



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

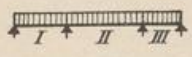
47. Der durchlaufende Balkenträger auf beliebig vielen frei drehbaren  
Zwischenstützen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

b)  $Q_{\max}$ : Nach (639) ist

$$Q_{\max} = Q^* - Q_{\min}.$$

Vollbelastung:		$X_2^* = \frac{1}{31} (360 + 405 - 40,5) = 23,35 \text{ mt}$	
		$X_3^* = \frac{1}{31} (-60 + 351 + 216) = 16,36 \text{ mt}$	
Bereich:	I	II	III
$Q_0^*$	$\left(\frac{1}{2} - \xi\right) l_2 = (0,5 - \xi) 12,0$	$\left(\frac{1}{2} - \xi\right) l_3 = (0,5 - \xi) 18,0$	$\left(\frac{1}{2} - \xi\right) l_4 = (0,5 - \xi) 9,0$
$Q^*$	$Q_0^* - X_2^*/l_2 = (0,5 - \xi) 12,0 - \frac{23,35}{12,0} = 12,0 (0,338 - \xi)$	$Q_0^* + (X_2^* - X_3^*)/l_3 = (0,5 - \xi) 18,0 + \frac{23,35 - 16,36}{18,0} = 18,0 (0,522 - \xi)$	$Q_0^* + X_3^*/l_4 = (0,5 - \xi) 9,0 + \frac{16,36}{9,0} = 9,0 (0,702 - \xi)$

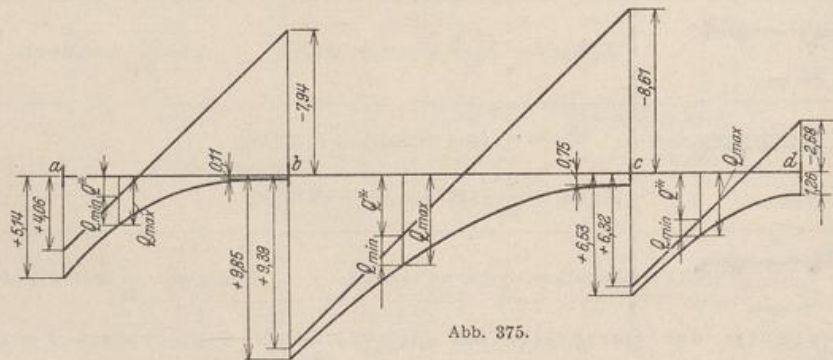


Abb. 375.

Überzählige Größen aus ungleichförmiger Erwärmung:

$$t_u - t_0 = \Delta t = 15^\circ; \quad d = 1,0 \text{ m}; \quad E J_e = 240 100 \text{ tm}^2;$$

$$X_2 = 240 100 \frac{0,00001 \cdot 15}{1,0} \cdot \frac{3}{18,0 \cdot 31} [6 (12,0 + 18,0) - (18,0 + 9,0)] = 29,60 \text{ mt},$$

$$X_3 = 240 100 \frac{0,00001 \cdot 15}{1,0} \cdot \frac{3}{18,0 \cdot 31} \left[ \frac{16}{3} (18,0 + 9,0) - (12,0 + 18,0) \right] = 22,08 \text{ mt}.$$

Überzählige Größen aus Stützenverschiebungen:

$$\Delta_a = 0; \quad \Delta_b = 0,010 \text{ m}; \quad \Delta_c = 0,015 \text{ m}; \quad \Delta_d = 0; \quad E J_e = 240 100 \text{ tm}^2;$$

$$X_2 = 240 100 \frac{6}{18,0 \cdot 31} \left[ \frac{1}{12,0} (-0,01) 6 - \frac{1}{18,0} (0,01 - 0,015) (6 + 1) + \frac{1}{9,0} 0,015 \right],$$

$$X_3 = 240 100 \frac{6}{18,0 \cdot 31} \left[ \frac{1}{9,0} (-0,015) \frac{16}{3} - \frac{1}{18,0} (0,015 - 0,01) \left( \frac{16}{3} + 1 \right) + \frac{1}{12,0} 0,01 \right],$$

$$X_2 = -3,58 \text{ mt}; \quad X_3 = -25,4 \text{ mt}.$$

### 47. Der durchlaufende Balkenträger auf beliebig vielen frei drehbaren Zwischenstützen.

Die Endstützen des Tragwerks sind frei drehbar aufgelagert oder starr eingespannt. Elastische Einspannung der Endstützen kann nach S. 397 berücksichtigt werden. Die Verwendung der Einspannungs- und Stützenmomente  $-M_k$  ( $k = 1 \dots n$ )







Tabelle 35<sup>1</sup>. Belastungszahlen.

	$6 \delta_{k0} = l_k l'_k \sum_k P \omega_D + l_{k+1} l'_{k+1} \sum_{k+1} P \omega'_D$ <p>Ergebnisse für vorgeschriebene Lastengruppen vgl. S. 112.</p>
	$6 \delta_{k0} = l'_k \sum_k M \omega_M - l'_{k+1} \sum_{k+1} M \omega'_M$
<p>Streckenbelastung:</p>	
	$c_k = c'_{k+1} = \frac{1}{4}$ $c_k = c'_{k+1} = \frac{2}{15}$
	$c_k = c'_{k+1} = \frac{5}{32}$ $c_k = c'_{k+1} = \frac{7}{60}$
	$c_k = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2)^2, \quad c'_{k+1} = \frac{1}{4} (1 - \zeta'^2)^2$
	$c_k = \frac{1}{4} \zeta^2 (2 - \zeta^2), \quad c'_{k+1} = \frac{1}{4} \zeta'^2 (2 - \zeta'^2)$
	$c_k = \frac{1}{4} [\zeta_2^2 (2 - \zeta_2^2) - \zeta_1'^2 (2 - \zeta_1'^2)],$ $c'_{k+1} = \frac{1}{4} [\zeta_1'^2 (2 - \zeta_1'^2) - \zeta_2^2 (2 - \zeta_2^2)].$

Diese Angaben können nach Tabelle 12 für zahlreiche andere Belastungsfälle ergänzt und nach Tabellen 13 bis 15 auch für veränderliches Trägheitsmoment im Bereiche eines Trägerabschnitts angeschrieben werden.

Ungleichförmige Temperaturänderung  $\Delta t_k$  im Bereiche von  $l_k$  mit der mittleren Trägerhöhe  $d_k$  liefert

$$6 \delta_{kt} = 3 E J_c \alpha_t \left( \frac{\Delta t_k l_k}{d_k} + \frac{\Delta t_{k+1} l_{k+1}}{d_{k+1}} \right) \approx 3 E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{d} (l_k + l_{k+1}). \quad (655)$$

Werden senkrechte Stützenverschiebungen  $\Delta_{k-1}, \Delta_k, \Delta_{k+1}$  und Verdrehungen  $\varphi_1, \varphi_n$  der Endquerschnitte bei starr angenommener Einspannung der Trägerenden im Sinne von  $X_1, X_n$  gemessen oder geschätzt (Abb. 376), so entsteht

$$6 \delta_{ks} = 6 E J_c \left[ \frac{\Delta_{k-1}}{l_k} - \Delta_k \left( \frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) + \frac{\Delta_{k+1}}{l_{k+1}} \right],$$

$$6 \delta_{1s} = -E J_c \left( \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{l_2} + \varphi_1 \right); \quad 6 \delta_{ns} = -6 E J_c \left( \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{l_n} + \varphi_n \right). \quad (656)$$

**Auflösung des Ansatzes.** Die dreigliedrige Matrix (650) der Vorzahlen (651) wird unter Einbeziehung der Belastungsglieder nach der Rechenvorschrift S. 230ff. aufgelöst. Die konjugierte Matrix mit den Vorzahlen  $\beta'_{ik} = \beta_{ik}/6$  entsteht entweder aus zwei Kettenbrüchen nach (394), (404) oder durch Vorwärts- und Rückwärtselimination nach Gauß. Da die 6fachen Vorzahlen  $\delta_{ik}$  verwendet werden,

<sup>1</sup> Funktionswerte  $\omega$  auf S. 116ff.



ist (vgl. Abschnitt 24)

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta'_{ki} 6 \delta_i \otimes, \quad k = 1, \dots, n.$$

Damit sind nach (637) auch die Stütz- und Schnittkräfte des ganzen Trägers bestimmt.

