12} \left(\Phi \mp \frac{3}{\nu} \omega_R^2 \right), \\ M_{c,d} &= -\frac{p l^2}{12} \left(2\Phi \pm \frac{3}{\nu} \omega_R^2 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2\mu} (3\xi - \xi^3), \\ H_{a,b} &= \frac{1}{4} \frac{p l^2}{h} \Phi, \\ M_{a,b} &= \frac{p l^2}{12} \Phi, \\ M_{c,d} &= -\frac{p l^2}{6} \Phi. \end{aligned}$$

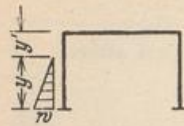
$\zeta = \frac{c}{l}$.

$$\begin{aligned} H_{a,b} &= \frac{1}{8\mu} \frac{p l^2}{h}, \\ M_{a,b} &= \frac{p l^2}{24} \left(\frac{1}{\mu} \mp \frac{3}{8\nu} \right), \\ M_{c,d} &= -\frac{p l^2}{24} \left(\frac{2}{\mu} \pm \frac{3}{8\nu} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{a,b} &= -\frac{w h}{4} \left(1 \pm 2 + \frac{1}{2\mu} \right), \\ M_{a,b} &= -\frac{w h^2}{4} \left[\frac{3+\kappa}{6\mu} \pm \left(1 - \frac{2\kappa}{\nu} \right) \right], \\ M_{c,d} &= -\frac{w h^2}{4} \kappa \left(\frac{1}{6\mu} \mp \frac{2}{\nu} \right). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} - \omega'_\varphi, \\ H_{a,b} &= -\frac{w h}{4} \left\{ 2\eta \pm 2\eta - \eta^2 - \frac{1}{\mu} [\kappa \omega_\varphi - (1 + \kappa) \Phi] \right\}, \\ M_{a,b} &= -\frac{w h^2}{4} \left[\frac{1}{3\mu} [(3 + 2\kappa) \Phi - \kappa \omega_\varphi] \pm \eta^2 \left(1 - 2\eta \frac{\kappa}{\nu} \right) \right], \\ M_{c,d} &= -\frac{w h^2}{4} \kappa \left[\frac{1}{3\mu} (2\omega_\varphi - \Phi) \mp \frac{\eta^2}{\nu} \right]. \end{aligned}$$



$$H_{a,b} = -\frac{w h}{40} \eta \left\{ 10 \pm 10 - \frac{\eta^2}{\mu} [5(1 + \kappa) - \eta(1 + 2\kappa)] \right\},$$

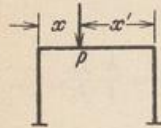
$$M_{a,b} = +\frac{w h^2}{40} \eta^2 \left[\frac{\eta}{3\mu} (1 + \kappa) (5 - 3\eta) + \frac{5}{3} \eta - \frac{10}{3} \mp \left(\frac{10}{3} - \frac{5\kappa}{v} \eta \right) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{40} \kappa \eta^3 \left[\frac{1}{3\mu} (5 - 3\eta) \mp \frac{5}{v} \right].$$

$y = h:$

$$H_{a,b} = -\frac{w h}{40} \left[7 \pm 10 + \frac{2}{\mu} \right],$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{40} \left[\frac{8 + 3\kappa}{3\mu} \pm 5 \left(\frac{2}{3} - \frac{\kappa}{v} \right) \right], \quad M_{c,d} = -\frac{w h^2}{40} \kappa \left[\frac{2}{3\mu} \mp \frac{5}{v} \right].$$

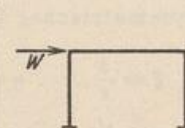


$$\Phi = \frac{1}{v} (1 - 2\xi),$$

$$H_{a,b} = \frac{3}{2} \frac{Pl \omega_R}{h \mu},$$

$$M_{a,b} = \frac{Pl}{2} \omega_R \left(\frac{1}{\mu} \mp \Phi \right),$$

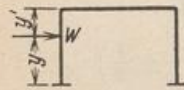
$$M_{c,d} = -\frac{Pl}{2} \omega_R \left(\frac{2}{\mu} \pm \Phi \right).$$



$$H_{a,b} = \mp \frac{W}{2},$$

$$M_{a,b} = \mp \frac{3}{2} W h \left(\frac{1}{3} - \frac{\kappa}{v} \right),$$

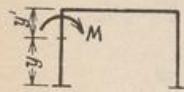
$$M_{c,d} = \pm \frac{3}{2} W h \frac{\kappa}{v}.$$



$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} \left\{ 1 \pm 1 - \eta - \frac{1}{\mu} [\kappa \omega_D - (1 + \kappa) \omega'_D] \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{W h}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} [(1 + \kappa) \omega'_D - \kappa \omega_R] \pm \eta \left(1 - 3\eta \frac{\kappa}{v} \right) \right\},$$

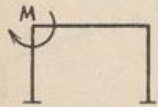
$$M_{c,d} = -\frac{W h}{2} \kappa \eta^2 \left[\frac{1}{\mu} (1 - \eta) \mp \frac{3}{v} \right].$$



$$H_{a,b} = \frac{M}{2 h} \left\{ 1 - \frac{1}{\mu} [\kappa \omega_M + (1 + \kappa) \omega'_M] \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{3\mu} [(3 + 2\kappa) \omega'_M + \kappa \omega_M] \pm \left(1 - 6\eta \frac{\kappa}{v} \right) \right\},$$

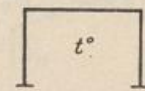
$$M_{h,k} = \frac{M}{2} \kappa \left\{ \frac{1}{3\mu} [2\omega_M + \omega'_M] \pm \frac{6}{v} \eta \right\}.$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{2\mu} \frac{M}{h},$$

$$M_{a,b} = \frac{M}{2} \left[\frac{1}{\mu} \mp \frac{1}{v} \right],$$

$$M_{h,k} = \frac{M}{2} \kappa \left[\frac{1}{\mu} \pm \frac{6}{v} \right].$$



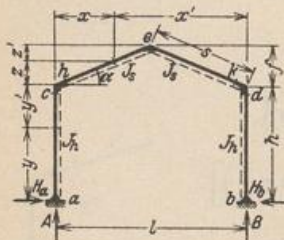
$$\Phi = \frac{3}{\mu} \frac{E J_s}{h} \alpha_1 t,$$

$$H_{a,b} = \frac{2\kappa + 1}{\kappa} \frac{\Phi}{h},$$

$$M_{a,b} = \frac{\kappa + 1}{\kappa} \Phi,$$

$$M_{c,d} = -\Phi.$$

Tabelle 55. Symmetrischer Rahmen mit gebrochenem Riegel.



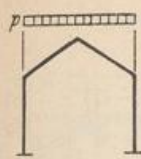
$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{f}, \quad \lambda = \frac{l}{h}, \quad \varphi = \frac{f}{h},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \zeta' = \frac{z'}{f}, \quad \kappa = \frac{h J_s}{s J_h}, \quad \varrho = \frac{3}{2} \frac{\kappa - \varphi}{\kappa + \varphi^2},$$

$$\mu = 4(1 + \kappa) - 2\varrho(\kappa - \varphi), \quad \psi_1 = 2 \frac{(1 + \kappa)}{\kappa - \varphi},$$

$$v = 2 + 6\kappa, \quad \psi_2 = \frac{3}{2} \frac{2 + \kappa + \varphi}{\kappa + \varphi^2} = (\psi_1 - 1) \varrho.$$

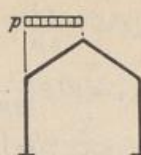
$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben.



$$H_{a,b} = \frac{pl}{24} \frac{\varrho \lambda}{\mu} (5 \varphi \psi_1 + 8),$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{24 \mu} [5 \varphi \psi_2 + 8(\varrho - 1)],$$

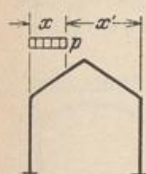
$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{24 \mu} (5 \varphi \varrho + 8).$$



$$H_{a,b} = \frac{pl}{48} \frac{\lambda \varrho}{\mu} (5 \varphi \psi_1 + 8),$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{96} \left\{ \frac{2}{\mu} [5 \varphi \psi_2 + 8(\varrho - 1)] \mp \frac{3}{\nu} \right\}$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{96} \left[\frac{2}{\mu} (5 \varphi \varrho + 8) \pm \frac{3}{\nu} \right].$$



$$H_{a,b} = \frac{pl}{6} \frac{\varrho \lambda}{\mu} \xi^2 [(\varphi \psi_1 (3 - 2 \xi^2) + 2(3 - 2 \xi))],$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{6} \xi^2 \left\{ \frac{1}{\mu} [\varphi \psi_2 (3 - 2 \xi^2) + 2(3 - 2 \xi)(\varrho - 1)] \mp \frac{3}{\nu} \xi'^2 \right\},$$

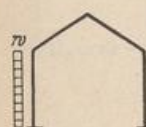
$$x \leq \frac{l}{2}: M_{c,d} = -\frac{pl^2}{6} \xi^2 \left\{ \frac{1}{\mu} [\varphi \varrho (3 - 2 \xi^2) + 2(3 - 2 \xi)] \pm \frac{3}{\nu} \xi'^2 \right\}.$$



$$H_{a,b} = -\frac{wh}{2} \eta \left\{ \pm 1 + 1 - \frac{\kappa \varrho}{6 \mu} \eta^2 [\psi_1 (4 - \eta) - 4] \right\},$$

$$M_{a,b} = \frac{wh^2}{12} \eta^2 \left\{ \frac{\kappa}{\mu} \eta [\psi_2 (4 - \eta) - 4(\varrho - 1)] - 3 \mp \left(3 - 6 \eta \frac{\kappa}{\nu} \right) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{wh^2}{12} \kappa \eta^3 \left\{ \frac{1}{\mu} [\varrho (4 - \eta) - 4] \mp \frac{6}{\nu} \right\}.$$

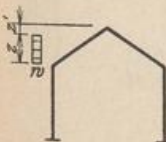


$$H_{a,b} = -\frac{wh}{2} \left[\pm 1 + 1 - \frac{\kappa \varrho}{6 \mu} (3 \psi_1 - 4) \right],$$

$$M_{a,b} = \frac{wh^2}{12} \left\{ \frac{\kappa}{\mu} [3 \psi_2 - 4(\varrho - 1)] - 3 \mp \left(3 - 6 \frac{\kappa}{\nu} \right) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{wh^2}{12} \kappa \left[\frac{1}{\mu} (3 \varrho - 4) \mp \frac{6}{\nu} \right].$$

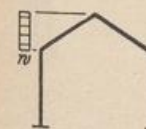
$$\Phi_1 = 1 + \zeta' + \zeta'^2, \quad \Phi_2 = (1 + \zeta') (1 - \zeta'^2),$$



$$H_{a,b} = -\frac{wf}{2} \zeta \left\{ \pm 1 + \frac{\varphi \varrho}{6 \mu} [(3 \varphi \psi_1 + 4) \Phi_1 - \varphi \psi_1 \zeta'^3] \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{wf^2}{24} \left\{ \frac{2}{\mu} [3 \varphi \psi_2 + 4(\varrho - 1)] \Phi_1 + \varphi \varrho \left(1 - \frac{2 \psi_1}{\mu} \right) \zeta'^3 \pm \left[\frac{12}{\varphi} - \frac{3}{\nu} \left(12 \frac{\kappa}{\varphi} - \Phi_2 \right) \right] \right\}$$

$$M_{c,d} = \frac{wf^2}{24} \zeta \left[\frac{2}{\mu} (3 \varphi \varrho + 4) \Phi_1 - \varphi \varrho \zeta'^3 \pm \frac{3}{\nu} \left(12 \frac{\kappa}{\varphi} - \Phi_2 \right) \right].$$



$$H_{a,b} = -\frac{wf}{2} \left[\pm 1 + \frac{\varphi \varrho}{6 \mu} (3 \varphi \psi_1 + 4) \right],$$

$$M_{a,b} = -\frac{wf^2}{24} \left\{ \frac{2}{\mu} [3 \varphi \psi_2 + 4(\varrho - 1)] \pm \left[\frac{12}{\varphi} - \frac{3}{\nu} \left(12 \frac{\kappa}{\varphi} - 1 \right) \right] \right\},$$

$$M_{c,d} = \frac{wf^2}{24} \left[\frac{2}{\mu} (3 \varphi \varrho + 4) \pm \frac{3}{\nu} \left(12 \frac{\kappa}{\varphi} - 1 \right) \right].$$

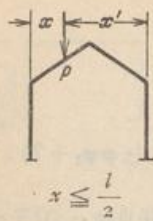


$y = h: \eta = 1$

$$H_{a,b} = -\frac{wh}{4} \eta \left\{ \pm 1 + 1 - \frac{\kappa \varrho}{15 \mu} \eta^2 [\psi_1 (5 - \eta) - 5] \right\},$$

$$M_{a,b} = \frac{wh^2}{120} \eta^2 \left\{ \frac{2 \kappa}{\mu} \eta [\psi_2 (5 - \eta) - 5(\varrho - 1)] - 10 \mp \left(10 - 15 \frac{\kappa}{\nu} \eta \right) \right\},$$

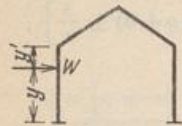
$$M_{c,d} = -\frac{wh^2}{120} \kappa \eta^3 \left\{ \frac{2}{\mu} [\varrho (5 - \eta) - 5] \mp \frac{15}{\nu} \right\}.$$



$$H_{a,b} = P \frac{\varrho \lambda}{3\mu} \xi [\varphi \psi_1 (3 - 4\xi^2) + 6\xi'],$$

$$M_{a,b} = Pl\xi \left\{ \frac{1}{3\mu} [\varphi \psi_2 (3 - 4\xi^2) + 6(\varrho - 1)\xi'] \mp \frac{1}{\nu} \xi' (\xi' - \xi) \right\},$$

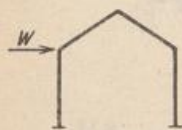
$$M_{c,d} = -Pl\xi \left\{ \frac{1}{3\mu} [\varphi \varrho (3 - 4\xi^2) + 6\xi'] \pm \frac{1}{\nu} \xi' (\xi' - \xi) \right\}.$$



$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} \left\{ \pm 1 + 1 - \frac{2\kappa\varrho}{3\mu} \eta^2 [\psi_1 (3 - \eta) - 3] \right\},$$

$$M_{a,b} = \frac{Wh}{2} \eta \left\{ \frac{2\kappa}{3\mu} \eta [\psi_2 (3 - \eta) - 3(\varrho - 1)] - 1 \pm \left(\frac{3\kappa}{\nu} \eta - 1 \right) \right\},$$

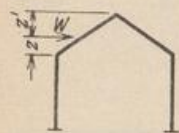
$$M_{c,d} = -\frac{Wh}{6} \kappa \eta^2 \left\{ \frac{2}{\mu} [\varrho (3 - \eta) - 3] \mp \frac{9}{\nu} \right\}.$$



$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} \left[\pm 1 + \frac{2\varphi\varrho}{3\mu} (2\varphi\psi_1 + 3) \right],$$

$$M_{a,b} = -\frac{Wh}{2} \left\{ \frac{2\varphi}{3\mu} [2\varphi\psi_2 + 3(\varrho - 1)] \mp \left(\frac{3\kappa}{\nu} - 1 \right) \right\},$$

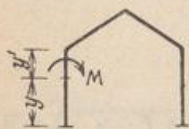
$$M_{c,d} = \frac{Wh}{2} \left[\frac{2\varphi}{3\mu} (2\varphi\varrho + 3) \pm \frac{3\kappa}{\nu} \right].$$



$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} \left\{ \pm 1 + \frac{2\varphi\varrho}{3\mu} \zeta'^2 [\varphi \psi_1 (3 - \zeta') + 3] \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{Wh}{2} \left\{ \frac{2\varphi}{3\mu} \zeta'^2 [\varphi \psi_2 (3 - \zeta') + 3(\varrho - 1)] \pm \left[1 - \frac{1}{\nu} (3\kappa - \varphi(2 - \zeta) \omega_R(\zeta)) \right] \right\},$$

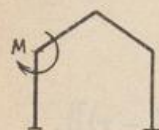
$$M_{c,d} = \frac{Wh}{2} \left\{ \frac{2\varphi}{3\mu} \zeta'^2 [\varphi \varrho (3 - \zeta') + 3] \pm \frac{1}{\nu} [3\kappa - \varphi(2 - \zeta) \omega_R(\zeta)] \right\}.$$



$$H_{a,b} = \frac{M}{h} \frac{\kappa\varrho}{\mu} \eta [\psi_1 (2 - \eta) - 2],$$

$$M_{a,b} = \frac{M}{2} \left\{ \frac{2\kappa\eta}{\mu} [\psi_2 (2 - \eta) - 2(\varrho - 1)] - 1 \mp \left(1 - 6\eta \frac{\kappa}{\nu} \right) \right\},$$

$$M_{h,k} = -M \kappa \eta \left\{ \frac{1}{\mu} [\varrho(2 - \eta) - 2] \mp \frac{3}{\nu} \right\}.$$



$$H_{a,b} = \frac{M}{h} \frac{\kappa\varrho}{\mu} (\psi_1 - 2),$$

$$M_{a,b} = \frac{M}{2} \left\{ \frac{2\kappa}{\mu} [\psi_2 - 2(\varrho - 1)] - 1 \mp \left[1 - \frac{6\kappa}{\nu} \right] \right\},$$

$$M_{h,k} = -M \kappa \left[\frac{1}{\mu} (\varrho - 2) \mp \frac{3}{\nu} \right].$$

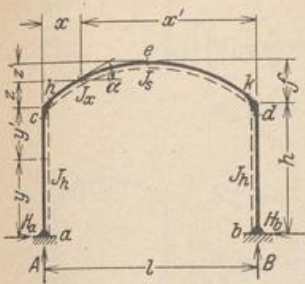


$$H_{a,b} = \varrho \left(2 \frac{\varrho}{\mu} + \frac{1}{\kappa - \varphi} \right) \frac{l}{s} \frac{E J_s}{h^2} \alpha_t t,$$

$$M_{a,b} = \varrho \left[\frac{2}{\mu} (\varrho - 1) + \frac{1}{\kappa - \varphi} \right] \frac{l}{s} \frac{E J_s}{h} \alpha_t t,$$

$$M_{c,d} = -\frac{2\varrho}{\mu} \frac{l}{s} \frac{E J_s}{h} \alpha_t t.$$

Tabelle 56. Symmetrischer Rahmen mit parabolisch gekrümmtem Riegel.



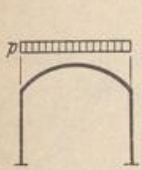
$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{f}, \quad \varphi = \frac{f}{h}, \quad \frac{J_a}{J_x \cos \alpha} = 1,$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \zeta' = \frac{z'}{f}, \quad \kappa = \frac{h}{l} \frac{J_a}{J_h}, \quad \varrho = \frac{5}{2} \frac{3\kappa - 2\varphi}{5\kappa + 4\varphi^2},$$

$$\mu = 3(1 + 2\kappa) - \varrho(3\kappa - 2\varphi), \quad \psi_1 = 3 \frac{1 + 2\kappa}{3\kappa - 2\varphi},$$

$$\nu = 1 + 6\kappa, \quad \psi_2 = (\psi_1 - 1)\varrho,$$

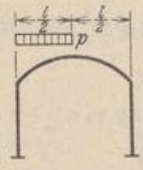
$M_{h,\kappa} = M_{e,d}$, wenn nicht besonders angegeben.



$$H_{a,b} = \frac{p l^2}{20 h \mu} \varrho (4 \varphi \psi_1 + 5),$$

$$M_{a,b} = + \frac{p l^2}{20 \mu} [4 \varphi \psi_2 + 5(\varrho - 1)],$$

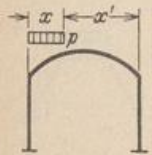
$$M_{e,d} = - \frac{p l^2}{20 \mu} (4 \varphi \varrho + 5).$$



$$H_{a,b} = \frac{p l^2}{40 h \mu} \varrho [4 \varphi \psi_1 + 5],$$

$$M_{a,b} = + \frac{p l^2}{40 \mu} \left\{ \frac{1}{\mu} [4 \varphi \psi_2 + 5(\varrho - 1)] \mp \frac{5}{8 \nu} \right\},$$

$$M_{e,d} = - \frac{p l^2}{40 \mu} \left[\frac{1}{\mu} (4 \varphi \varrho + 5) \pm \frac{5}{8 \nu} \right].$$

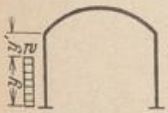


$$\Phi_1 = (5 - 5 \xi^2 + 2 \xi^3), \quad \Phi_2 = (3 - 2 \xi),$$

$$H_{a,b} = \frac{p l^2}{20 h \mu} \xi^2 [2 \varphi \psi_1 \Phi_1 + 5 \Phi_2],$$

$$M_{a,b} = + \frac{p l^2}{20 \mu} \xi^2 \left\{ \frac{1}{\mu} [2 \varphi \psi_2 \Phi_1 + 5(\varrho - 1) \Phi_2] \mp \frac{5}{\nu} \xi'^2 \right\},$$

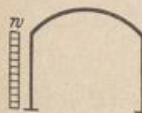
$$M_{e,d} = - \frac{p l^2}{20 \mu} \xi^2 \left\{ \frac{1}{\mu} [2 \varphi \varrho \Phi_1 + 5 \Phi_2] \pm \frac{5}{\nu} \xi'^2 \right\}.$$



$$H_{a,b} = - \frac{w h}{2} \eta \left\{ 1 \pm 1 - \frac{\kappa \varrho}{4 \mu} \eta^2 [\psi_1 (4 - \eta) - 4] \right\},$$

$$M_{a,b} = + \frac{w h^2}{4} \eta^2 \left\{ \frac{\kappa \eta}{2 \mu} [\psi_2 (4 - \eta) - 4(\varrho - 1)] - 1 \mp \left(1 - 2 \eta \frac{\kappa}{\nu} \right) \right\},$$

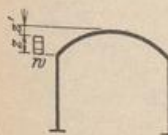
$$M_{e,d} = - \frac{w h^2}{4} \kappa \eta^2 \left\{ \frac{1}{2 \mu} [\varrho (4 - \eta) - 4] \mp \frac{2}{\nu} \right\}.$$



$$H_{a,b} = - \frac{w h}{2} \left[1 \pm 1 - \frac{\kappa \varrho}{4 \mu} (3 \psi_1 - 4) \right],$$

$$M_{a,b} = + \frac{w h^2}{4} \left\{ \frac{\kappa}{2 \mu} [3 \psi_2 - 4(\varrho - 1)] - 1 \mp \left(1 - \frac{2 \kappa}{\nu} \right) \right\},$$

$$M_{e,d} = - \frac{w h^2}{4} \kappa \left[\frac{1}{2 \mu} (3 \varrho - 4) \mp \frac{2}{\nu} \right].$$

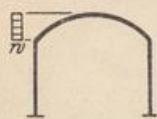


$$\Phi_1 = (1 - \zeta'^2), \quad \Phi_2 = (1 - \zeta'^2),$$

$$H_{a,b} = - \frac{w f}{2} \left\{ \pm \zeta + \frac{4}{5} \frac{\varphi \varrho}{\mu} \left[(\varphi \psi_1 + 1) \Phi_1 - \frac{1}{7} \varphi \psi_1 \Phi_2 \right] \right\},$$

$$M_{a,b} = - w f^2 \left\{ \frac{2}{5 \mu} [(\varphi \psi_2 + \varrho - 1) \Phi_1 - \frac{\varphi \psi_2}{7} \Phi_2] \pm \zeta \left[\frac{1}{2 \varphi} - \frac{1}{8 \nu} \left(12 \frac{\kappa}{\varphi} - 1 + \zeta'^2 \right) \right] \right\},$$

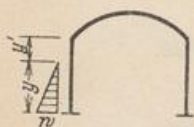
$$M_{e,d} = w f^2 \left\{ \frac{2}{5 \mu} [(\varphi \varrho + 1) \Phi_1 - \frac{\varphi \varrho}{7} \Phi_2] \pm \frac{1}{8 \nu} \zeta \left[12 \frac{\kappa}{\varphi} - 1 + \zeta'^2 \right] \right\}.$$



$$H_{a,b} = -\frac{w f}{2} \left[\pm 1 + \frac{4}{5} \frac{\varphi \varrho}{\mu} \left(\frac{6}{7} \varphi \psi_1 + 1 \right) \right],$$

$$M_{a,b} = -w f^2 \left\{ \frac{2}{5 \mu} \left[\frac{6}{7} \varphi \psi_2 + (\varrho - 1) \right] \pm \left[\frac{1}{2 \varphi} - \frac{1}{8 \nu} \left(12 \frac{\kappa}{\varphi} - 1 \right) \right] \right\},$$

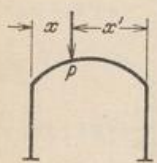
$$M_{c,d} = w f^2 \left[\frac{2}{5 \mu} \left(\frac{6}{7} \varphi \varrho + 1 \right) \pm \frac{1}{8 \nu} \left(12 \frac{\kappa}{\varphi} - 1 \right) \right].$$



$$H_{a,b} = -\frac{w h}{4} \eta \left\{ 1 \pm 1 - \frac{\kappa \varrho \eta^2}{10 \mu} [\psi_1 (5 - \eta) - 5] \right\},$$

$$M_{a,b} = +\frac{w h^2}{40} \eta^2 \left\{ \frac{\kappa \eta}{\mu} [\psi_2 (5 - \eta) - 5 (\varrho - 1)] - \frac{10}{3} \mp \left(\frac{10}{3} - 5 \eta \frac{\kappa}{\nu} \right) \right\},$$

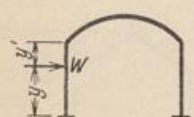
$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{40} \kappa \eta^3 \left\{ \frac{1}{\mu} [\varrho (5 - \eta) - 5] \mp \frac{5}{\nu} \right\}.$$



$$H_{a,b} = \frac{P l}{2 h \mu} (2 \varphi \psi_1 \omega'_p + 3 \omega_R),$$

$$M_{a,b} = +\frac{P l}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} [2 \varphi \psi_2 \omega'_p + 3 (\varrho - 1) \omega_R] \mp \frac{1}{\nu} (\xi' - \xi) \omega_R \right\},$$

