Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Tabelle der Beiwerte μk, λk und μ für verschiedene Funktionen ξk = Jk/J bei unsymmetrischer Ausbildung in den Endfeldern

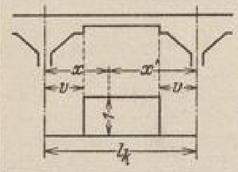
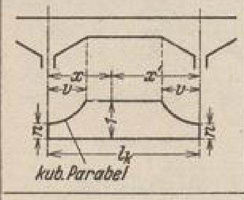
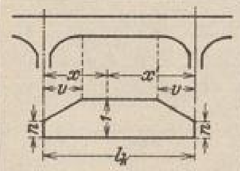
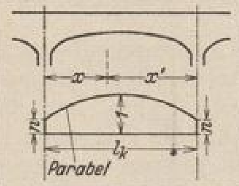
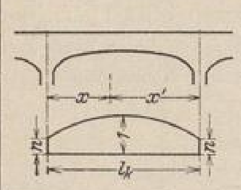
$$\left.\begin{aligned} \delta_{11,1} &= 2\overline{\mu}_1 l_1'/6\,, & \overline{\mu}_1 &= 3\int_0^1 \xi^2 \zeta_1\, d\xi\,, \\ \delta_{nn,2} &= 2\overline{\mu}_n l_{n+1}'/6\,, & \overline{\mu}_n &= 3\int_0^1 \xi'^2 \zeta_{n+1}\, d\xi\,. \end{aligned}\right\} \tag{635}$$

Die Beiwerte $\mu_k, \lambda_k, \overline{\mu}$ werden für die Approximation der Querschnittsfunktion ζ_k nach (634) berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 29 eingetragen.

Tabelle 29. Beiwerte μ_k, λ_k und $\overline{\mu}$ für verschiedene Funktionen $\zeta_k = J_k/J$; reduzierte Biegelinien $\overline{\omega}_D = \dfrac{6}{l_k\, l_k'}\,\delta_{k\,m}$, $\overline{\omega}_D' = \dfrac{6}{l_k\, l_k'}\,\delta_{(k-1)\,m}$.

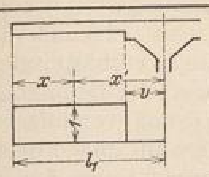
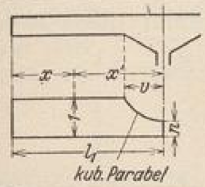
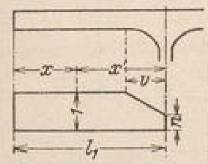
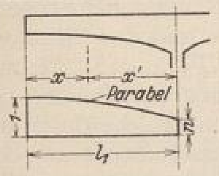
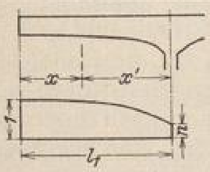
$\xi = x/l$, $\xi' = x'/l = 1 - \xi$, $\xi'' = \frac{1}{2} - \xi'$; $\nu = v/l$, $\nu' = 1 - \nu$.

a) Symmetrische Funktionen ζ_k ($\zeta_k = \text{const}$: $\mu = \lambda = 1$). ω_D nach Tab. 22 S. 116.