**Kennbeziehungen und Teillösungen.** Bei der algebraischen Auflösung des Ansatzes mit  $6\delta_{n0} = 1$  u.  $6\delta_{10} = 1$  durch Kettenbrüche oder durch Elimination nach Gauß entstehen neben den Vorzahlen  $\beta'_{nn}$  und  $\beta'_{11}$  auch die für den dreigliedrigen Ansatz charakteristischen Kennbeziehungen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten.

$$-\frac{X_{k-1}}{X_k} = \varkappa_{(k-1)k}, \quad -\frac{X_r}{X_{r-1}} = \varkappa_{r(r-1)}.$$

Sie werden zu deren Berechnung bei der Belastung eines einzelnen Feldes  $l_k$  verwendet (Abb. 378c). Die  $l_k$  benachbarten Stützenmomente  $X_{k-1}$ ,  $X_k$  ergeben sich nach (415) aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$X_{k-1} = \frac{\varkappa_{(k-1)k} \delta_{(k-1)0} - \varkappa_{(k-1)k} \delta_{k0}}{\delta_{(k-1)k} - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}, \quad X_k = \frac{\varkappa_{k(k-1)} \delta_{k0} - \varkappa_{(k-1)k} \delta_{(k-1)0}}{\delta_{k(k-1)} - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}. \quad (657)$$

Für  $6\delta_{(k-1)k} = \lambda_k l'_k$  und gleichförmige Belastung des Feldes  $l_k$  mit  $p_k$  ist

$$6\delta_{k0} = 6\delta_{(k-1)0} = \frac{1}{4} p_k l_k^2 l'_k, \quad (658)$$

$$X_{k-1} = \frac{p_k l_k^2}{4 \lambda_k} \frac{\varkappa_{(k-1)k} - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}{1 - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}, \quad X_k = \frac{p_k l_k^2}{4 \lambda_k} \frac{\varkappa_{k(k-1)} - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}{1 - \varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}.$$

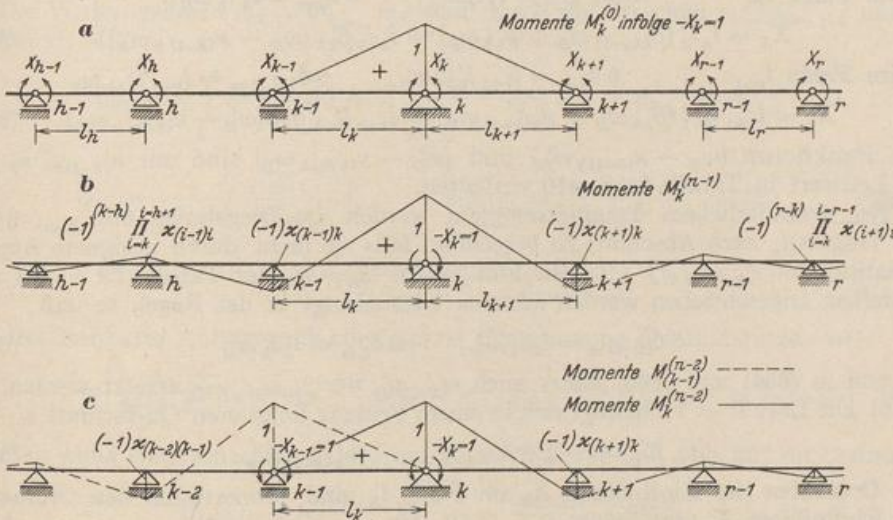


Abb. 378. Biegemomente eines durchlaufenden Trägers infolge  $-X_k = 1$  in einem statisch bestimmten, einem  $n-1$  und  $n-2$  fach statisch unbestimmten Hauptsystem.

Die Stützenmomente  $X_h$  [ $h < (k-1)$ ] sind dann durch die Kennbeziehungen  $\varkappa_{(h-1)h}$ , die Stützenmomente  $X_r$  ( $r > k$ ) durch die Kennbeziehungen  $\varkappa_{r(r-1)}$  bestimmt (Abb. 378c). Da eine beliebige Belastung des Stabzugs nach den einzelnen Feldern zerlegt werden kann, so läßt sich die Lösung durch Superposition der Teilergebnisse auch auf den allgemeinen Fall anwenden.

Die Hauptglieder  $\beta'_{kk}$  der konjugierten Matrix werden für  $6\delta_{k0} = 1$  erhalten und in Verbindung mit den Kennbeziehungen  $X_{k-1}/X_k = -\varkappa_{(k-1)k}$ ,  $X_{(k+1)}/X_k = -\varkappa_{(k+1)k}$  aus (410) folgendermaßen angeschrieben:

$$\beta'_{kk} = \frac{1}{-\varkappa_{(k-1)k} 6 \delta_{k(k-1)} + 6 \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k} 6 \delta_{k(k+1)}}. \quad (659)$$

Sie lassen sich außerdem mit dem Ansatz (657) ableiten.



$$\left. \begin{aligned} \beta'_{kk} &= \frac{\alpha_{k(k-1)}}{6 \delta_{k(k-1)} (1 - \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)})} = \frac{\alpha_{k(k+1)}}{6 \delta_{k(k+1)} (1 - \alpha_{k(k+1)} \alpha_{(k+1)k})}, \\ \beta'_{(k-1)(k-1)} &= \frac{\alpha_{(k-1)k}}{6 \delta_{k(k-1)} (1 - \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)})}; \quad \beta'_{(k+1)(k+1)} = \frac{\alpha_{(k+1)k}}{6 \delta_{k(k+1)} (1 - \alpha_{k(k+1)} \alpha_{(k+1)k})} \end{aligned} \right\} \quad (660)$$

Daher kann die Hauptdiagonale der konjugierten Matrix dreigliedriger Bedingungs-  
gleichungen auch nach

$$\frac{\beta'_{(k-1)(k-1)}}{\beta'_{kk}} = \frac{\alpha_{(k-1)k}}{\alpha_{k(k-1)}}, \quad \frac{\beta'_{kk}}{\beta'_{(k+1)(k+1)}} = \frac{\alpha_{k(k+1)}}{\alpha_{(k+1)k}} \quad (661)$$

entwickelt werden, wenn beide Kettenbrüche oder beide Eliminationen ausge-  
rechnet worden sind. Die Nebenglieder  $\beta'_{hk}$  der konjugierten Matrix ergeben sich  
aus den Hauptgliedern  $\beta'_{kk}$  für  $h < k$ :

$$\beta'_{(k-1)k} = -\alpha_{(k-1)k} \beta'_{kk}, \quad \beta'_{hk} = (-1)^{(k-h)} \beta'_{kk} \prod_{i=k}^{i=h+1} \alpha_{(i-1)i}. \quad (662)$$

Die Nebenglieder  $\beta'_{rk}$  für  $r > k$  sind

$$\beta'_{(k+1)k} = -\alpha_{(k+1)k} \beta'_{kk}, \quad \beta'_{rk} = (-1)^{(r-k)} \beta'_{kk} \prod_{i=k}^{i=r-1} \alpha_{(i+1)i}. \quad (663)$$

**Einflußlinien der Stützenmomente  $X_k$ .** a) Die wandernde Last  $P = 1 t$   
bewegt sich in den beiden, dem Stützpunkte  $k$  benachbarten Feldern  $l_k$  und  $l_{k+1}$ .  
Bei konstantem Trägheitsmoment  $J_k, J_{k+1}$  der Träger ist für

$P$  im Felde  $l_k$ :  $6 \delta_{(k-1)m} = l_k l'_k \omega'_D, \quad 6 \delta_{km} = l_k l'_k \omega_D,$   
 $X_k = l_k l'_k (\beta'_{k(k-1)} \omega'_D + \beta'_{kk} \omega_D) = l_k l'_k \beta'_{kk} (\omega_D - \alpha_{(k-1)k} \omega'_D), \quad (664)$

$P$  im Felde  $l_{k+1}$ :  $6 \delta_{km} = l_{k+1} l'_{k+1} \omega'_D, \quad 6 \delta_{(k+1)m} = l_{k+1} l'_{k+1} \omega_D,$   
 $X_k = l_{k+1} l'_{k+1} (\beta'_{kk} \omega'_D + \beta'_{k(k+1)} \omega_D) = l_{k+1} l'_{k+1} \beta'_{kk} (\omega'_D - \alpha_{(k+1)k} \omega_D). \quad (665)$

Die Funktionen  $(\omega_D - \alpha_{(k-1)k} \omega'_D)$  und  $(\omega'_D - \alpha_{(k+1)k} \omega_D)$  sind mit  $\alpha_{(k-1)k}, \alpha_{k(k-1)}$   
als Leitwert in Tabelle 34 S. 410 enthalten.

Bei veränderlichem Trägheitsmoment werden die Biegelinien  $6 \delta_{(k-1)m}, 6 \delta_{km}$   
des Trägers  $l_k$  nach Abschnitt 20 berechnet, falls sie nicht durch geeignete Appro-  
ximation von  $\zeta_k = J_k/J$  mit den Funktionen  $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$  der Tabelle 29 S. 394 un-  
mittelbar angeschrieben werden können. Dies genügt in der Regel, so daß

$$6 \delta_{(k-1)m} = l_k l'_k \bar{\omega}'_D, \quad 6 \delta_{km} = l_k l'_k \bar{\omega}_D \quad (666)$$

ist und in (664) und (665) daher auch  $\omega_D, \omega'_D$  durch  $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$  ersetzt werden.

b) Die Last  $P = 1 t$  bewegt sich in einem Felde  $l_h$  links vom Querschnitt  $k - 1$ .

$$X_k = (-1)^{k-h} \alpha_{(h+1)h} \dots \alpha_{k(k-1)} X_h. \quad (667)$$

Die Ordinaten der Einflußlinie  $X_k$  im Felde  $l_h$  sind proportional den Ordinaten  
der Einflußlinie  $X_h$  des Feldes  $l_h$ .

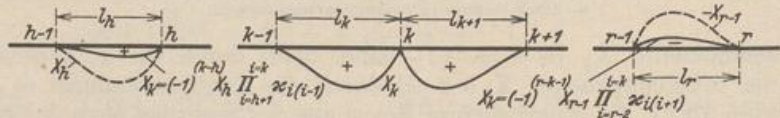


Abb. 379.

c) Die Last  $P = 1 t$  bewegt sich in einem Felde  $l_r$  rechts vom Querschnitt  $k + 1$ .

$$X_k = (-1)^{r-k-1} \alpha_{(r-2)(r-1)} \dots \alpha_{k(k+1)} X_{r-1}. \quad (668)$$

Die Ordinaten der Einflußlinie im Felde  $l_r$  sind proportional den Ordinaten der  
Einflußlinie  $X_{r-1}$  im Felde  $l_r$ . Daher wird jede Einflußlinie  $X_k$  in allen Feldern  
 $l_h, l_r$  aus den Einflußlinien der ihnen benachbarten Stützenmomente  $X_h, X_{r-1}$   
gebildet (Abb. 379).



