



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Zeichnerische Untersuchung

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

**Zeichnerische Untersuchung.** Um das Ergebnis der zeichnerischen Auflösung dreigliedriger Gleichungen nach Abschnitt 32 bei der Untersuchung des durchgehenden Trägers auf starren und frei drehbaren Stützen mit der zeichnerischen Darstellung der Biegemomente übersichtlich zu verbinden, werden die Punkte  $A_k$  der Achse den Stützenpunkten zugeordnet und daher die Abschnitte  $\overline{A_{k-1}A_k} = \Delta_k$  in einem geeigneten Längenmaßstab nach den Feldweiten  $l_k$  bemessen.

Die zeichnerische Auflösung stützt sich auf die Festpunkte  $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$  im Felde  $l_k$  der Achse, die durch die Abschnitte  $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$  bestimmt sind, auf die Ordinaten  $V_{(k-1)k}, V_{k(k-1)}$ , die aus den Kreuzlinienabschnitten  $R_{(k-1)k}, R_{k(k-1)}$  berechnet werden oder auf die Koordinaten  $e_k, T_k$  der einem vorgeschriebenen Belastungsfall zugeordneten Punkte  $E'_k$ .

Die Nebenglieder  $\delta_{ik}$  der Matrix des Ansatzes (650) sind positiv, so daß die Festpunkte  $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$  nach S. 255 innerhalb des zugeordneten Intervalles  $l_k$  liegen. Die Abschnitte  $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$  werden aus den Kennbeziehungen  $\varkappa_{(k-1)k}, \varkappa_{k(k-1)}$  berechnet oder nach S. 256 mit Hilfe der Wirkungslinien elastischer Gewichte  $w'_{k,1}, w'_{k,2}, w_k$  zeichnerisch bestimmt. Nach Abschnitt 32 ist

$$a_{(k-1)k} = \frac{\varkappa_{(k-1)k}}{1 + \varkappa_{(k-1)k}} l_k, \quad a_{k(k-1)} = \frac{\varkappa_{k(k-1)}}{1 + \varkappa_{k(k-1)}} l_k. \quad (669)$$

Die Kennbeziehungen müssen also bekannt, die Kettenbrüche (394), (404) daher ausgewertet sein, um die Festpunkte einrechnen zu können.

Die Wirkungslinien  $w'_{k,1}, w'_{k,2}, w_k$  sind durch die Strecken  $c_{kk}, c_{(k+1)k}$  und  $e_k$  bestimmt. Mit

$$\delta_{kk} = l'_k \int_k \xi^2 \frac{J_k}{J} d\xi + l'_{k+1} \int_{k+1} \xi'^2 \frac{J_{k+1}}{J} d\xi' = \delta_{kk,1} + \delta_{kk,2}$$

ist

$$c_{kk} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} l_k, \quad c_{(k+1)k} = \frac{\delta_{k(k+1)}}{\delta_{kk,2} + \delta_{k(k+1)}} l_{k+1}, \quad (670)$$

$$e_k = \frac{\delta_{k(k+1)} l_{k+1} - \delta_{k(k-1)} l_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}.$$

Bei frei drehbarer Auflagerung oder starrer Einspannung der Endstützen ist

$$e_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} + \delta_{12}} l_2 = a_{12}, \quad e_n = - \frac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn} + \delta_{n(n-1)}} l_n = -a_{n(n-1)}. \quad (671)$$

Bei Belastung eines einzelnen Feldes werden nach S. 258 und Abb. 227 die Ordinaten

$$\left. \begin{aligned} V_{(k-1)k} &= \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} R_{(k-1)k} = \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} \frac{\delta_{(k-1)k} \otimes}{\delta_{k(k-1)}}, \\ V_{kk} &= \frac{a_{k(k-1)}}{l_k} R_{kk} = \frac{a_{k(k-1)}}{l_k} \frac{\delta_k \otimes}{\delta_{k(k-1)}} \end{aligned} \right\} \quad (672)$$

verwendet.