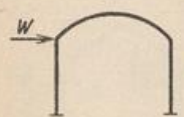
$$M_{c,d} = -\frac{P l}{2} \left[\frac{1}{\mu} (2 \varphi \varrho \omega'_p + 3 \omega_R) \pm \frac{1}{\nu} (\xi' - \xi) \omega_R \right].$$



$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} \left\{ 1 \pm 1 - \frac{\kappa \varrho}{\mu} \eta^2 [\psi_1 (3 - \eta) - 3] \right\},$$

$$M_{a,b} = +\frac{W h}{2} \eta \left\{ \frac{\kappa \eta}{\mu} [\psi_2 (3 - \eta) - 3 (\varrho - 1)] - 1 \mp \left(1 - 3 \eta \frac{\kappa}{\nu} \right) \right\},$$

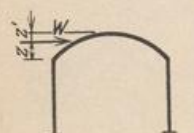
$$M_{c,d} = -\frac{W h}{2} \kappa \eta^2 \left\{ \frac{1}{\mu} [\varrho (3 - \eta) - 3] \mp \frac{3}{\nu} \right\}.$$



$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} \left[1 \pm 1 - \frac{\kappa \varrho}{\mu} (2 \psi_1 - 3) \right],$$

$$M_{a,b} = +\frac{W h}{2} \left\{ \frac{\kappa}{\mu} [2 \psi_2 - 3 (\varrho - 1)] - 1 \mp \left(1 - 3 \frac{\kappa}{\nu} \right) \right\},$$

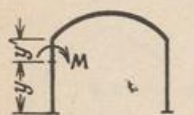
$$M_{c,d} = -\frac{W h}{2} \kappa \left[\frac{1}{\mu} (2 \varrho - 3) \mp \frac{3}{\nu} \right].$$



$$H_{a,b} = -\frac{W}{2} \left\{ \pm 1 + \frac{2}{5} \frac{\varphi \varrho}{\mu} \zeta'^{\frac{3}{2}} [\varphi \psi_1 (5 - \zeta') + 5] \right\},$$

$$M_{a,b} = -W f \left\{ \frac{\zeta'^{\frac{3}{2}}}{5 \mu} [\varphi \psi_2 (5 - \zeta') + 5 (\varrho - 1)] \pm \left[\frac{1}{2 \varphi} - \frac{1}{8 \nu} \left(12 \frac{\kappa}{\varphi} - 1 - 2 \zeta' + 3 \zeta'^2 \right) \right] \right\},$$

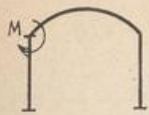
$$M_{c,d} = W f \left\{ \frac{\zeta'^{\frac{3}{2}}}{5 \mu} [\varphi \varrho (5 - \zeta') + 5] \pm \frac{1}{8 \nu} \left[12 \frac{\kappa}{\varphi} - 1 - 2 \zeta' + 3 \zeta'^2 \right] \right\}.$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{2} \frac{M \kappa \varrho}{h \mu} \eta [\psi_1 (2 - \eta) - 2],$$

$$M_{a,b} = +\frac{M}{2} \left\{ \frac{3 \kappa \eta}{\mu} [\psi_2 (2 - \eta) - 2 (\varrho - 1)] - 1 \mp \left(1 - 6 \eta \frac{\kappa}{\nu} \right) \right\},$$

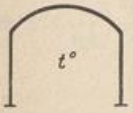
$$M_{c,d} = -\frac{3}{2} M \kappa \eta \left\{ \frac{1}{\mu} [\varrho (2 - \eta) - 2] \mp \frac{2}{\nu} \right\}.$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{2} \frac{M \kappa \varrho}{h \mu} (\psi_1 - 2),$$

$$M_{a,b} = + \frac{M}{2} \left\{ \frac{3 \kappa}{\mu} [\psi_2 - 2(\varrho - 1)] - 1 \mp \left(1 - 6 \frac{\kappa}{\nu} \right) \right\},$$

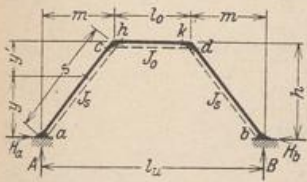
$$M_{h,k} = - \frac{3}{2} M \kappa \left[\frac{1}{\mu} (\varrho - 2) \mp \frac{2}{\nu} \right].$$



$$H_{a,b} = \frac{3 \varrho \psi_1 E J_s}{\mu h^2} \alpha_i t,$$

$$M_{a,b} = + \frac{3 \psi_2 E J_s}{\mu h} \alpha_i t, \quad M_{c,d} = - \frac{3 \varrho E J_s}{\mu h} \alpha_i t.$$

Tabelle 57. Symmetrischer Rahmen mit schrägen Pfosten.

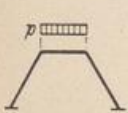


$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \lambda_1 = \frac{m}{l_u}, \quad \lambda' = \frac{l'_0}{l_u}, \quad \kappa = \frac{l'_0 J_s}{s J_0},$$

$$\eta' = \frac{y'}{h}, \quad \lambda_2 = \frac{m}{l_o}, \quad \lambda'' = \frac{l_u}{l_o}, \quad \mu = 1 + 2 \kappa,$$

$$\nu = \kappa \lambda'^2 + 2(1 + \lambda' + \lambda'^2), \quad \omega \text{ Tabelle 22, S. 116.}$$

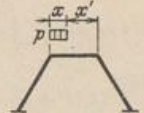
$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben.



$$H_{a,b} = \frac{p l_0^2}{4 h} \left(\frac{\kappa}{\mu} + 2 \lambda_2 \right),$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_0^2}{12} \frac{\kappa}{\mu},$$

$$M_{c,d} = - \frac{p l_0^2}{6} \frac{\kappa}{\mu}.$$



$$\Phi = \frac{\omega_R}{\nu} [\lambda'^2 \kappa \omega_R - 2 \lambda_1 (2 + \lambda')],$$

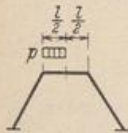
$$\psi = 3 \xi^2 - 2 \xi^3,$$

$$\xi = \frac{x}{l_0}, \quad \xi' = \frac{x'}{l_0},$$

$$H_{a,b} = \frac{p l_0^2}{4 h} \left(\frac{\kappa}{\mu} \psi + 2 \lambda_2 \xi \right),$$

$$M_{c,d} = - \frac{p l_0^2}{4} \left(\frac{2 \kappa}{3 \mu} \psi \pm \Phi \right),$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_0^2}{4} \left[\frac{\kappa}{3 \mu} \psi \mp (2 \lambda_2 \omega_R + \lambda'' \Phi) \right].$$

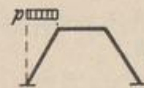


$$\Phi = \frac{1}{8 \nu} [\lambda'^2 \kappa - 8 \lambda_1 (2 + \lambda')],$$

$$H_{a,b} = \frac{p l_0^2}{8 h} \left(\frac{\kappa}{\mu} + 2 \lambda_2 \right),$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_0^2}{8} \left[\frac{\kappa}{3 \mu} \mp (\lambda_2 + \lambda'' \Phi) \right],$$

$$M_{c,d} = - \frac{p l_0^2}{8} \left(\frac{2 \kappa}{3 \mu} \pm \Phi \right).$$

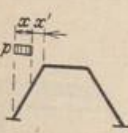


$$\Phi = \frac{2 - \lambda_1}{\nu},$$

$$H_{a,b} = \frac{p m^2}{4 h} \left(1 - \frac{\kappa}{2 \mu} \right),$$

$$M_{a,b} = - \frac{p m^2}{4} \left[\frac{1 + 3 \kappa}{6 \mu} \pm (1 - \Phi) \right],$$

$$M_{c,d} = - \frac{p m^2}{4} \left(\frac{1}{6 \mu} \mp \lambda' \Phi \right).$$




$$\xi = \frac{x}{m}, \quad \xi' = \frac{x'}{m},$$

$$\Phi = \frac{\xi^3}{\nu} (2 - \lambda_1 \xi), \quad \psi = \frac{1}{2} - \omega_\varphi,$$

$$H_{a,b} = \frac{p m^2}{4 h} \left\{ \frac{1}{\mu} [\omega_\varphi - (1 + \kappa) \psi] + \xi^2 \right\},$$

$$M_{a,b} = - \frac{p m^2}{4} \left\{ \frac{1}{3 \mu} [(2 + 3 \kappa) \psi - \omega_\varphi] \pm (\xi^2 - \Phi) \right\},$$

$$M_{c,d} = - \frac{p m^2}{4} \left[\frac{1}{3 \mu} (2 \omega_\varphi - \psi) \mp \lambda' \Phi \right].$$

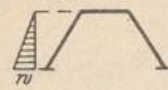


$$\Phi = \frac{2 - \lambda_1}{\nu},$$

$$H_{a,b} = -\frac{w h}{4} \left(1 \pm 2 + \frac{\kappa}{2\mu} \right),$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{4} \left[\frac{1 + 3\kappa}{6\mu} \pm (1 - \Phi) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{4} \left(\frac{1}{6\mu} \mp \lambda' \Phi \right).$$

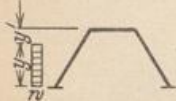


$$\Phi = \frac{1}{\nu} (5 - 2\lambda_1),$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{40} \left(\frac{1}{\mu} - 8 \mp 10 \right),$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{40} \left[\frac{2\kappa}{3\mu} + 1 \pm \left(\frac{10}{3} - \Phi \right) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{40} \left(\frac{2}{3\mu} \mp \lambda' \Phi \right).$$




$$\Phi = \frac{\eta^3}{\nu} (2 - \lambda_1 \eta), \quad \omega''_{\varphi} = \frac{1}{2} - \omega'_{\varphi},$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} [\omega_{\varphi} - (1 + \kappa) \omega''_{\varphi}] - 2\eta \mp 2\eta + \eta^2 \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{4} \left\{ \frac{1}{3\mu} [(2 + 3\kappa) \omega''_{\varphi} - \omega_{\varphi}] \pm (\eta^2 - \Phi) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{4} \left\{ \frac{1}{3\mu} [2\omega_{\varphi} - \omega''_{\varphi}] \mp \lambda' \Phi \right\}.$$

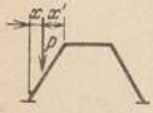


$$\Phi = \frac{\eta}{\nu} (5 - 2\lambda_1 \eta),$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{40} \eta \left\{ \frac{\eta^2}{\mu} [5(1 + \kappa) - \eta(2 + \kappa)] - 10 \mp 10 \right\},$$

$$M_{a,b} = \frac{w h^2}{40} \eta^2 \left[\frac{\eta}{3\mu} (1 + \kappa) (5 - 3\eta) + \frac{5}{3} \eta - \frac{10}{3} \mp \left(\frac{10}{3} - \Phi \right) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{40} \eta^2 \left[\frac{\eta}{3\mu} (5 - 3\eta) \mp \lambda' \Phi \right].$$



$$\Phi = \frac{\xi^2}{\nu} (3 - 2\lambda_1 \xi),$$

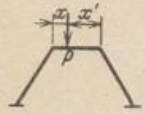
$$H_{a,b} = \frac{P m}{2 h} \left\{ \frac{1}{\mu} [\omega_D - (1 + \kappa) \omega'_D] + \xi \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{P m}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} [(1 + \kappa) \omega'_D - \omega_R] \pm (\xi - \Phi) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{P m}{2} \left[\frac{1}{\mu} (\omega_D - \omega_R) \mp \lambda' \Phi \right].$$

$$\xi = \frac{x}{m}$$

$$\xi' = \frac{x'}{m}$$



$$\Phi = \frac{1 - 2\xi}{\nu} [\lambda'^2 \kappa \omega_R - \lambda_1 (2 + \lambda')],$$

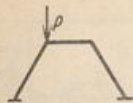
$$H_{a,b} = \frac{P l_0}{2 h} \left[\frac{3\kappa}{\mu} \omega_R + \lambda_2 \right],$$

$$M_{a,b} = \frac{P l_0}{2 h} \left\{ \frac{\kappa}{\mu} \omega_R \mp [\lambda_2 (1 - 2\xi) + \lambda' \Phi] \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{P l_0}{2} \left(\frac{2\kappa}{\mu} \omega_R \pm \Phi \right).$$

$$\xi = \frac{x}{l_0}$$

$$\xi' = \frac{x'}{l_0}$$

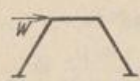


$$\Phi = \frac{2 + \lambda'}{\nu},$$

$$H_{a,b} = \frac{P m}{2 h},$$

$$M_{a,b} = \mp \frac{P m}{2} (1 - \Phi),$$

$$M_{c,d} = \pm \frac{P m}{2} \lambda' \Phi.$$

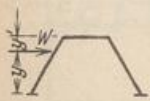


$$\Phi = \frac{2 + \lambda'}{\nu},$$

$$H_{a,b} = \mp \frac{W}{2},$$

$$M_{a,b} = \mp \frac{W h}{2} (1 - \Phi),$$

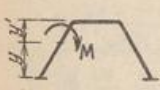
$$M_{c,d} = \pm \frac{W h}{2} \lambda' \Phi.$$



$$\Phi = \frac{\eta^2}{\nu} (3 - 2 \lambda_1 \eta), \quad H_{a,b} = \frac{W}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} [\omega_D - (1 + \kappa) \omega'_D] - \eta' \mp 1 \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{W h}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} [(1 + \kappa) \omega'_D - \omega_R] \pm (\eta - \Phi) \right\},$$

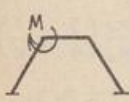
$$M_{c,d} = -\frac{W h}{2} \left[\frac{1}{\mu} (\omega_D - \omega_R) \mp \lambda' \Phi \right].$$



$$\Phi = \frac{6 \eta}{\nu} (1 - \lambda_1 \eta), \quad H_{a,b} = -\frac{M}{2 h} \left\{ \frac{1}{\mu} [(1 + \kappa) \omega'_M + \omega_M] - 1 \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{3 \mu} [(2 + 3 \kappa) \omega'_M + \omega_M] \pm (1 - \Phi) \right\},$$

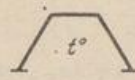
$$M_{h,k} = \frac{M}{2} \left[\frac{1}{3 \mu} (2 \omega_M + \omega'_M) \pm \lambda' \Phi \right].$$



$$\Phi = \frac{6}{\nu} (1 - \lambda_1),$$

$$H_{a,b} = \frac{3}{2} \frac{M \kappa}{h \mu},$$

$$M_{a,b} = \frac{M}{2} \left[\frac{\kappa}{\mu} \mp (1 - \Phi) \right],$$

$$M_{h,k} = \frac{M}{2} \left(\frac{1}{\mu} \pm \lambda' \Phi \right).$$


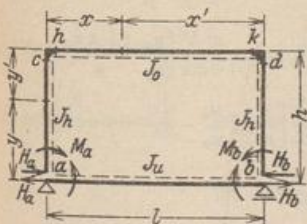
$$\Phi = \frac{3}{\mu} \frac{l_u}{h} \frac{E J_s}{s} \alpha_1 t,$$

$$H_{a,b} = \frac{2 + \kappa}{h} \Phi,$$

$$M_{a,b} = (1 + \kappa) \Phi,$$

$$M_{h,k} = -\Phi.$$

Tabelle 58. Geschlossener, symmetrischer Rechteckrahmen.

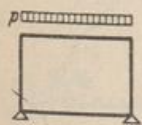


$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \kappa_o = \frac{h}{l} \frac{J_o}{J_h}, \quad \kappa_u = \frac{h}{l} \frac{J_u}{J_h},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \mu = (2 + \kappa_o) + \frac{3 + 2 \kappa_o}{\kappa_u}, \quad \nu = 1 + 6 \kappa_o + \frac{\kappa_o}{\kappa_u},$$

$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben. ω Tabelle 22 S. 116.

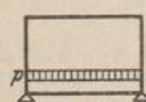
Gleichmäßige Temperaturänderung erzeugt keine Schnittkräfte.



$$H_{a,b} = \frac{p l}{4} \frac{l}{h} \frac{1 + \kappa_u}{\mu \kappa_u},$$

$$M_{a,b} = \frac{p l^2}{12 \mu},$$

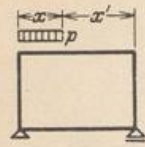
$$M_{c,d} = -\frac{p l^2}{12} \frac{3 + 2 \kappa_u}{\mu \kappa_u}.$$



$$H_{a,b} = \frac{p l}{4} \frac{l}{h} \frac{1 + \kappa_o}{\mu \kappa_u},$$

$$M_{a,b} = \frac{p l^2}{12} \frac{3 + 2 \kappa_o}{\mu \kappa_u},$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l^2}{12 \mu} \frac{\kappa_o}{\kappa_u}.$$



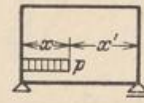
$$\Phi = 3 \xi^2 - 2 \xi^3,$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{4} \frac{l}{h} \frac{1 + \kappa_u}{\mu \kappa_u} \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{4} \left(\frac{1}{3\mu} \Phi \mp \frac{1}{\nu} \omega_R^2 \right),$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{4} \left(\frac{3+2\kappa_u}{3\mu \kappa_u} \Phi \pm \frac{1}{\nu} \omega_R^2 \right).$$

$x = \frac{l}{2} : \quad \Phi = \frac{1}{2}, \quad \omega_R^2 = \frac{1}{16}.$



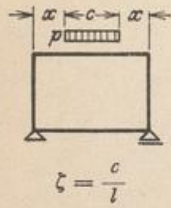
$$\Phi = 3 \xi^2 - 2 \xi^3,$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{4} \frac{l}{h} \frac{1 + \kappa_o}{\mu \kappa_u} \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{4} \left(\frac{3+2\kappa_o}{3\mu \kappa_u} \pm \frac{\kappa_o}{\kappa_u} \frac{1}{\nu} \omega_R^2 \right),$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{4} \frac{\kappa_o}{\kappa_u} \left(\frac{1}{3\mu} \Phi \mp \frac{1}{\nu} \omega_R^2 \right).$$

$x = \frac{l}{2} : \quad \Phi = \frac{1}{2}, \quad \omega_R^2 = \frac{1}{16}.$



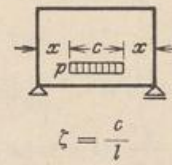
$$\Phi = \frac{1}{2} (3 \zeta - \zeta^3),$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{4} \frac{l}{h} \frac{1 + \kappa_u}{\mu \kappa_u} \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{12} \frac{1}{\mu} \Phi,$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{12} \frac{3+2\kappa_u}{\mu \kappa_u} \Phi.$$

$\zeta = \frac{c}{l}$



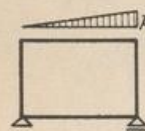
$$\Phi = \frac{1}{2} (3 \zeta - \zeta^3),$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{4} \frac{l}{h} \frac{1 + \kappa_o}{\mu \kappa_u} \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{12} \frac{3+2\kappa_o}{\mu \kappa_u} \Phi,$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{12} \frac{1}{\mu} \frac{\kappa_o}{\kappa_u} \Phi.$$

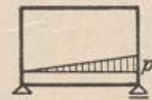
$\zeta = \frac{c}{l}$



$$H_{a,b} = \frac{pl}{8} \frac{l}{h} \frac{1 + \kappa_u}{\mu \kappa_u},$$

$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{120} \left(\frac{5}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right),$$

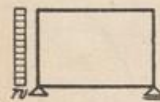
$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{120} \left(\frac{5}{\mu} \frac{3+2\kappa_u}{\kappa_u} \mp \frac{1}{\nu} \right).$$



$$M_{a,b} = \frac{pl^2}{120} \left(\frac{5}{\mu} \frac{3+2\kappa_o}{\kappa_u} \mp \frac{\kappa_o}{\kappa_u} \frac{1}{\nu} \right),$$

$$M_{c,d} = -\frac{pl^2}{120} \frac{\kappa_o}{\kappa_u} \left(\frac{5}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right),$$

$$H_{a,b} = \frac{pl}{8} \frac{l}{h} \frac{1 + \kappa_o}{\mu \kappa_u}.$$

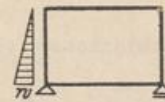


$$\Phi = \frac{\kappa_o}{\kappa_u} \frac{1 + 2\kappa_u}{\nu},$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{4} \left[-1 + \frac{1}{2\mu} \frac{\kappa_o - \kappa_u}{\kappa_u} \mp 2 \right],$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{4} \left[\frac{3+\kappa_o}{6\mu} \pm (1-\Phi) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{4} \left[\frac{\kappa_o}{\kappa_u} \frac{3+\kappa_u}{6\mu} \mp \Phi \right].$$

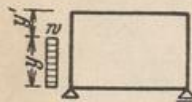


$$\Phi = \frac{5}{\nu} \frac{\kappa_o}{\kappa_u} (2 + 3\kappa_u),$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{120} \left[\frac{8+3\kappa_o}{\mu} \pm (10-\Phi) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{120} \left[\frac{\kappa_o}{\kappa_u} \frac{7+2\kappa_o}{\mu} \mp \Phi \right],$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{120} \left[\frac{1}{\mu} \left(7 \frac{\kappa_o}{\kappa_u} - \kappa_o - 8 \right) - 20 \mp 30 \right].$$

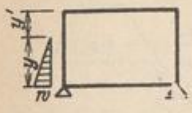


$$\Phi = \eta^2 \frac{\kappa_o}{\kappa_u} \frac{1 + 2\eta \kappa_u}{\nu}, \quad \psi = \frac{1}{2} - \omega'_\varphi,$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\frac{\kappa_o}{\kappa_u} (1 + \kappa_u) \omega_\varphi - (1 + \kappa_o) \psi + \eta^2 \right] - 2 \eta (1 \pm 1) \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{4} \left\{ \frac{1}{3\mu} [(3 + 2\kappa_o) \psi - \kappa_o \omega_\varphi] \pm (\eta^2 - \Phi) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{4} \left\{ \frac{1}{3\mu} \left[\frac{\kappa_o}{\kappa_u} (3 + 2\kappa_o) \omega_\varphi - \kappa_o \psi \right] \mp \Phi \right\}.$$

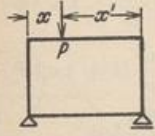


$$\Phi = \frac{5}{v} \frac{\kappa_o}{\kappa_u} (2 + 3 \eta \kappa_u),$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{120} \eta \left\{ \frac{\eta}{\mu} \left[10 \left(\frac{\kappa_o}{\kappa_u} - \kappa_o - 2 \right) + 15 \eta (1 + \kappa_o) - 3 \eta^2 (1 + 2 \kappa_o + \frac{\kappa_o}{\kappa_u}) \right] + 10 \eta - 30 \mp 30 \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{120} \eta^2 \left\{ \frac{1}{\mu} [10(2 + \kappa_o) - 5 \eta(3 + 2 \kappa_o) + 3 \eta^2(1 + \kappa_o)] \pm (10 - \Phi) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{120} \eta^2 \left\{ \frac{\kappa_o}{\mu \kappa_u} [10 + 5 \eta \kappa_u - 3 \eta^2(1 + \kappa_u)] \mp \Phi \right\}.$$

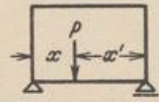


$$\Phi = \frac{1 - 2 \xi}{v},$$

$$H_{a,b} = \frac{3 P l}{2 h} \frac{1 + \kappa_u}{\mu \kappa_u} \omega_R,$$

$$M_{a,b} = \frac{P l}{2} \omega_R \left[\frac{1}{\mu} \mp \Phi \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{P l}{2} \omega_R \left[\frac{3 + 2 \kappa_u}{\mu \kappa_u} \pm \Phi \right].$$

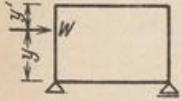


$$\Phi = \frac{1 - 2 \xi}{v} \frac{\kappa_o}{\kappa_u},$$

$$H_{a,b} = \frac{3 P l}{2 h} \frac{1 + \kappa_o}{\mu \kappa_o} \omega_R,$$

$$M_{a,b} = \frac{P l}{2} \omega_R \left[\frac{3 + 2 \kappa_o}{\mu \kappa_u} \pm \Phi \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{P l}{2} \omega_R \left[\frac{\kappa_o}{\mu \kappa_u} \mp \Phi \right].$$



$$\Phi = \frac{\eta}{v} \frac{\kappa_o}{\kappa_u} (1 + 3 \eta \kappa_u),$$

$$H_{a,b} = \frac{W}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[(1 + \kappa_u) \frac{\kappa_o}{\kappa_u} \omega_D - (1 + \kappa_o) \omega_D' \right] + \eta - 1 \mp 1 \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{W h}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[(1 + \kappa_o) \omega_D' - \kappa_o \omega_R \right] \pm (\eta - \Phi) \right\},$$

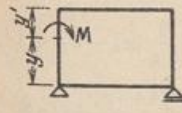
$$M_{c,d} = -\frac{W h}{2} \left\{ \frac{\kappa_o}{\mu \kappa_u} \left[(1 + \kappa_u) \omega_D - \kappa_u \omega_R \right] \mp \Phi \right\}.$$

$$y = h: \Phi = \frac{\kappa_o (1 + 3 \kappa_u)}{\kappa_u v},$$

$$H_{a,b} = \mp \frac{W}{2},$$

$$M_{a,b} = \mp \frac{W h}{2} (1 - \Phi),$$

$$M_{c,d} = \pm \frac{W h}{2} \Phi.$$



$$\Phi = \frac{1}{v} \frac{\kappa_o}{\kappa_u} (1 + 6 \eta \kappa_u),$$

$$H_{a,b} = -\frac{M}{2 h} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[(1 + \kappa_o) \omega_M' + \kappa_o \frac{1 + \kappa_u}{\kappa_u} \omega_M \right] - 1 \right\},$$


$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{3 \mu} \left[(3 + 2 \kappa_o) \omega_M + \kappa_o \omega_M \right] \pm (1 - \Phi) \right\},$$

$$M_{h,k} = \frac{M}{2} \left\{ \frac{\kappa_o}{3 \mu \kappa_u} \left[(3 + 2 \kappa_u) \omega_M + \kappa_u \omega_M' \right] \pm \Phi \right\}.$$

$$y = h: H_{a,b} = \frac{3 M}{2 h} \frac{1 + \kappa_u}{\mu \kappa_u},$$

$$M_{a,b} = \frac{M}{2} \left(\frac{1}{\mu} \mp \frac{1}{v} \right),$$

$$M_{h,k} = \frac{M}{2} \left[\frac{\kappa_o (2 + \kappa_u)}{\mu \kappa_u} \mp \left(\frac{1}{v} - 1 \right) \right],$$



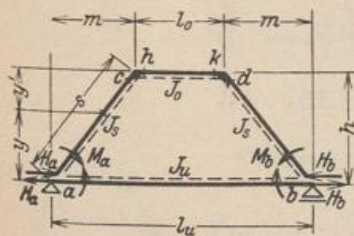
$$H_{a,b} = \frac{3 M}{2 h} \frac{1 + \kappa_o}{\mu \kappa_u},$$

$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} \left[\frac{2 + \kappa_o}{\mu} \pm \left(1 - \frac{\kappa_o}{v \kappa_u} \right) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{M}{2} \frac{\kappa_o}{\kappa_u} \left[\frac{1}{\mu} \mp \frac{1}{v} \right],$$

M_a am Riegel.