**Zeichnerische Untersuchung.** Um das Ergebnis der zeichnerischen Auflösung dreigliedriger Gleichungen nach Abschnitt 32 bei der Untersuchung des durchgehenden Trägers auf starren und frei drehbaren Stützen mit der zeichnerischen Darstellung der Biegemomente übersichtlich zu verbinden, werden die Punkte  $A_k$  der Achse den Stützenpunkten zugeordnet und daher die Abschnitte  $\overline{A_{k-1}A_k} = \Delta_k$  in einem geeigneten Längenmaßstab nach den Feldweiten  $l_k$  bemessen.

Die zeichnerische Auflösung stützt sich auf die Festpunkte  $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$  im Felde  $l_k$  der Achse, die durch die Abschnitte  $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$  bestimmt sind, auf die Ordinaten  $V_{(k-1)k}, V_{k(k-1)}$ , die aus den Kreuzlinienabschnitten  $R_{(k-1)k}, R_{k(k-1)}$  berechnet werden oder auf die Koordinaten  $e_k, T_k$  der einem vorgeschriebenen Belastungsfall zugeordneten Punkte  $E'_k$ .

Die Nebenglieder  $\delta_{ik}$  der Matrix des Ansatzes (650) sind positiv, so daß die Festpunkte  $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$  nach S. 255 innerhalb des zugeordneten Intervalles  $l_k$  liegen. Die Abschnitte  $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$  werden aus den Kennbeziehungen  $\varkappa_{(k-1)k}, \varkappa_{k(k-1)}$  berechnet oder nach S. 256 mit Hilfe der Wirkungslinien elastischer Gewichte  $w'_{k,1}, w'_{k,2}, w_k$  zeichnerisch bestimmt. Nach Abschnitt 32 ist

$$a_{(k-1)k} = \frac{\varkappa_{(k-1)k}}{1 + \varkappa_{(k-1)k}} l_k, \quad a_{k(k-1)} = \frac{\varkappa_{k(k-1)}}{1 + \varkappa_{k(k-1)}} l_k. \quad (669)$$

Die Kennbeziehungen müssen also bekannt, die Kettenbrüche (394), (404) daher ausgewertet sein, um die Festpunkte einrechnen zu können.

Die Wirkungslinien  $w'_{k,1}, w'_{k,2}, w_k$  sind durch die Strecken  $c_{kk}, c_{(k+1)k}$  und  $e_k$  bestimmt. Mit

$$\delta_{kk} = l'_k \int_k \xi^2 \frac{J_k}{J} d\xi + l'_{k+1} \int_{k+1} \xi'^2 \frac{J_{k+1}}{J} d\xi' = \delta_{kk,1} + \delta_{kk,2}$$

ist

$$c_{kk} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} l_k, \quad c_{(k+1)k} = \frac{\delta_{k(k+1)}}{\delta_{kk,2} + \delta_{k(k+1)}} l_{k+1}, \quad (670)$$

$$e_k = \frac{\delta_{k(k+1)} l_{k+1} - \delta_{k(k-1)} l_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}.$$

Bei frei drehbarer Auflagerung oder starrer Einspannung der Endstützen ist

$$e_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} + \delta_{12}} l_2 = a_{12}, \quad e_n = -\frac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn} + \delta_{n(n-1)}} l_n = -a_{n(n-1)}. \quad (671)$$

Bei Belastung eines einzelnen Feldes werden nach S. 258 und Abb. 227 die Ordinaten

$$\left. \begin{aligned} V_{(k-1)k} &= \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} R_{(k-1)k} = \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} \frac{\delta_{(k-1)k} \otimes}{\delta_{k(k-1)}}, \\ V_{kk} &= \frac{a_{k(k-1)}}{l_k} R_{kk} = \frac{a_{k(k-1)}}{l_k} \frac{\delta_k \otimes}{\delta_{k(k-1)}} \end{aligned} \right\} \quad (672)$$

verwendet.

Die Ordinaten  $T_k$  der Punkte  $E'_k$  (Abb. 230) zur Untersuchung eines beliebigen Belastungsfalles sind

$$T_1 = \frac{\delta_{1\otimes}}{\delta_{11} + \delta_{12}}, \quad T_k = \frac{\delta_k \otimes}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}, \quad T_n = \frac{\delta_n \otimes}{\delta_{n(n-1)} + \delta_{nn}}. \quad (673)$$

Diese nach einem vorgeschriebenen Längen- oder Momentenmaßstab aufzutragenden Strecken sind durch die Vorzeichen des Ansatzes bekannt. Sie lassen sich unmittelbar anschreiben, wenn die Veränderlichkeit des Querschnitts im Bereiche eines jeden Feldes nach Tabelle 29 approximiert oder vernachlässigt, also mit feldweise kon-



stantem Trägheitsmoment  $J_k$  gerechnet wird. In diesen Fällen werden nach S. 393 die folgenden Strecken verwendet:

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 2\mu_k} l_k, & c_{(k+1)k} &= \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} + 2\mu_{k+1}} l_{k+1}, \\ e_k &= \frac{\lambda_{k+1} l_{k+1} l'_k - \lambda_k l_k l'_{k+1}}{(\lambda_k + 2\mu_k) l'_k + (\lambda_{k+1} + 2\mu_{k+1}) l'_{k+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (674)$$

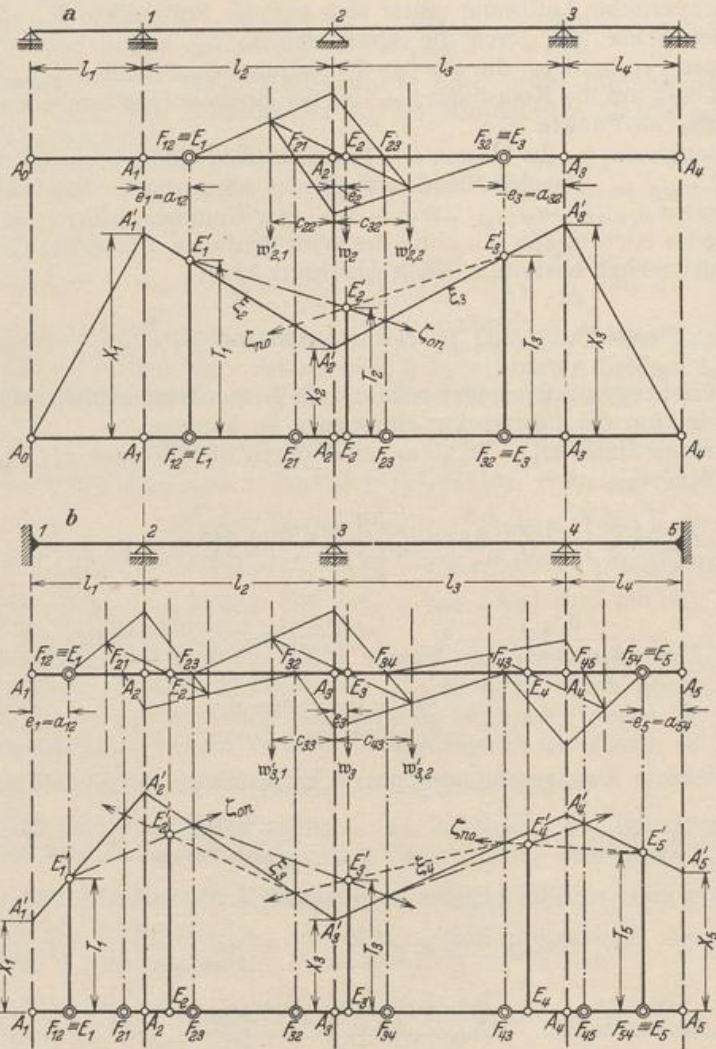


Abb. 380.

1. Einrechnung der Schwerlinien  $w'_{k,1}, w'_{k,2}, w'_k$  mit den Abständen  $c_{kk}, c_{k(k+1)}, e_k$ .
2. Konstruktion der Festpunkte  $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ .
3. Auftragen der Ordinaten  $T_k = E_k E'_k$  für jede Gruppe äußerer Ursachen  $\mathfrak{P}, \Delta t, \Delta k$ .
4. Linienzüge  $\xi_{0n}, \xi_{n0}$ .
5. Linienzug  $\xi_k$ ; Kontrolle: Die Geraden  $\xi_k, \xi_{k+1}$  schneiden sich auf der Senkrechten durch  $A_k$  im Punkte  $A'_k$ ;  $\overline{A_k A'_k} = X_k$

Konstantes Trägheitsmoment im Bereich des Stabes  $l_k, l_{k+1}$ :  $\lambda = \mu = 1$

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{l_k}{3}, & c_{(k+1)k} &= \frac{l_{k+1}}{3}, & e_k &= \frac{l_{k+1} l'_{k+1} - l_k l'_k}{3(l'_k + l'_{k+1})}, \\ V_{(k-1)k} &= \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} \frac{6 \delta_{(k-1)k} \otimes}{l'_k}, & V_{kk} &= \frac{a_{k(k-1)}}{l_k} \frac{6 \delta_{k(k-1)} \otimes}{l'_k}. \end{aligned} \right\} \quad (675)$$



Die Schwerlinien  $w'_{k,1}$ ,  $w'_{k,2}$  in den Abständen  $c_{kk}$ ,  $c_{(k+1)k}$  sind daher Drittelslinien. Ist das Trägheitsmoment im Bereich des ganzen Trägers konstant, so wird  $c_k = (l_{k+1} - l_k)/3$  und daher die Schwerlinie  $w_k$  im Abstände  $e_k$  die verschränkte Drittelslinie.