1 ζ_k		$\mu_k = (1 - 2\nu)(1 - \nu\nu')$ $= \nu'^3 - \nu^3$ $\lambda_k = (1 - 2\nu)(1 + 2\nu\nu')$	$\overline{\omega}_D = \omega_D - \nu^2\{3\xi - 2\nu(2\xi - 1)\}$ * $\overline{\omega}_D' = \omega_D' - \nu^2\{3\xi' - 2\nu(2\xi' - 1)\}$
2 ζ_k		(angenähert) $\mu_k = 1 - (1 - n)\left[2\nu\nu' + \dfrac{\nu}{3}\right]$ $\lambda_k = 1 - 3(1 - n)\nu^2$	$\overline{\omega}_D = \omega_D - (1 - n)\nu^2\left[\dfrac{9}{5}\xi - \nu(2\xi - 1)\right]$ * $\overline{\omega}_D' = \omega_D' - (1 - n)\nu^2\left[\dfrac{9}{5}\xi' - \nu(2\xi' - 1)\right]$
3 ζ_k		$\mu_k = 1 - \dfrac{1 - n}{2}\nu(2 + \nu'^2)$ $\lambda_k = 1 - (1 - n)\nu^2(2 - \nu)$	$\overline{\omega}_D = \omega_D - \dfrac{1 - n}{2}\nu^2(\nu + 2\nu'\xi)$ * $\overline{\omega}_D' = \omega_D' - \dfrac{1 - n}{2}\nu^2(\nu + 2\nu'\xi')$
4 ζ_k		$\zeta_k = 1 - 4(1 - n)\xi''^2$ $\mu_k = \dfrac{2n + 3}{5}$ $\lambda_k = \dfrac{n + 4}{5}$	$\overline{\omega}_D = \omega_D - \dfrac{1 - n}{5}\{\omega_D - 2\omega_R\xi^2(3\xi' - 1)\}$ $\overline{\omega}_D' = \omega_D' - \dfrac{1 - n}{5}\{\omega_D' - 2\omega_R\xi'^2(3\xi - 1)\}$
5 ζ_k		$\zeta_k = 1 - (1 - n)(2\xi'')^{2r}$ $\mu_k = \dfrac{3n(r+1) + r(4r+5)}{(2r+1)(2r+3)}$ $\lambda_k = \dfrac{3n + 4r(r+2)}{(2r+1)(2r+3)}$	$\overline{\omega}_D = \omega_D - \dfrac{3}{2}(1 - n)\Phi$ $\Phi = \dfrac{\{1 + (2r+1)\xi\}\{1 - (2\xi - 1)^{2(r+1)}\}}{(2r+1)(2r+2)(2r+3)}$ $\overline{\omega}_D' = \omega_D' - \dfrac{3}{2}(1 - n)\Psi$ $\Psi \doteq \dfrac{\{1 + (2r+1)\xi'\}\{1 - (2\xi' - 1)^{2(r+1)}\}}{(2r+1)(2r+2)(2r+3)}$

* $\overline{\omega}_D$ und $\overline{\omega}_D'$ für den Bereich zwischen den Vouten.

Tabelle 29 (Fortsetzung). b) Unsymmetrische Funktionen ζ_k.

6 ζ_k		$\bar{\mu} = \nu'^3 \approx \mu_k$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \xi \nu^2 (1 + 2\nu')$ * Feld $n+1$ $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \xi' \nu^2 (1 + 2\nu')$
7 ζ_k		(angenähert) $\bar{\mu} = 1 - (1-n)\left[2\nu\nu' + \frac{\nu}{3}\right]$ $= \mu_k$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \xi \nu^2 (1-n)\left(\frac{9}{5} - \nu\right)$ * Feld $n+1$ $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \xi' \nu^2 (1-n)\left(\frac{9}{5} - \nu\right)$
8 ζ_k		$\bar{\mu} = 1 - \frac{1-n}{4}\nu[(2-\nu)^2 + 2]$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{1-n}{2}\nu^2 (2-\nu)\xi$ * Feld $n+1$ $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \frac{1-n}{2}\nu^2 (2-\nu)\xi'$
9 ζ_k		$\zeta_k = 1 - (1-n)\xi'^2$ $\bar{\mu} = \frac{3n+2}{5}$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{3}{10}(1-n)(\xi - \xi^5)$ Feld $n+1$ $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \frac{3}{10}(1-n)(\xi' - \xi'^5)$
10 ζ_k		$\zeta_k = 1 - (1-n)\xi'^r$ $\bar{\mu} = \frac{3n+r}{3+r}$	Feld 1 $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{6(1-n)}{(r+2)(r+3)}(\xi - \xi^{r+3})$ Feld $n+1$ $\bar{\omega}'_D = \omega'_D - \frac{6(1-n)}{(r+2)(r+3)}(\xi' - \xi'^{r+3})$

Die Beiwerte λ sind bei der Verstärkung des Trägers nächst den Stützen durch Vouten mit $\nu \leqq 0{,}2$ angenähert gleich 1.