Tabelle 59. Geschlossener, symmetrischer Trapezrahmen.



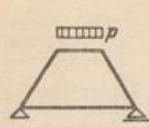
$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \lambda_1 = \frac{m}{l_u}, \quad \lambda' = \frac{l_o}{l_u}, \quad \omega \text{ Tabelle 22 S. 116.}$$

$$\eta' = \frac{y'}{h}, \quad \lambda_2 = \frac{m}{l_o}, \quad \lambda'' = \frac{l_u}{l_o}, \quad \kappa_o = \frac{l_o J_s}{s J_o}, \quad \kappa_u = \frac{l_u J_s}{s J_u},$$

$$\mu = (2 + 3 \kappa_o)(2 + 3 \kappa_u) - 1, \quad v = \kappa_o \lambda'^2 + \kappa_u + 2(1 + \lambda' + \lambda'^2),$$

$M_{h,k} = M_{c,d}$, wenn nicht besonders angegeben.

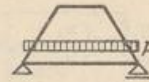
Gleichmäßige Temperaturänderung erzeugt keine Schnittkräfte.



$$H_{a,b} = \frac{p l_0^3}{2 h} \left[\frac{3 \kappa_o}{2 \mu} \kappa_o (1 + \kappa_u) + \lambda_2 \right],$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_0^3}{4 \mu} \kappa_o,$$

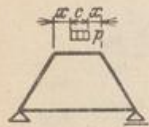
$$M_{c,d} = -\frac{p l_0^3}{4 \mu} \kappa_o (2 + 3 \kappa_u).$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{4} \frac{p l_u^3}{h} \frac{\kappa_u}{\mu} (1 + \kappa_o),$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_u^3}{4 \mu} \kappa_u (2 + 3 \kappa_o),$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l_u^3}{4 \mu} \kappa_u.$$



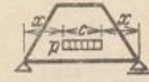
$$\Phi = \frac{1}{2} (3 \zeta_o - \zeta_o^3),$$

$$H_{a,b} = \frac{p l_0^3}{2 h} \left[\frac{3 \kappa_o}{2 \mu} (1 + \kappa_u) \Phi + \lambda_2 \zeta_o \right],$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_0^3}{4 \mu} \kappa_o \Phi,$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l_0^3}{4 \mu} \kappa_o (2 + 3 \kappa_u) \Phi.$$

$$\zeta_o = \frac{c}{l_o}.$$



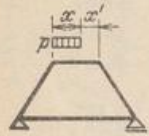
$$\Phi = \frac{1}{2} (3 \zeta_u - \zeta_u^3),$$

$$H_{a,b} = \frac{3}{4} \frac{p l_u^3}{h} \frac{\kappa_u}{\mu} (1 + \kappa_o) \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_u^3}{4 \mu} \kappa_u (2 + 3 \kappa_o) \Phi,$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l_u^3}{4 \mu} \kappa_u \Phi.$$

$$\zeta_u = \frac{c}{l_u}.$$



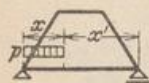
$$\xi = \frac{x}{l_o}, \quad \xi' = \frac{x'}{l_o}.$$

$$\Phi = \frac{\omega_R}{\nu} [\lambda'^2 \kappa_o \omega_R - 2 \lambda_1 (2 + \kappa_u + \lambda')], \quad \psi = 3 \xi^2 - 2 \xi^3,$$

$$H_{a,b} = \frac{p l_0^3}{4 h} \left[\frac{3 \kappa_o}{\mu} (1 + \kappa_u) \psi + 2 \lambda_2 \xi \right],$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_0^3}{4 \mu} \left[\frac{\kappa_o}{\mu} \psi \mp (2 \lambda_2 \omega_R + \lambda'' \Phi) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l_0^3}{4 \mu} \left[\frac{\kappa_o}{\mu} (2 + 3 \kappa_u) \psi \pm \Phi \right].$$



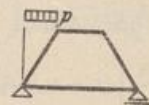
$$\xi = \frac{x}{l_u}, \quad \xi' = \frac{x'}{l_u}.$$

$$\Phi = 3 \xi^2 - 2 \xi^3,$$

$$H_{a,b} = \frac{3}{4} \frac{p l_u^3}{h} \frac{\kappa_u}{\mu} (1 + \kappa_o) \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_u^3}{4 \mu} \kappa_u \left[\frac{2 + 3 \kappa_o}{\mu} \Phi \pm \frac{\omega_R^2}{\nu} \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l_u^3}{4 \mu} \kappa_u \left[\frac{1}{\mu} \Phi \mp \frac{\lambda'}{\nu} \omega_R^2 \right].$$

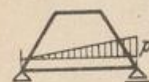


$$\Phi = \frac{1}{\nu} (2 + \kappa_u - \lambda_1),$$

$$H_{a,b} = \frac{p m^2}{4 h} \left[\frac{3}{2 \mu} (\kappa_u - \kappa_o) + 1 \right],$$

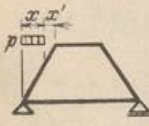
$$M_{a,b} = -\frac{p m^2}{4} \left[\frac{1 + 3 \kappa_o}{2 \mu} \pm (1 - \Phi) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{p m^2}{4} \left[\frac{1 + 3 \kappa_u}{2 \mu} \mp \lambda' \Phi \right].$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{8} \frac{p l_u^3}{h} \frac{\kappa_u}{\mu} (1 + \kappa_o), \quad M_{a,b} = \frac{p l_u^3}{120} \kappa_u \left[\frac{15}{\mu} (2 + 3 \kappa_o) \mp \frac{1}{\nu} \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l_u^3}{120} \kappa_u \left[\frac{15}{\mu} \pm \frac{\lambda'}{\nu} \right].$$



$$\xi = \frac{x}{m}, \quad \xi' = \frac{x'}{m}.$$

$$\Phi = \frac{\xi^2}{\nu} [\kappa_u + \xi (2 - \lambda_1 \xi)], \quad \psi = \frac{1}{2} - \omega'_\varphi,$$

$$H_{a,b} = \frac{p m^2}{4 h} \left\{ \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa_u) \omega_\varphi - (1 + \kappa_o) \psi] + \xi^2 \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{p m^2}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} [(2 + 3 \kappa_o) \psi - \omega_\varphi] \pm (\xi^2 - \Phi) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{p m^2}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} [(2 + 3 \kappa_u) \omega_\varphi - \psi] \mp \lambda' \Phi \right\}.$$

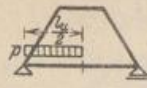


$$\Phi = \frac{1}{8\nu} [\lambda_1^2 \kappa_o - 8\lambda_1(2 + \kappa_u + \lambda_1)],$$

$$H_{a,b} = \frac{p l_o^2}{8h} \left[\frac{3\kappa_o}{\mu} (1 + \kappa_u) + 2\lambda_2 \right],$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_o^2}{8} \left[\frac{\kappa_o}{\mu} \mp (\lambda_2 + \lambda_1' \Phi) \right],$$

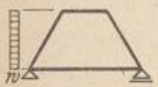
$$M_{c,d} = -\frac{p l_o^2}{8} \left[\frac{\kappa_o}{\mu} (2 + 3\kappa_u) \pm \Phi \right].$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{8} \frac{p l_o^2}{h \mu} \kappa_u (1 + \kappa_o),$$

$$M_{a,b} = \frac{p l_o^2}{8} \kappa_u \left[\frac{2 + 3\kappa_o}{\mu} \pm \frac{1}{8\nu} \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l_o^2}{8} \kappa_u \left[\frac{1}{\mu} \mp \frac{\lambda_1'}{8\nu} \right].$$

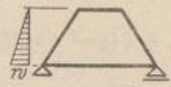


$$\Phi = \frac{1}{\nu} (2 + \kappa_u - \lambda_1),$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{4} \left[\frac{3}{2\mu} (\kappa_u - \kappa_o) - 1 \mp 2 \right],$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{4} \left[\frac{1 + 3\kappa_o}{2\mu} \pm (1 - \Phi) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{4} \left[\frac{1 + 3\kappa_u}{2\mu} \mp \lambda_1' \Phi \right].$$

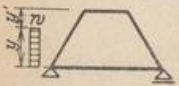


$$\Phi = \frac{1}{3\nu} [5(3 + 2\kappa_u) - 6\lambda_1],$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{120} \left[\frac{3}{\mu} (7\kappa_u - 8\kappa_o - 1) - 20 \mp 30 \right],$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{40} \left[\frac{3 + 8\kappa_o}{\mu} \pm \left(\frac{10}{3} - \Phi \right) \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{40} \left[\frac{2 + 7\kappa_u}{\mu} \mp \lambda_1' \Phi \right].$$

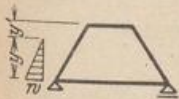


$$\Phi = \frac{\eta^2}{\nu} [\kappa_u + \eta(2 - \lambda_1 \eta)], \quad \nu = \frac{1}{2} - \omega_{\varphi},$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{4} \left\{ \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa_u) \omega_{\varphi} - (1 + \kappa_o) \psi] + \eta^2 - 2\eta \mp 2\eta \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} [(2 + 3\kappa_o) \psi - \omega_{\varphi}] \pm (\eta^2 - \Phi) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} [(2 + 3\kappa_u) \omega_{\varphi} - \psi] \mp \lambda_1' \Phi \right\}.$$

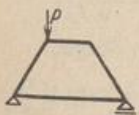


$$\Phi = \frac{1}{\nu} [10\kappa_u + 3\eta(5 - 2\lambda_1 \eta)],$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{120} \eta \left\{ \frac{3\eta}{\mu} [10(\kappa_u - 2\kappa_o - 1) + 15\eta(1 + \kappa_o) - 3\eta^2(2 + \kappa_o + \kappa_u)] + 10\eta - 30 \mp 30 \right\},$$

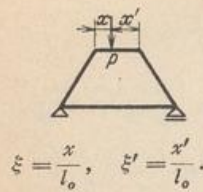
$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{120} \eta^2 \left\{ \frac{3}{\mu} [10(1 + 2\kappa_o) - 5\eta(2 + 3\kappa_o) + 3\eta^2(1 + \kappa_o)] \pm (10 - \Phi) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{120} \eta^2 \left\{ \frac{3}{\mu} [10\kappa_u + 5\eta - 3\eta^2(1 + \kappa_u)] \mp \lambda_1' \Phi \right\}.$$



$$\Phi = \frac{1}{\nu} (2 + \kappa_u + \lambda_1'), \quad H_{a,b} = \frac{P m}{2h} (2\Phi - 1),$$

$$M_{a,b} = \mp \frac{P m}{2} [1 - \Phi], \quad M_{c,d} = \pm \frac{P m}{2} \lambda_1' \Phi.$$



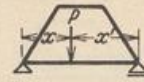
$$\xi = \frac{x}{l_o}, \quad \xi' = \frac{x'}{l_o}$$

$$\Phi = \frac{1-2\xi}{\nu} [\lambda_1'^2 \kappa_o \omega_R - \lambda_1 (2 + \kappa_u + \lambda')],$$

$$H_{a,b} = \frac{Pm}{2h} \left[\frac{9\kappa_o}{\mu \lambda_2} (1 + \kappa_u) \omega_R + 1 \right],$$

$$M_{a,b} = \frac{P l_o}{2} \left\{ \frac{3\kappa_o}{\mu} \omega_R \mp [\lambda_2 (1-2\xi) + \lambda'' \Phi] \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{P l_o}{2} \left[\frac{3\kappa_o}{\mu} (2 + 3\kappa_u) \omega_R \pm \Phi \right].$$



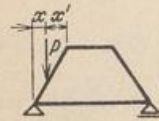
$$\xi = \frac{x}{l_u}, \quad \xi' = \frac{x'}{l_u}$$

$$\Phi = \frac{1-2\xi}{\nu}$$

$$H_{a,b} = \frac{9 P l_u}{2 h} \frac{\kappa_u}{\mu} (1 + \kappa_o) \omega_R,$$

$$M_{a,b} = \frac{P l_u}{2} \kappa_u \omega_R \left[\frac{3}{\mu} (2 + 3\kappa_o) \pm \Phi \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{P l_u}{2} \kappa_u \omega_R \left[\frac{3}{\mu} \mp \lambda' \Phi \right].$$



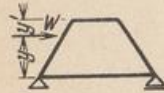
$$\xi = \frac{x}{m}, \quad \xi' = \frac{x'}{m}$$

$$\Phi = \frac{\xi}{\nu} [\kappa_u + \xi (3 - 2\lambda_1 \xi)],$$

$$H_{a,b} = \frac{Pm}{2h} \left\{ \xi + \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa_u) \omega_D - (1 + \kappa_o) \omega'_D] \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{Pm}{2} \left\{ \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa_o) \omega'_D - \omega_R] \pm (\xi - \Phi) \right\},$$

$$M_{c,d} = -\frac{Pm}{2} \left\{ \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa_u) \omega_D - \omega_R] \mp \lambda' \Phi \right\}.$$



$$\Phi = \frac{\eta}{\nu} [\kappa_u + \eta (3 - 2\lambda_1 \eta)],$$

$$H_{a,b} = \frac{W}{2} \left\{ \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa_u) \omega_D - (1 + \kappa_o) \omega'_D] + \eta - 1 \mp 1 \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{W h}{2} \left\{ \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa_o) \omega'_D - \omega_R] \pm (\eta - \Phi) \right\},$$

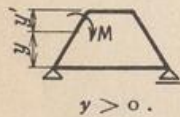
$$M_{c,d} = -\frac{W h}{2} \left\{ \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa_u) \omega_D - \omega_R] \mp \lambda' \Phi \right\}.$$

$$y = h: \quad \Phi = \frac{1}{\nu} (2 + \kappa_u + \lambda'),$$

$$H_{a,b} = \mp \frac{W}{2},$$

$$M_{a,b} = \mp \frac{W h}{2} (1 - \Phi),$$

$$M_{c,d} = \pm \frac{W h}{2} \lambda' \Phi.$$



$$y > 0.$$

$$\Phi = \frac{1}{\nu} [\kappa_u + 6\eta (1 - \lambda_1 \eta)],$$

$$H_{a,b} = \frac{M}{2h} \left\{ 1 - \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa_u) \omega_M + (1 + \kappa_o) \omega'_M] \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} [(2 + 3\kappa_o) \omega'_M + \omega_M] \pm (1 - \Phi) \right\},$$

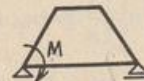
$$M_{h,k} = \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} [(2 + 3\kappa_u) \omega_M + \omega'_M] \pm \lambda' \Phi \right\}.$$

$$\Phi = \frac{1}{\nu} [\kappa_u + 6(1 - \lambda_1)],$$

$$H_{a,b} = \frac{M}{2h} \left[1 - \frac{3}{\mu} (1 + 2\kappa_u - \kappa_o) \right],$$

$$M_{a,b} = \frac{M}{2} \left[\frac{3\kappa_o}{\mu} \mp (1 - \Phi) \right],$$

$$M_{h,k} = \frac{M}{2} \left[\frac{3}{\mu} (1 + 2\kappa_u) \pm \lambda' \Phi \right].$$



$$H_{a,b} = \frac{M}{2h} \left[1 - \frac{3}{\mu} (1 + 2\kappa_u - \kappa_o) \right],$$

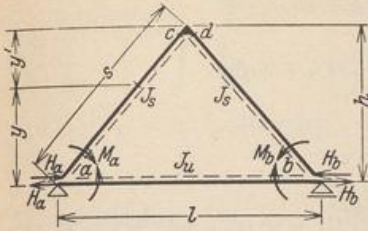
$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} \left[\frac{3}{\mu} (1 + 2\kappa_o) \right.$$

$$\left. \pm \left(1 - \frac{\kappa_u}{\nu} \right) \right],$$

$$M_a \text{ am Riegel,}$$

$$M_{c,d} = -\frac{M}{2} \left[\frac{3\kappa_u}{\mu} \mp \lambda' \frac{\kappa_u}{\nu} \right].$$

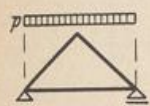
Tabelle 60. Geschlossener, symmetrischer Dreiecksrahmen.



$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \kappa = \frac{l}{s} \frac{J_s}{J_u},$$

$$\mu = 3(1 + 2\kappa), \quad \nu = 2 + \kappa.$$

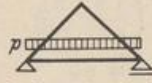
Gleichmäßige Temperaturänderung erzeugt keine Schnittkräfte.



$$H_{a,b} = \frac{3}{16} \frac{p l^2}{h} \frac{1}{\mu} (2 + 5\kappa),$$

$$M_{a,b} = -\frac{p l^2}{16 \mu},$$

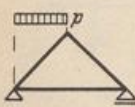
$$M_{c,d} = -\frac{p l^2}{16} \frac{1 + 3\kappa}{\mu}.$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{4} \frac{p l^2}{h} \frac{\kappa}{\mu},$$

$$M_{a,b} = \frac{p l^2}{2} \frac{\kappa}{\mu},$$

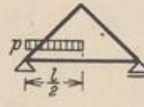
$$M_{c,d} = -\frac{p l^2}{4} \frac{\kappa}{\mu}.$$



$$H_{a,b} = \frac{p l^2}{32 h} \left(2 + \frac{3\kappa}{\mu} \right),$$

$$M_{a,b} = -\frac{p l^2}{32} \left[\frac{1}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l^2}{32} \frac{1 + 3\kappa}{\mu}.$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{8} \frac{p l^2}{h} \frac{\kappa}{\mu},$$

$$M_{a,b} = \frac{p l^2}{8} \kappa \left(\frac{2}{\mu} \pm \frac{1}{8\nu} \right),$$

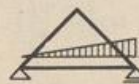
$$M_{c,d} = -\frac{p l^2}{8} \frac{\kappa}{\mu}.$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{8} \frac{p l^2}{h} \frac{\kappa}{\mu} (3\zeta - \zeta^3),$$

$$M_{a,b} = \frac{p l^2}{4} \frac{\kappa}{\mu} (3\zeta - \zeta^3),$$

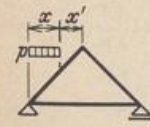
$$\zeta = \frac{c}{l}, \quad M_{c,d} = -\frac{p l^2}{8} \frac{\kappa}{\mu} (3\zeta - \zeta^3).$$



$$H_{a,b} = \frac{3}{8} \frac{p l^2}{h} \frac{\kappa}{\mu},$$

$$M_{a,b} = \frac{p l^2}{120} \kappa \left(\frac{30}{\mu} \mp \frac{1}{\nu} \right),$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l^2}{8} \frac{\kappa}{\mu}.$$



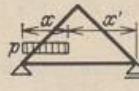
$$\Phi = \frac{1}{2} - \omega'_\varphi,$$

$$\xi = \frac{2\kappa}{l}, \quad \xi' = \frac{2\kappa'}{l},$$

$$H_{a,b} = \frac{p l^2}{16 h} \left\{ \xi^2 + \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa) \omega_\varphi - \Phi] \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{p l^2}{16} \left[\frac{1}{\mu} (2\Phi - \omega_\varphi) \pm \frac{1}{\nu} \Phi \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{p l^2}{16} \frac{1}{\mu} [(2 + 3\kappa) \omega_\varphi - \Phi].$$

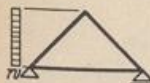


$$\Phi = 3\xi^2 - 2\xi^3,$$

$$H_{a,b} = \frac{3}{4} \frac{p l^2}{h} \frac{\kappa}{\mu} \Phi,$$

$$M_{a,b} = \frac{p l^2}{4} \kappa \left[\frac{2}{\mu} \Phi \pm \frac{1}{\nu} \omega_\varphi^2 \right],$$

$$\xi = \frac{\kappa}{l}, \quad \xi' = \frac{\kappa'}{l}, \quad M_{c,d} = -\frac{p l^2}{4} \frac{\kappa}{\mu} \Phi.$$



$$H_{a,b} = \frac{w h}{4} \left[\frac{3\kappa}{2\mu} - 1 \mp 2 \right],$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{8} \left[\frac{1}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{8} \frac{1 + 3\kappa}{\mu}.$$




$$\Phi = \frac{1}{2} - \omega'_\varphi,$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{4} \left\{ \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa) \omega_\varphi - \Phi] + \eta^2 - 2\eta \mp 2\eta \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{4} \left[\frac{1}{\mu} (2\Phi - \omega_\varphi) \pm \frac{1}{\nu} \Phi \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{4} \frac{1}{\mu} [(2 + 3\kappa) \omega_\varphi - \Phi].$$



$$H_{a,b} = \frac{w h}{120} \eta \left\{ \frac{3 \eta}{\mu} [10 (\kappa - 1) + 15 \eta - 3 \eta^2 \nu] + 10 \eta - 30 \mp 30 \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{120} \eta^2 \left\{ \frac{3}{\mu} [10 (1 - \eta) + 3 \eta^2] \pm \frac{1}{\nu} [20 - 15 \eta + 3 \eta^2] \right\},$$

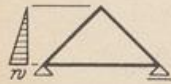
$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{40} \frac{\eta^2}{\mu} [10 \kappa + 5 \eta - 3 (1 + \kappa) \eta^2].$$

$$H_{a,b} = \frac{w h}{120} \left[\frac{3}{\mu} (7 \kappa - 1) - 20 \mp 30 \right],$$

$$H_{a,b} = \frac{W}{2} \left\{ \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa) \omega_D - \omega'_D] + \eta - 1 \mp 1 \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{w h^2}{40} \left(\frac{3}{\mu} \pm \frac{8}{3 \nu} \right),$$

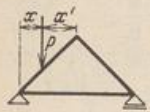
$$M_{a,b} = -\frac{w h}{2} \left[\frac{3}{\mu} (\omega'_D - \omega_R) \pm \frac{\omega'_D}{\nu} \right],$$



$$M_{c,d} = -\frac{w h^2}{40} \frac{2 + 7 \kappa}{\mu}.$$



$$M_{c,d} = -\frac{w h}{2} \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa) \omega_D - \omega_R].$$

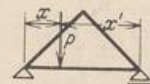


$$\xi = \frac{2 x}{l}, \quad \xi' = \frac{2 x'}{l},$$

$$H_{a,b} = \frac{P l}{4 h} \left\{ \xi + \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa) \omega_D - \omega'_D] \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{P l}{4} \left[\frac{3}{\mu} (\omega'_D - \omega_R) \pm \frac{\omega'_D}{\nu} \right],$$

$$M_{c,d} = -\frac{P l}{4} \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa) \omega_D - \omega_R].$$



$$H_{a,b} = \frac{9}{2} \frac{P l}{h} \frac{\kappa}{\mu} \omega_R,$$

$$M_{a,b} = \frac{P l}{2} \kappa \omega_R \left(\frac{6}{\mu} \pm \frac{1 - 2 \xi}{\nu} \right),$$

$$M_{c,d} = -\frac{P l}{2} \frac{3 \kappa}{\mu} \omega_R.$$

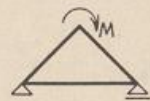
$$H_{a,b} = \frac{M}{2 h} \left\{ 1 - \frac{3}{\mu} [(1 + \kappa) \omega_M + \omega'_M] \right\},$$

$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} \left[\frac{1}{\mu} (2 \omega'_M + \omega_M) \pm \frac{1}{\nu} \omega'_M \right],$$

$$M_d = \frac{M}{2} \frac{1}{\mu} [(2 + 3 \kappa) \omega_M + \omega'_M].$$



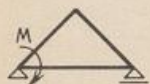
y > 0



$$H_{a,b} = 0,$$

$$M_{a,b} = \pm \frac{M}{2 \nu},$$

$$M_{c,d} = \mp \frac{M}{2}.$$

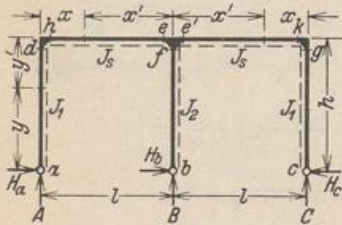


$$H_{a,b} = \frac{9}{2} \frac{M}{h} \frac{\kappa}{\mu},$$

$$M_{c,d} = -\frac{3}{2} M \frac{\kappa}{\mu},$$

$$M_{a,b} = -\frac{M}{2} \left[\frac{3}{\mu} \pm \frac{2}{\nu} \right], \quad M_a \text{ am Riegel.}$$

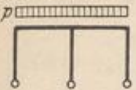
Tabelle 61. Symmetrischer, dreistieliger Rahmen mit geradem Riegel.