Allgemeiner Belastungsfall:

$$T_k = \frac{6 \delta_k \otimes}{(\lambda_k + 2 \mu_k) l'_k + (\lambda_{k+1} + 2 \mu_{k+1}) l'_{k+1}}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{für } \mu = \lambda = 1 \text{ ist} \end{array} \right\} \quad (676)$$

$$T_k = \frac{6 \delta_k \otimes}{3 (l'_k + l'_{k+1})}$$

Für eine Temperaturänderung  $\Delta t$  des Trägers mit der mittleren Höhe  $d$  und für Stützensenkungen  $\Delta_{k-1}$ ,  $\Delta_k$ ,  $\Delta_{k+1}$  ist

$$T_k = \frac{6 E J_c \left[ \frac{\alpha_1 \Delta t}{2 d} (l_k + l_{k+1}) + \frac{\Delta_{k-1}}{l_k} - \Delta_k \left( \frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) + \frac{\Delta_{k+1}}{l_{k+1}} \right]}{(\lambda_k + 2 \mu_k) l'_k + (\lambda_{k+1} + 2 \mu_{k+1}) l'_{k+1}}. \quad (677)$$

Bei frei drehbaren Endstützen ist

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = \frac{\lambda_2 l_2 l'_2}{2 \bar{\mu}_1 l'_1 + (\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2} = a_{12}, \quad -e_n = \frac{\lambda_n l_n l'_n}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n + 2 \bar{\mu}_{n+1} l'_{n+1}} = a_{n(n-1)}, \\ T_1 = \frac{6 \delta_1 \otimes}{2 \bar{\mu}_1 l'_1 + (\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2}, \quad T_n = \frac{6 \delta_n \otimes}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n + 2 \bar{\mu}_{n+1} l'_{n+1}}, \end{array} \right\} \quad (678)$$

bei starrer Einspannung der Endquerschnitte (1) und (n)

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = \frac{\lambda_2 l_2 l'_2}{(\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2} = a_{12}, \quad -e_n = \frac{\lambda_n l_n l'_n}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n} = a_{n(n-1)}, \\ T_1 = \frac{6 \delta_1 \otimes}{(\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2}, \quad T_n = \frac{6 \delta_n \otimes}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n}. \end{array} \right\} \quad (679)$$

Bei Belastung eines einzelnen Feldes  $l_k$  werden die benachbarten Stützenmomente  $X_{k-1}$ ,  $X_k$  nach Abb. 227 mit den den Festpunkten zugeordneten Ordinaten  $V_{(k-1)k}$ ,

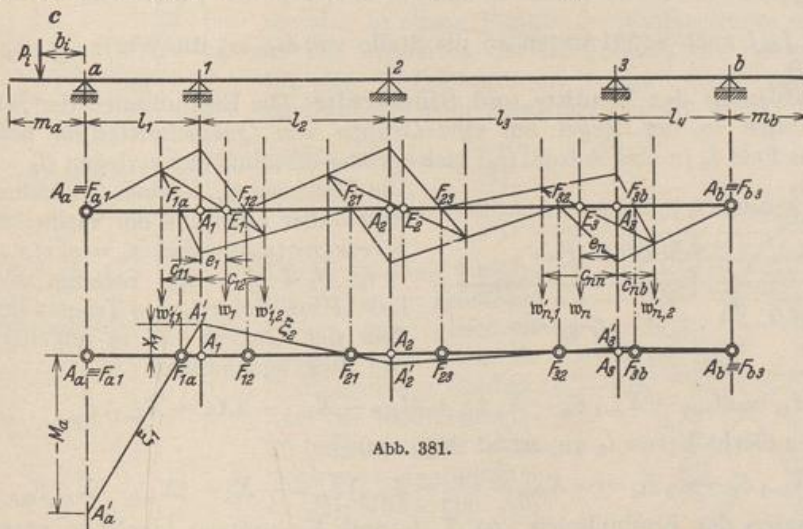


Abb. 381.

Belastung des linken Kragarmes.  $M_a = -\sum P_i b_i$ . Festpunkte zeichnerisch nach Abschn. 32. Die Schwerlinien in den

Randfeldern werden nach (670) mit  $(\delta_k(k-1))_{k-1} = \delta_{1a} = \frac{\lambda_1 l'_1}{6}$ ,  $(\delta_k(k+1))_{k-n} = \delta_{nb} = \frac{\lambda_{n+1} l'_{n+1}}{6}$  eingerechnet.

$V_{kk}$  aufgezeichnet. Die übrigen Stützenmomente sind links vom Stützpunkt  $(k-1)$  durch die Festpunkte  $F_{(k-1)k}$  rechts vom Stützpunkt  $k$  durch die Festpunkte  $F_{k(k-1)}$  bestimmt. Um darauf auch die Biegemomente im belasteten Felde  $l_k$  an-



zugeben, werden nach dem Ansatz (637) die Biegemomente  $M_0$  des einfachen Balkenträgers  $l_k$  von  $A'_{k-1} A'_k \equiv \xi_k$  als Bezugsgeraden aus abgetragen.

Die allgemeine zeichnerische Untersuchung einer beliebigen Belastung mit Hilfe der Festpunkte und der Punkte  $E'_k$  ist ausführlich auf S. 260 beschrieben, so daß darauf in Verbindung mit den beiden Abb. 380 und 381 verwiesen werden kann.

**Die Entwicklung der Einflußlinien der Stützenmomente aus den Festpunkten.** Das Stützenmoment  $X_k$  ist als überzählige Größe eines  $(n-1)$  fach statisch unbestimmten Hauptsystems

$$X_k = \delta_{k0}^{(n-1)} / \delta_{kk}^{(n-1)}.$$

Die Einflußlinie wird daher aus der Biegelinie  $\delta_{mk}^{(n-1)}$  des Hauptsystems für  $-X_k = 1$  abgeleitet und daher aus den Momenten  $M_k^{(n-1)}$  berechnet, die für den Lastangriff  $-X_k = 1$  mit Hilfe der Festpunkte aufgezeichnet werden (Abb. 378 b).

$$\begin{aligned} \delta_{kk}^{(n-1)} &= -\alpha_{(k-1)k} \delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \alpha_{(k+1)k} \delta_{k(k+1)} \\ &= \delta_{k(k-1)} \left( \frac{b_{k(k-1)}}{a_{k(k-1)}} - \frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}} \right) + \delta_{k(k+1)} \left( \frac{b_{k(k+1)}}{a_{k(k+1)}} - \frac{a_{(k+1)k}}{b_{(k+1)k}} \right). \end{aligned}$$

Bei Approximation der Querschnittsveränderlichkeit nach Tabelle 29 ist

$$6 \delta_{kk}^{(n-1)} = l'_k \left( 2\mu_k - \lambda_k \frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}} \right) + l'_{k+1} \left( 2\mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \frac{a_{(k+1)k}}{b_{(k+1)k}} \right). \quad (680)$$

Gleichung der Biegelinie  $6 \delta_{mk}^{(n-1)}$  für  $J_k/J = \text{const.}$

$$\left. \begin{aligned} \text{Feld } l_k: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= l_k l'_k (\omega_D - \alpha_{(k-1)k} \omega'_D), \\ \text{,, } l_{k+1}: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= l_{k+1} l'_{k+1} (\omega'_D - \alpha_{(k+1)k} \omega_D), \\ \text{,, } l_h: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= (-1)^{(k-h)} \alpha_{(k-1)k} \cdots \alpha_{h(h+1)} l_h l'_h (\omega_D - \alpha_{(h-1)h} \omega'_D), \\ \text{,, } l_r: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= (-1)^{(r-1-k)} \alpha_{(k+1)k} \cdots \alpha_{(r-1)(r-2)} l_r l'_r (\omega'_D - \alpha_{r(r-1)} \omega_D). \end{aligned} \right\} (681)$$

Für  $\zeta_k = J_k/J$  nach S. 394 treten an die Stelle von  $\omega_D, \omega'_D$  die Werte  $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$  nach Tabelle 29.

**Einflußlinien der Schnitt- und Stützkräfte.** Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden in der Regel auf eine Gruppe von Querschnitten  $m$  bezogen, welche das Feld  $l_k$  in eine Anzahl  $(\varrho_k)$  gleichgroßer Abschnitte  $c$  zerlegen ( $l_k = \varrho_k c$ ).

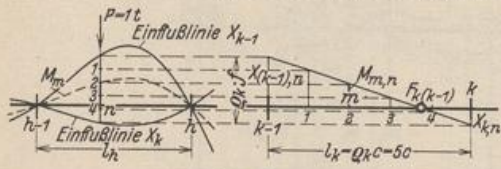


Abb. 382.

Die Abszissen  $x_m, x'_m$  eines Querschnitts  $m$  sind daher ebenfalls ein Vielfaches der Strecken  $c$  ( $x_m = \varrho'_k c, x'_m = \varrho''_k c, x_m + x'_m = l_k, \varrho'_k + \varrho''_k = \varrho_k$ ). Solange sich die Last  $P$  im Felde  $l_k$  des Trägers bewegt, dem der Querschnitt  $m$  angehört, ist das Biegemoment

$$M_m = M_{m0} - X_{k-1} \xi'_m - X_k \xi_m = M_{m0} - X_{k-1} - (X_k - X_{k-1}) \xi_m. \quad (682)$$

Greift  $P$  außerhalb von  $l_k$  an, so ist  $M_{m0} = 0$  und

$$M_m = -X_{k-1} \xi'_m - X_k \xi_m = -X_{k-1} - (X_k - X_{k-1}) \xi_m = -X_k - (X_{k-1} - X_k) \xi'_m. \quad (683)$$

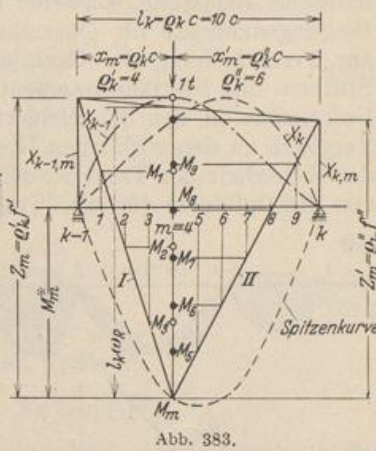
Die Ordinaten der Einflußlinien von  $X_{k-1}$  und  $X_k$  besitzen hier stets entgegengesetztes Vorzeichen, so daß nach (683) die Einflußlinien der Feldmomente  $M_m$  die Summe der einem jeden Lastpunkt zugeordneten Ordinaten  $|X_{k-1}| + |X_k|$  ebenfalls in  $\varrho_k$  gleichgroße Abschnitte  $f$  teilen (Abb. 382).