Die Belastungszahlen $\delta_{(k-1)0}$, δ_{k0} werden trotz der Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften der Träger in den Vorzahlen des Ansatzes nach einer der Funktionen ζ_k in der Regel nur mit konstantem Trägheitsmoment angegeben. Die Fehler sind bei der Unsicherheit in der Bemessung und Eintragung der Lasten meist ohne Bedeutung. Sie werden aber trotzdem in den Einflußlinien δ_{km}, d. h. also in den Biegelinien δ_{mk} des Hauptsystems besser vermieden, um für die Einflußlinien stetige Linien zu erhalten.

Die genauen Belastungszahlen entstehen durch numerische Integration von (300) und bei der Einführung einer der ausgezeichneten Funktionen ζ_k durch Anwendung der Tabellen 12 bis 21. In diesen sind auch die Ordinaten der Biegelinien δ_{mk} für Träger mit Vouten angeschrieben. In der Regel genügt jedoch die Berechnung der Biegelinien für den Bereich des Trägers zwischen den Vouten mit $J = J_k$ und die geradlinige Verlängerung bis zum Stützpunkt, da hier die Krümmung infolge des größeren Trägheitsmomentes der Vouten klein ist. Die Ordinaten des mittleren Abschnitts werden nach

$$\delta_{mk} = \frac{l_k l'_k}{6}\,\bar{\omega}_D \qquad (636)$$

* $\bar{\omega}_D$ und $\bar{\omega}'_D$ für den Bereich zwischen den Vouten.

mit den Angaben der Tabelle 29 für die Funktion $\overline{\omega}_D$ berechnet. Bei annähernd konstantem Trägheitsmoment der einzelnen Träger k des Hauptsystems gelten die Vorzahlen und die Belastungszahlen der Tabelle 12. $\overline{\omega}_D$ wird dann gleich ω_D. Ist außerdem noch das mittlere Trägheitsmoment des Trägers k zur Stützweite l_k verhältnisgleich und damit $l_k J_c / J_k = l'_k = l'$, so erhalten die überzähligen Größen der Bedingungsgleichungen (297) konstante Koeffizienten, die Ansatz und Lösung vereinfachen.

Die Schnittkräfte des Trägers aus einer Belastung $\mathfrak{P}$ und den ihr zugeordneten überzähligen Größen X_{k-1}, X_k, X_{k+1} sind aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte oder durch die formale Superposition nach (332) bestimmt (Abb. 360).

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Stützenmomente:} & -M_{k-1} = X_{k-1}, \qquad -M_k = X_k, \\
\text{Momente im Felde } l_k: & M = M_0 - X_{k-1}\xi' - X_k \xi, \\
\text{,, \quad ,, \quad ,, } l_{k+1}: & M = M_0 - X_k \xi' - X_{k+1}\xi, \\
\text{Querkräfte im Felde } l_k: & Q = Q_0 - \dfrac{1}{l_k}(X_k - X_{k-1}), \\
\text{,, \quad ,, \quad ,, } l_{k+1}: & Q = Q_0 - \dfrac{1}{l_{k+1}}(X_{k+1} - X_k), \\
\text{Stützkraft:} & A_k = A_0 + \dfrac{1}{l_k}(X_k - X_{k-1}) - \dfrac{1}{l_{k+1}}(X_{k+1} - X_k).
\end{array}\right\} \quad (637)$$

