



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Träger über einem Feld

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Abszissen $\xi_0 l_k, \xi'_0 l_k$ des Grenzwertes M_{\max} werden nach S. 42 aus der Bedingung $dM/d\xi = 0$ bestimmt. Mit

$$X_k - X_{k-1} = \Delta X_k \quad \text{ist} \quad \xi_0 = \frac{1}{2} - \frac{\Delta X_k}{p_k l_k^2}, \quad \xi'_0 = \frac{1}{2} + \frac{\Delta X_k}{p_k l_k^2} \quad (641)$$

und

$$M_{\max} = \frac{p_k l_k^2}{2} \xi_0^2 - X_{k-1} = \frac{p_k l_k^2}{2} \xi'_0{}^2 - X_k. \quad (642)$$

1. Träger über einem Feld. a) Einfach statisch unbestimmte Anordnung. Der Träger ist links eingespannt, rechts frei drehbar gelagert. Als statisch überzählige Größe X_1 dient das Einspannungsmoment $-M_a$ (Abb. 361).

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11} + \varepsilon_1} \quad (\text{starre Einspannung: } \varepsilon_1 = 0). \quad (643)$$

Zahlenrechnung bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment nach Abschn. 18,

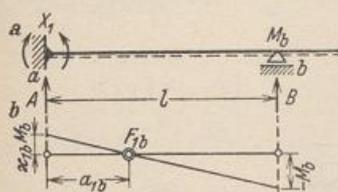


Abb. 361.

bei Approximation der elastischen Eigenschaften nach (635). Darnach ist für $\varepsilon_1 = 0$ (starre Einspannung) $\delta_{11} = \bar{\mu} 2l/6$, bei gleichbleibendem Querschnitt $\delta_{11} = l/3$ und δ_{10} nach Tabelle 12 einzusetzen. Der Festpunkt

F_{1b} wird mit $\delta_{1b} = \lambda l/6$ nach (437) durch

$$\frac{X_1}{M_b} = \kappa_{1b} = \frac{\lambda}{2\bar{\mu}}, \quad a_{1b} = \frac{\lambda l}{\lambda + 2\bar{\mu}} \quad (644)$$

bestimmt; für $J = \text{const}$ ist $\lambda = \bar{\mu} = 1$, $\kappa_{1b} = 1/2$, $a_{1b} = l/3$.

Bei Belastung des Kragträgers ist das Stützmoment M_b statisch bestimmt und daher $X_1 = \kappa_{1b} \cdot M_b$ (Abb. 361). Stütz- und Schnittkräfte für Träger mit konstantem Trägheitsmoment und $\varepsilon_1 = 0$ sind in Tabelle 30 eingetragen.

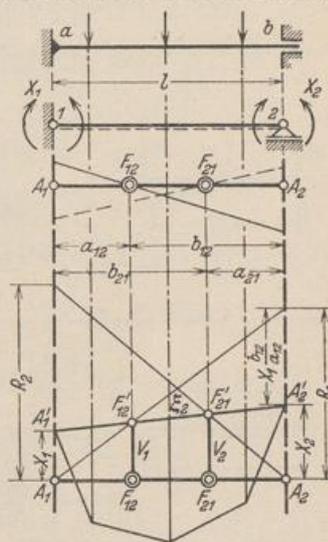


Abb. 362.

b) Zweifach statisch unbestimmte Anordnung. Der Träger ist auf der einen Seite starr, auf der anderen beweglich eingespannt (Abb. 362). Als statisch überzählige Größen werden die Einspannungsmomente $-M_a = X_1, -M_b = X_2$ verwendet und nach (345) für elastische Verdrehung der Stützen berechnet. Der EJ_c -fache Betrag der gegenseitigen Verdrehung der Stützenquerschnitte durch $-X_1 = 1$ oder $-X_2 = 1$ ist dann

$$\delta_{11} + \varepsilon_1 = \delta_{11}^*, \quad \delta_{22} + \varepsilon_2 = \delta_{22}^*, \quad (645)$$

so daß die folgenden geometrischen Bedingungsgleichungen entstehen:

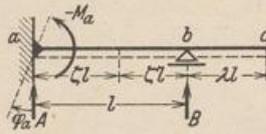
$$X_1 \delta_{11}^* + X_2 \delta_{12} = \delta_{10}, \quad X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}^* = \delta_{20}.$$

Die Vorzeichen und Belastungszahlen ergeben sich bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment nach Abschn. 18, bei Approximation der Funktion ζ nach Tabelle 29. Darnach ist $\delta_{11} = \delta_{22} = 2\bar{\mu} l/6$, $\delta_{12} = \lambda l/6$. Die algebraische Auflösung der Gleichungen steht auf S. 172, die Verwendung der Ergebnisse auf S. 396.