$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \kappa_1 = \frac{h}{l} \frac{J_2}{J_1}, \quad \mu = 3 + 4 \kappa_1, \quad \alpha = 3 + 2 \kappa_1,$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}, \quad \kappa_2 = \frac{h}{l} \frac{J_2}{J_2}, \quad \nu = 3 + \kappa_1 + 2 \kappa_2,$$

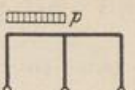
$$M_{h,k} = M_{d,e}, \quad \text{wenn nicht besonders angegeben.}$$



$$M_{d,s} = -\frac{p l^2}{4 \mu},$$

$$M_{e,e'} = -\frac{p l^2}{4 \mu} (1 + 2 \kappa_1),$$

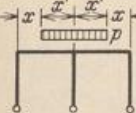
$$M_f = 0.$$



$$M_{d,s} = -\frac{p l^2}{8} \left[\frac{1}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right],$$

$$M_{e,e'} = -\frac{p l^2}{8} \left[\frac{1 + 2 \kappa_1}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right],$$

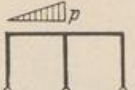
$$M_f = \frac{p l^2}{4 \nu}.$$



$$M_{d,s} = -\frac{p x'^2}{4 \mu} \xi' (4 - 3 \xi'),$$

$$M_{e,e'} = -\frac{p x'^2}{4 \mu} [2 \mu - 8(1 + \kappa_1) \xi' + \alpha \xi'^2],$$

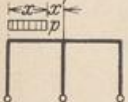
$$M_f = 0.$$



$$M_{d,s} = -\frac{p l^2}{40} \left[\frac{2}{\mu} \pm \frac{5}{2 \nu} \right],$$

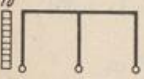
$$M_{e,e'} = \frac{p l^2}{120} \left[\frac{9 + 16 \kappa_1}{\mu} \pm \frac{15}{2 \nu} \right],$$

$$M_f = \frac{p l^2}{8 \nu}.$$



$$\Phi = \frac{1}{\nu} (3 - 2 \xi), \quad M_{e,e'} = -\frac{p x^2}{8} \left[\frac{1}{\mu} (4 \kappa_1 + 4 \xi - \alpha \xi^2) \pm \Phi \right],$$

$$M_{d,s} = -\frac{p x^2}{8} \left[\frac{1}{\mu} (6 - 8 \xi + 3 \xi^2) \pm \Phi \right], \quad M_f = \frac{p x^2}{4} \Phi.$$

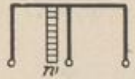


$$\Phi = \frac{1}{2 \nu} (2 \alpha + \kappa_1),$$

$$M_{d,s} = -\frac{w h^2}{4} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} \mp \left(1 - \frac{1}{2} \Phi \right) \right],$$

$$M_{e,e'} = \frac{w h^2}{8} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} \mp \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{w h^2}{4} \Phi.$$

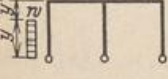


$$\Phi = \frac{1}{2 \nu} (\alpha - \kappa_2),$$

$$M_{d,s} = \pm \frac{w h^2}{4} [1 - \Phi],$$

$$M_{e,e'} = \mp \frac{w h^2}{4} \Phi,$$

$$M_f = \frac{w h^2}{2} \Phi.$$

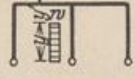


$$\Phi = \frac{1}{2 \nu} [\kappa_1 (2 - \eta^2) + 2 \alpha],$$

$$M_{d,s} = -\frac{w y^2}{8} \left[2 \frac{\kappa_1}{\mu} (2 - \eta^2) \mp (2 - \Phi) \right],$$

$$M_{e,e'} = \frac{w y^2}{8} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} (2 - \eta^2) \mp \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{w y^2}{4} \Phi.$$

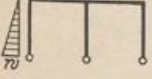


$$\Phi = \frac{1}{2 \nu} [\alpha - \kappa_2 (2 - \eta^2)],$$

$$M_{d,s} = \pm \frac{w y^2}{4} [1 - \Phi],$$

$$M_{e,e'} = \mp \frac{w y^2}{4} \Phi,$$

$$M_f = \frac{w y^2}{2} \Phi.$$




$$\Phi = \frac{3}{2 \nu} (10 + 9 \kappa_1),$$

$$M_{d,s} = -\frac{w h^2}{120} \left[14 \frac{\kappa_1}{\mu} \mp (10 - \Phi) \right],$$

$$M_{e,e'} = \frac{w h^2}{120} \left[7 \frac{\kappa_1}{\mu} \mp \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{w h^2}{60} \Phi.$$



$$\Phi = \frac{1}{\nu} (7 \kappa_2 - 5 \alpha),$$

$$M_{d,s} = \pm \frac{w h^2}{120} [10 + \Phi],$$

$$M_{e,e'} = \mp \frac{w h^2}{120} \Phi,$$

$$M_f = \frac{w h^2}{60} \Phi.$$



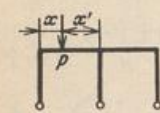
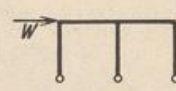
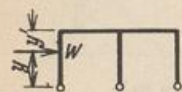

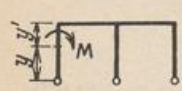
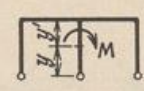
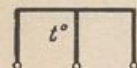
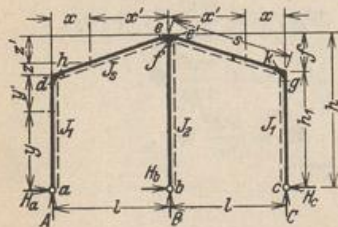
 $\Phi = \frac{3}{2\nu} [10(1 + \kappa_1) - \kappa_1 \eta^2],$ $M_{d,s} = -\frac{w y^2}{120} \left[2 \frac{\kappa_1}{\mu} (10 - 3\eta^2) \mp (10 - \Phi) \right],$ $M_{e,e'} = \frac{w y^2}{120} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} (10 - 3\eta^2) \mp \Phi \right],$ $M_f = \frac{w y^2}{60} \Phi.$	 $\Phi = \frac{1}{\nu} [5(\alpha - 2\kappa_2) + 3\kappa_2 \eta^2],$ $M_{d,s} = \pm \frac{w y^2}{120} (10 - \Phi),$ $M_{e,e'} = \mp \frac{w y^2}{120} \Phi,$ $M_f = + \frac{w y^2}{60} \Phi.$
 $M_{d,s} = -\frac{3}{2} P l \omega_R \left[\frac{1}{\mu} \xi' \pm \frac{1}{2\nu} \right],$ $M_{e,e'} = -\frac{P l}{2} \omega_R \left[\frac{1}{\mu} (2\kappa_1 + \alpha \xi) \pm \frac{3}{2\nu} \right],$ $M_f = \frac{3}{2} \frac{P l}{\nu} \omega_R.$	 $M_{d,s} = \pm \frac{W h}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2\nu} \right),$ $M_{e,e'} = \mp \frac{W h}{4} \frac{\alpha}{\nu},$ $M_f = \frac{W h}{2} \frac{\alpha}{\nu}.$
 $\Phi = \frac{1}{2\nu} [\kappa_1 (1 - \eta^2) + \alpha],$ $M_{d,s} = -\frac{W y}{2} \left[2 \frac{\kappa_1}{\mu} (1 - \eta^2) \mp (1 - \Phi) \right],$ $M_{e,e'} = \frac{W y}{2} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} (1 - \eta^2) \mp \Phi \right],$ $M_f = W y \Phi.$	 $\Phi = \frac{1}{2\nu} [2\kappa_2 (1 - \eta^2) - \alpha],$ $M_{d,s} = \pm \frac{W y}{2} [1 + \Phi],$ $M_{e,e'} = \pm \frac{W y}{2} \Phi,$ $M_f = -W y \Phi.$
 $\Phi = \frac{1}{2\nu} (\alpha - \kappa_1 \omega_M),$ $M_{h,k} = + \frac{M}{2} \left[2 \frac{\kappa_1}{\mu} \omega_M \pm (1 - \Phi) \right],$ $M_{e,e'} = -\frac{M}{2} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} \omega_M \pm \Phi \right],$ $M_f = M \Phi.$ <p> $y = h: \quad \Phi = \frac{3}{2\nu}, \quad \omega_M = 2,$ $y = 0: \quad \Phi = \frac{3}{2\nu} (1 + \kappa_1), \quad \omega_M = -1.$ </p>	 $\Phi = + \frac{1}{2\nu} (\alpha + 2\kappa_2 \omega_M),$ $M_{d,s} = \pm \frac{M}{2} (1 - \Phi),$ $M_{e,e'} = \mp \frac{M}{2} \Phi,$ <p> $y' > 0: \quad M_f = M \Phi,$ $y = h: \quad \Phi = \frac{1}{2\nu} (2\nu - 3), \quad M_f = -M (1 - \Phi),$ $y = 0: \quad \Phi = \frac{1}{2\nu} (\alpha - 2\kappa_2).$ </p>
 $M_{d,s} = -\frac{12 E J_s \alpha_1 t}{\mu h}, \quad M_{e,e'} = \frac{6 E J_s \alpha_1 t}{\mu h}, \quad M_f = 0.$	

Tabelle 62. Symmetrischer, dreistieliger Rahmen mit gebrochenem Riegel.

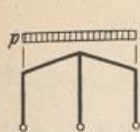


$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{f}, \quad \varphi = \frac{f}{h}, \quad \varphi' = \frac{h_1}{h}, \quad \varphi'' = \frac{h}{h_1},$$

$$\xi' = \frac{x'}{l}, \quad \zeta' = \frac{z'}{f}, \quad \kappa_1 = \frac{h_1 J_s}{s J_1}, \quad \kappa_2 = \frac{h J_s}{s J_2}, \quad \mu = 3 + 4\kappa_1,$$

$$\alpha = 2(1 + \kappa_1) + \varphi'', \quad \nu = 1 + 2\kappa_2 + \varphi' + \varphi'^2(1 + \kappa_1),$$

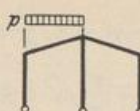
$M_{h,k} = M_{d,s}$, wenn nicht besonders angegeben.



$$M_{d,s} = -\frac{p l^2}{4 \mu},$$

$$M_{e,e'} = -\frac{p l^2}{4 \mu} [1 + 2 \kappa_1],$$

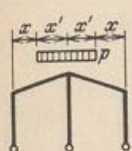
$$M_f = 0.$$



$$M_{d,s} = -\frac{p l^2}{8} \left[\frac{\varphi'(1 + \varphi')}{2 \nu} \right],$$

$$M_{e,e'} = -\frac{p l^2}{8} \left[\frac{1 + 2 \kappa_1}{\mu} \pm \frac{1 + \varphi'}{2 \nu} \right]$$

$$M_f = \frac{p l^2}{8} \frac{1 + \varphi'}{\nu}.$$



$$M_{d,s} = -\frac{p x'^2}{4 \mu} \xi' [4 - 3 \xi'],$$

$$M_{e,e'} = -\frac{p x'^2}{4 \mu} [2 \mu - 8(1 + \kappa_1) \xi' + (3 + 2 \kappa_1) \xi'^2],$$

$$M_f = 0.$$

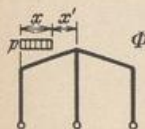


$$\Phi = \frac{8 + 7 \varphi'}{\nu},$$

$$M_{d,s} = -\frac{p l^2}{120} \left[\frac{6}{\mu} \pm \frac{\varphi'}{2} \Phi \right],$$

$$M_{e,e'} = -\frac{p l^2}{120} \left[\frac{9 + 16 \kappa_1}{\mu} \pm \frac{1}{2} \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{p l^2}{120} \Phi.$$



$$\Phi = \frac{1}{\nu} \left[3 - 2 \xi - \frac{\varphi'}{2} (\xi^2 + 4 \xi') \right],$$

$$M_{e,e'} = -\frac{p x^2}{8} \left\{ \frac{1}{\mu} [4 \kappa_1 + 4 \xi - (3 + 2 \kappa_1) \xi^2] \pm \Phi \right\},$$

$$M_{d,s} = -\frac{p x^2}{8} \left[\frac{1}{\mu} (6 - 8 \xi + 3 \xi^2) \pm \varphi' \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{p x^2}{4} \Phi.$$



$$\Phi = \frac{\varphi'}{2 \nu} (2 \alpha + \kappa_1),$$

$$M_{d,s} = -\frac{w h_1^2}{4} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} \mp \left(1 - \frac{\varphi'}{2} \Phi \right) \right],$$

$$M_{e,e'} = \frac{w h_1^2}{8} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} \mp \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{w h_1^2}{4} \Phi.$$



$$\Phi = \frac{1}{2 \nu} (\varphi'^2 \alpha - \kappa_2),$$

$$M_{d,s} = \pm \frac{w h^2}{4} \varphi' [1 - \Phi],$$

$$M_{e,e'} = \mp \frac{w h^2}{4} \Phi,$$

$$M_f = \frac{w h^2}{2} \Phi.$$



$$\Phi = \frac{\varphi'}{2 \nu} [\kappa_1 (2 - \eta^2) + 2 \alpha],$$

$$M_{d,s} = -\frac{w y^2}{8} \left[2 \frac{\kappa_1}{\mu} (2 - \eta^2) \mp (2 - \varphi' \Phi) \right],$$

$$M_{e,e'} = \frac{w y^2}{8} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} (2 - \eta^2) \mp \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{w y^2}{4} \Phi.$$

$\eta^2 = \frac{y}{h_1}, \quad \eta'^2 = \frac{y'}{h_1}.$



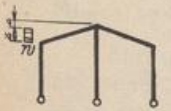
$$\Phi = \frac{1}{2 \nu} [\varphi'^2 \alpha - \kappa_2 (2 - \eta^2)],$$

$$M_{d,s} = \pm \frac{w y^2}{4} \varphi' [1 - \Phi],$$

$$M_{e,e'} = \mp \frac{w y^2}{4} \Phi,$$

$$M_f = \frac{w y^2}{2} \Phi.$$

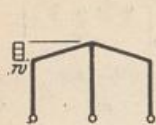
$\eta = \frac{y}{h}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}.$



$$\psi = \frac{1}{2} - \omega \varphi', \quad \Phi = \frac{1}{4 \nu} (\omega \varphi + \varphi' \psi + 2 \frac{\varphi'^2}{\varphi} \alpha \zeta),$$

$$M_{d,s} = -\frac{w f^2}{2} \left[\frac{1}{2 \mu} (2 \psi - \omega \varphi) \mp \frac{\varphi'}{\varphi} (\zeta - \varphi \Phi) \right],$$

$$M_{e,e'} = -\frac{w f^2}{2} \left[\frac{1}{2 \mu} [2 \omega \varphi (1 + \kappa_1) - \psi] \pm \Phi \right], \quad M_f = w f^2 \Phi.$$



$$\Phi = \frac{1}{2\nu} \left(1 + \varphi' + 4 \frac{\varphi'^2}{\varphi} \alpha \right),$$

$$M_{d,s} = -\frac{w f^2}{8} \left[\frac{1}{\mu} \mp \frac{\varphi'}{\varphi} (4 - \varphi \Phi) \right],$$

$$M_{e,e'} = -\frac{w f^2}{8} \left[\frac{1}{\mu} + \frac{2 \kappa_1}{\mu} \pm \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{w f^2}{4} \Phi.$$

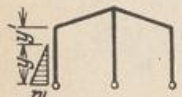


$$\Phi = \frac{1}{\nu} [5 (\varphi'^2 \alpha - 2 \kappa_2) + 3 \kappa_2 \eta^2],$$

$$M_{d,s} = \pm \frac{w y^2}{120} \varphi' [10 - \Phi],$$

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \eta' = \frac{y'}{h} \quad M_{e,e'} = \mp \frac{w y^2}{120} \Phi,$$

$$M_f = + \frac{w y^2}{60} \Phi.$$



$$\eta = \frac{y}{h_1}, \quad \eta' = \frac{y'}{h_1}.$$

$$\Phi = \frac{\varphi'}{2\nu} [10 (\alpha + \kappa_1) - 3 \kappa_1 \eta^2],$$

$$M_{d,s} = -\frac{w y^2}{120} \left[\frac{2 \kappa_1}{\mu} (10 - 3 \eta^2) \mp (10 - \varphi' \Phi) \right],$$

$$M_{e,e'} = \frac{w y^2}{120} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} (10 - 3 \eta^2) \mp \Phi \right], \quad M_f = \frac{w y^2}{60} \Phi.$$

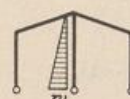


$$\Phi = \frac{\varphi'}{2\nu} (10 \alpha + 7 \kappa_1),$$

$$M_{d,s} = -\frac{w h_1^2}{120} \left[14 \frac{\kappa_1}{\mu} \mp (10 - \varphi' \Phi) \right],$$

$$M_{e,e'} = \frac{w h_1^2}{120} \left[7 \frac{\kappa_1}{\mu} \mp \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{w h_1^2}{60} \Phi.$$

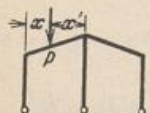


$$\Phi = \frac{1}{\nu} (7 \kappa_2 - 5 \varphi'^2 \alpha),$$

$$M_{d,s} = \pm \frac{w h^2}{120} \varphi' (10 + \Phi),$$

$$M_{e,e'} = \pm \frac{w h^2}{120} \Phi,$$

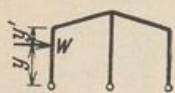
$$M_f = -\frac{w h^2}{60} \Phi.$$



$$M_{d,s} = -\frac{Pl}{2} \omega_R \left\{ \frac{3}{\mu} \xi \pm \frac{\varphi'}{2\nu} [3 - \varphi (1 + \xi')] \right\},$$

$$M_{e,e'} = -\frac{Pl}{2} \omega_R \left\{ \frac{1}{\mu} [2 \kappa_1 + (3 + 2 \kappa_1) \xi] \pm \frac{1}{2\nu} [3 - \varphi (1 + \xi')] \right\},$$

$$M_f = \frac{Pl}{2} \frac{\omega_R}{\nu} [3 - \varphi (1 + \xi')].$$



$$\Phi = \frac{\varphi'}{\nu} [\kappa_1 (1 - \eta^2) + \alpha],$$

$$M_{d,s} = -\frac{W y}{2} \left[2 \frac{\kappa_1}{\mu} (1 - \eta^2) \mp \left(1 - \frac{\varphi'}{2} \Phi \right) \right],$$

$$M_{e,e'} = \frac{W y}{2} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} (1 - \eta^2) \mp \frac{1}{2} \Phi \right],$$

$$M_f = \frac{W y}{2} \Phi.$$

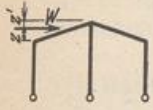


$$\Phi = \frac{1}{2\nu} [2 \kappa_2 (1 - \eta^2) - \varphi'^2 \alpha],$$

$$M_{d,s} = \pm \frac{W y}{2} \varphi' (1 + \Phi)$$

$$M_{e,e'} = \pm \frac{W y}{2} \Phi,$$

$$M_f = -W y \cdot \Phi.$$



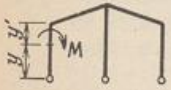
$$\Phi = \frac{1}{2v} (\omega_D + \varphi' \omega'_D + \frac{\varphi'^2}{\varphi} \alpha),$$

$$M_{d,\sigma} = -\frac{Wf}{2} \left[\frac{1}{\mu} (2\omega'_D - \omega_D) \mp \frac{\varphi'}{\varphi} (1 - \varphi \Phi) \right],$$

$$M_{e,\sigma'} = -\frac{Wf}{4} \left[\omega_D + \frac{1}{\mu} (2\omega_D - \omega'_D) \pm 2\Phi \right],$$

$$M_f = Wf\Phi.$$

$$z = 0: \quad \begin{cases} M_{d,\sigma} = \pm \frac{W h_1}{2} \left(1 - \frac{\varphi'^2}{2v} \alpha \right), \\ M_{e,\sigma'} = \mp \frac{W h_1 \varphi'}{4v} \alpha, \\ M_f = \frac{W h_1 \varphi'}{2v} \alpha. \end{cases}$$

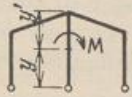


$$\Phi = \frac{\varphi'}{2v} (\alpha - \kappa_1 \omega_M),$$

$$M_{h,\kappa} = \frac{M}{2} \left[2 \frac{\kappa_1}{\mu} \omega_M \pm (1 - \varphi' \Phi) \right],$$

$$\eta = \frac{y}{h_1}, \quad \eta' = \frac{y'}{h_1}. \quad M_{e,\sigma'} = -\frac{M}{2} \left[\frac{\kappa_1}{\mu} \omega_M \pm \Phi \right],$$

$$M_f = M\Phi.$$



$$\Phi = \frac{1}{2v} (2\kappa_2 \omega_M + \varphi'^2 \alpha),$$

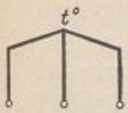
$$M_{d,\sigma} = \pm \frac{M}{2} \varphi' (1 - \Phi),$$

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}. \quad M_{e,\sigma'} = \mp \frac{M}{2} \Phi,$$

$$y' > 0: \quad M_f = M\Phi.$$

$$y = h: \quad \Phi = \frac{1}{2v} (4\kappa_2 + \varphi'^2 \alpha), \quad M_f = -M(1 - \Phi).$$

$$y = 0: \quad \Phi = \frac{1}{2v} (\varphi'^2 \alpha - 2\kappa_2).$$



$$M_{d,\sigma} = -\frac{12 E J_s l \alpha_t t}{\mu s h_1},$$

$$M_{e,\sigma'} = \frac{6 E J_s \alpha_t t l}{\mu s h_1}, \quad M_f = 0.$$

62. Die räumliche Belastung des ebenen Tragwerks.

Während das ebene Tragwerk bei Belastung in der Symmetrieebene als Scheibe oder Scheibenverbindung angesehen und berechnet wird, ist bei allgemeinem Kraftangriff die räumliche Betrachtung von Träger, Stützung und Formänderung notwendig. Der Abschnitt eines Stabes besitzt in diesem Falle sechs Freiheitsgrade, so daß für die äußeren Kräfte sechs Gleichgewichtsbedingungen angeschrieben werden können. Die Verschiebung eines Querschnitts ist durch sechs geometrische Parameter, der Spannungszustand ($\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$) eines Querschnitts bei Annahme eines linearen Ansatzes für σ_x durch sechs Schnittkräfte (43) bestimmt.

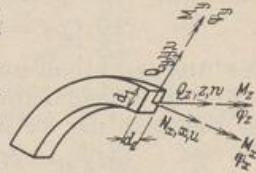


Abb. 581.

Die äußeren Kräfte werden in Komponenten zerlegt, die in der Trägerebene und senkrecht dazu angreifen. Der Beitrag jeder Gruppe zum Spannungs- und Verschiebungszustand darf nach dem Superpositionsgesetz getrennt angegeben werden. Die räumliche Belastung besteht daher nur aus Kräften winkelrecht zur Ebene des Tragwerks, für welche das Biegemoment M_x und die Querkraft Q_y Null sind, während die Verschiebungen u, v und die Verdrehung φ_x als klein gegen die Komponenten w, φ_x, φ_y vernachlässigt werden (Abb. 581).

Lösung A. Die ebenen Tragwerke des Bauwesens mit räumlichem Charakter sind, abgesehen von wenigen Ausnahmen, statisch unbestimmt. Der Spannungszustand kann daher ebenso wie in Abschn. 24 aus den Schnittkräften eines Hauptsystems entwickelt werden, an dem die statisch unbestimmten Schnittkräfte neben der

Belastung als äußere Kräfte angreifen. Sie werden nach denselben Gesichtspunkten wie bei Tragwerken unter ebener Belastung ausgewählt und berechnet (Abschn. 24ff.). Daher lassen sich nach Abschn. 28 und 36 auch statisch überzählige Gruppenlasten bilden.

Die Schnittkräfte des Spannungszustandes werden durch Superposition gefunden.

$$\left. \begin{aligned} M_y &= M_{y,0} - \sum X_h M_{y,h}, & M_x &= M_{x,0} - \sum X_h M_{x,h}, \\ Q_z &= Q_{z,0} - \sum X_h Q_{z,h}; & (h &= 1 \dots n). \end{aligned} \right\} \quad (876)$$

Dasselbe gilt für die Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems. Die relativen Verschiebungen δ_k sind infolge der Kontinuität des vorgeschriebenen Tragwerks Null, so daß hier in Verbindung mit den Bemerkungen auf S. 89 ähnliche geometrische Bedingungen wie in Abschn. 24 angeschrieben werden können.

$$1_k \delta_k = 1_k (\delta_{k0} - \sum_{h=1}^n X_h \delta_{kh}), \quad (k = 1 \dots n).$$

$$1_k^{(0)} \delta_k = \int M_y^{(n)} M_{y,k}^{(0)} \frac{J_z}{J_y} ds + \frac{E}{G} \int M_x^{(n)} M_{x,k}^{(0)} \frac{J_c}{T} ds + E J_c \int M_{y,k}^{(0)} \frac{\alpha_t \Delta t}{d_2} ds = 0.$$

Die statische Untersuchung unterliegt denselben Rechenvorschriften wie bei ebener Belastung des Tragwerks (Abschn. 24ff.) und besteht daher aus folgenden Teilen:

1. Entwicklung der Funktionen $M_{y,0}$, $M_{y,k}$, $M_{x,0}$, $M_{x,k}$.
2. Analytische oder numerische Integration der Vorzahlen und Belastungszahlen δ_{kh} , δ_{k0} .
3. Auflösung des Ansatzes und Nachweis der Schnittkräfte im Hauptsystem aus Belastung und überzähligen Größen X_k .