Die Einflußlinien  $M_m$  werden innerhalb des Feldes  $l_k$  am einfachsten aus den Zustandslinien gefunden, die für die Stellung der Last  $P$  in jedem Teilpunkt  $m$  der Strecke  $l_k$  mit Hilfe der vorhandenen Einflußlinien  $X_{k-1}$  und  $X_k$  aufgezeichnet

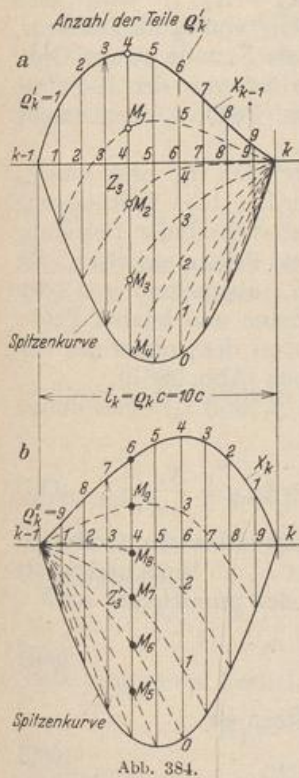


werden. Sie bestehen in jedem Falle aus zwei geraden Linien (I, II), so daß die Feldmomente der Querschnitte  $m'$  im Bereich von  $x_m$  links vom Lastpunkt  $m$  durch Unterteilung der Strecke  $Z_m$  in  $Q'_k$  gleichgroße Abschnitte  $f'$  erhalten werden. Die Intervallgrenzen sind Punkte der Einflußlinien für die Feldmomente in den Querschnitten  $m'$  bei Stellung der Last im Punkte  $m$ . Dasselbe gilt von den Feldmomenten der Querschnitte  $m''$  im Bereiche  $x'_m$  rechts vom Lastpunkt  $m$ . Sie werden durch die Aufteilung der Ordinate  $Z'_m$  in  $Q''_k$  gleichgroße Strecken  $f''$  gefunden. Die Intervallgrenzen sind Punkte der Einflußlinien für die Feldmomente in den Querschnitten  $m''$  rechts von  $m$  bei Stellung der Last  $F$  über  $m$  (Abb. 383).

Die Feldmomente  $M_m^*$  bei Stellung der Last über dem Querschnitt  $m$  bilden die Spitzenkurve des Feldes  $l_k$ . Ihre Ordinaten werden nach Abb. 383 aufgetragen oder nach (657) u. (682) aus



$$M_m^* = l_k \xi_m \xi'_m \left[ 1 - \xi'_m \frac{(1 + \xi'_m) \alpha_{(k-1)k} - (1 + \xi_m) \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)}}{1 - \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)}} - \xi_m \frac{(1 + \xi_m) \alpha_{(k-1)k} - (1 + \xi'_m) \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)}}{1 - \alpha_{(k-1)k} \alpha_{k(k-1)}} \right] \quad (684)$$

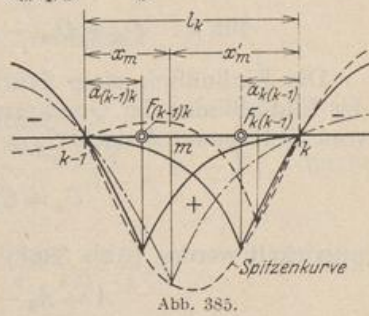


berechnet, so daß die Ordinaten  $Z_m = M_m^* + X_{(k-1)m}$  und  $Z'_m = M_m^* + X_{km}$  für jede Stellung der Einzelast  $P$  bekannt sind und nach Vorschrift in  $Q'_k$  oder  $Q''_k$  Strecken aufgeteilt werden können. Auf diese Weise entstehen nach Abb. 384 a die rechten, nach Abb. 384 b die linken Zweige der Einflußlinien der Feldmomente, die sich in einem Punkte der Spitzenkurve schneiden.

Die Ordinaten der Einflußlinie des Feldmomentes für den Querschnitt im linken Festpunkt  $F_{(k-1)k}$  sind rechts vom Abschnitt  $l_k$  Null, denn

$$M_m = -X_{k-1} \frac{b_{(k-1)k}}{l_k} - X_k \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} = - \left( \frac{X_{k-1}}{X_k} + \frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}} \right) \frac{X_k b_{(k-1)k}}{l_k} = 0. \quad (685)$$

Die Einflußlinie berührt die Achse im Punkte  $k$ . Aus dem gleichen Grunde sind auch die Ordinaten der Einflußlinie des Feldmomentes im Querschnitt des rechten Festpunktes  $F_{k(k-1)}$  links vom Abschnitt  $l_k$  Null. Die Einflußlinien der Biegemomente für Querschnitte zwischen den Festpunkten ( $x_m > a_{(k-1)k}$ ,  $x'_m > a_{k(k-1)}$ ) sind daher nach (685) in den benachbarten Abschnitten  $l_{k-1}$ ,  $l_{k+1}$  negativ, im Abschnitt  $l_k$  also durch die in  $k$  oder  $(k-1)$  vorgeschriebene Stetigkeit der Linie positiv. Dagegen wechseln die Einflußlinien der Biegemomente das Vorzeichen im Felde  $l_k$  für Querschnitte im Bereiche von  $a_{(k-1)k}$  oder  $a_{k(k-1)}$  (Abb. 385).





Die größten positiven und negativen Feldmomente entstehen daher bei gleichförmiger Nutzlast  $p$  für alle Querschnitte  $m$  zwischen den Festpunkten durch feldweise Belastung. Dasselbe gilt für die Stützenmomente. Die Grenzwerte der Biegemomente für Querschnitte im Bereiche von  $a_{k(k-1)}$  oder  $a_{(k-1)k}$  werden zur Vereinfachung der Rechnung in der Regel zwischen den Grenzwerten des Stützen- und Festpunktmomentes linear interpoliert (Abb. 374i). Dabei werden die Festpunkte in den Randfeldern nach S. 396 eingerechnet. Das Ergebnis ist im Vergleich zu den wirklichen Grenzwerten etwas zu ungünstig, also zur Beurteilung der Sicherheit des Trägers zulässig. Auf diese Weise erübrigt sich die Darstellung von Einflußlinien für alle Tragwerke, die nur gleichförmig verteilte Nutzlasten aufzunehmen haben.

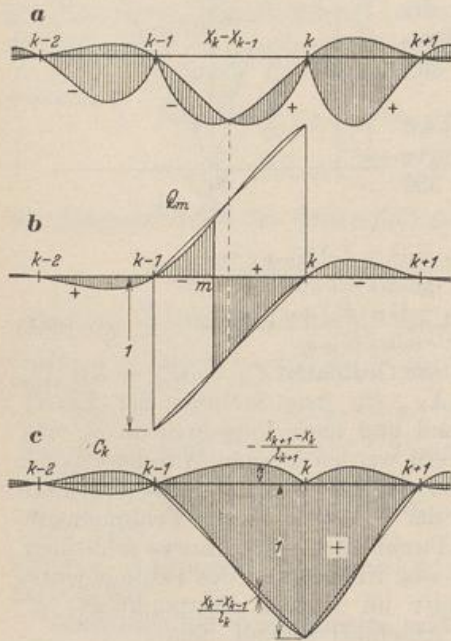


Abb. 386.

Die Einflußlinie der Querkraft  $Q_m$  im Querschnitt  $m$  des Feldes  $l_k$  wird aus

$$\left. \begin{aligned} Q_m &= Q_{m0} - \frac{X_k - X_{k-1}}{l_k}, \\ Q_m &= - \frac{X_k - X_{k-1}}{l_k} \end{aligned} \right\} \quad (686)$$

abgeleitet, je nachdem die Last  $P$  innerhalb oder außerhalb des Feldes  $l_k$  steht. Der Ausdruck  $(X_k - X_{k-1})$  wird nach Abb. 386 im Bereiche von  $l_k$  als Differenz, außerhalb von  $l_k$  als Summe zweier Ordinaten gebildet. Er ist von der Lage des Querschnitts  $m$  im Felde  $l_k$  unabhängig (Abb. 386a, 386b).

Die Grenzwerte  $\max Q_m$  und  $\min Q_m$  der Querkraft werden bei Teilbelastung des Feldes  $l_k$  und abwechselnder Belastung der anschließenden Felder erhalten. Sie unterscheiden sich, abgesehen von den Grenzwerten im ersten und letzten Felde, nur unwesentlich von denjenigen des einfachen Balkenträgers (Abb. 386b).