Die Ordinaten  $T_k$  der Punkte  $E'_k$  (Abb. 230) zur Untersuchung eines beliebigen Belastungsfalles sind

$$T_1 = \frac{\delta_{1\otimes}}{\delta_{11} + \delta_{12}}, \quad T_k = \frac{\delta_k \otimes}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}, \quad T_n = \frac{\delta_n \otimes}{\delta_{n(n-1)} + \delta_{nn}}. \quad (673)$$

Diese nach einem vorgeschriebenen Längen- oder Momentenmaßstab aufzutragenden Strecken sind durch die Vorzeichen des Ansatzes bekannt. Sie lassen sich unmittelbar anschreiben, wenn die Veränderlichkeit des Querschnitts im Bereiche eines jeden Feldes nach Tabelle 29 approximiert oder vernachlässigt, also mit feldweise kon-

stantem Trägheitsmoment  $J_k$  gerechnet wird. In diesen Fällen werden nach S. 393 die folgenden Strecken verwendet:

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 2\mu_k} l_k, & c_{(k+1)k} &= \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} + 2\mu_{k+1}} l_{k+1}, \\ e_k &= \frac{\lambda_{k+1} l_{k+1} l'_k - \lambda_k l_k l'_{k+1}}{(\lambda_k + 2\mu_k) l'_k + (\lambda_{k+1} + 2\mu_{k+1}) l'_{k+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (674)$$

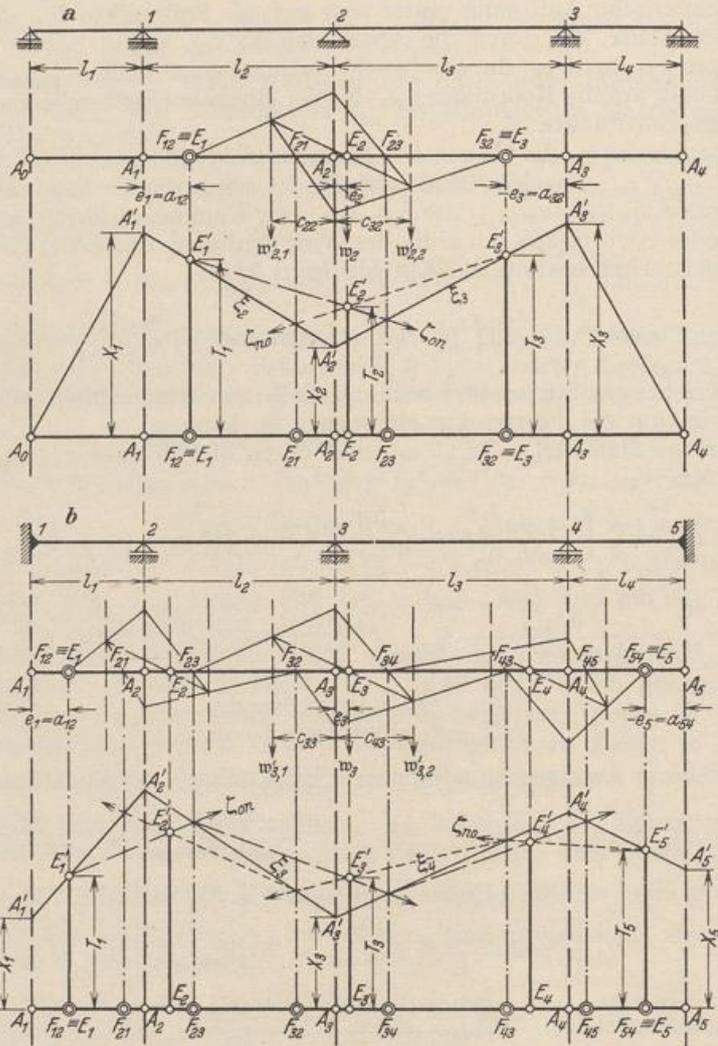


Abb. 380.