Lösung B. Die statische Untersuchung des Tragwerks kann ebenso wie bei ebener Belastung auf die geometrischen Randbedingungen der Stäbe zurückgeführt werden (Abschn. 38). Diese sind hier durch die Verdrehung und durch die Verschiebung des Stabknotens, also durch sechs Komponenten bestimmt, von denen allerdings u_j , v_j , $\varphi_{z,j}$ durch die Art der vorgeschriebenen Belastung Null sind. Die Verschiebungen w_j , w_K werden im Sinne der z -Achse, die Drehwinkel $\varphi_{x,j}$, $\varphi_{y,j}$ im Sinne des Uhrzeigers als positiv angenommen und stets mit dem $E J_c$ fachen Betrage verwendet. Sie ergeben sich ebenso wie in Abschn. 38 aus den Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an den kinematischen Gebilden $\Gamma_{x,j}$, $\Gamma_{y,j}$, Γ_c . Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen (S. 315) ist

$$\delta A_{x,j} = 0, \quad \delta A_{y,j} = 0, \quad \delta A_c = 0 \quad (j = A \dots N, \quad c = 1 \dots f).$$

Der Ansatz enthält außer der Belastung \mathfrak{P}_k , \mathfrak{P}_j der Stäbe k und Knoten J nach S. 319 die Anschlußkräfte $M_{y,j}^{(k)}$, $M_{x,j}^{(k)}$ an den Elementen der kinematischen Ketten als Funktion der Verschiebungen der Knotenpunkte:

$$\left. \begin{aligned} M_{y,j}^{(k)} &= M_{y,j0}^{(k)} + \varphi_{y,j} M_{y,jj}^{(k)} + \varphi_{y,K} M_{y,jK}^{(k)} + \vartheta_{y,k} M_{y,jk}^{(k)}, \\ M_{x,j}^{(k)} &= M_{x,j0}^{(k)} + \varphi_{x,j} M_{x,jj}^{(k)} + \varphi_{x,K} M_{x,jK}^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (877)$$

Der Drehsinn der Anschlußmomente am Stab wird in Übereinstimmung mit demjenigen der Drehwinkel im Uhrzeigersinn positiv gerechnet. Für gerade Stäbe l_k mit gleichbleibendem Querschnitt, also auch mit

$$J_{y,k} = \text{const}, \quad T_k = \text{const} \quad \text{und} \quad \frac{J_c}{J_{y,k}} l_k = l_k', \quad \frac{E}{G} \frac{J_c}{T_k} l_k = l_k'' = \varrho_k l_k' \quad (878)$$

ist nach S. 308

$$\left. \begin{aligned} M_{y,j}^{(k)} &= M_{y,j0}^{(k)} + \varphi_{y,j} \frac{4}{l_k'} + \varphi_{y,K} \frac{2}{l_k''} - \vartheta_{y,k} \frac{6}{l_k'}, \\ M_{x,j}^{(k)} &= M_{x,j0}^{(k)} - \varphi_{x,j} \frac{1}{l_k''} + \varphi_{x,K} \frac{1}{l_k''}; \end{aligned} \right\} \quad (879)$$

oder mit
$$\vartheta_{v,k} = (w_J - w_K)/l_k$$

$$M_{y,J}^{(k)} = M_{y,J0}^{(k)} + \varphi_{v,J} \frac{4}{l_k} + \varphi_{v,K} \frac{2}{l_k} - (w_J - w_K) \frac{6}{l_k l_k'} \quad (880)$$

Das ebene Tragwerk dient in lotrechter Stellung mit waagerechter Belastung als Bogen- und Rahmenträger zur Übertragung von Wind-, Brems- und Fliehkräften und in waagerechter Lage mit senkrechter Belastung als Ringträger, Kragträger und Trägerrost. Ihre Berechnung wird auf einfache oder mehrfache Symmetrie des Tragwerks beschränkt, um auf diese Weise die wesentlichen Eigenschaften der Lösung hervortreten zu lassen und einfache Ergebnisse zu erhalten.

Seipp, H.: Theorie und Berechnung doppeltgekrümmter Freiträger. Wien 1910. — Habel, A.: Rahmenberechnung bei räumlichem Kraftangriff. Beton u. Eisen 1926 S. 214. — Derselbe: Berechnung symmetrischer mehrstieliger Rahmen. Bautechn. 1926 S. 159. — Derselbe: Die Einflußlinien des senkrecht zur Tragwandebene belasteten zweistieligen Rahmens und ihre Anwendung bei der Berechnung räumlich beanspruchter mehrstieliger Rahmenträger. Beton u. Eisen 1928 S. 46. — Worch, G.: Beitrag zur Ermittlung der Formänderungen ebener Stabzüge mit räumlicher Stützung nebst Anwendung auf die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Beton u. Eisen 1930 S. 167.

63. Der eingespannte Bogenträger mit Belastung winkelrecht zur Trägerebene.

Der Träger ist symmetrisch zur Achse, so daß jede Belastung nach S. 186 in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden kann. Bei Symmetrie der Belastung sind die Querkraft Q_c und das Drillungsmoment M_a in der Symmetrieachse Null (Abb. 582a). Der Spannungszustand des Trägers enthält daher mit dem Biegemoment M_b in der Symmetrieachse nur eine statisch unbestimmte Schnittkraft. Dieses ist bei Antimetrie der Belastung Null, die Rechnung also mit M_a und Q_c zweifach statisch unbestimmt. Die überzähligen Größen können ebenso wie auf S. 274 durch Einführung von Gruppenlasten unabhängig voneinander berechnet werden (Abb. 582b).

Das Hauptsystem der Untersuchung besteht nach Abb. 582a aus zwei winkelrecht zur Symmetrieebene belasteten Kragträgern, deren Schnittkräfte M_x, M_y in der folgenden Transformation verwendet werden (Abb. 582c)

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -M_I \sin \alpha - M_{II} \cos \alpha, \\ M_x &= -M_I \cos \alpha + M_{II} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (881)$$

In dieser bedeuten M_I, M_{II} die Momente der Kräfte zwischen Scheitel und Querschnitt (k) in bezug auf die ausgezeichneten Achsen I und II mit dem Schwerpunkt des Querschnitts als Ursprung.

$$\frac{J_c}{J_v} ds = ds', \quad \frac{E J_c}{G T} ds = \varrho ds', \quad \varrho = \frac{E J_v}{G T}.$$

Überzählige Größen Abb. 582b.

$$X_1 = -M_b, \quad X_3 = -M_a,$$

$$X_2: \text{Gruppenlast aus } -Q_c \text{ und } M_a = -Q_c b_0.$$

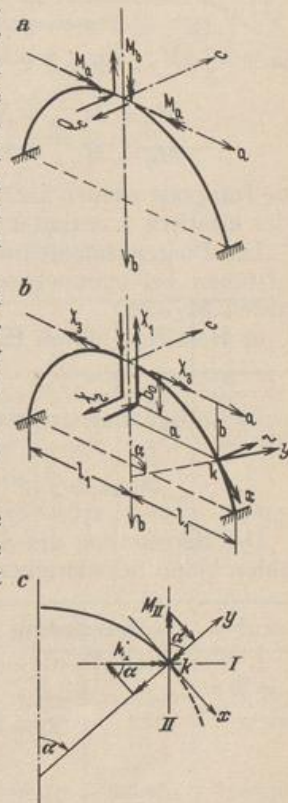


Abb. 582.

$$\begin{aligned} \text{a) Symmetrischer Anteil: } X_1 &= \delta_{10}/\delta_{11}, & X_2 &= 0, & X_3 &= 0. \\ -X_1 &= 1: & M_{y,1} &= \cos \alpha, & M_{x,1} &= -\sin \alpha, \end{aligned}$$

$$\delta_{10} = 2 \int_0^{l_1} (M_{y,0} \cos \alpha - M_{x,0} \varrho \sin \alpha) ds', \quad \delta_{11} = 2 \int_0^{l_1} (\cos^2 \alpha + \varrho \sin^2 \alpha) ds'. \quad (882)$$

$$M_y = M_{y,0} - X_1 \cos \alpha, \quad M_x = M_{x,0} + X_1 \sin \alpha. \quad (883)$$

$$\text{b) Antimetrischer Anteil: } X_1 = 0, \quad X_2 \neq 0, \quad X_3 \neq 0.$$

$$-X_2 = 1: \quad M_y = a \cos \alpha + (b - b_0) \sin \alpha, \quad M_x = -a \sin \alpha + (b - b_0) \cos \alpha.$$

$$-X_3 = 1: \quad M_y = \sin \alpha, \quad M_x = \cos \alpha.$$

Für $\delta_{23} = 0$ ist

$$b_0 = \frac{\int_0^{l_1} [\sin \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) - \varrho \cos \alpha (a \sin \alpha - b \cos \alpha)] ds'}{\int_0^{l_1} (\sin^2 \alpha + \varrho \cos^2 \alpha) ds'} \quad (884)$$

und

$$X_2 = \delta_{20}/\delta_{22}, \quad X_3 = \delta_{30}/\delta_{33},$$

$$\delta_{20} = 2 \int_0^{l_1} \{M_{y,0} [a \cos \alpha + (b - b_0) \sin \alpha] - \varrho M_{x,0} [a \sin \alpha - (b - b_0) \cos \alpha]\} ds',$$

$$\delta_{22} = 2 \int_0^{l_1} \{[a \cos \alpha + (b - b_0) \sin \alpha]^2 + \varrho [a \sin \alpha - (b - b_0) \cos \alpha]^2\} ds', \quad (885)$$

$$\delta_{30} = 2 \int_0^{l_1} (M_{y,0} \sin \alpha + \varrho M_{x,0} \cos \alpha) ds', \quad \delta_{33} = 2 \int_0^{l_1} (\sin^2 \alpha + \varrho \cos^2 \alpha) ds',$$

$$M_y = M_{y,0} - X_2 [a \cos \alpha + (b - b_0) \sin \alpha] - X_3 \sin \alpha,$$

$$M_x = M_{x,0} + X_2 [a \sin \alpha - (b - b_0) \cos \alpha] - X_3 \cos \alpha.$$

Die Integrale werden nach Unterteilung des Bereichs l_1 in Intervalle mit geometrisch oder elastisch konstanter Breite nach S. 95 numerisch berechnet.

Die Biegemomente $M_{y,0}$ und die Drillungsmomente $M_{x,0}$ des Hauptsystems entstehen bei symmetrischen oder antimetrischen Kräften $\mathfrak{B}, p da$ und Kräftepaaren $M, \mu da$.

a) Belastung durch Einzellast P und Kräftepaar M in (a, b)

$$a < a_k, \quad b < b_k; \quad M_{I,0} = P(b_k - b) + M, \quad M_{II,0} = P(a_k - a). \quad (886)$$

b) Stetige Belastung mit den Komponenten p, μ in a

$$M_{I,0} = \int_0^{a_k} [p(b_k - b) + \mu] da, \quad M_{II,0} = \int_0^{a_k} p(a_k - a) da. \quad (887)$$

Die Berechnung der Schnittkräfte bietet bei numerischer Integration der Vorzeichen keine Schwierigkeiten. Dasselbe gilt für die Einflußlinien.

Berechnung der Bogenbrücke S. 538 für Windbelastung.

1. Geometrische Grundlagen. Bogenform und Überbau nach S. 538. Gewölbbebreite $d_2 = 10$ m.

$$J_v = \frac{d_1 d_2^3}{12}, \quad J_c = \frac{0,52 \cdot 10^3}{12} = 43,33 \text{ m}^4,$$

$$\varrho = \frac{E J_c}{G T J_c / J_v} = \frac{86,66}{T J_c / J_v}.$$

Nach S. 30 ist $\psi_3 \approx 0,320$ nahezu konstant und

$$T = d_2 d_1^3 \psi_3 = 3,20 d_1^3 \text{ [m}^4\text{]}.$$

2. Belastung. Winddruck $w = 0,250 \text{ t/m}^2$. Die belastete Fläche der rechten Bogenhälfte wird in 10 Trapezstreifen mit $\Delta a = 1,372 \text{ m}$ eingeteilt und die stetige Belastung durch eine äquivalente Gruppe von Einzellasten \mathfrak{P}_k in der Mitte der Intervallgrenzen ersetzt (Abb. 583).

$$\mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_{k,l} + \mathfrak{P}_{k,r},$$

$$\mathfrak{P}_{k,l} = \frac{\Delta a}{6} (h_{k-1} + 2h_k) w, \quad \mathfrak{P}_{k,r} = \frac{\Delta a}{6} (2h_k + h_{k+1}) w.$$

Jeder Anteil ist äquivalent mit der Kraft in der Mittelebene des Bogens und dem Verformungsmoment

$$\mu_{k,r} = \mathfrak{P}_{k,r} \cdot e_k, \quad e_k = \frac{h_k - v_k}{2}.$$

3. Überzählige Größen. Infolge der Symmetrie der Belastung ist nach S. 617 nur eine statisch überzählige Größe $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$ vorhanden (Abb. 582b).

4. Schnittkräfte im Hauptsystem und numerische Berechnung von δ_{11} und δ_{10} :

$$Q_k = \sum_0^{k-1} \mathfrak{P}_k, \quad \Delta b_k = b_k - b_{k-1},$$

$$M_{I,k,0} = M_{I,(k-1),0} + Q_k \Delta b_k + \mu_{(k-1),r} + \mu_{k,l},$$

$$M_{II,k,0} = M_{II,(k-1),0} + Q_k \Delta a.$$

Hieraus $M_{z,0}, M_{y,0}$ nach Gl. (881).

Die Integrale (882) für δ_{10}, δ_{11} werden nach Simpson numerisch berechnet.

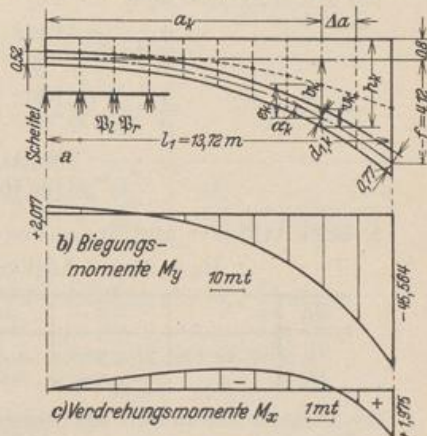


Abb. 583.

$$\frac{1}{2} \delta_{10} = \frac{\Delta a}{3} \sum_0^{l_1} n \lambda_1, \quad \lambda_1 = (M_{y,0} \cos \alpha - M_{z,0} \varrho \sin \alpha) \frac{J_c}{J \cos \alpha},$$

$$\frac{1}{2} \delta_{11} = \frac{\Delta a}{3} \sum_0^{l_1} n \lambda_2, \quad \lambda_2 = (\cos^2 \alpha + \varrho \sin^2 \alpha) \frac{J_c}{J \cos \alpha}.$$

$\frac{a}{l_1}$	d_1	b	Δb	h	e	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\frac{J_c}{J}$	$\frac{J_c}{J \cos \alpha}$	T	ϱ
0	0,520	0	—	1,060	0,270	0	1	1,000	1,000	0,451	192,151
0,1	0,520	0,029	0,029	1,090	0,285	0,0418	0,9984	1,000	1,000	0,451	192,151
0,2	0,525	0,116	0,087	1,180	0,327	0,0853	0,9963	0,990	0,994	0,464	188,654
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	0,770	4,120	1,002	5,417	2,212	0,6315	0,7753	0,675	0,871	1,462	87,815

Berechnung für $w = 1 \text{ t/m}^2$

a/l_1	\mathfrak{P}_l	\mathfrak{P}_r	\mathfrak{P}	μ_l	μ_r	Q	$Q \Delta b$	$Q \Delta a$	$M_{I,0}$	$M_{II,0}$
0	0	0,734	0,734	0	0,198	—	—	—	0	0
0,1	0,741	0,768	1,509	0,211	0,219	0,734	0,021	1,007	0,430	1,007
0,2	0,789	0,845	1,634	0,258	0,276	2,243	0,195	3,077	1,102	4,084
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	3,466	0	3,466	7,667	0	28,256	28,313	38,767	108,982	154,376

Berechnung für $w = 1 \text{ t/m}^2$								$w = 0,250 \text{ t/m}^2$	
a/l_1	$M_{y,0}$	$M_{z,0}$	λ_1	n	$n \lambda_1$	λ_2	$n \lambda_2$	$M_{y,0} [\text{mt}]$	$M_{z,0} [\text{mt}]$
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0,1	- 1,023	- 0,387	+ 2,087	4	+ 8,348	1,332	5,328	- 0,256	- 0,0978
0,2	- 4,163	- 0,750	+ 7,873	2	+ 15,746	2,351	4,702	- 1,041	- 0,188
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	- 188,510	+ 12,995	- 754,976	1	- 754,976	31,026	31,026	- 47,128	+ 3,249
$\Sigma = - 3388,492$						$\Sigma = 420,052$			

Mit $w = 0,250 \text{ t/m}^2$ wird

$$\frac{1}{2} \delta_{10} = - \frac{1,372}{3} \cdot 3388,492 \cdot 0,250 = - 387,417,$$

$$\frac{1}{2} \delta_{11} = + \frac{1,372}{3} \cdot 420,052 = + 192,104,$$

$$X_1 = - \frac{387,417}{192,104} = - 2,017 \text{ mt.}$$

5. Schnittkräfte und Spannungen. Nach Gl. (883) wird

$$M_y = M_{y,0} + 2,017 \cos \alpha, \quad M_z = M_{z,0} - 2,017 \sin \alpha.$$

a/l_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
M_y	+ 2,017	+ 0,969	- 2,454	- 9,278	- 21,812	- 45,564	mt
M_z	0	- 0,360	- 0,673	- 0,780	- 0,217	+ 1,975	mt

Die Momente sind in Abb. 583 dargestellt. Die größten Spannungen treten am Kämpfer auf.

$$\sigma_x = \frac{6 M_y}{d_1 d_2^2} = \frac{6 \cdot 45,564}{0,77 \cdot 100} = 3,55 \text{ t/m}^2 = 0,36 \text{ kg/cm}^2.$$

Nach S. 30 ist nach C. Weber $\psi_1 \approx 1$ und

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{T} \psi_1 d_1 = \frac{1,975}{1,462} \cdot 1 \cdot 0,77 = 1,04 \text{ t/m}^2 = 0,104 \text{ kg/cm}^2.$$

Berechnung eines eingespannten, symmetrischen Trapezrahmens mit räumlicher Belastung.

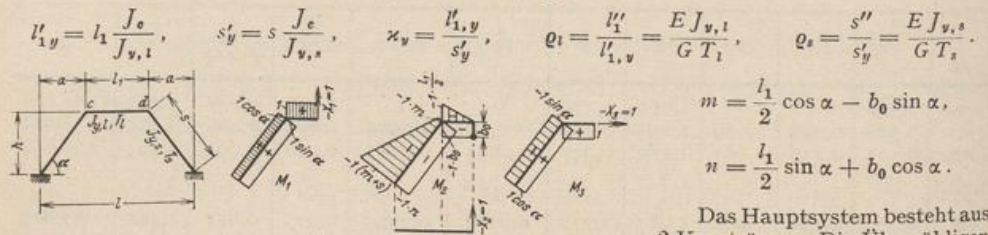


Abb. 584.

Belastung $X_3 = \delta_{30}/\delta_{33}$ und $X_2 = \delta_{20}/\delta_{22}$ am Hebelarm b_0 , so daß $\delta_{23} = 0$ (Abb. 584).

Vorzahlen. Mit den Abkürzungen

$$\psi_1 = 2 (\cos^2 \alpha + \varrho_s \sin^2 \alpha),$$

$$\psi_2 = 2 + 6 \frac{m}{s} \left(\frac{m}{s} + 1 \right) + \kappa_y \left(\frac{l_1}{2s} \right)^2 + 6 \varrho_s \left(\frac{n}{s} \right)^2 + 3 \kappa_y \varrho_t \left(\frac{b_0}{s} \right)^2,$$

$$\psi_3 = 2 (\sin^2 \alpha + \varrho_s \cos^2 \alpha)$$

$$\text{wird } \delta_{11} = s' (\kappa_y + \psi_1), \quad \delta_{22} = \frac{s' s^2}{3} \psi_2, \quad \delta_{33} = s' (\psi_3 + \kappa_y \varrho_t).$$

Das Hauptsystem besteht aus 2 Kragträgern. Die Überzähligen sind bei symmetrischer Belastung $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$, bei antisymmetrischer

Aus $\delta_{23} = 0$ folgt $b_0 = \frac{[s + l_1(1 - \rho_s) \cos \alpha] \sin \alpha}{\psi_3 + \kappa_v \rho_l}$

Belastung. a) Einzellast P senkrecht zur Rahmen-ebene und zwei Momente M_a, M_b in der Rahmen-ebene am Eckpunkt c (Abb. 585). Das Ergebnis wird für den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil getrennt angegeben.

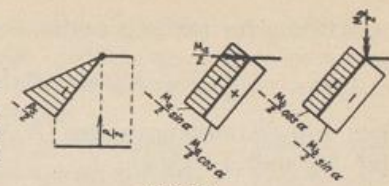


Abb. 585.

Symmetrischer Anteil	X_1 [mt]	Antisymmetrischer Anteil	X_2 [t]	X_3 [mt]
	$-\frac{Pa}{2} \frac{1}{\psi_1 + \kappa_v}$		$\frac{P}{2} \frac{2 + 3 \frac{m}{s}}{\psi_2}$	$\frac{Ph}{2} \frac{1}{\psi_3 + \kappa_v \rho_l}$
	$-\frac{M_a}{2} \frac{1 - \rho_s}{\psi_1 + \kappa_v} \frac{2ah}{s^2}$		$\frac{3}{2} \frac{M_a}{s} \frac{\Phi_2}{\psi_2}$	$\frac{M_a}{2} \frac{\psi_3}{\psi_3 + \kappa_v \rho_l}$
	$-\frac{M_b}{2} \frac{\psi_1}{\psi_1 + \kappa_v}$		$\frac{3}{2} \frac{M_b}{s} \frac{\Phi_1}{\psi_2}$	$\frac{M_b}{2} \frac{1 - \rho_s}{\psi_3 + \kappa_v \rho_l} \frac{2ah}{s^2}$

$\Phi_1 = \left(1 + 2 \frac{m}{3}\right) \cos \alpha + 2 \rho_s \frac{n}{s} \sin \alpha, \quad \Phi_2 = \left(1 + 2 \frac{m}{s}\right) \sin \alpha - 2 \rho_s \frac{n}{s} \cos \alpha.$

b) Gleichmäßig verteilte, waagerechte Belastung auf dem Riegel l_1 (Abb. 586). Die Belastung ist symmetrisch, daher $X_2 = X_3 = 0$.

$\delta_{10} = -p s' \frac{l_1^2}{8} \left[\frac{\kappa_v}{3} + 4 \frac{s}{l_1} \cos \alpha + \psi_1 \right],$

$X_1 = -p \frac{l_1^2}{8} \frac{\frac{1}{3} \kappa_v + 4 \frac{s}{l_1} \cos \alpha + \psi_1}{\kappa_v + \psi_1}.$

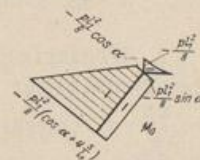


Abb. 586.

Hawranek, A.: Allgemeine Theorie der Wirkung von Querriegeln bei zweireihigen Bogenbrücken. Verhandlungen des 2. Internat. Kongr. f. Techn. Mech., Zürich 1927. — Schwarz, R.: Durchlaufende Bogen unter räumlicher Belastung. Bautechn. 1927 S. 449. — Derselbe: Berechnung des Rahmenwindverbandes von Zweigelenkbogenbrücken mit Kreisform und unveränderlichem Trägheitsmoment bei Berücksichtigung elastischer Einspannung durch die Endquerträger. Beton u. Eisen 1928 S. 31.

64. Der Kreisringträger.

Die allgemeine Theorie des querbelasteten Kreisringträgers ist in zahlreichen Arbeiten ausführlich behandelt worden. Sie stützen sich in der Regel auf die Gleichung der elastischen Linie. Da hier jedoch nur einzelne für den Konstrukteur wichtige Ergebnisse angegeben werden sollen, um die Eigenart des Ansatzes aufzuzeigen und die Lösung wichtiger Aufgaben zu erleichtern, wird auf die allgemeine Untersuchung der Formänderung des Trägers verzichtet.

Aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem Abschnitt ds folgt nach (68) und Abb. 587

$\frac{dQ}{d\alpha} = -pr, \quad \frac{dM_x}{d\alpha} = -M_y, \quad \frac{dM_y}{d\alpha} = M_x + Qr. \quad (888)$

Den Nullstellen des Biegemomentes M_y sind daher Größtwerte des Drillungsmomentes M_x , den Größtwerten des Biegemomentes M_x Wendepunkte der Funktion des Drillungsmomentes M_y zugeordnet.

Lösung für statisch bestimmte Aufgaben:

$$\frac{d^2 M_y}{d\alpha^2} + M_y = -p r^2, \quad M_y = A \sin \alpha + B \cos \alpha - p r^2. \quad (889)$$

Die Integrationskonstanten A und B ergeben sich aus den Randbedingungen für M_y und $dM_y/d\alpha$.

$$M_x = -\int M_y d\alpha, \quad Q = \frac{1}{r} \left(\frac{dM_y}{d\alpha} - M_x \right). \quad (890)$$

Die Schnittkräfte sind jedoch in der Regel statisch unbestimmt, sie lassen sich aber trotzdem für besondere Belastungsfälle allein aus den Gleichgewichtsbedingungen angeben, da die statisch unbestimmten Größen Null oder bekannt sind. Die Belastung wird aus diesem Grunde durch Umordnung aufgespalten, so daß die äußeren Kräfte eines jeden Anteils zu den Symmetrieachsen des Tragwerks symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Bei Symmetrie der äußeren Kräfte in bezug auf eine Achse I (Abb. 587) ist in den beiden ihr angehörenden Querschnitten des Trägers:

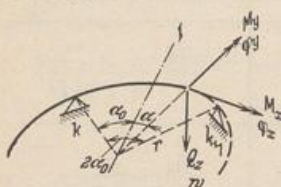


Abb. 587.

$$\begin{aligned} w_I &\neq 0, & \varphi_{y,I} &= 0, & Q_{z,I} &\neq 0; \\ Q_{z,I} &= 0, & M_{y,I} &\neq 0, & M_{x,I} &= 0. \end{aligned}$$

Bei Antimetrie der Belastung ist dort

$$\begin{aligned} w_I &= 0, & \varphi_{y,I} &\neq 0, & Q_{z,I} &= 0; \\ Q_{z,I} &\neq 0, & M_{y,I} &= 0, & M_{x,I} &\neq 0. \end{aligned}$$

1. Kreisringträger mit gerader oder ungerader Stützzahl n und gleichmäßiger Belastung durch p t/m. $2\alpha_0 = 2\pi/n$, $\alpha_0 = \pi/n$. Stützkraft $K = \frac{2\pi}{n} r p$, Querkräfte links und rechts der Stütze $Q_{z,k} = \mp \frac{\pi}{n} r p$ (Abb. 587).