Für die Querschnitte  $m$  des ersten und letzten Feldes ( $l_1$  und  $l_n$ ) eines durchlaufenden Trägers mit frei drehbaren Enden ist

$$\text{für } l_1: Q_m = Q_{m0} - \frac{X_1}{l_1}; \quad \text{für } l_{n+1}: Q_m = Q_{m0} + \frac{X_n}{l_{n+1}}. \quad (687)$$

Die Einflußlinie einer Stützkraft  $C_k$  kann durch Superposition der Ordinaten der Einflußlinien der Querkraften  $Q'_k, Q''_k$  in dem Querschnitt  $k', k''$  links und rechts vom Stützpunkt  $k$  nach  $C_k = -Q'_k + Q''_k$  aufgezeichnet oder unmittelbar nach

$$C_k = C_{k0} + \frac{X_k - X_{k-1}}{l_k} - \frac{X_{k+1} - X_k}{l_{k+1}} \quad (688)$$

entwickelt werden (Abb. 386c). Bei frei drehbaren Endstützen ist

$$A = A_0 - X_1/l_1; \quad B = B_0 - X_n/l_{n+1}. \quad (689)$$

**Vereinfachung der Annahmen über die elastischen Eigenschaften.** Während bisher mit der Möglichkeit eines Wechsels der für die elastischen Eigenschaften des Trägers charakteristischen Längen gerechnet wurde, entstehen für den Fall, daß

$$\lambda_k l'_k = \lambda l', \quad \mu_k l'_k = \mu l', \quad \mu/\lambda = \gamma, \quad l_k \neq l_{k+1},$$



Bedingungsgleichungen mit konstanten Vorzahlen

$$\lambda X_{k-1} + 4\mu X_k + \lambda X_{k+1} = 6\delta_{k0}/l', \quad (690)$$

bei feldweiser Belastung ist

$$\frac{6\delta_{k0}}{l'} = \frac{p_k l_k^2}{4} + \frac{p_{k+1} l_{k+1}^2}{4}. \quad (691)$$

Einzellasten:

$$\frac{6\delta_{k0}}{l'} = l_k \sum_k P \omega_D + l_{k+1} \sum_{k+1} P \omega'_D.$$

Kennbeziehungen (392):

$$\varkappa_{(k-1)k} = \frac{1}{4\chi - \varkappa_{(k-2)(k-1)}}, \quad (692)$$

$$\varkappa_{k(k-1)} = \frac{1}{4\chi - \varkappa_{(k+1)k}}. \quad (693)$$

**Durchlaufender Träger mit unendlich vielen Feldern.**

$$l'_k = l', \quad \varkappa_{(k-1)k} = \varkappa_{k(k-1)} = \varkappa = 2\chi - \sqrt{4\chi^2 - 1}.$$

Sind die Stützweiten außerdem gleichgroß ( $l_k = l$ ) und daher das Trägheitsmoment des Trägers konstant ( $J_k = J$ ), so ist für  $\chi = 1$

$$a_{(k-1)k} = a_{k(k-1)} = 0,211 l. \quad (694)$$

**Durchlaufender Träger mit einer begrenzten Anzahl von Feldern.** Sind die Träger aller Zwischenöffnungen durch  $l'_k = l'$  ausgezeichnet, dagegen die elastischen Eigenschaften der Träger über den Endfeldern bei freidrehbarer Auflagerung der Enden derart bestimmt, daß

$$\varkappa_{12} = \varkappa_{n(n-1)} = \varkappa_{(k-1)k} = \varkappa_{k(k-1)} = \varkappa = 2\chi - \sqrt{4\chi^2 - 1},$$

so ist  $\delta_{12}/\delta_{11} = \varkappa = \frac{\lambda l'}{2(\mu l'_1 + \mu l')}$  und daher  $l'_1 = \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\lambda}{2\varkappa} - \mu \right) l'. \quad (695)$

Die Bedingung kann entweder durch geeignete Ablängung der Träger oder durch die Wahl der Querschnitte erfüllt werden. Sie gilt ebenso für  $\delta_{n(n-1)}/\delta_{nn} = \varkappa$  und liefert

$$l'_n = \frac{1}{\mu_n} \left( \frac{\lambda}{2\varkappa} - \mu \right) l'. \quad (696)$$

Bedingungsgleichungen 1 und  $n$  nach (634) u. (690)

$$\frac{\lambda}{\varkappa} X_1 + \lambda X_2 = \frac{6\delta_{10}}{l'}, \quad \lambda X_{n-1} + \frac{\lambda}{\varkappa} X_n = \frac{6\delta_{n0}}{l'}.$$

Sonderfall  $\lambda = \mu = \bar{\mu} = 1: \varkappa = 0,268, \quad l'_1 = 0,866 l'.$

Belastung eines einzelnen Feldes  $l_k$

a) symmetrisch

b) antimetrisch

$$X_{k-1} = 6 \frac{^{(1)}\delta_{k0}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1+\varkappa)} = X_k, \quad (697a) \quad X_{k-1} = 6 \frac{^{(2)}\delta_{k0}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa)} = -X_k. \quad (697b)$$

Belastung eines Endfeldes:

$$X_1 = \frac{6\delta_{10}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa^2)}, \quad X_n = \frac{6\delta_{n0}}{l'} \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa^2)}. \quad (698)$$

Einflußlinie des Stützenmomentes

$$\text{Feld } l_k : X_k = l_k \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa^2)} (\bar{\omega}_D - \varkappa \bar{\omega}'_D), \quad (699)$$

$$\text{Feld } l_{k+1}: X_k = l_{k+1} \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa^2)} (\bar{\omega}'_D - \varkappa \bar{\omega}_D);$$

mit  $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$  nach Tabelle 29.



Bei gleichen Feldweiten, gleicher Belastung und gleicher Approximation von  $\zeta_k = J_k/J$  in allen Feldern entsteht nach (690) eine Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Belastungszahlen. Für gleichmäßig verteilte Belastung ist

$$\lambda X_{k-1} + 4\mu X_k + \lambda X_{k+1} = \frac{p l^2}{2}.$$

Lösung der homogenen Gleichung (vgl. Abschn. 33)  $X_k = \varrho^k$ ;

charakteristische Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \lambda + 4\mu\varrho + \lambda\varrho^2 = 0, \quad \varrho_{1,2} = -2\chi \pm \sqrt{4\chi^2 - 1}, \quad \varrho = \varrho_1, \\ X_k = \frac{p l^2}{4\lambda(1+2\chi)} \left( 1 - \frac{\varrho^{n-k} + \varrho^k}{1 + \varrho^n} \right). \end{aligned} \right\} (700)$$

Lösung für hydraulische Belastung vgl. S. 269.

**Durchlaufender Träger mit gleichen elastischen Eigenschaften in allen Feldern.**

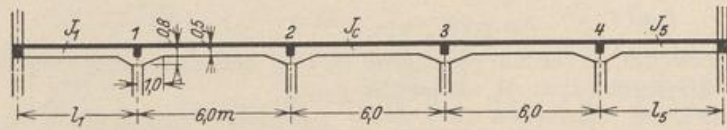


Abb. 387.

1. Geometrische Grundlagen:

$$l = 6,0 \text{ m}, \quad v = 1,0 \text{ m}, \quad \nu = 1/6, \quad l' = 6,0 \text{ m}.$$

2. Approximation des Trägheitsmomentes (Abb. 388):

$$n = \frac{J_k}{J_a} = \frac{J_c}{J_a} = \frac{0,5^3}{0,8^3} = 0,244; \quad \text{Tabelle 29 Fall 2:}$$

$$\mu_k = \mu = \bar{\mu} = 1 - (1 - 0,244) \left[ 2 \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3 \cdot 6} \right] = 0,75;$$

$$\lambda_k = \lambda = 1 - 3(1 - 0,244) \frac{1}{6^2} = 0,94.$$

3. Bemessung der Endfelder nach (695):

$$\chi = \frac{0,75}{0,94} \approx 0,8; \quad \alpha = 2 \cdot 0,8 - \sqrt{4 \cdot 0,8^2 - 1} = 0,35,$$

$$l'_1 = l'_5 = \frac{1}{0,75} \left( \frac{0,94}{2 \cdot 0,35} - 0,75 \right) l' = 0,785 l'.$$

a) Die Trägheitsmomente der Rand- und Zwischenträger sind gleich,  $J_1 = J_5 = J_c$ :

$$l_1 = l_5 = 0,785 l = 4,7 \text{ m}.$$

b) Die Stützweiten der Rand- und Zwischenfelder sind gleich,  $l_1 = l_5 = l$ :

$$J_1 = J_5 = \frac{J_c}{0,785} = 1,275 J_c.$$

4. Belastung  $p = 1 \text{ t/m}$  in Feld  $l_1$ :  $\frac{6 \delta_{10}}{l'} = \frac{l_1^3}{4} \cdot 0,785 = 0,196 l_1^3$ ,

daher nach (698)  $X_1 = 0,196 l_1^3 \frac{0,35}{0,94(1 - 0,35^2)} = 0,083 l_1^3$ ;

Anordnung a)  $X_1 = 1,85 \text{ mt}$ , Anordnung b)  $X_1 = 3,0 \text{ mt}$ .

**Berechnung eines durchlaufenden Brückenträgers.**

1. Geometrische Grundlagen.

$$l_1 = l_4 = 22,0, \quad l_2 = l_3 = 28,0 \text{ m}. \quad J_a = \frac{2}{3} J_c.$$

$$l'_1 = l'_4 = 33,0, \quad l'_2 = l'_3 = 28,0 \text{ m}.$$

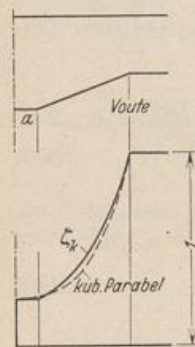


Abb. 388.