1. Einrechnung der Schwerlinien  $w'_{k,1}, w'_{k,2}, w'_k$  mit den Abständen  $c_{kk}, c_{k(k+1)}, e_k$ .
2. Konstruktion der Festpunkte  $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ .
3. Auftragen der Ordinaten  $T_k = E_k E'_k$  für jede Gruppe äußerer Ursachen  $\mathfrak{P}, \Delta t, \Delta k$ .
4. Linienzüge  $\xi_{0n}, \xi_{n0}$ .
5. Linienzug  $\xi_k$ ; Kontrolle: Die Geraden  $\xi_k, \xi_{k+1}$  schneiden sich auf der Senkrechten durch  $A_k$  im Punkte  $A'_k$ ;  $\overline{A_k A'_k} = X_k$

Konstantes Trägheitsmoment im Bereich des Stabes  $l_k, l_{k+1}$ :  $\lambda = \mu = 1$

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{l_k}{3}, & c_{(k+1)k} &= \frac{l_{k+1}}{3}, & e_k &= \frac{l_{k+1} l'_{k+1} - l_k l'_k}{3(l'_k + l'_{k+1})}, \\ V_{(k-1)k} &= \frac{a_{(k-1)k}}{l_k} \frac{6 \delta_{(k-1)k} \otimes}{l'_k}, & V_{kk} &= \frac{a_{k(k-1)}}{l_k} \frac{6 \delta_{k(k-1)} \otimes}{l'_k}. \end{aligned} \right\} \quad (675)$$

Die Schwerlinien  $w'_{k,1}$ ,  $w'_{k,2}$  in den Abständen  $c_{kk}$ ,  $c_{(k+1)k}$  sind daher Drittelslinien. Ist das Trägheitsmoment im Bereich des ganzen Trägers konstant, so wird  $c_k = (l_{k+1} - l_k)/3$  und daher die Schwerlinie  $w_k$  im Abstände  $e_k$  die verschränkte Drittelslinie.

Allgemeiner Belastungsfall:

$$T_k = \frac{6 \delta_k \otimes}{(\lambda_k + 2 \mu_k) l'_k + (\lambda_{k+1} + 2 \mu_{k+1}) l'_{k+1}}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{für } \mu = \lambda = 1 \text{ ist} \end{array} \right\} \quad (676)$$

$$T_k = \frac{6 \delta_k \otimes}{3 (l'_k + l'_{k+1})}$$

Für eine Temperaturänderung  $\Delta t$  des Trägers mit der mittleren Höhe  $d$  und für Stützensenkungen  $\Delta_{k-1}$ ,  $\Delta_k$ ,  $\Delta_{k+1}$  ist

$$T_k = \frac{6 E J_c \left[ \frac{\alpha_1 \Delta t}{2 d} (l_k + l_{k+1}) + \frac{\Delta_{k-1}}{l_k} - \Delta_k \left( \frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) + \frac{\Delta_{k+1}}{l_{k+1}} \right]}{(\lambda_k + 2 \mu_k) l'_k + (\lambda_{k+1} + 2 \mu_{k+1}) l'_{k+1}}. \quad (677)$$

Bei frei drehbaren Endstützen ist

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = \frac{\lambda_2 l_2 l'_2}{2 \bar{\mu}_1 l'_1 + (\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2} = a_{12}, \quad -e_n = \frac{\lambda_n l_n l'_n}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n + 2 \bar{\mu}_{n+1} l'_{n+1}} = a_{n(n-1)}, \\ T_1 = \frac{6 \delta_1 \otimes}{2 \bar{\mu}_1 l'_1 + (\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2}, \quad T_n = \frac{6 \delta_n \otimes}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n + 2 \bar{\mu}_{n+1} l'_{n+1}}, \end{array} \right\} \quad (678)$$

bei starrer Einspannung der Endquerschnitte (1) und (n)

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = \frac{\lambda_2 l_2 l'_2}{(\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2} = a_{12}, \quad -e_n = \frac{\lambda_n l_n l'_n}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n} = a_{n(n-1)}, \\ T_1 = \frac{6 \delta_1 \otimes}{(\lambda_2 + 2 \mu_2) l'_2}, \quad T_n = \frac{6 \delta_n \otimes}{(\lambda_n + 2 \mu_n) l'_n}. \end{array} \right\} \quad (679)$$

Bei Belastung eines einzelnen Feldes  $l_k$  werden die benachbarten Stützenmomente  $X_{k-1}$ ,  $X_k$  nach Abb. 227 mit den den Festpunkten zugeordneten Ordinaten  $V_{(k-1)k}$ ,