Infolge Symmetrie der Belastung sind die Drillungsmomente der Querschnitte an den Stützen und Feldmitten Null. Die Schnittkräfte können daher entweder aus einer Integration der Gleichung (888) oder durch unmittelbare Gleichgewichtsbetrachtungen abgeleitet werden.

$$\left. \begin{aligned} M_{y,k} &= r^2 p \left(\frac{\pi}{n} \operatorname{ctg} \alpha_0 - 1 \right), & M_y &= r^2 p \left(\frac{\pi}{n} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_0} - 1 \right), \\ M_x &= -r^2 p \left(\frac{\pi}{n} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} - \alpha \right), & Q_z &= -r p \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (891)$$

2. Kreisringträger mit einer geraden Stützzahl n und wechselweiser Belastung der Felder durch $\pm p$ t/m. Die Stützkkräfte und die Querkräfte in Feldmitte sind Null, die Querkräfte links und rechts einer Stütze gleich groß und $\pm \frac{\pi}{n} r p$. Die Drillungsmomente in den Trägermitten und die Biegemomente über den Stützen sind Null. Die Drillungsmomente an den Endquerschnitten eines Abschnittes sind entgegengesetzt gleich. Die Verdrehung φ_x der Endquerschnitte ist Null.

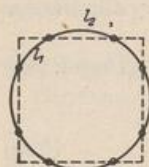


Abb. 588.

$$\left. \begin{aligned} M_y &= r^2 p \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} - 1 \right), \\ M_x &= r^2 p \left(\alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha_0} \right), & Q_z &= -r p \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (892)$$

3. Die statisch bestimmte Lösung kann auch für Kreisringträger angeschrieben werden, welche nach Abb. 588 durch die Art der Abstützung in n Felder mit zwei

verschiedenen Größen l_1, l_2 zerlegt werden. In diesem Falle sind die Drillungsmomente über den Stützen von Null verschieden, jedoch bei voller Belastung entgegengesetzt gleich. Biegungs- und Drillungsmoment können daher ebenfalls aus den Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden.

4. Die Schnittkräfte eines auskragenden Kreisbogenträgers Abb. 589 sind bei symmetrischer Belastung statisch bestimmt, da im Symmetriepunkt c

$$Q_{z,c} = 0, \quad M_{x,c} = 0.$$

Einzellast P in c .

$$A = -\frac{P}{2} \frac{f}{l}, \quad B = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{f}{l}\right), \quad M_{y,c} = \frac{Pb}{2} \left(1 - \frac{df}{bl}\right). \quad (893)$$

Zwei Einzellasten P in e, e' .

$$\left. \begin{aligned} A &= -P \frac{n}{l}, & B &= P \left(1 + \frac{n}{l}\right), \\ M_{y,c} &= Pb \left(1 - \frac{m}{b} - \frac{nd}{bl}\right). \end{aligned} \right\} \quad (894)$$

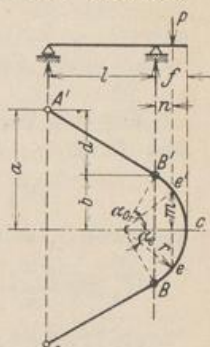


Abb. 589.

Gleichmäßig verteilte Belastung p t/m über B, B' .

$$A = -pr\alpha_0 \frac{s}{l}, \quad B = pr\alpha_0 \left(1 + \frac{s}{l}\right), \quad M_{y,c} = pb r \left[\alpha_0 \left(1 - \frac{sd}{lb}\right) - \frac{f}{b}\right]. \quad (895)$$

$s = (\sin \alpha_0 - \alpha_0 \cos \alpha_0) r / \alpha_0 =$ Abstand des Bogenschwerpunktes von BB' .

5. Der eingespannte Kreisbogenträger Abb. 590 ist bei symmetrischer Belastung senkrecht zur Trägerebene einfach statisch unbestimmt, da $Q_{z,c}$ und $M_{x,c}$ im Symmetriepunkt c Null sind.

$$M_{y,c} = -X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}.$$

$$\delta_{10} = 2r \int_0^{\alpha_0} (M_{y,0} \cos \alpha - M_{x,0} \varrho \sin \alpha) d\alpha,$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= 2r \int_0^{\alpha_0} (\cos^2 \alpha + \varrho \sin^2 \alpha) d\alpha \\ &= \frac{r}{2} [2(\varrho + 1)\alpha_0 - (\varrho - 1)\sin 2\alpha_0]. \end{aligned} \right\} \quad (896)$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}: \quad \delta_{11} = \frac{r\pi}{2} (\varrho + 1).$$

Einzellast P in c .

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= Pr \frac{2 \frac{\varrho}{\varrho-1} (\cos \alpha_0 - 1) + \sin^2 \alpha_0}{2 \frac{\varrho+1}{\varrho-1} \alpha_0 - \sin 2\alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (897)$$

$$M_y = -\frac{P}{2} r \sin \alpha - X_1 \cos \alpha, \quad M_x = \frac{P}{2} r (1 - \cos \alpha) + X_1 \sin \alpha.$$

Zwei Einzellasten P in e, e' .

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= 2Pr \frac{\frac{2\varrho}{\varrho-1} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_e) + \frac{\varrho+1}{\varrho-1} (\alpha_0 - \alpha_e) \sin \alpha_e + \sin \alpha_0 \sin (\alpha_0 - \alpha_e)}{2 \frac{\varrho+1}{\varrho-1} \alpha_0 - \sin 2\alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (898)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_e < \alpha < \alpha_0: & M_y = -Pr \sin (\alpha - \alpha_e) - X_1 \cos \alpha, \\ & M_x = Pr (1 - \cos (\alpha - \alpha_e)) + X_1 \sin \alpha. \end{aligned} \right\}$$

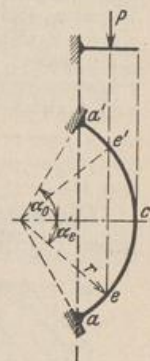


Abb. 590.

Gleichmäßig verteilte Last p t/m.

$$X_1 = -pr^2 \frac{\frac{\varrho+1}{\varrho-1} (4 \sin \alpha_0 - 2 \alpha_0) - \frac{4\varrho}{\varrho-1} \alpha_0 \cos \alpha_0 + \sin 2 \alpha_0}{2 \frac{\varrho+1}{\varrho-1} \alpha_0 - \sin 2 \alpha_0} \quad (899)$$

$$M_{y,c} = -pr^2 (1 - \cos \alpha) - X_1 \cos \alpha, \quad M_{x,c} = pr^2 (\alpha - \sin \alpha) + X_1 \sin \alpha.$$

Für den Halbkreisbogenträger $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ist bei Belastung durch eine Einzel-
last P in c

$$M_{y,c} = \frac{Pr}{\pi}, \quad M_{y,a} = -\frac{Pr}{2}, \quad M_{x,a} = \frac{Pr}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right), \quad (900)$$

bei zwei Einzellasten P in e, e'

$$\left. \begin{aligned} M_{y,c} &= \frac{2Pr}{\pi} \left[\cos \alpha_e - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_e \right) \sin \alpha_e \right], & M_{y,a} &= -Pr \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_e \right), \\ M_{x,a} &= \frac{2Pr}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \cos \alpha_e - \alpha_e \sin \alpha_e \right), \end{aligned} \right\} \quad (901)$$

bei gleichmäßig verteilter Last p t/m

$$M_{y,c} = \frac{pr^2}{\pi} (4 - \pi), \quad M_{y,a} = -pr^2, \quad M_{x,a} = pr^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right). \quad (902)$$

Die Größtwerte der Momente treten an der Einspannstelle auf. Bei beliebiger Belastung werden die überzähligen Größen nach Abschn. 63 durch numerische Integration berechnet.

Düsterbehn, F.: Ringförmige Träger. Eisenbau 1920 S. 73. — Derselbe: Einflußlinien ringförmiger Träger. Eisenbau 1921 S. 78. — Derselbe: Biegelinien ringförmiger Träger. Eisenbau 1921 S. 249. — Unold, G.: Der Kreisträger. Berlin 1922. — Heßler, St.: Der nach einem Kreisbogen gekrümmte, beiderseits eingespannte Eisenbetonträger mit rechteckigem Querschnitt. Beton u. Eisen 1927 S. 429. — Derselbe, Der kontinuierliche, halbkreisförmig gebogene und gleichmäßig belastete Eisenbetonträger mit rechteckigem Querschnitt auf 3 und 4 gleich weit entfernten Stützen. Beton u. Eisen 1930 S. 149.

65. Der Trägerrost.

Der Trägerrost besteht aus zwei oder mehr Scharen von Trägern, deren Schwerlinien parallel zu einer Ebene liegen und den Rand des Feldes unter rechtem oder spitzem Winkel schneiden. Die Verbindung der Träger ist in der Regel drehsteif. Sie wird jedoch zur Vereinfachung der Rechnung in einzelnen Fällen nur zug- und druckfest angenommen. Die Enden sind unverschieblich oder elastisch verschieblich und können sich dabei entweder um einen Punkt oder auch um eine vorgeschriebene Achse drehen (Abb. 591). Diese Bewegung der Enden wird durch die starre Einspannung der Träger aufgehoben. Sie ist bei durchlaufenden Rosten durch die Formänderung des zusammenhängenden elastischen Gebildes bestimmt.

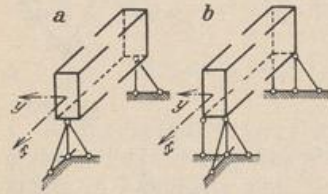


Abb. 591.

Ebenso wie der Plattenbalken als Ausgestaltung des Plattenstreifens angesehen wird, gilt der Trägerrost in konstruktiver Beziehung als Entwicklung der polygonal begrenzten Platte. Trägerrost und Platte unterscheiden sich jedoch von Plattenbalken und Plattenstreifen durch den räumlichen Charakter der Tragwirkung. Dies zeigt bereits die angenäherte statische Untersuchung ohne Berücksichtigung der Drillungssteifigkeit der Platte oder der drehsteifen Verbindung der Träger des Rostes. Sie führt in beiden Fällen zur Aufteilung der Belastung auf zwei statisch gleichwertige biegungssteife Gebilde.

Die Tragwirkung eines Rostes ist bei gleicher Durchbiegung um so größer, je günstiger sich die drehsteife Ausbildung von Träger und Knoten auswirkt. Sie wird durch die seitenschiefe Anordnung der Trägerscharen nach den Patenten von H. Marcus und St. Szegö¹ außerdem noch erhöht, da die Träger im Bereiche der Ecken auf diese Weise negative Biegemomente zugewiesen erhalten, welche die Feldmomente verringern. Diese Vergrößerung der Tragfähigkeit gelingt aber nur bei sorgfältiger Übertragung der Schubspannungen aus der Verdrillung der Träger und bei einwandfreier Eintragung der negativen Stützkkräfte im Bereiche der Ecken. Die gleichen Überlegungen gelten für den Festigkeitsnachweis der Platten, deren Spannungszustand daher auch als Vorbild für die allgemeine Anordnung des Trägerrostes² angesehen werden kann.

Um die allgemeinen statischen und geometrischen Beziehungen für den belasteten Trägerrost zu klären, werden zwei unter einem beliebigen Winkel kreuzende Scharen I, II von parallelen Trägern betrachtet. Bei m Elementen $A \dots H \dots M$ der Gruppe I und r Elementen $\bar{A} \dots \bar{J} \dots \bar{R}$ der Gruppe II einer seitenparallelen Anordnung sind $m \cdot r = n$ Stabknoten vorhanden.

Diese werden in der Rechnung für senkrechte Belastung entweder als zug- und druckfeste, einstäbige Verbindung (a mit Abb. 592a) oder als drehsteife, dreistabige Verbindung der beiden Träger angesehen (b mit Abb. 592b). Der seitenparallele

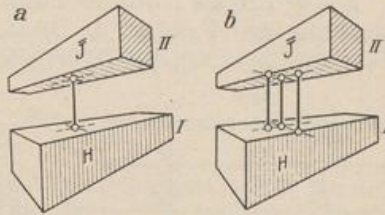


Abb. 592.

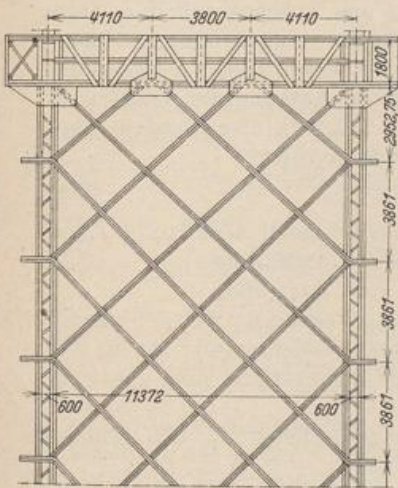


Abb. 593.

¹ Die diagonalen Kreuzträgerroste nach den Vorschlägen von St. Szegö sind nicht neu, sondern bereits im Jahre 1892 bis 95 für die Fahrbahntafel der Elbbrücke Niederwartha und im Jahre 1893 für die Fahrbahntafel der Elbbrücke zwischen Loschwitz und Blasewitz in Dresden (Abb. 593) von Köpcke ausgeführt worden, ohne daß damals ein Patentschutz in Anspruch genommen worden ist.

² Da die wirtschaftlichen Vorzüge der Kreuzrostdecken in der Literatur mehrfach erörtert werden, sind die genauen Kosten von drei verschiedenen Trägeranordnungen über einem quadratischen Grundriß von 12 m Seitenlänge festgestellt worden (Abb. 594, statische Untersuchung S. 628 ff.). Baustoffaufwand mit Löhnen und Schalungskosten in RM nach einer Kalkulation der Löserbauunternehmung Dresden.

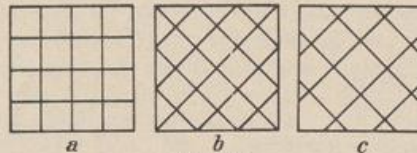


Abb. 594.

- I. Ohne Rücksicht auf die drehsteife Verbindung der Träger.
- II. Mit Rücksicht auf die drehsteife Verbindung der Träger.

	Anordnung a	Anordnung b	Anordnung c
I	2900.—	3150.—	3020.—
II	3155.—	3420.—	3240.—

Der Vergleich des Baustoffaufwandes zeigt zwar bei Anordnung b kleinere Querschnitte, dagegen einen Mehraufwand von ca. 30 lfd. m Träger. Hierdurch geht der Vorteil aus den kleineren Biegemomenten bei An-

ordnung b gegenüber Anordnung a wieder verloren. Der Trägerquerschnitt kann zwar hier noch in einfacher Weise abgestuft werden, um Beton zu sparen, dafür wird dann der Eisenaufwand größer. Die Berücksichtigung der drehsteifen Verbindung ergibt kleinere Trägerhöhen und weniger Rundeseisen für die Balkenbiegung, dafür bedeutet jedoch die Schub-sicherung zur Übertragung der Drillungsmomente eine wesentliche Kostenvermehrung und Arbeitsverteuerung. Das Ergebnis kann bei sorgfältiger Bewehrung des Betons gegen Torsion nicht überraschen.

Beyer, Baustatik, 2. Aufl., 2. Neudruck.

Trägerrost *a* zählt daher bei frei drehbarer Abstützung der Trägerenden (Abb. 591a) $m \cdot r = n$ statisch überzählige Schnittkräfte, während beim Trägerrost *b* $3n$ statisch überzählige Kräfte berechnet werden müssen. Der Verschiebungszustand ist in beiden Fällen durch die n senkrechten Verschiebungen und durch $2n$ Drehwinkel φ_k, ψ_k der Tangenten an die Biegelinien der Träger *I, II* in den Stabknoten k , im ganzen also durch $3n$ unabhängige Komponenten bestimmt. Es liegt daher nahe, die Schnittkräfte des Trägerrostes *a* als Funktion der Belastung und der statisch überzähligen Größen nach Abschn. 24ff. zu berechnen, dagegen die Schnittkräfte des Trägerrostes *b* nach Abschn. 38 aus den $3n$ Komponenten w_k, φ_k, ψ_k des Verschiebungszustandes abzuleiten.

Die statische Untersuchung ohne Berücksichtigung der drehsteifen Verbindung der Träger. 1. Die Längskräfte in den gedachten Verbindungsstäben Abb. 593a zwischen den Trägern der Gruppe *I* und den Trägern der Gruppe *II* sind die

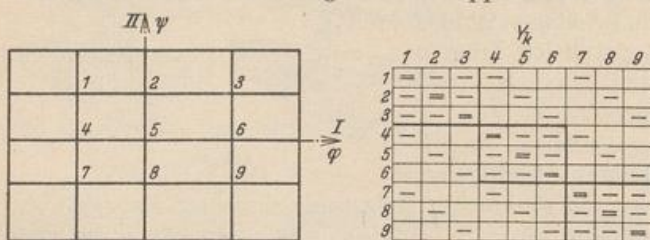


Abb. 595.

statisch überzähligen Größen Y_k des Ansatzes. Ein positiv definiertes Y_k erzeugt in den Verbindungsstäben Druckspannungen und daher in den Trägern *I* positive, in den Trägern *II* negative Biegemomente. Das Hauptsystem besteht mit $Y_k = 0$, je nach

der Abstützung des Rostes am Rande des Feldes, aus Trägern mit frei drehbaren Enden, aus Rahmen oder aus Trägern mit starr eingespannten Enden. Die erste Anordnung ist statisch bestimmt, die beiden anderen sind statisch unbestimmt. Die Kreuzungswinkel der Gruppen *I, II* und der Abstand der Träger sind ohne Bedeutung für die Lösung. Die überzähligen Schnittkräfte werden nach Abschn. 24 aus n geometrischen Bedingungsgleichungen berechnet.

$$\sum Y_h \delta_{kh} = \delta_{k0}, \quad k = 1 \dots n. \tag{903}$$

In jeder von ihnen (h) sind alle Verbindungskräfte Y am Träger H der Gruppe *I* und alle Verbindungskräfte Y am Träger J der Gruppe *II* enthalten.

Ansatz für den Trägerrost mit $m = 3, r = 3, n = 9$, Abb. 595.

Der Ansatz ist bei Symmetrie des Rostes zu einer, zwei oder vier Achsen wesentlich einfacher, da die Belastung in Teile aufgespalten werden kann, die zu den Achsen *I* und *II* oder *III* und *IV* symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Das endgültige Ergebnis entsteht durch Superposition.

Ansatz bei gleichmäßiger Belastung des symmetrischen Rostes (Abb. 596).

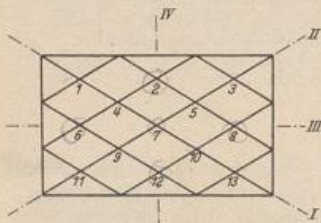


Abb. 596. Trägerrost mit schiefer Symmetrie.

$$Y_2 = 0, \quad Y_6 = 0, \quad Y_{12} = 0, \quad Y_8 = 0, \quad Y_7 = 0;$$

$$(Y_1 = -Y_{11} = Y_{13} = -Y_3) \equiv X_1.$$

$$(Y_4 = -Y_9 = Y_{10} = -Y_5) \equiv X_2.$$

Die überzähligen Verbindungskräfte werden also nach Abschn. 28 zu zwei symmetrischen Gruppenlasten X_1, X_2 zusammengefaßt.

2. Das Ergebnis der Untersuchung kann durch die Fehlerempfindlichkeit der Zahlenrechnung bei Auflösung des Ansatzes und bei der Superposition der Anteile der Biegemomente aus der Belastung und den überzähligen Größen Y_k wesentlich beeinträchtigt werden. Diese Schwierigkeiten lassen sich zum Teil durch eine andere Rechenvorschrift umgehen, in die neben den statisch unbestimmten Schnittkräften

auch Komponenten ϱ_k des Verschiebungszustandes als Unbekannte eingehen. Sie werden nach Abschn. 38 derart ausgewählt, daß sich die statisch unbestimmten Schnittkräfte eines Stabwerks mit $\varrho_k = 0$ durch einfache Ansätze ableiten lassen. Die ausgezeichneten Parameter ϱ_k sind hier die n senkrechten Verschiebungen w_k der Stabknoten, da die Schnittkräfte aller Träger H der Gruppe I und aller Träger \bar{J} der Gruppe II mit $w_k = 0$, ($k = 1, \dots, n$) unabhängig voneinander erhalten werden. Jeder von ihnen wirkt statisch als durchlaufender Träger auf starren, frei drehbaren Lagern. Die Stützmomente werden mit Abb. 597 nach Abschn. 47 bei vorgeschriebenen Verschiebungen w_k aus den geometrischen Bedingungen (650) berechnet. Diese erscheinen stets im EJ_c fachen Betrage $w_k \equiv w_k/EJ_c$.

$$M_{I,(k-1)} l'_k + 2M_{I,k} (l'_k + l'_{k+1}) + M_{I,(k+1)} l'_{k+1} - 6 \left(\frac{w_k - w_{k-1}}{l_k} - \frac{w_{k+1} - w_k}{l_{k+1}} \right) = -6 \delta_{I,k0}, \quad (904)$$

$$M_{II,(k-r)} s'_k + 2M_{II,k} (s'_k + s'_{k+r}) + M_{II,(k+r)} s'_{k+r} - 6 \left(\frac{w_k - w_{k-r}}{s_k} - \frac{w_{k+r} - w_k}{s_{k+r}} \right) = -6 \delta_{II,k0}. \quad (905)$$

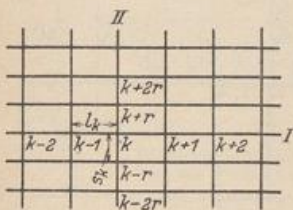


Abb. 597.

Da jedoch die senkrechten Verschiebungen w_k der Knoten unbekannt sind, fehlen zur Berechnung der $3n$ Wurzeln des Ansatzes zunächst noch n Gleichungen. Diese lassen sich mit dem Prinzip der virtuellen Verdrückungen aus dem Gleichgewicht der Schnittkräfte des Rostes am Knoten ableiten. Die statischen

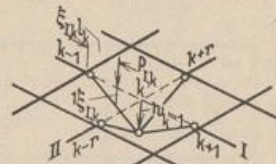


Abb. 598. Kinematische Kette I_k .

Bedingungen werden daher nach (523) für die äußeren Kräfte an n voneinander unabhängigen kinematischen Ketten I_k (Abb. 598) angeschrieben, die mit $w_k = 1$ angetrieben sind.

$$\frac{M_{I,k} - M_{I,k-1}}{l_k} - \frac{M_{I,k+1} - M_{I,k}}{l_{k+1}} + \frac{M_{II,k} - M_{II,k-r}}{s_k} - \frac{M_{II,k+r} - M_{II,k}}{s_{k+r}} - T_k = 0,$$

$$-\frac{1}{l_k} M_{I,k-1} + \left(\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) M_{I,k} - \frac{1}{l_{k+1}} M_{I,k+1} - \frac{1}{s_k} M_{II,k-r} + \left(\frac{1}{s_k} + \frac{1}{s_{k+r}} \right) M_{II,k} - \frac{1}{s_{k+r}} M_{II,k+r} - T_k = 0. \quad (906)$$

$$T_k = \mathfrak{F}_{I,k} \xi_{I,k} + \mathfrak{F}_{I,k+1} \xi_{I,k+1} + \mathfrak{F}_{II,k} \xi_{II,k} + \mathfrak{F}_{II,k+r} \xi_{II,k+r}. \quad (907)$$

Der Ansatz wird nach Abschn. 29 in zwei Stufen aufgelöst. Dabei gelten die Verschiebungen w_k in den Gleichungen (904), (905) zunächst als Teile der Belastungsglieder, so daß der Reihe nach die Schnittkräfte $M_{I,k0}$, $M_{I,kh}$ und $M_{II,k0}$, $M_{II,kh}$ eines durchlaufenden Trägers mit der beliebigen Belastung $\mathfrak{F}_{I,k}$, $\mathfrak{F}_{II,k}$ oder für $w_h = 1$ berechnet werden.

$$M_{I,k} = M_{I,k0} + \sum M_{I,kh} w_h, \quad M_{II,k} = M_{II,k0} + \sum M_{II,kh} w_h.$$

Das Ergebnis liefert in Verbindung mit den Gleichungen (906) der zweiten Stufe die Verschiebungen w_k und durch Rekursion die Biegemomente $M_{I,k}$, $M_{II,k}$.

Die statische Untersuchung des Trägerrostes wird daher am besten mit der Entwicklung der konjugierten Matrix für die dreigliedrigen Gleichungen (904), (905) begonnen, in denen die senkrechten Verschiebungen w_k der Knoten Null sind. Sie zerfällt in Gruppen, die den einzelnen Trägern des Rostes zugeordnet sind und sich voneinander unterscheiden, wenn Knotenzahl und Abmessungen der Träger verschieden sind. Daher genügen bei seitenparalleler Anordnung in der Regel zwei voneinander unabhängige Ansätze. Die Rechnung ist bei Symmetrie des Rostes nach Umordnung der Belastung (Abschn. 27) wesentlich kürzer.

Ansatz für den Trägerrost Abb. 595.

k	$M_{I,k}$									w_k									Gl. (904)		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
1	=	-																			
2	-	=	-																		
3		-	=																		
4				=	-									-	-	-					
5				-	=	-								-	-	-					
6					-	=								-	-	-					
7							=	-										-	-	-	
8							-	=	-									-	-	-	
9								-	=									-	-	-	

k	$M_{II,k}$									w_k									Gl. (905)		
	7	4	1	8	5	2	9	6	3	7	4	1	8	5	2	9	6	3			
7	=	-																			
4	-	=	-																		
1		-	=																		
8				=	-									-	-	-					
5				-	=	-								-	-	-					
2					-	=								-	-	-					
9							=	-										-	-	-	
6							-	=	-									-	-	-	
3								-	=									-	-	-	

k	$M_{I,k}, M_{II,k}$									Gl. (906)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9												
1	=	=	-				-														
2	-		=	=	-				-												
3			-		=	=					-										
4		-					=	=					-								
5				-			-		=	=	-						-				
6					-				-		=	=									-
7								-					=	=	-						
8														-		=	=				-
9																-					=

Berechnung eines seitenparallelen, quadratischen Trägerrostes a für gleichmäßig verteilte Belastung q t/m².