Zur graphischen Auflösung des Ansatzes dient folgende Umformung:

$$X_1 \frac{\delta_{11} + \varepsilon_1}{\delta_{12}} + X_2 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{12}}, \quad X_1 + X_2 \frac{\delta_{22} + \varepsilon_2}{\delta_{12}} = \frac{\delta_{20}}{\delta_{12}}.$$

Tabelle 30. Links eingespannter, rechts frei gelagerter Träger, $J = \text{const.}$



Abszissen der Belastung: $\xi l, \xi' l$

Abszissen der Stabquerschnitte: $\zeta l, \zeta' l$

$-M_a = X_1$; Schnittkräfte zwischen a und b:

$$M = M_0 - X_1 \zeta'; \quad Q = Q_0 + X_1/l;$$

$$A = A_0 + X_1/l; \quad B = B_0 - X_1/l.$$

$A = \frac{1}{2}(2 - 3\xi^2 + \xi^3)$ $B = \frac{1}{2}\xi^2(3 - \xi)$ $M_a = -\frac{l}{2}(\xi' - \xi'^3) = -\frac{l}{2}\omega_D'$ $\zeta = \xi: \quad M_m = \frac{l}{2}\xi^2\xi'(3 - \xi)$	$A = \frac{5}{8}pl$ $B = \frac{3}{8}pl$ $M_a = -\frac{pl^2}{8}$ $\zeta = \frac{5}{8}: \quad \max M = \frac{9pl^2}{128}$
$A = -\frac{3}{2}\xi'$ $B = \frac{1}{2}(3\xi - 1)$ $M_a = +\frac{l}{2}\xi'$ $M_b = -l\xi'$	$A = -\frac{3}{4}pl\lambda^2$ $B = \frac{pl}{4}\lambda(4 + 3\lambda)$ $M_a = \frac{pl^2}{4}\lambda^2$ $M_b = -\frac{pl^2}{2}\lambda^2$
$A = \frac{pl}{2}\alpha(2 - \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{4})$ $B = \frac{pl}{2}\alpha^3(1 - \frac{\alpha}{4})$ $M_a = -\frac{pl^2}{2}\alpha^2(1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{4})$	$A = \frac{pl}{8}\alpha^2(6 - \alpha^2)$ $B = \frac{pl}{8}\alpha'(8 - 6\alpha' + \alpha'^3)$ $M_a = -\frac{pl^2}{8}\alpha'^2(2 - \alpha'^2)$
$A = \frac{pl}{40}\alpha(20 - 5\alpha^2 + \alpha^3)$ $B = \frac{pl}{40}\alpha^3(5 - \alpha)$ $M_a = -\frac{pl^2}{120}\alpha^2(20 - 15\alpha + 3\alpha^2)$ <p>Sonderfall: $\alpha = 1$</p> $A = \frac{2}{5}pl; \quad B = \frac{1}{15}pl; \quad M_a = -\frac{1}{15}pl^2$	$A = \frac{pl}{40}\alpha'^2(10 - \alpha'^2)$ $B = \frac{pl}{40}\alpha'(20 - 10\alpha' + \alpha'^3)$ $M_a = -\frac{pl^2}{120}\alpha'^2(10 - 3\alpha'^2)$ <p>Sonderfall: $\alpha' = 1$</p> $A = \frac{1}{10}pl; \quad B = \frac{1}{10}pl; \quad M_a = -\frac{1}{15}pl^2$
$A = -\frac{3}{2l}M\xi(2 - \xi) = -B; \quad M_a = +\frac{1}{2}M(1 - 3\xi'^2) = +\frac{1}{2}M\omega_M'$ <p>Sonderfall: $\xi = 1; \quad A = -\frac{3}{2l}M = -B; \quad M_a = +\frac{1}{2}M$</p>	

Ungleichförmige Temperaturänderung $t_o - t_u = \Delta t$: $M_a = \frac{3}{8}EJ_c \alpha_t \Delta t/h$

Stützenverschiebungen Δ_a, Δ_b und φ_a : $M_a = EJ_c \frac{3}{l} \left(\varphi_a + \frac{\Delta_a}{l} - \frac{\Delta_b}{l} \right)$

Tabelle 31. Beiderseits eingespannter Träger, $J = \text{const}^*$.