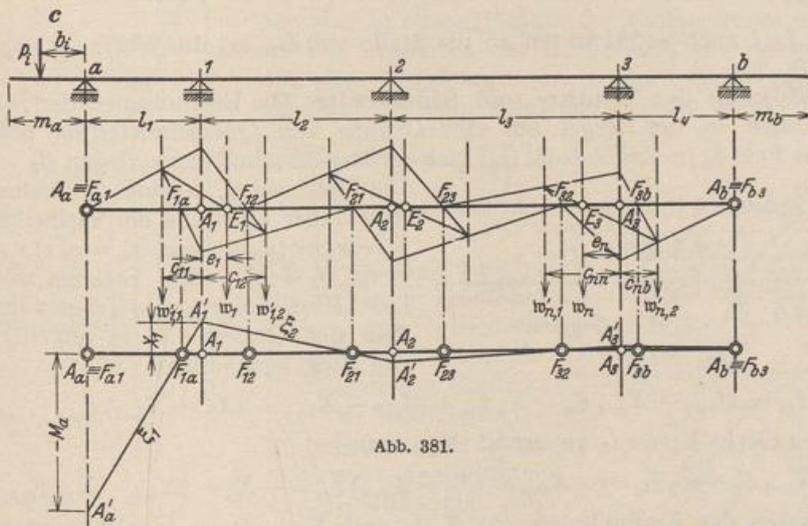


Abb. 381.

Belastung des linken Kragarmes.  $M_a = -\sum P_i b_i$ . Festpunkte zeichnerisch nach Abschn. 32. Die Schwerlinien in den

Randfeldern werden nach (670) mit  $(\delta_k(k-1))_{k-1} = \delta_{1a} = \frac{\lambda_1 l'_1}{6}$ ,  $(\delta_k(k+1))_{k-n} = \delta_{nb} = \frac{\lambda_{n+1} l'_{n+1}}{6}$  eingerechnet.

$V_{kk}$  aufgezeichnet. Die übrigen Stützenmomente sind links vom Stützpunkt  $(k-1)$  durch die Festpunkte  $F_{(k-1)k}$ , rechts vom Stützpunkt  $k$  durch die Festpunkte  $F_{k(k-1)}$  bestimmt. Um darauf auch die Biegemomente im belasteten Felde  $l_k$  an-

zugeben, werden nach dem Ansatz (637) die Biegemomente  $M_0$  des einfachen Balkenträgers  $l_k$  von  $A'_{k-1} A'_k \equiv \xi_k$  als Bezugsgeraden aus abgetragen.

Die allgemeine zeichnerische Untersuchung einer beliebigen Belastung mit Hilfe der Festpunkte und der Punkte  $E'_k$  ist ausführlich auf S. 260 beschrieben, so daß darauf in Verbindung mit den beiden Abb. 380 und 381 verwiesen werden kann.

**Die Entwicklung der Einflußlinien der Stützenmomente aus den Festpunkten.** Das Stützenmoment  $X_k$  ist als überzählige Größe eines  $(n-1)$  fach statisch unbestimmten Hauptsystems

$$X_k = \delta_{k0}^{(n-1)} / \delta_{kk}^{(n-1)}.$$

Die Einflußlinie wird daher aus der Biegelinie  $\delta_{mk}^{(n-1)}$  des Hauptsystems für  $-X_k = 1$  abgeleitet und daher aus den Momenten  $M_k^{(n-1)}$  berechnet, die für den Lastangriff  $-X_k = 1$  mit Hilfe der Festpunkte aufgezeichnet werden (Abb. 378 b).

$$\begin{aligned} \delta_{kk}^{(n-1)} &= -\alpha_{(k-1)k} \delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \alpha_{(k+1)k} \delta_{k(k+1)} \\ &= \delta_{k(k-1)} \left( \frac{b_{k(k-1)}}{a_{k(k-1)}} - \frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}} \right) + \delta_{k(k+1)} \left( \frac{b_{k(k+1)}}{a_{k(k+1)}} - \frac{a_{(k+1)k}}{b_{(k+1)k}} \right). \end{aligned}$$