Die Verbindungskräfte Y_1 bis Y_9 sind statisch unbestimmt. Infolge Symmetrie des Tragwerks ist bei gleichmäßig verteilter Belastung:

$$Y_1 = Y_3 = Y_9 = Y_7 = Y_5 = 0, \quad Y_2 = -Y_6 = Y_8 = -Y_4.$$

Die Kräfte $Y_2, -Y_6, Y_8, -Y_4$ werden zu einer symmetrischen Gruppenlast X_1 zusammengefaßt. Der Zustand $-X_1 = 1$ besteht nach Abschn. 28 aus

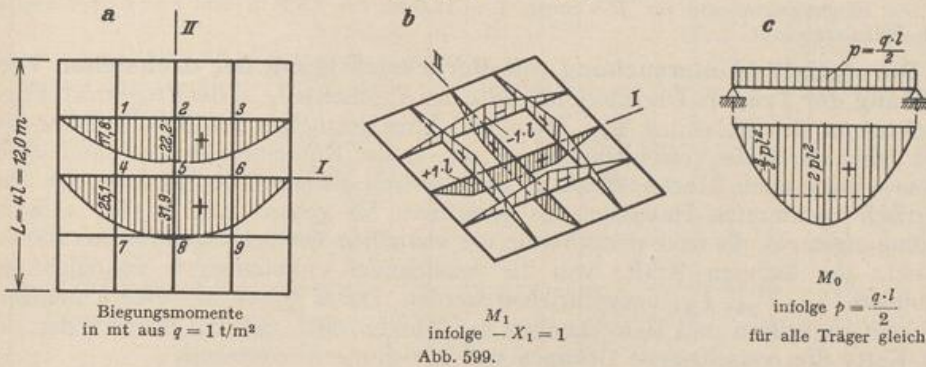
$$-Y_2 = +Y_6 = -Y_8 = +Y_4 = 1.$$

Das Trägheitsmoment ist für alle Träger gleich groß, daher (Abb. 599 b, c)

$$\delta_{11} = 4 \frac{4l'}{3} l^2 + 2 \left(2l' \frac{l^2}{3} + 2l' l^2 \right) = \frac{32}{3} l' l^2,$$

$$\delta_{10} = -4 \cdot \frac{5}{12} 4l' l \cdot 2pl^2 + 2 \left(\frac{5}{12} 4l' \cdot 2l \cdot 2pl^2 - 2l' \cdot \frac{l}{2} \frac{3pl^2}{2} - \frac{5}{12} \cdot 2l' \cdot l \cdot \frac{pl^2}{2} \right) = -\frac{23}{6} l' l^3 p,$$

$$X_1 = \frac{-23 l' l^3 p \cdot 3}{6 \cdot 32 l' l^2} = -\frac{23}{64} pl,$$



$$M_{I,1} = M_{I,3} = \frac{3pl^2}{2} - \frac{23}{64} pl \cdot \frac{l}{2} = \frac{169}{128} pl^2, \quad M_{I,2} = 2pl^2 - \frac{23}{64} pl^2 = \frac{105}{64} pl^2,$$

$$M_{I,4} = M_{I,6} = \frac{3pl^2}{2} + \frac{23}{64} pl \cdot l = \frac{119}{64} pl^2, \quad M_{I,5} = 2pl^2 + \frac{23}{64} pl^2 = \frac{151}{64} pl^2.$$

Die Biegemomente für $l = 3,0 \text{ m}$ und $q = 1 \text{ t/m}^2$ sind in Abb. 599a aufgetragen.

Berechnung eines seitenschiefen, quadratischen Trägerrostes a für gleichmäßig verteilte Belastung $q \text{ t/m}^2$.

Infolge der Symmetrie des Tragwerkes ist

$$(Y_1 = -Y_3 = Y_{13} = -Y_{11}) \equiv X_1, \quad (Y_4 = -Y_6 = Y_{10} = -Y_8) \equiv X_2.$$

Die übrigen Verbindungskräfte sind Null.

$$l = L \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad l_1 = l \frac{J_c}{J_1}, \quad l_2 = l \frac{J_c}{J_2}, \quad l_3 = l \frac{J_c}{J_3}.$$

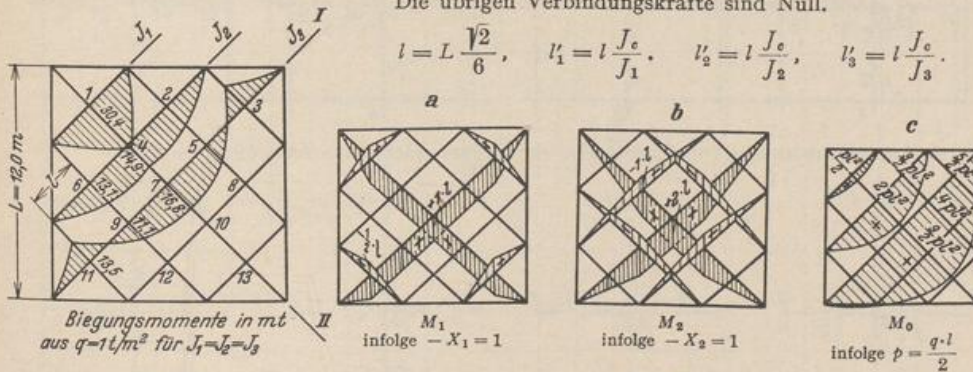


Abb. 601:

$$\delta_{11} = 4 \cdot 2l_1' \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{4} + 2 \left(2l_3' \cdot \frac{1}{3} \cdot l^2 + 4l_2' \cdot l^2 \right) = \frac{2}{3} l^2 (l_1' + 14l_3'),$$

$$\delta_{22} = \frac{16}{3} \cdot l^2 (l_2' + 5l_3'), \quad \delta_{12} = \frac{46}{3} l^2 l_3',$$

$$\delta_{10} = \frac{5}{6} pl^3 (41l_3' - l_1'), \quad \delta_{20} = \frac{4}{3} pl^3 (44l_3' - 10l_2').$$

Bei konstantem Trägheitsmoment ($I_1 = I_2 = I_3 = I'$) entsteht nach Kürzung der Gleichungen mit $\frac{2I'l^2}{3}$ folgende Matrix:

X_1	X_2		
15	23	$50 pl$	$X_1 = + 4.3768 pl$
23	48	$68 pl$	$X_2 = - 0.6805 pl$

$$M_{I,1} = 2,688 pl^2, \quad M_{I,6} = 1,160 pl^2, \quad M_{I,4} = 1,320 pl^2,$$

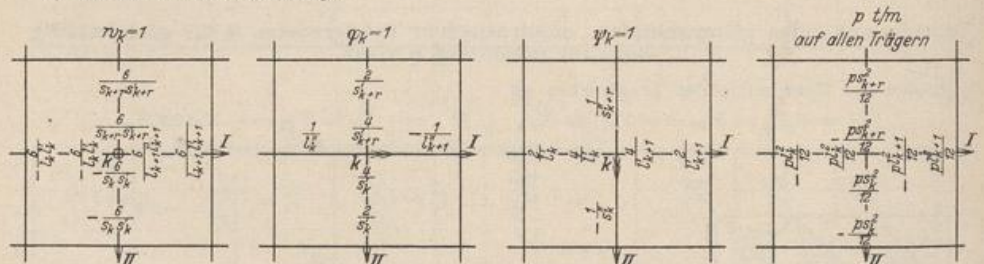
$$M_{I,11} = -1,196 pl^2, \quad M_{I,9} = 0,984 pl^2, \quad M_{I,7} = 1,484 pl^2$$

Die Biegemomente für $J = \text{const}$, $L = 12,0 \text{ m}$, $l = 2,828 \text{ m}$ und $q = 1 \text{ t/m}^2$ sind in Abb. 600 dargestellt.

Die statische Untersuchung mit Berücksichtigung der drehsteifen Verbindung der Träger. Die Anschlußkräfte der Abschnitte l_k, s_k des Trägerrostes sind Funktionen der Belastung $\mathbb{P}_{I,k}, \mathbb{P}_{II,k}$ und ihrer geometrischen Randbedingungen und daher durch die Verschiebungen w_k, φ_k, ψ_k der Knotenpunkte bestimmt (529). Diese werden nach Abschn. 39 als die geometrisch überzähligen Größen eines geometrisch bestimmten Hauptsystems berechnet. Sie gehen dabei in $3n$ statische Bedingungen ein, die nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte von $3n$ voneinander unabhängigen zwangläufigen Gebilden $\Gamma_{\varphi k}, \Gamma_{\psi k}, \Gamma_{w k}$ angeschrieben werden. Dabei gelten alle Bezeichnungen, Rechenvorschriften und Bemerkungen der Abschn. 38 ff., so daß je nach der Art der Kette drei verschiedene Gruppen von Gleichungen entstehen:

$$\left. \begin{aligned} \delta A_{w k} &= a_{w k,0} + \sum w_h a_{w k,h} + \sum \varphi_h \bar{a}_{w k,h} + \sum \psi_h a_{w k,h}^* = 0, \\ \delta A_{\varphi k} &= a_{\varphi k,0} + \sum w_h a_{\varphi k,h} + \sum \varphi_h \bar{a}_{\varphi k,h} + \sum \psi_h a_{\varphi k,h}^* = 0, \\ \delta A_{\psi k} &= a_{\psi k,0} + \sum w_h a_{\psi k,h} + \sum \varphi_h \bar{a}_{\psi k,h} + \sum \psi_h a_{\psi k,h}^* = 0. \end{aligned} \right\} \quad (908)$$

a) Anschlußmomente infolge:



b) Anschlußmomente für Abstützung der Trägerenden nach Abb. 591 a infolge:

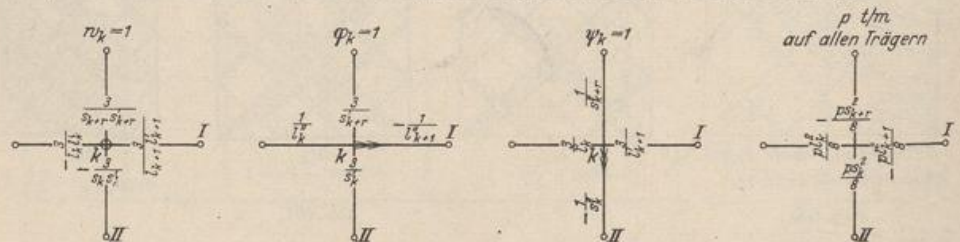


Abb. 602. Die Torsionsmomente an den Stabenden sind gleich und deshalb in Stabmitte eingetragen.

Die Vorzahlen $a_{\varphi k,0}, a_{\varphi k,h}, \bar{a}_{\varphi k,h}, a_{\varphi k,h}^*$ bedeuten nach S. 316 virtuelle Arbeiten an der mit $\dot{\varphi}_k = 1$ angetriebenen zwangläufigen Stabkette $\Gamma_{\varphi k}$ infolge von äußeren Kräften im geometrisch bestimmten Hauptsystem, die entweder von der

k	w									φ									ψ								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

δA_{wk}

$\delta A_{\varphi k}$

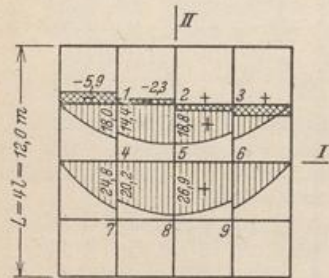
$\delta A_{\psi k}$

Belastung des Trägerrostes ($\mathfrak{B}, \Delta t$), der Verschiebung $w_h = 1$ oder von der Verdrehung $\varphi_h = 1$ oder $\psi_h = 1$ herrühren. Diese lassen sich aus den Ansätzen (533 ff.) entnehmen, so daß die Vorzeichen und Belastungszahlen mit der Abb. 602 unmittelbar angeschrieben werden können. Dabei zeigt sich, daß

$$\bar{a}_{\psi k, h} = a_{\varphi k, h}^* = 0 \quad \text{und} \quad a_{\varphi k, h} = \bar{a}_{w k, h}, \quad a_{\psi k, h} = a_{w k, h}^*.$$

Die 27 unabhängigen statischen Bedingungen zur Berechnung eines unregelmäßigen Trägerrostes nach Abb. 595 bilden die Matrix auf S. 631.

Die Wurzeln w_k, φ_k, ψ_k können durch die Iteration einer Näherungslösung angeschrieben werden, wenn auch dabei langwierige, mühevollere Zahlenrechnungen nicht ausbleiben. Sie sind bei symmetrischen Rosten durch die Umordnung der Belastung (S. 186) wesentlich einfacher. In einzelnen Fällen ist außerdem die Verdrehung der Knoten um ausgezeichnete Achsen infolge der konstruktiven Ausgestaltung des Rostes Null. Die Vorteile der Lösung treten jedoch vor allem bei Trägerrostern mit mehr als zwei Trägerscharen in Erscheinung (Abb. 607), da dann zwar der Grad der statischen Unbestimmtheit zunimmt, dagegen die Anzahl der geometrisch unbekanntenen Komponenten w_k, φ_k, ψ_k unverändert $3n$ bleibt.



▨ Biegemomente
▩ Torsionsmomente
in mt aus $q=1t/m^2$

Abb. 603.

Berechnung eines seitenparallelen, quadratischen Trägerrostes b für gleichmäßig verteilte Belastung q t/m².

Der Trägerrost Abb. 603 ist bei Lagerung der Trägerenden nach Abb. 591 b und drehsteifen Knoten 33fach statisch unbestimmt und 27fach geometrisch unbestimmt. Infolge der Symmetrie von Tragwerk und Belastung genügt ein Ansatz mit 3 statischen oder 5 geometrischen Größen, um den vollständigen Spannungszustand anzugeben. Daher wird der statische Ansatz gewählt.

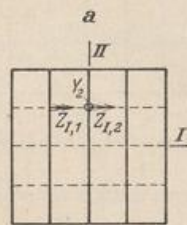
Als Überzählige dienen die Verbindungskräfte Y und die Verbindungsmomente Z_I, Z_{II} , deren Drehsinn nach Abb. 604a positiv ist. Infolge der Symmetrie des Tragwerks ist bei gleichmäßig verteilter Belastung

$$Y_1 = Y_3 = Y_9 = Y_7 = Y_5 = 0, \quad (Y_2 = -Y_6 = Y_8 = -Y_4) \equiv X_1,$$

$$(Z_{I,1} \uparrow Z_{II,1} = Z_{I,3} \wedge Z_{II,3} = -Z_{I,9} \wedge Z_{II,9} = -Z_{I,7} \uparrow Z_{II,7}) \equiv X_2,$$

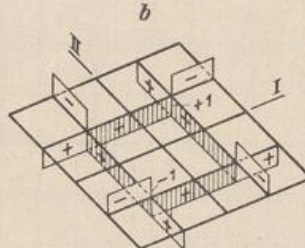
$$Z_{II,2} = Z_{I,6} = Z_{II,8} = Z_{I,4} = Z_{I,5} = Z_{II,5} = 0,$$

$$(Z_{I,2} = -Z_{II,6} = -Z_{I,8} = Z_{II,4}) \equiv X_3.$$



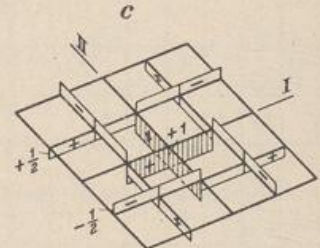
Überzählige
Verbindungskräfte

Abb. 604.



M_2 infolge $-X_2 = 1$

▨ Biegemomente



M_3 infolge $-X_3 = 1$

▩ Torsionsmomente

Das Trägheitsmoment ist hier für alle Träger gleich,

$$I' = l \frac{J_c}{J}, \quad I'' = \rho I', \quad \rho = \frac{E J_g}{G T}$$

und daher nach S. 629

$$\delta_{11} = \frac{32}{3} I' l^2, \quad \delta_{10} = -\frac{23}{6} I' l^3 p.$$

Mit Abb. 604 b, c wird:

$$\delta_{22} = 8 I' (1 + \rho), \quad \delta_{33} = 4 I' (1 + \rho), \quad \delta_{12} = -6 I I', \quad \delta_{13} = 4 I I', \quad \delta_{23} = 4 \rho I',$$

$$\delta_{20} = \frac{44}{3} p I^2 I', \quad \delta_{30} = \frac{22}{3} p I^2 I'.$$

Für Träger, deren Höhe etwa gleich der doppelten Breite ist, ergibt sich nach S. 20 $\varrho \approx 3$ und nach Kürzung der Gleichungen mit $\frac{l'}{3}$ die folgende Matrix.

X_1	X_2	X_3	
$32 l^2$	$-18 l$	$12 l$	$-11,5 p l^3$,
$-18 l$	96	36	$44 p l^2$,
$12 l$	36	48	$22 p l^2$.

Mit $l = 3,0 \text{ m}$ und $q = 1 \text{ t/m}^2$; $p = \frac{q \cdot l}{2} = 1,5 \text{ t/m}$ wird

$$X_1 = -1,523 \text{ t}, \quad X_2 = 3,591 \text{ mt}, \quad X_3 = 4,636 \text{ mt}.$$

Die Schnittkräfte ergeben sich durch Superposition; z. B.:

$$M_{yI,4}^{(4)} = \frac{3}{8} p l^2 - X_1 \cdot l = 24,8 \text{ mt}, \quad M_{yI,4}^{(5)} = \frac{3}{8} p l^2 - X_1 l - X_3 \cdot l = 20,2 \text{ mt},$$

$$M_{xII,4}^{(4)} = M_{xI,2}^{(2)} = -X_3 \cdot \frac{l}{2} = -2,3 \text{ mt}.$$

Die Biegungs- und Torsionsmomente sind in Abb. 603 eingetragen.

Berechnung eines seitenschiefen, quadratischen Trägerrostes b für gleichmäßig verteilte Belastung $q \text{ t/m}^2$.

Der Trägerrost Abb. 605 ist bei Lagerung der Trägerenden nach Abb. 591 b und drehsteifen Knoten 49fach statisch unbestimmt und 39fach geometrisch unbestimmt. Infolge der Symmetrie des Tragwerks genügen jedoch 5 statische oder 7 geometrische Größen zur eindeutigen Angabe des Spannungszustandes. Um auch die Anwendung des Ansatzes (908) zu zeigen, werden die geometrisch unbestimmten Größen $w_1, w_2, w_4, w_7, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ berechnet und zu symmetrischen Gruppenbewegungen zusammengefaßt.

$$(w_1 = w_3 = w_{13} = w_{11}) \equiv W_1, \quad (\varphi_1 = \varphi_3 = -\varphi_{13} = -\varphi_{11}) \equiv \Phi_A,$$

$$(w_4 = w_5 = w_{10} = w_9) \equiv W_2, \quad (\varphi_4 = \varphi_5 = -\varphi_{10} = -\varphi_9) \equiv \Phi_B,$$

$$(w_2 = w_8 = w_{12} = w_6) \equiv W_3, \quad (\varphi_2 \hat{=} \varphi_2 = -\varphi_8 \hat{=} \varphi_8 = -\varphi_{12} \hat{=} \varphi_{12} = +\varphi_6 \hat{=} \varphi_6) \equiv \Phi_C,$$

$$(w_7) \equiv W_4, \quad \varphi_1 = \varphi_4 = \varphi_7 = \varphi_{10} = \varphi_{13} = \varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7 = \varphi_9 = \varphi_{11} = 0.$$

Die Vorzeichen der statischen Bedingungsgleichungen lassen sich nach Abb. 602 unmittelbar anschreiben. Mit

$$l = L \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad l'_1 = l \frac{J_c}{J_1}, \quad l'_2 = l \frac{J_c}{J_2}, \quad l'_3 = l \frac{J_c}{J_3},$$

$$l''_1 = \varrho_1 l'_1, \quad l''_2 = \varrho_2 l'_2, \quad l''_3 = \varrho_3 l'_3$$

ist z. B.

$$a_{11} = 4 \left[-\frac{3}{l^2 l'_3} - 2 \frac{3}{l^2 l'_1} - \frac{12}{l^2 l'_3} \right] = -\frac{12}{l^2 l'_3} \left(5 + 2 \frac{l'_3}{l'_1} \right),$$

$$a_{12} = 4 \frac{12}{l^2 l'_3} = \frac{48}{l^2 l'_3}, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 0,$$

$$a_{22} = 4 \left[-2 \frac{12}{l^2 l'_3} - 2 \frac{12}{l^2 l'_2} \right] = -\frac{96}{l^2 l'_3} \left(1 + \frac{l'_3}{l'_2} \right),$$

$$a_{AA} = 4 \left(-\frac{3}{l'_3} - \frac{4}{l'_3} - \frac{1}{l''_1} - \frac{1}{l''_1} \right) = -\frac{4}{l'_3} \left(7 + 2 \frac{l'_3}{\varrho_1 l'_1} \right),$$

$$a_{AB} = -4 \frac{2}{l'_3} = -\frac{8}{l'_3}, \quad a_{AC} = 0, \quad a_{BB} = 4 \left(-2 \frac{4}{l'_3} - \frac{2}{l''_2} \right) = -\frac{8}{l'_3} \left(4 + \frac{l'_3}{\varrho_2 l'_2} \right),$$

$$a_{A1} = 4 \left(-\frac{3}{l l'_3} + \frac{4}{l l'_3} + \frac{2}{l l'_3} \right) = \frac{12}{l l'_3}, \quad a_{A2} = -\frac{24}{l l'_3}, \quad a_{A3} = 0, \quad a_{A4} = 0,$$

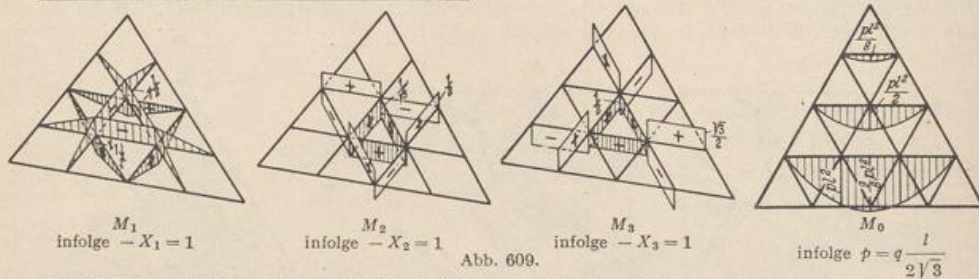
$$a_{B1} = \frac{24}{l l'_3}, \quad a_{B2} = 0, \quad a_{B3} = 0, \quad a_{B4} = -\frac{24}{l l'_3}.$$

$$\delta_{13} = -\frac{3}{4} l l', \quad \delta_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2} l';$$

$$\delta_{10} = -\frac{17}{8} p l' l^2, \quad \delta_{20} = \frac{13}{12} \sqrt{3} p l' l^2, \quad \delta_{30} = \frac{13}{8} p l' l^2.$$

Mit $q = 3, l = 3,464$ m entsteht die folgende Matrix.

X_1	X_2	X_3	$p l^3$	
72,7461	-10,3926	-9,0000	-7,3612	$X_1 = -3,8676 p t,$
-10,3926	19,0526	3,0000	1,8762	$X_2 = 1,8980 p mt,$
-9,0000	3,0000	49,3634	1,6250	$X_3 = 0,5479 p mt.$



Die Schnittkräfte ergeben sich durch Superposition; z. B.:

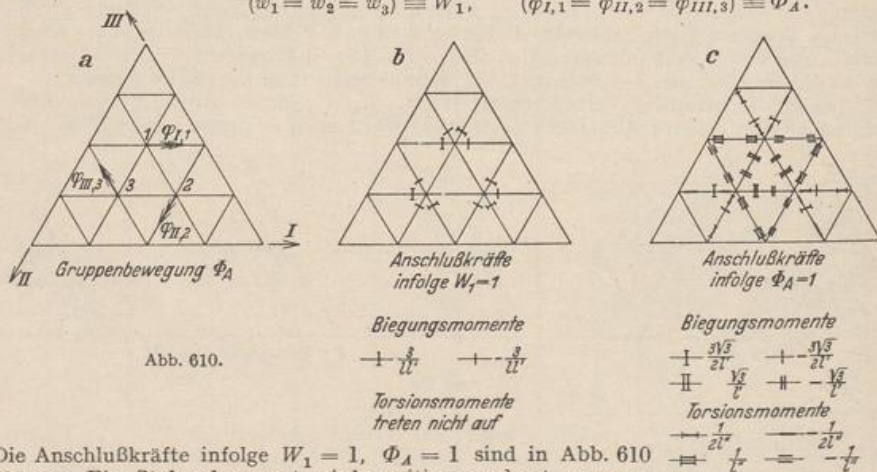
$$M_{yI,3}^{(3)} = p l^2 + X_1 \frac{l}{2} = 5,3 p mt, \quad M_{yI,3}^{(2)} = p l^2 + X_1 \frac{l}{2} - X_2 \frac{1}{\sqrt{3}} - X_3 \frac{1}{2} = 3,9 p mt,$$

$$M_{xI,3}^{(3)} = + X_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5 p mt, \quad M_{xII,3}^{(2)} = 0.$$

Die Biegungs- und Torsionsmomente sind in Abb. 607 dargestellt.