Abszissen der Belastung: $\xi l, \xi' l$
 Abszissen der Stabquerschnitte: $\zeta l, \zeta' l$
 $-M_a = X_1; -M_b = X_2.$

$$M = M_0 - X_1 \xi' - X_2 \xi; \quad A = A_0 - \frac{X_2 - X_1}{l}$$

$$Q = Q_0 - \frac{X_2 - X_1}{l}; \quad B = B_0 + \frac{X_2 - X_1}{l}$$

$A = \xi'^2 (1 + 2 \xi)$
 $B = \xi^2 (1 + 2 \xi')$
 $M_a = -l \xi \xi'^2; M_b = -l \xi^2 \xi'$
 $\zeta = \xi; M_m = 2 l \xi^2 \xi'^2$

$A = B = \frac{p l}{2}$
 $M_a = M_b = -\frac{p l^2}{12}$
 $\zeta = 0,2113$ und $\zeta = 0,7887; M = 0$
 $\zeta = 0,5; \max M = +\frac{p l^2}{24}$

$A = -6 M \xi (1 - \xi) 1/l$
 $B = +6 M \xi' (1 - \xi') 1/l$
 $M_a = -M (1 - 4 \xi + 3 \xi^2)$
 $M_b = -M \xi' (2 - 3 \xi')$

$A = \frac{p l}{20} \alpha'^3 (15 - 8 \alpha')$
 $B = \frac{p l}{20} \alpha' [10 - \alpha'^2 (15 - 8 \alpha')]$
 $M_a = -\frac{p l^2}{20} \alpha'^3 (5 - 4 \alpha')$
 $M_b = -\frac{p l^2}{30} \alpha'^2 (10 - 15 \alpha' + 6 \alpha'^2)$

$A = 2 p l \gamma [\xi'^2 (3 - 2 \xi') - \gamma^2 (2 \xi' - 1)]$
 $B = 2 p l \gamma [\xi^2 (3 - 2 \xi) - \gamma^2 (2 \xi - 1)]$
 $M_a = -\frac{2}{3} p l^2 \gamma [3 \xi'^2 \xi - \gamma^2 (3 \xi' - 1)]$
 $M_b = -\frac{2}{3} p l^2 \gamma [3 \xi^2 \xi' - \gamma^2 (3 \xi - 1)]$
 Sonderfall: $\gamma = \xi \leq 0,5$
 $A = 2 p l \xi [1 - 4 \xi^2 \xi']; B = 8 p l \xi^3 \xi'$
 $M_a = -\frac{2}{3} p l^2 \xi^2 [1 - 4 \xi' + 6 \xi'^2]$
 $M_b = -\frac{2}{3} p l^2 \xi^3 (2 - 3 \xi')$
 Sonderfall $\xi = 0,5: A = B = p l \gamma$
 $M_a = M_b = -\frac{p l^2}{12} \gamma [3 - 4 \gamma^2]$

$A = \frac{p l}{20} \alpha'^3 (5 - 2 \alpha')$
 $B = \frac{p l}{20} \alpha' [10 - \alpha'^2 (5 - 2 \alpha')]$
 $M_a = -\frac{p l^2}{60} \alpha'^3 (5 - 3 \alpha')$
 $M_b = -\frac{p l^2}{60} \alpha'^2 [10 (1 - \alpha') + 3 \alpha'^2]$
 Sonderfall: $\alpha' = 1$
 $A = \frac{p}{10} p l, B = \frac{p}{10} p l$
 $M_a = -\frac{1}{10} p l^2, M_b = -\frac{1}{10} p l^2$
 $\zeta = 0,237$ und $\zeta = 0,808; M = 0$
 $\zeta = 0,548; \max M = \frac{p l^2}{46,6}$

Ungleichförmige Temperaturänderung $t_0 - t_u = \Delta t: M_a = M_b = -E J_c \alpha_t \Delta t/h$

Stützenverschiebungen $\Delta_a, \Delta_b: M_a = -\frac{6}{l^2} (\Delta_b - \Delta_a) E J; M_b = -\frac{6}{l^2} (\Delta_a - \Delta_b) E J$

Stützenverdrehungen $\varphi_a, \varphi_b: M_a = +\frac{2}{l} (2 \varphi_a - \varphi_b) E J; M_b = \frac{2}{l} (2 \varphi_b - \varphi_a) E J$

* Weitere Belastungsfälle siehe Tabelle 17 Seite 112.