2. Approximation des Trägheitsmomentes (Abb. 389c). Parabel mit  $n = 0$ . Tab. 29. Fall 4 u. 9.

$$\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_4 = 0,4, \quad \mu_2 = \mu_3 = 0,6, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0,8.$$

3. Vorzahlen nach (651):

$$6 \delta_{11} = 6 \delta_{33} = 2 (0,4 \cdot 33,0 + 0,6 \cdot 28) = 60,0,$$

$$6 \delta_{22} = 2 (0,6 \cdot 28 + 0,6 \cdot 28) = 67,2.$$

$$6 \delta_{12} = 6 \delta_{23} = 0,8 \cdot 28 = 22,4.$$

$\delta$  Matrix

$X_1$	$X_2$	$X_3$
60,0	22,4	
22,4	67,2	22,4
	22,4	60,0

konjugierte Matrix  $10^3 \beta'_{ik}$

	$6 \delta_{10}$	$6 \delta_{20}$	$6 \delta_{30}$
$10^3 X_1$	19,4280	-7,3964	2,7613
$10^3 X_2$	-7,3964	19,8119	-7,3964
$10^3 X_3$	2,7613	-7,3964	19,4280

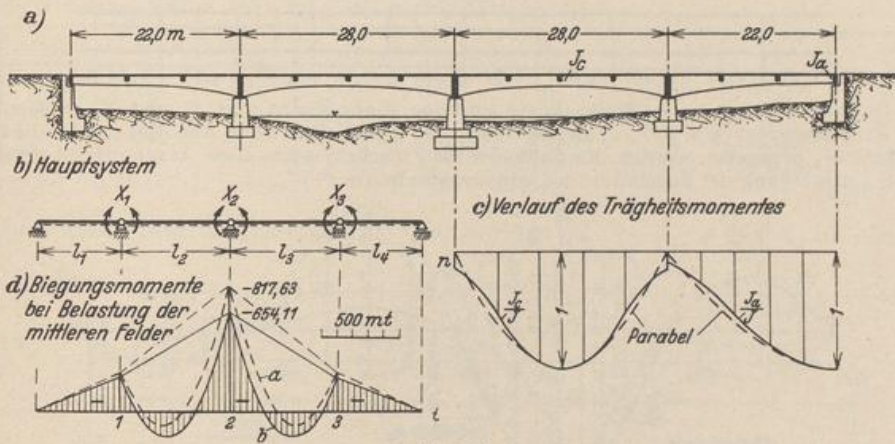


Abb. 389.

4. Belastung:  $p = 6 \text{ t/m}$  auf  $l_2$  und  $l_3$ .

a) Belastungszahlen für konst. Trägheitsmoment. Tab. 35

$$6 \delta_{10} = 6 \delta_{30} = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 28^3 = 32928, \quad 6 \delta_{20} = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot (28^3 + 28^3) = 65856.$$

$X_1$	$X_2$	$X_3$
243,55 mt	817,63 mt	243,55 mt

Abb. 389d, Lösung a.

b) Belastungszahlen für die Approximation unter 2. nach Tab. 13a.

$$6 \delta_{10} = 6 \delta_{30} = 6 \cdot \frac{1}{15} \cdot 1 \cdot \frac{6 \cdot 28^2}{8} \cdot 4 \cdot 28 = 26342,4, \quad 6 \delta_{20} = 52684,8;$$

$X_1$	$X_2$	$X_3$
194,84 mt	654,11 mt	194,84 mt

Abb. 389d, Lösung b.

5. Einflußlinien  $X_1, X_2$ .

Biegelinien  $\bar{\omega}_D = 6 \delta_{mk} / l_k l'_k$  n. Tab. 29, Fall 4 und 9.

Feld 1:  $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{3}{15} (\xi - \xi^5),$  Feld 2:  $\bar{\omega}_D = \omega_D - \frac{1}{5} \{ \omega_D - 2 \omega_R \xi^2 (3 \xi' - 1) \}.$



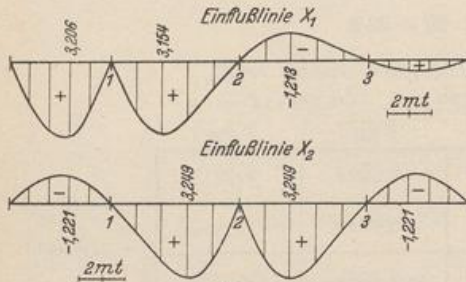
$\eta$	Feld 1 $\bar{\omega}_D$	Feld 4 $\bar{\omega}'_D$	Feld 2 u. 3 $\bar{\omega}_D$	Feld 2 u. 3 $\bar{\omega}'_D$
0,2	0,1321	0,1463	0,1572	0,2140
0,4	0,2191	0,2273	0,2811	0,3141
0,6	0,2273	0,2191	0,3141	0,2811
0,8	0,1463	0,1321	0,2140	0,1572

Feld 1:  $X_1 = 22,0 \cdot 33,0 \cdot 0,019428 \bar{\omega}_D$   
 $= 14,104728 \bar{\omega}_D$  (Gl. 664),

Feld 2:  $X_1 = 15,232336 (\bar{\omega}'_D$   
 $- 0,380711 \bar{\omega}_D)$ ,

Feld 2:  $X_2 = 15,532530 (\bar{\omega}_D$   
 $- 0,373333 \bar{\omega}'_D)$ ,

Feld 3:  $X_2$  Spiegelbild zu Feld 2.



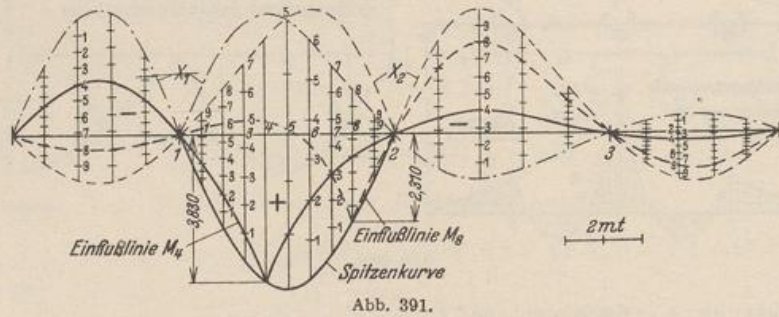
Einflußlinie  $X_3$ : Spiegelbild zu  $X_1$ .  
 In den übrigen Feldern wird nach (667) u. (668)

Feld 3:  $X_1 = (-1)^1 \cdot 0,373333 X_2$ ,  
 Feld 4:  $X_1 = (-1)^2 \cdot 0,380711 \cdot 0,373333 X_2$ ,  
 Feld 1:  $X_2 = (-1)^1 \cdot 0,380711 \cdot X_1$ ,  
 Feld 2:  $X_2$  Spiegelbild zu Feld 1.

6. Einflußlinien der Feldmomente im Feld 2. Konstruktion n. S. 423  $Q_k=10$ ,  $c=2,8$  m. Die Ordinaten  $X_2 - X_1$  werden nach Abb. 391 in 10 gleiche Teile geteilt. Die Spitzenkurve wird nach Abb. 383 aufgetragen.

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l \omega_R$	2,52	4,48	5,88	6,72	7,0	6,72	5,88	4,48	2,52

Die Ordinaten zwischen der Spitzenkurve und den Einflußlinien von  $X_2$  und  $X_1$  werden mit dem Rechenschieber in 9, 8, 7... gleiche Abschnitte geteilt. Dies ist in Abb. 391 nur für die Einflußlinie  $M_4$  angegeben worden. Einflußlinien für Zwischenpunkte eines Abschnitts  $c$  entstehen durch Unterteilung der zugeordneten Ordinatenabschnitte  $j', j''$ .



7. Einflußlinien der Querkräfte in Feld 2. Die Ordinaten  $(X_2 - X_1)/l_2$  werden mit dem Rechenschieber gebildet und von der Stabachse, im Feld 2 von der Geraden  $Q_{m0}$  aus abgetragen (Abb. 392).

8. Einflußlinie der Stützkraft  $C_1$ . Die Ordinaten  $X_1/l_1$  der Querkraftlinie im Feld 1 und die Querkraftlinie Abb. 392 werden superponiert.  $C_1 = Q_{m2} - Q_{m1}$  (Abb. 393).

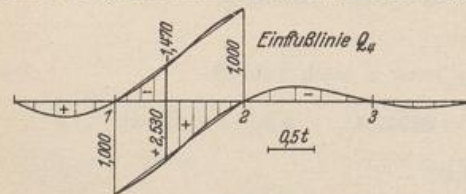


Abb. 392.

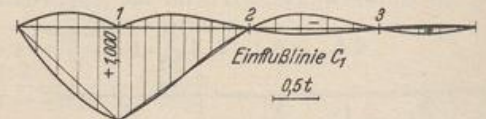


Abb. 393.

**Zeichnerische Untersuchung eines Deckenunterzugs.**

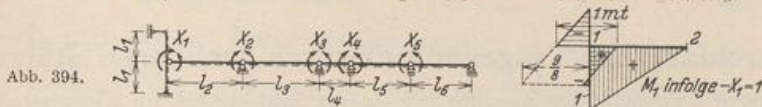
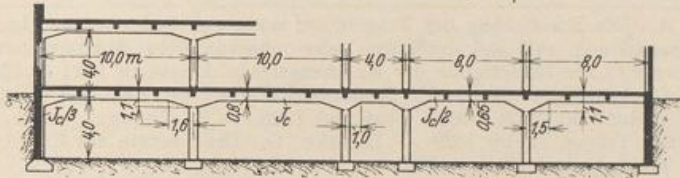
1. Geometrische Grundlagen:

$l_1 = 4,0$ ,  $l_2 = l_3 = 10,0$ ,  $l_4 = 4,0$ ,  $l_5 = l_6 = 8,0$  m,  
 $l'_1 = 12,0$ ,  $l'_2 = l'_3 = 10,0$ ,  $l'_4 = 4,0$ ,  $l'_5 = l'_6 = 16,0$  m.