Lösung b) Als geometrisch überzählige Größen dienen die zyklischen Gruppenbewegungen (Abb. 610)

$$(w_1 = w_2 = w_3) \equiv W_1, \quad (\varphi_{I,1} = \varphi_{II,2} = \varphi_{III,3}) \equiv \Phi_A.$$



Die Anschlußkräfte infolge $W_1 = 1, \Phi_A = 1$ sind in Abb. 610 eingetragen. Ein Stabendmoment wird positiv gerechnet, wenn es bei Betrachtung von der zur Stabschar gehörenden Ecke des Rostes im Uhrzeigersinn dreht.

$$a_{AA} = -\frac{2}{l''} - \frac{2}{2l''} \cdot \frac{1}{2} - 2 \frac{3\sqrt{3}}{2l'} \frac{3}{2\sqrt{3}} - 2 \frac{\sqrt{3}}{l'} \frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{5}{2l'} \left(3 + \frac{1}{\rho}\right),$$

$$\frac{a_{11}}{3} = -4 \cdot \frac{3}{l'l'} \cdot \frac{1}{l} = -\frac{12}{l^2 l'}, \quad \frac{a_{A1}}{3} = -2 \frac{3}{l'l'} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{l'l'},$$

$$\frac{a_{A0}}{3} = 2 \frac{p l^2}{8} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} - 2 \frac{p l^2}{12} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{8\sqrt{3}} p l^2, \quad \frac{a_{10}}{3} = 4 \frac{p l^2}{8} \cdot \frac{1}{l} + 4 p l \cdot \frac{1}{2} + p l = \frac{7}{2} p l.$$

Mit $\rho = 3$ und $l' = l = 3,464$ entsteht folgende Matrix:

Φ_A	W_1	p
-2,4056	-0,4330	0,8660
-0,4330	-0,2887	12,1244

$$\Phi_A = -9,8628 p,$$

$$W_1 = 56,7890 p.$$

Die Schnittkräfte ergeben sich nach (505) oder durch Superposition; z. B.

$$M_{v1,3}^{(2)} = \frac{p l^2}{12} + \frac{\sqrt{3}}{l} \Phi_A = -3,9 p \text{ mt.}$$

Die Momente sind in Abb. 607 dargestellt.

Trägerrost mit freien Rändern. Werden die Querträger von Brücken mit mehreren Hauptträgern nicht nur als Teile der Fahrbahntafel betrachtet, sondern in statischer Beziehung in derselben Weise bewertet wie die Hauptträger, so entsteht ebenfalls ein Trägerrost mit seitenparalleler Anordnung. Da jedoch nur die Hauptträger gestützt, dagegen die Enden der Querträger frei sind, besteht deren Aufgabe hier nur in der Verteilung der Belastung eines Hauptträgers auf mehrere von ihnen, jedoch nicht mehr in der Entlastung der Hauptträger. Diese sind entweder Balkenträger auf zwei und mehreren Stützen oder Rahmen. Die Knoten zwischen Haupt- und Querträger sind biegungs- und drehsteif, gelten aber zur Vereinfachung der Rechnung in der Regel nur als zug- und druckfest. Der Brückengrundriß ist stets zu einer, meist aber auch zu zwei Achsen symmetrisch, so daß nach Abschn. 27 und 28 mit zwei- oder vierfacher Umordnung der Belastung und mit statisch unbestimmten Gruppenlasten gerechnet werden kann.

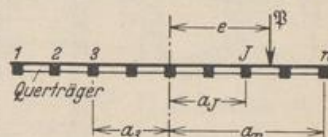


Abb. 611.

Die statische Untersuchung des Trägerrostes ist bei Annahme von sehr steifen Querträgern ($E J_{II} = \infty$) statisch bestimmt, wenn nur die Knotenpunkte und die Querträger belastet sind. Die Achsen der Querträger bleiben dann bei der Formänderung des Rostes gerade Linien. Auf einen Träger J der n Hauptträger entfällt bei Belastung eines Querträgers durch die resultierende Einzellast P (Abb. 611) der Anteil

$$P_J = \frac{P}{n} + \frac{P e}{\sum_{k=1}^n a_k^2} a_J. \quad (909)$$

Diese Annahme ist aber um so weniger berechtigt, je weniger Hauptträger verwendet werden, um die wirtschaftlichen Vorteile einer kreuzweisen Bewehrung der Fahrbahnplatte auszunützen und Schalungskosten zu sparen. Daher genügt die Untersuchung der Trägerroste mit drei und vier Hauptträgern auf je zwei Stützen, die mit den Querträgern zug- und druckfest verbunden angenommen sind. Die Anschlußmomente der mittleren Hauptträger sind die statisch unbestimmten Schnittkräfte der Rechnung.

Berechnung einer Balkenbrücke mit 3 Hauptträgern, Abb. 612.

Geometrische Grundlagen.

$$l = 3,5, \quad s = 3,6 \text{ m}, \quad \kappa = \frac{s}{l} = 1,0286,$$

$$v_1 = \frac{J_1}{J_s} = 7,1111; \quad v_2 = \frac{J_1}{J_2} = 1,3846,$$

$$J_s = J_1.$$

Als statisch überzählige Schnittkräfte X_k dienen die Biegemomente des mittleren Trägers in den Knoten $k = 1 \dots 5$. Das Biegemoment X_3 ist in Abb. 612 als Vektor eingetragen.

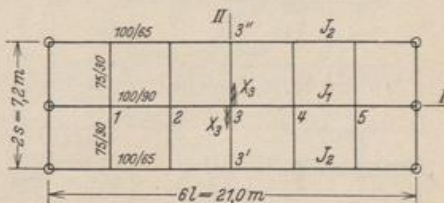
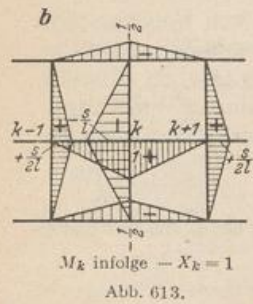
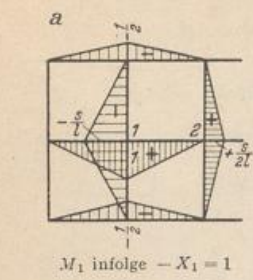


Abb. 612.



Vorzahlen (Abb. 613).

$$\delta_{11} = \frac{l}{3} \left(2 + v_2 + \frac{5}{2} \kappa^3 v_1 \right) = 22,7304 \frac{l}{3},$$

$$\delta_{kk} = \frac{l}{3} \left(2 + v_2 + 3 \kappa^3 v_1 \right) = 26,5995 \frac{l}{3},$$

$$\delta_{k(k-1)} = \delta_{k(k+1)} = \frac{l}{6} \left(1 + \frac{v_2}{2} - 4 \kappa^3 v_1 \right) = -14,6304 \frac{l}{3},$$

$$\delta_{k(k-2)} = \delta_{k(k+2)} = \frac{l}{6} \kappa^3 v_1 = 3,8692 \frac{l}{3}.$$

δ Matrix nach Kürzung mit $l/3$.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
22,7304	-14,6304	3,8692		
-14,6304	26,5995	-14,6304	3,8692	
3,8692	-14,6304	26,5995	-14,6304	3,8692
	3,8692	-14,6304	26,5995	-14,6304
		3,8692	-14,6304	22,7304

Konjugierte Matrix $\beta'_{hk} = \frac{1}{3} \beta_{hk}$.

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}
X_1	0,072972	0,049733	0,017815	0,001388	-0,002039
X_2	0,049733	0,090787	0,051121	0,015676	0,001388
X_3	0,017815	0,051121	0,088648	0,051121	0,017815
X_4	0,001388	0,015676	0,051121	0,090787	0,049733
X_5	-0,002039	0,001388	0,017815	0,049733	0,072972

$$X_A = \sum \frac{3 \beta'_{hk}}{l} \delta_{k0}.$$

Belastungszahlen für $P = 1t$ in Knoten 3 (Abb. 614).

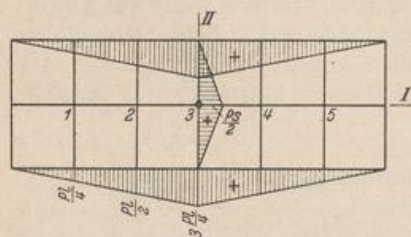


Abb. 614.

$$\delta_{10} = \delta_{50} = -\frac{l}{3} P l \cdot \frac{3}{4} v_2 = -3,6346 \frac{l}{3},$$

$$\delta_{20} = \delta_{40} = -\frac{l}{3} \frac{P l}{2} (3 v_2 - \kappa^3 v_1) = +6,2729 \frac{l}{3},$$

$$\delta_{30} = -\frac{l}{3} P l (2 v_2 + \kappa^3 v_1) = -36,7763 \frac{l}{3},$$

$$X_1 = X_5 = -0,5923, \quad X_2 = X_4 = -1,3980,$$

$$X_3 = -2,7483 \text{ mt.}$$

In der Mitte des Querträgers 3 wird das Biegemoment

$$M_{11,3} = \frac{P s}{2} + X_3 \kappa - X_2 \frac{\kappa}{2} - X_4 \frac{\kappa}{2} = 0,4111 \text{ mt.}$$

Damit ergeben sich die Lastanteile $P_{3,i}$ ($i = a, b, c$) für die Hauptträger (Abb. 615)

$$P_{3,a} = P_{3,c} = 0,114 t, \quad P_{3,b} = 0,772 t$$

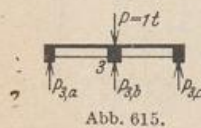


Abb. 615.

und das Biegemoment im mittleren Hauptträger

$$M_{I,3} = -X_3 = 2,748 \text{ mt.}$$

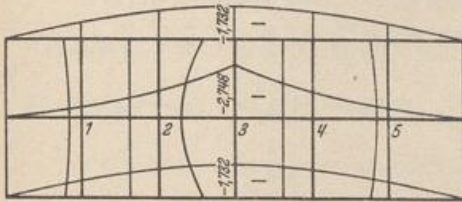
Für Querträger mit $J_s = J_1$, also $\nu_1 = 1$ ist

$$P_{3,a} = P_{3,c} = 0,243 \text{ t, } P_{3,b} = 0,514 \text{ t, } M_{I,3} = 2,586 \text{ mt.}$$

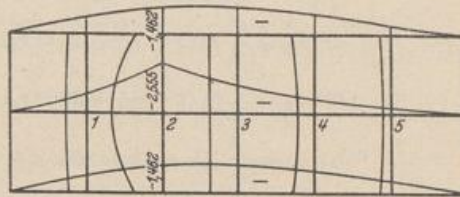
Bei der Annahme $J_{II} = \infty$ wird nach (909)

$$P_{3,a} = P_{3,b} = P_{3,c} = \frac{P}{3} = 0,333 \text{ t, } M_{I,3} = \frac{1}{3} \frac{6l}{4} = 1,750 \text{ mt.}$$

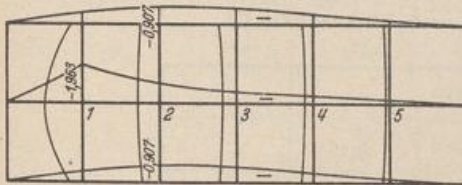
Nach diesem Ergebnis kann auch bei sehr starken Querträgern nicht mit einer gleichmäßigen Lastverteilung auf die 3 Hauptträger gerechnet werden.



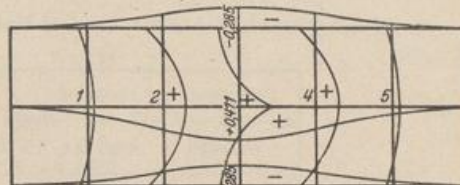
Einflußfläche X_3



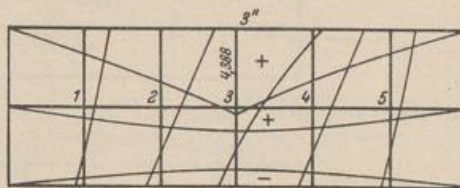
Einflußfläche X_2



Einflußfläche X_1



Einflußfläche $M_{II,3}$ (4-fach verzerrt)



Einflußfläche $M_{I,3''}$

Abb. 616.

Einflußflächen. Wird der Reihe nach jeder Knoten mit $P = 1 \text{ t}$ belastet und die Größe einer Schnittkraft im Lastpunkt als Ordinate senkrecht zur Rostebene aufgetragen, so bilden die Endpunkte aller Ordinaten die Einflußfläche dieser Schnittkraft. Die Belastung der Randträger wird dabei in die zur Achse I symmetrischen und antisymmetrischen Anteile zerlegt. Für den antisymmetrischen Anteil sind die überzähligen Größen Null, die Schnittkräfte daher statisch bestimmt. Die Rechnung bietet keinerlei Schwierigkeiten. Die Einflußflächen von $X_1, X_2, X_3, M_{I,3''}$ und $M_{II,3}$ sind in Abb. 616 dargestellt.

Berechnung einer Balkenbrücke mit 4 Hauptträgern, Abb. 617.

Geometrische Grundlagen.

$$l = 35 \text{ m, } s = 3,6 \text{ m, } \alpha = \frac{s}{l} = 1,0286,$$

$$\nu_1 = \frac{J_1}{J_2} = 1, \quad \nu_2 = \frac{J_1}{J_2} = 1,3846,$$

$$J_c = J_1,$$

Aus den überzähligen Biegemomenten Z'_k, Z''_k der mittleren Hauptträger werden die symmetrischen und antisymmetrischen Gruppenlasten X_k, Y_k gebildet. Mit diesen ist

$$Z_{k'} = X_k + Y_k, \quad Z_{k''} = X_k - Y_k, \quad k = 1 \dots 5.$$

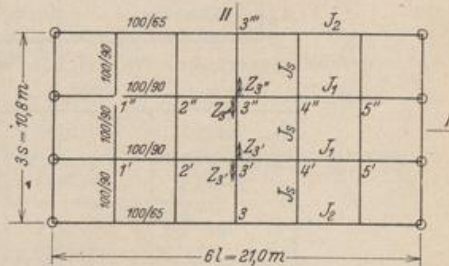
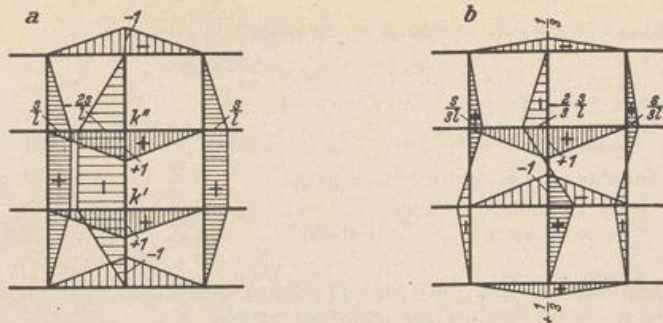


Abb. 617.

Vorzahlen
(Abb. 618).



(1) M_k infolge $-X_k = 1$

Abb. 618.

(2) M_k infolge $-Y_k = 1$

$$\begin{aligned}
 {}^{(1)}\delta_{11} &= \frac{l}{3} [4(1 + \nu_2) + 25 \kappa^3 \nu_1], & {}^{(2)}\delta_{11} &= \frac{l}{3} \left[\frac{4}{9} (9 + \nu_2) + \frac{5}{3} \kappa^3 \nu_1 \right], \\
 {}^{(1)}\delta_{kk} &= \frac{l}{3} [4(1 + \nu_2) + 30 \kappa^3 \nu_1], & {}^{(2)}\delta_{kk} &= \frac{l}{3} \left[\frac{4}{9} (9 + \nu_2) + 2 \kappa^3 \nu_1 \right], \\
 {}^{(1)}\delta_{k(k-1)} &= \frac{l}{3} [(1 + \nu_2) - 20 \kappa^3 \nu_1], & {}^{(2)}\delta_{k(k-1)} &= \frac{l}{3} \left[\frac{1}{9} (9 + \nu_2) - \frac{4}{3} \kappa^3 \nu_1 \right], \\
 {}^{(1)}\delta_{k(k-2)} &= \frac{l}{3} 5 \kappa^3 \nu_1. & {}^{(2)}\delta_{k(k-2)} &= \frac{l}{3} \frac{\kappa^3 \nu_1}{3}.
 \end{aligned}$$

a) Symmetrischer Anteil X_k . ${}^{(1)}\delta$ Matrix nach Kürzung mit $l/3$.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
36,7434	-16,9948	5,4410		
-16,9948	42,1844	-16,9948	5,4410	
5,4410	-16,9948	42,1844	-16,9948	5,4410
	5,4410	-16,9948	42,1844	-16,9948
		5,4410	-16,9948	36,7434

Konjugierte Matrix ${}^{(1)}\beta'_{hk} = \frac{l}{3} {}^{(1)}\beta_{hk}$

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}
X_1	0,033623	0,014069	0,000676	-0,001944	-0,001000
X_2	0,014069	0,034300	0,012125	-0,000323	-0,001944
X_3	0,000676	0,012125	0,033300	0,012125	0,000676
X_4	-0,001944	-0,000323	0,012125	0,034300	0,014069
X_5	-0,001000	-0,001944	0,000676	0,014069	0,033623

b) Antimetrischer Anteil Y_k . ${}^{(2)}\delta$ Matrix nach Kürzung mit $l/3$.

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
6,4291	-0,2971	0,3627		
-0,2971	6,7918	-0,2971	0,3627	
0,3727	-0,2971	6,7918	-0,2971	0,3627
	0,3627	-0,2971	6,7918	-0,2971
		0,3627	-0,2971	6,4291

Konjugierte Matrix ${}^{(2)}\beta_{ik} = \frac{l}{3} {}^{(2)}\rho_{ik}$.

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}
Y_1	0,15030	0,00652	-0,00812	-0,00069	-0,00043
Y_2	0,00652	0,14819	0,00584	-0,00769	-0,00069
Y_3	-0,00812	0,00584	0,14861	0,00584	-0,00812
Y_4	-0,00069	-0,00769	0,00584	0,14819	0,00052
Y_5	+0,00043	-0,00069	-0,00812	0,00652	0,15030

Belastung $P = 1 \text{ t}$ in $3''$. Für den symmetrischen Anteil $P/2$ auf $3'$ und $3''$ wird (Abb. 618a)

$${}^{(1)}\delta_{10} = {}^{(1)}\delta_{50} = -\frac{l}{3} P l \frac{3}{2} v_2 = -7,2692 \frac{l}{3}, \quad {}^{(1)}\delta_{20} = {}^{(1)}\delta_{40} = -\frac{l}{3} P l \frac{1}{2} (6v_2 - 5z^2 v_1) = -5,0166 \frac{l}{3},$$

$${}^{(1)}\delta_{30} = -\frac{l}{3} P l (4v_2 + 5z^2 v_1) = -38,4279 \frac{l}{3}.$$

$$X_1 = X_5 = -0,3239, \quad X_2 = X_4 = -0,7295, \quad X_3 = -1,4112.$$

Für den antisymmetrischen Anteil $+P/2$ auf $3''$, $-P/2$ auf $3'$ wird (Abb. 618b)

$${}^{(2)}\delta_{10} = {}^{(2)}\delta_{50} = -\frac{l}{3} P l \frac{1}{6} v_2 = -0,8077 \frac{l}{3}, \quad {}^{(2)}\delta_{20} = {}^{(2)}\delta_{40} = -\frac{l}{3} P l \frac{1}{6} (2v_2 - z^2 v_1) = -0,9806 \frac{l}{3},$$

$${}^{(2)}\delta_{30} = -\frac{l}{3} P l \frac{1}{9} (4v_2 + 3z^2 v_1) = -3,4235 \frac{l}{3}.$$

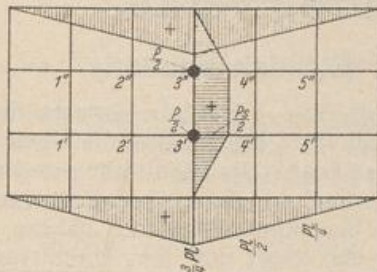
$$Y_1 = Y_5 = -0,1045, \quad Y_2 = Y_4 = -0,1625, \quad Y_3 = -0,5071;$$

$$Z_{3''} = -1,4112 - 0,5071 = -1,9183 \text{ mt.}$$

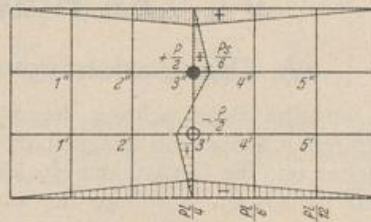
Die Biegemomente in Querträger 3 werden

$$M_{II,3''} = \frac{s}{2} + 2z(X_3 - X_2) + \frac{s}{6} + \frac{2}{3}z(Y_3 - Y_2) = 0,7510 \text{ mt.},$$

$$M_{II,3'} = \frac{s}{2} + 2z(X_3 - X_2) - \frac{s}{6} - \frac{2}{3}z(Y_3 - Y_2) = 0,0236 \text{ mt.}$$



a) Biegemomente ${}^{(1)}M_0$



b) Biegemomente ${}^{(2)}M_0$

Abb. 619.

Damit ergeben sich die Lastanteile $P_{3,i}$ ($i = a \div d$) für die Hauptträger (Abb. 619a).

$$P_{3,a} = 0,209 \text{ t}, \quad P_{3,b} = 0,589 \text{ t}, \quad P_{3,c} = 0,195 \text{ t}, \quad P_{3,d} = 0,0065 \text{ t};$$

$$M_{I,3''} = -Z_{3''} = 1,918 \text{ mt.},$$

$$M_{I,3'''} = 1,579 \text{ mt.}$$



Abb. 619a.

Bei der Annahme $J_{II} = \infty$ wird nach (909)

$$P_{3,a} = 0,40 \text{ t}, \quad P_{3,b} = 0,30 \text{ t}, \quad P_{3,c} = 0,20 \text{ t}, \quad P_{3,d} = 0,10 \text{ t}.$$

$$M_{I,3''} = \frac{0,3 \cdot 6l}{4} = 1,58 \text{ mt.}, \quad M_{I,3'''} = \frac{0,4 \cdot 6l}{4} = 2,10 \text{ mt.}$$

Belastung $P = 1 \text{ t}$ in $3'''$. Das Ergebnis ist:

$$P_{3,a} = 0,844 \text{ t}, \quad P_{3,b} = 0,250 \text{ t}, \quad P_{3,c} = -0,031 \text{ t}, \quad P_{3,d} = -0,063 \text{ t}.$$

Das Biegemoment im Randträger wird

$$M_{I,3'''} = 3,916 \text{ mt.}$$

Bei der Annahme $J_{II} = \infty$ wird nach (909)

$$P_{3,a} = 0,70 \text{ t}, \quad P_{3,b} = 0,40 \text{ t}, \quad P_{3,c} = 0,10 \text{ t}, \quad P_{3,d} = -0,26 \text{ t},$$

$$M_{I,3'''} = 3,68 \text{ mt.}$$

Einflußflächen. Entwicklung nach S. 639 (Abb. 620).

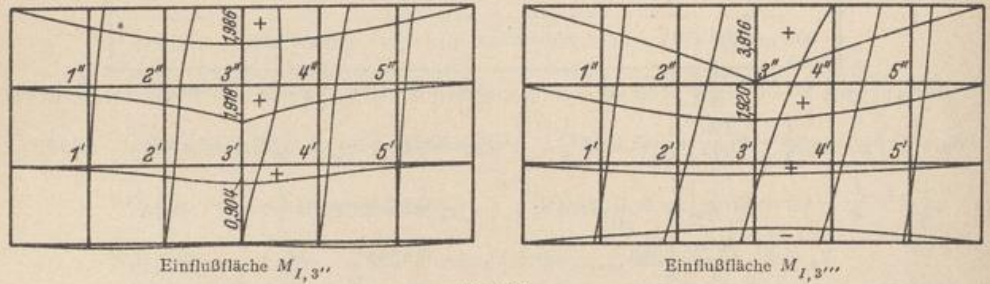


Abb. 620.

Zschetzke: Theorie lastverteilender Querverbindungen. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893. — Bleich: Theorie und Berechnung eiserner Brücken. Berlin 1924. — Petermann: Überlastverteilende Wirkung durchgehender Querverbindungen. Bautechn. 1925. — Schilling, W.: Statik der Bodenkonstruktionen der Schiffe. Berlin 1925. — Faltus, F.: Lastverteilende Querverbindungen. Bauing. 1927 S. 853. — Genthner, R.: Der Eisenbetonträgerrost. Beton u. Eisen 1928 S. 411. — Marcus, H.: Die weitgespannten Decken des Sportgebäudes im Stadion Breslau-Leerbeutel. Beton u. Eisen 1929 S. 73. — Szegö, St.: Kreuzweise gespannte Balkenkonstruktionen. Zement 1930 S. 34. — Derselbe: Über die Berechnung quadratischer Kreuzekroste. Zement 1930 Heft 38 bis 42. — Marcus, H.: Die Theorie der Rautendecke. Bauing. 1932 S. 303. — Szegö, St.: Die Kreuzekrostbauweise. Beton u. Eisen 1932 S. 122. — Derselbe: Anwendung der Kreuzekrostbauweise auf Hofkellerdecken. Zement 1932 S. 676.

VI. Die Flächentragwerke.

66. Die Beziehungen zur Elastizitätstheorie.

Die einfache Beherrschung des Spannungs- und Verschiebungszustandes der biegesteifen Stäbe und Träger hat wesentlich dazu beigetragen, die Überbauten der Brücken und die Gerüste der Hochbauten als Stab- oder Fachwerke auszubilden. Während jedoch im Stahlbau die Formänderung des Haupttragwerks von den sekundären, zur unmittelbaren Lastaufnahme bestimmten Bauteilen nahezu unabhängig ist, sind diese im Eisenbetonbau in der Regel mit dem Haupttragwerk homogen verbunden, so daß zusammenhängende elastische Gebilde entstehen, deren Verschiebungszustand sich wesentlich von demjenigen des freien Haupttragwerks unterscheidet. Auf diese Weise sind in der jüngsten Vergangenheit, begünstigt durch den Fortschritt der theoretischen und physikalischen Erkenntnis, auch Flächentragwerke entwickelt worden. Die Trägerroste wurden zu Platten und Pilzdecken, die ebenen Stab- und Fachwerke zu Scheiben, die Rippenkuppeln und Flechtwerke zu Schalen.

Der Festigkeitsnachweis dieser elastischen Gebilde ist seit Jahrzehnten durch wissenschaftliche Arbeiten über Elastizitätstheorie vorbereitet worden, so daß sich die Baustatik auf zahlreiche bekannte Ergebnisse zu stützen vermag. Trotzdem bereitet der Festigkeitsnachweis für die Flächentragwerke des Bauwesens oft noch