Die Ansätze gelten auch für die Bildung der Einflußlinien. Die Buchstaben A_0, M_0, Q_0 bezeichnen daher entweder die Stütz- und Schnittkräfte des einfachen Trägers oder deren Einflußlinien. Die Grenzwerte der Stützenmomente und der Biegungsmomente in Querschnitten zwischen dem Festpunkte $F_{(k-1)k}$, $F_{k(k-1)}$ (S. 255) aus gleichförmiger Belastung p treten stets bei feldweiser Belastung ein. In dem benachbarten Bereiche genügt in der Regel eine lineare Funktion, welche durch die Grenzwerte der Biegungsmomente in den Stütz- und Festpunkten bestimmt ist. (Abb. 374i.) Aus diesem Grunde sind auch die Festpunkte F_{1a} und F_{nb} für die Randfelder l_1, l_{n+1} mit frei drehbaren Endstützen notwendig. Sie werden außerdem noch verwendet, um die Schnittkräfte des durchgehenden Trägers aus einem statisch bestimmten Biegungsmoment M_a oder M_b über einer Endstütze, z. B. durch Belastung eines Kragarmes, graphisch zu verfolgen. Die Abstände der Festpunkte sind nach (435) durch $\varkappa_{1a} = \delta_{1a}/\delta_{11}^{(n-1)} = \delta_{1a}\beta_{11}$ und $\varkappa_{nb} = \delta_{nb}/\delta_{nn}^{(n-1)} = \delta_{nb}\beta_{nn}$ bestimmt.

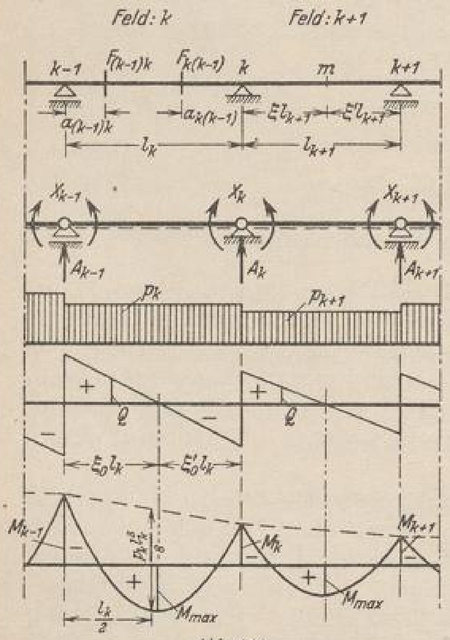


Abb. 360.

$$a_{1a} = \frac{\varkappa_{1a} l_1}{1 + \varkappa_{1a}}, \qquad a_{nb} = \frac{\varkappa_{nb} l_{n+1}}{1 + \varkappa_{nb}}. \quad (638)$$

Mit M_p^* und Q_p^* als Biegungsmoment und Querkraft für gleichförmig verteilte volle Belastung des ganzen Trägers ist

$$\left.\begin{array}{l}
\max M_p + \min M_p = M_p^*, \\
\max Q_p + \min Q_p = Q_p^*.
\end{array}\right\} \quad (639)$$

Daher kann oft zur Vereinfachung der Rechnung der eine Grenzwert aus M_p^*, Q_p^* und dem anderen berechnet werden.

Die Biegungsmomente des Trägers l_k sind bei gleichförmiger Belastung p_k (Abb. 360)

$$M = \frac{p_k l_k^2}{2}\omega_R - X_{k-1}\xi' - X_k \xi. \quad (640)$$

Die Abszissen $\xi_0 l_k$, $\xi_0' l_k$ des Grenzwertes $M_{\max}$ werden nach S. 42 aus der Bedingung $dM/d\xi = 0$ bestimmt. Mit

$$X_k - X_{k-1} = \varDelta X_k \quad \text{ist} \quad \xi_0 = \frac{1}{2} - \frac{\varDelta X_k}{p_k l_k^2}, \qquad \xi_0' = \frac{1}{2} + \frac{\varDelta X_k}{p_k l_k^2} \tag{641}$$

und

$$M_{\max} = \frac{p_k l_k^2}{2}\,\xi_0^2 - X_{k-1} = \frac{p_k l_k^2}{2}\,\xi_0'^2 - X_k\,. \tag{642}$$

1. Träger über einem Feld. a) Einfach statisch unbestimmte Anordnung. Der Träger ist links eingespannt, rechts frei drehbar gelagert. Als statisch überzählige Größe X_1 dient das Einspannungsmoment $-M_a$ (Abb. 361).