In dieser sind die reziproken Vorzahlen nach S. 255 Kennbeziehungen zwischen den Einspannungsmomenten. Sie bestimmen die Festpunkte F_{12}, F_{21} der Untersuchung (Abb. 362).

$$\delta_{10} = 0: \left. \begin{aligned} -\frac{X_1}{X_2} &= \frac{a_{12}}{b_{12}} = \kappa_{12} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} + \varepsilon_1} = \frac{\lambda}{2\mu + 6\varepsilon_1/l}, \\ \delta_{20} = 0: -\frac{X_2}{X_1} &= \frac{a_{21}}{b_{21}} = \kappa_{21} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22} + \varepsilon_2} = \frac{\lambda}{2\mu + 6\varepsilon_2/l}. \end{aligned} \right\} \quad (646)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} + \delta_{12} + \varepsilon_1} l = \frac{\lambda l}{2\mu + \lambda + 6\varepsilon_1/l}, \\ a_{21} &= \frac{\delta_{12}}{\delta_{22} + \delta_{12} + \varepsilon_2} l = \frac{\lambda l}{2\mu + \lambda + 6\varepsilon_2/l}. \end{aligned} \right\} \quad (647)$$

Je mehr sich die Endquerschnitte bei der Belastung des Trägers drehen, je größer also ε_1 und ε_2 vorgeschrieben werden, um so kleiner sind die Strecken a_{12}, a_{21} .

$$X_1 \frac{b_{12}}{a_{12}} + X_2 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{12}} = R_1, \quad X_1 + X_2 \frac{b_{21}}{a_{21}} = \frac{\delta_{20}}{\delta_{12}} = R_2.$$

Die Quotienten R_1, R_2 besitzen die Dimension der unbekanntenen Einspannungsmomente. Sie sind unabhängig von den statisch unbestimmten Größen und erhalten durch die Art der graphischen Auflösung die Bezeichnung Kreuzlinienabschnitte. In der Regel werden die den Festpunkten F_{12}, F_{21} zugeordneten Ordinaten V_1, V_2 verwendet.

$$V_1 = \frac{a_{12}}{l} R_1 = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda + 6\varepsilon_1/l} R_1, \quad V_2 = \frac{a_{21}}{l} R_2 = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda + 6\varepsilon_2/l} R_2. \quad (648)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment und $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ ist $a_{12} = a_{21} = l/3, \kappa_{12} = \kappa_{21} = 1/2,$

$$R_1 = \frac{6\delta_{10}}{l}, \quad R_2 = \frac{6\delta_{20}}{l}; \quad V_1 = \frac{2\delta_{10}}{l}, \quad V_2 = \frac{2\delta_{20}}{l}. \quad (649)$$

Die Belastungszahlen δ_{10}, δ_{20} sind in Abschn. 18 als Verdrehung der Endtangente eines einfachen Balkenträgers angegeben, so daß sich besondere Tabellen für die Kreuzlinienabschnitte R_1, R_2 erübrigen. Die Abb. 362 zeigt neben der graphischen Ermittlung von X_1, X_2 aus R_1, R_2 oder V_1, V_2 außerdem noch die der Biegemomente des ganzen Trägers nach (637).

Bei konstantem Trägheitsmoment und $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ entstehen Stütz- und Schnittkräfte nach Tabelle 31 (S. 399).

Die Anwendung der Tabellen 30 u. 31 läßt sich an der Berechnung einer Kranbahnstütze zeigen, deren Enden nach Abb. 363 frei, frei drehbar oder starr eingespannt sind.

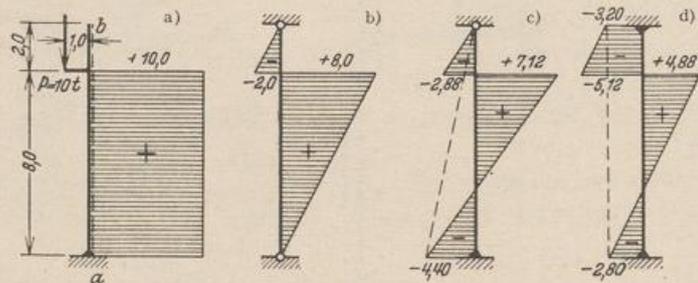


Abb. 363.

Abb. 363a: Kragträger und Abb. 363b: Balkenträger, Schnittkräfte nach Tabelle 6 u. 7.
Abb. 363c: Einseitig eingespannter und gelenkig gestützter Stab.