2. Approximation des Trägheitsmomentes für gerade Vouten, Tab. 29 Fall 2 u. 7.

Feld $l_2, l_3$		Feld $l_4$		Feld $l_5, l_6$	
$n = 0,4,$	$v = 0,16,$	$n = 0,4,$	$v = 0,25,$	$n = 0,22,$	$v = 0,188,$
$\mu = 1 - 0,6 \times$	$\times \left( 2 \cdot 0,16 \cdot 0,84 + \frac{0,16}{3} \right)$	$\mu = 1 - 0,6 \times$	$\times \left( 2 \cdot 0,25 \cdot 0,75 + \frac{0,25}{3} \right)$	$\mu = 1 - 0,78 \times$	$\times \left( 2 \cdot 0,188 \cdot 0,812 + \frac{0,188}{3} \right)$
$\mu = 0,81,$	$\lambda \approx 1$	$\mu = 0,73,$		$\mu = 0,71,$	$\lambda \approx 1$
		$\lambda = 1 - 3 \cdot 0,6 \cdot 0,25^2 = 0,89$			



3. Wirkungslinien  $w'_{k1}, w'_{k2}, w_k$  nach (674)  $e_k = Z_k/N_k$ .

$k$	$\lambda_k l_k$	$\lambda_k + 2\mu_k$	$c_{kk}$	$c_{(k+1)k}$	$\lambda_k l_k l'_k$	$Z_k$	$(\lambda_k + 2\mu_k)l'_k$	$N_k$	$e_k [m]$
2	10,0	2,62	3,81	3,81	100	0	26,2	52,4	0
3	10,0	2,62	3,81	1,52	100	- 85,76	26,2	35,6	- 2,41
4	3,56	2,35	1,52	3,31	14,24	113,76	9,4	48,12	2,36
5	8,0	2,42	3,31	—	128	- 128	38,72	61,44	- 2,085
6	(0)	(1,42)	—	—	(0)	Gl. (670)	22,72	—	—

$M_1$  für  $-X_1 = 1$  (Abb. 394) nach Tab. 30.  $6\delta_{11} = 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{7}{16} - \frac{2}{16} \right) + 2 \cdot 0,81 \cdot 10 = 21,82.$

$6\delta_{11} + 6\delta_{12} = 21,82 + 10 = 31,82, \text{ Gl. (670): } e_1 = a_{12} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 10}{31,82} = 3,14 \text{ m.}$

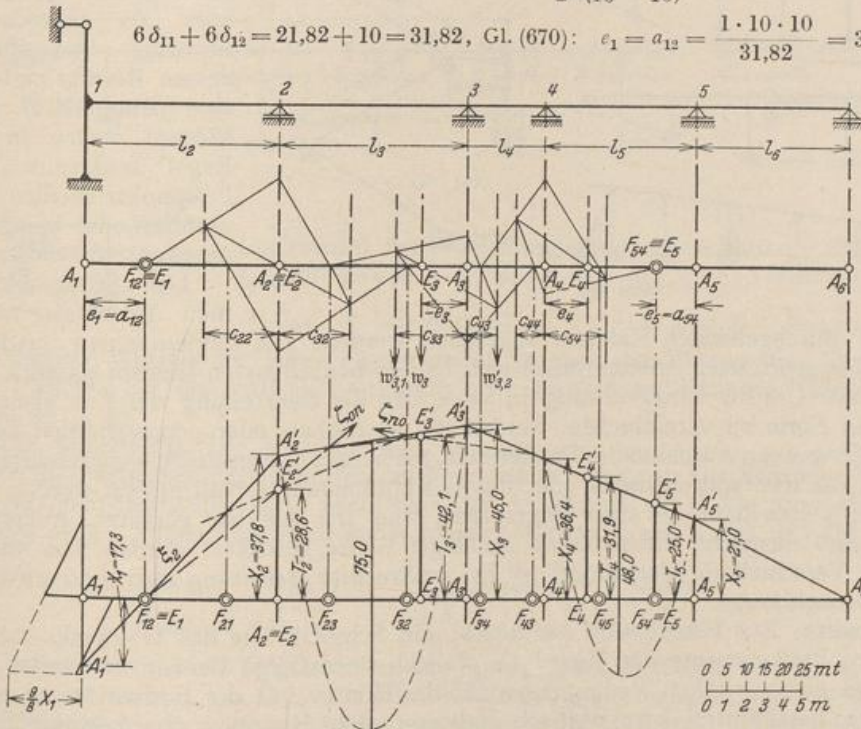


Abb. 395. Der Verlauf der Biegemomente in den belasteten Feldern  $l_3, l_5$  ist mit gestrichelten Linien dargestellt.



4. Festpunkte. Zeichnerisch nach Abb. 395.

5. Belastung.  $p = 6 \text{ t/m}$  auf Feld  $l_3$  u.  $l_5$ .  
Belastungszahlen für  $J = \text{const.}$  Tab. 35.

$$6\delta_{10} = 0, \quad 6\delta_{20} = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 1000 = 1500 = 6\delta_{30}, \quad 6\delta_{40} = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 64 \cdot 16 = 1536 = 6\delta_{50}.$$

$$\text{Gl. (676)} \quad T_k = 6\delta_{k0}/N_k, \quad T_1=0, \quad T_2=1500/52,4=28,6, \quad T_3=42,1, \quad T_4=31,9, \quad T_5=25,0 \text{ mt.}$$

Die Abschnitte  $T_k$  werden von den Punkten  $E_k$  im Momentenmaßstab aufgetragen (positiv nach oben, negativ nach unten). Die Geradenzüge  $\zeta_{0n}$  und  $\zeta_{n0}$  bestimmen die Punkte des Geradenzugs  $\xi_k$  auf den Festpunktsenkrechten und damit die Stützenmomente.

Hertwig, A.: Die Berechnung des Trägers auf mehreren Stützen mit gleichem und veränderlichem Querschnitt, mit frei drehbaren oder eingespannten Stützen. Arm. Beton 1913 S. 219. — Derselbe: Die Berechnung der Rahmengebilde. Eisenbau 1921 S. 122. — Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2 5. Aufl. Stuttgart 1922. — Mörsch, E.: Der durchlaufende Träger. Stuttgart 1928. — Kleinlogel, A., u. G. Sigmann: Der durchlaufende Träger. Berlin 1929. — Domke, O.: Die Theorie des Eisenbetons. Handb. Eisenbetonbau Bd. 1 4. Aufl. Berlin 1930.

### 48. Der durchlaufende Träger mit elastisch drehbaren Stützen.

Die einfache und zuverlässige Ausführung starrer Stabknoten im Eisenbetonbau erklärt die Bedeutung des durchlaufenden Trägers mit elastisch drehbaren Stützen im Bauwesen. Er unterscheidet sich von dem durchgehenden Rahmen (Abb. 396b) durch die unverschiebliche Lage der Stabknoten. Der Riegel des durchgehenden

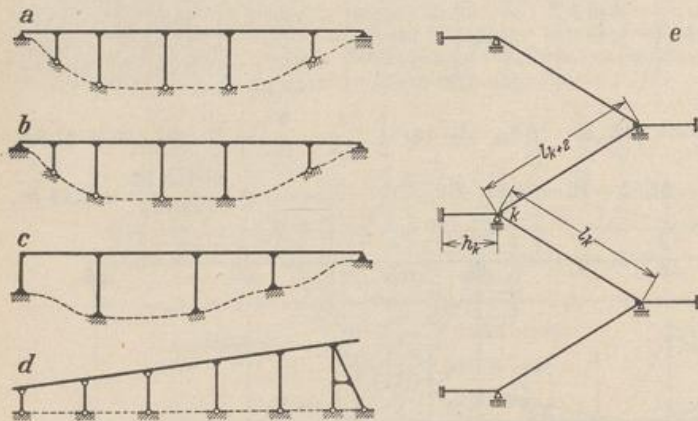


Abb. 396.

Trägers ist daher stets horizontal gestützt. Er wird je nach der Bestimmung des Tragwerks gerade und waagrecht, gerade und schräg oder als gebrochener Stabzug ausgeführt, dessen Knoten gestützt sind (Abb. 396e). Die Pfosten stehen in der Regel senkrecht. Die Fußpunkte werden frei drehbar oder starr eingespannt angenommen.

Der Stockwerkrahmen kann als mehrfacher durchgehender Rahmen angesehen werden. Die beiden einem mittleren Riegel zugeordneten Stützenreihen sind in den benachbarten Riegeln elastisch eingespannt. Um die Untersuchung in einer für die Beurteilung der Festigkeit zulässigen Form zu vereinfachen, werden die statischen oder geometrischen Randbedingungen am Anschluß der Pfosten mit den benachbarten Riegeln vorgeschrieben, indem die Knotendrehwinkel oder die Anschlußmomente Null gesetzt werden. Die Pfosten gelten dann als starr eingespannt oder frei drehbar gestützt. Außerdem kann eine elastische Einspannung beliebiger Größe geschätzt werden. Die waagrechte Verschiebung der Riegel ist bei senkrechter Belastung klein und wird daher vernachlässigt.

**Ansatz.** Zur Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte des Tragwerks werden die Anschlußmomente der Riegel als statisch überzählige Größen verwendet und aus den geometrischen Bedingungen für die Kontinuität der Formänderung eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems bestimmt. Die Gleichungen enthalten je drei statisch überzählige Größen  $X_k$ . Auf diese Weise