Bei Approximation der Querschnittsveränderlichkeit nach Tabelle 29 ist

$$6 \delta_{kk}^{(n-1)} = l'_k \left( 2\mu_k - \lambda_k \frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}} \right) + l'_{k+1} \left( 2\mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \frac{a_{(k+1)k}}{b_{(k+1)k}} \right). \quad (680)$$

Gleichung der Biegelinie  $6 \delta_{mk}^{(n-1)}$  für  $J_k/J = \text{const.}$

$$\left. \begin{aligned} \text{Feld } l_k: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= l_k l'_k (\omega_D - \alpha_{(k-1)k} \omega'_D), \\ \text{,, } l_{k+1}: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= l_{k+1} l'_{k+1} (\omega'_D - \alpha_{(k+1)k} \omega_D), \\ \text{,, } l_h: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= (-1)^{(k-h)} \alpha_{(k-1)k} \cdots \alpha_{h(h+1)} l_h l'_h (\omega_D - \alpha_{(h-1)h} \omega'_D), \\ \text{,, } l_r: \quad 6 \delta_{mk}^{(n-1)} &= (-1)^{(r-1-k)} \alpha_{(k+1)k} \cdots \alpha_{(r-1)(r-2)} l_r l'_r (\omega'_D - \alpha_{r(r-1)} \omega_D). \end{aligned} \right\} (681)$$

Für  $\zeta_k = J_k/J$  nach S. 394 treten an die Stelle von  $\omega_D, \omega'_D$  die Werte  $\bar{\omega}_D, \bar{\omega}'_D$  nach Tabelle 29.

**Einflußlinien der Schnitt- und Stützkräfte.** Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden in der Regel auf eine Gruppe von Querschnitten  $m$  bezogen, welche das Feld  $l_k$  in eine Anzahl ( $q_k$ ) gleichgroßer Abschnitte  $c$  zerlegen ( $l_k = q_k c$ ).

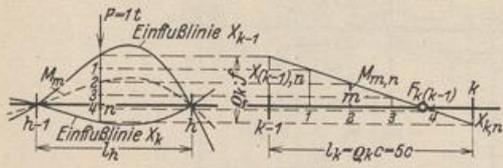


Abb. 382.

Die Abszissen  $x_m, x'_m$  eines Querschnitts  $m$  sind daher ebenfalls ein Vielfaches der Strecken  $c$  ( $x_m = q'_k c, x'_m = q''_k c, x_m + x'_m = l_k, q'_k + q''_k = q_k$ ). Solange sich die Last  $P$  im Felde  $l_k$  des Trägers bewegt, dem der Querschnitt  $m$  angehört, ist das Biegemoment

$$M_m = M_{m0} - X_{k-1} \xi'_m - X_k \xi_m = M_{m0} - X_{k-1} - (X_k - X_{k-1}) \xi_m. \quad (682)$$

Greift  $P$  außerhalb von  $l_k$  an, so ist  $M_{m0} = 0$  und

$$M_m = -X_{k-1} \xi'_m - X_k \xi_m = -X_{k-1} - (X_k - X_{k-1}) \xi_m = -X_k - (X_{k-1} - X_k) \xi'_m. \quad (683)$$

Die Ordinaten der Einflußlinien von  $X_{k-1}$  und  $X_k$  besitzen hier stets entgegengesetztes Vorzeichen, so daß nach (683) die Einflußlinien der Feldmomente  $M_m$  die Summe der einem jeden Lastpunkt zugeordneten Ordinaten  $|X_{k-1}| + |X_k|$  ebenfalls in  $q_k$  gleichgroße Abschnitte  $f$  teilen (Abb. 382).

Die Einflußlinien  $M_m$  werden innerhalb des Feldes  $l_k$  am einfachsten aus den Zustandslinien gefunden, die für die Stellung der Last  $P$  in jedem Teilpunkt  $m$  der Strecke  $l_k$  mit Hilfe der vorhandenen Einflußlinien  $X_{k-1}$  und  $X_k$  aufgezeichnet