Tabelle 30 liefert für $M = -10,0 \text{ mt}, l = 10,0 \text{ m}, \xi = 0,8$

$$A = -B = + \frac{3}{2 \cdot 10,0} 10,0 \cdot 0,8 (2 - 0,8) = 1,44 \text{ t},$$

$$M_a = -\frac{1}{2} 10,0 [1 - 3 \cdot 0,2^2] = -4,4 \text{ mt}.$$

Abb. 363d: Beiderseits eingespannte Stütze.

Nach Tabelle 31 wird für $M = -10,0$ mt, $l = 10,0$ m, $\xi = 0,8$

$$A = -B = +6 \cdot 10,0 \cdot 0,8 (1 - 0,8) \frac{1}{10,0} = 0,96 \text{ t.}$$

$$M_a = +10,0 [1 - 4 \cdot 0,8 + 3 \cdot 0,8^2] = -2,8 \text{ mt.}$$

$$M_b = +10,0 \cdot 0,8 (2 - 3 \cdot 0,8) = -3,2 \text{ mt.}$$

2. Träger über zwei Feldern. Allgemeine Anordnung nach Abb. 364. Hauptsystem: Zwei einfache Träger (I), (II). Statisch überzählige Größen: Einspannungsmomente $-M_a = X_1$, $-M_c = X_3$, Stützenmoment $-M_b = X_2$. Berechnung bei allgemeiner Anordnung nach Abschn. 26, bei feldweise konstantem Trägheitsmoment mit Tabelle 32, Teil A. Teil B enthält Angaben bei veränderlichem Trägheitsmoment.

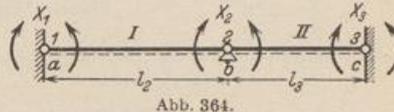


Abb. 364.

Tabelle 32. Träger über zwei Feldern.

A. Das Trägheitsmoment ist feldweise konstant.

Abkürzungen: 1) $\alpha = l_2/l_3$, 2) $\alpha' = l_2'/l_3'$, 3) $\varphi = 2(1 + \alpha')$,
4) $\psi = \frac{4 + 3\alpha'}{2}$, 5) $\eta = \frac{3 + 4\alpha'}{2}$.

Klammerwerte $[\omega_D' - \kappa_{k(k-1)} \omega_D]$ und $[\omega_D - \kappa_{k(k-1)} \omega_D']$ sind für $0,200 < \kappa < 0,380$ in Tabelle 34 Seite 410 angegeben.

Formeln zur Ermittlung der Festpunktabstände aus den Kennbezeichnungen:

$$a_{(k-1)k} = \frac{\kappa_{(k-1)k} l_k}{1 + \kappa_{(k-1)k}}, \quad a_{k(k-1)} = \frac{\kappa_{k(k-1)} l_k}{1 + \kappa_{k(k-1)}}.$$

Berechnung der Stützkräfte: vgl. Seite 396 und 424.

a) Anordnung Abb. 365.

$$-M_b = X_2$$

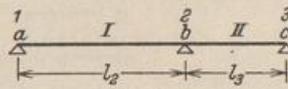


Abb. 365.

Kennbeziehungen:

$$\begin{aligned} \kappa_{a2} &= 0, & \kappa_{c2} &= 0, \\ \kappa_{2c} &= \frac{1}{\varphi}, & \kappa_{2a} &= \frac{\alpha'}{\varphi}. \end{aligned}$$

$$X_2 = \frac{1}{\varphi l_3'} 6 \delta_{20}.$$

Einflusslinien:

Bereich	I	II
φX_2	$l_2 \alpha' \omega_D$	$l_3 \omega_D'$

Schnittkräfte für feldweise Belastung:

Belastung			
X_2	$\frac{p l_2^3 \alpha'}{4 \varphi}$	$\frac{p l_3^3}{4 \varphi}$	$\frac{p l_3^3}{4 \varphi} (1 + \alpha'^2)$
I	max M	$\frac{p l_2^3}{2} \xi_0^2$	$\frac{p l_3^3}{2} \xi_0^2$
	ξ_0	$\frac{\psi}{2 \varphi}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4 \alpha'^2} \frac{1 + \alpha'^2}{\varphi}$
II	max M	$\frac{p l_2^3}{2} \xi_0'^2$	$\frac{p l_3^3}{2} \xi_0'^2$
	ξ_0'	$\frac{\eta}{2 \varphi}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{1 + \alpha'^2}{\varphi}$