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11} + \varepsilon_1} \text{ (starre Einspannung: } \varepsilon_1 = 0)\,. \tag{643}$$

Zahlenrechnung bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment nach Abschn. 18, bei Approximation der elastischen Eigenschaften nach (635). Darnach ist für $\varepsilon_1 = 0$ (starre Einspannung) $\delta_{11} = \bar{\mu}\, 2l'/6$, bei gleichbleibendem Querschnitt $\delta_{11} = l'/3$ und δ_{10} nach Tabelle 12 einzusetzen. Der Festpunkt F_{1b} wird mit $\delta_{1b} = \lambda l'/6$ nach (437) durch

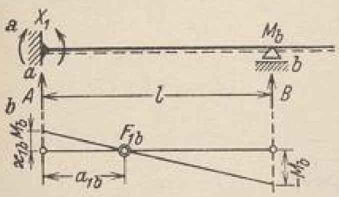


Abb. 361.

$$\frac{X_1}{M_b} = \varkappa_{1b} = \frac{\lambda}{2\bar{\mu}}, \qquad a_{1b} = \frac{\lambda l}{\lambda + 2\bar{\mu}} \tag{644}$$

bestimmt; für $J = \text{const}$ ist $\lambda = \bar{\mu} = 1$, $\varkappa_{1b} = 1/2$, $a_{1b} = l/3$.

Bei Belastung des Kragträgers ist das Stützenmoment M_b statisch bestimmt und daher $X_1 = \varkappa_{1b} \cdot M_b$ (Abb. 361). Stütz- und Schnittkräfte für Träger mit konstantem Trägheitsmoment und $\varepsilon_1 = 0$ sind in Tabelle 30 eingetragen.

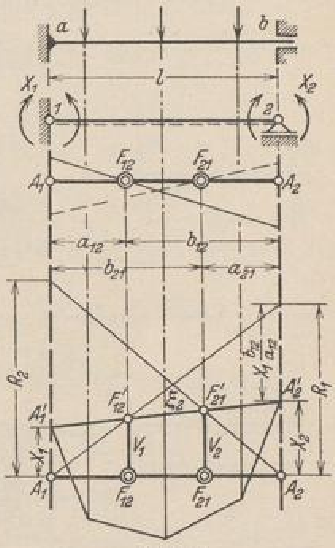


Abb. 362.

b) Zweifach statisch unbestimmte Anordnung. Der Träger ist auf der einen Seite starr, auf der anderen beweglich eingespannt (Abb. 362). Als statisch überzählige Größen werden die Einspannungsmomente $-M_a = X_1$, $-M_b = X_2$ verwendet und nach (345) für elastische Verdrehung der Stützen berechnet. Der $E J_c$fache Betrag der gegenseitigen Verdrehung der Stützenquerschnitte durch $-X_1 = 1$ oder $-X_2 = 1$ ist dann

$$\delta_{11} + \varepsilon_1 = \delta_{11}^*, \qquad \delta_{22} + \varepsilon_2 = \delta_{22}^*, \tag{645}$$

so daß die folgenden geometrischen Bedingungsgleichungen entstehen:

$$X_1 \delta_{11}^* + X_2 \delta_{12} = \delta_{10}, \qquad X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}^* = \delta_{20}\,.$$

Die Vorzahlen und Belastungszahlen ergeben sich bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment nach Abschn. 18, bei Approximation der Funktion ζ nach Tabelle 29. Darnach ist $\delta_{11} = \delta_{22} = 2\mu l'/6$, $\delta_{12} = \lambda l'/6$. Die algebraische Auflösung der Gleichungen steht auf S. 172, die Verwendung der Ergebnisse auf S. 396.

Zur graphischen Auflösung des Ansatzes dient folgende Umformung:

$$X_1 \frac{\delta_{11} + \varepsilon_1}{\delta_{12}} + X_2 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{12}}, \qquad X_1 + X_2 \frac{\delta_{22} + \varepsilon_2}{\delta_{12}} = \frac{\delta_{20}}{\delta_{12}}\,.$$