



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

50. Die Erweiterung der Aufgabe

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Einflußlinie X_3 ergibt sich durch Superposition von X_{30} und der um $X_{31} = 0,08837$ erweiterten Einflußlinie $\psi_{1,m}$ (Abb. 413).

Dieses Beispiel wurde in Abschn. 40 für konstantes Trägheitsmoment gerechnet. Der Vergleich zeigt den Einfluß der Vouten auf die Größe der Schnittkräfte.

Spiegel, G.: Mehrstielige Rahmen. Berlin 1920. — Nakonz, W.: Die Berechnung mehrstieliger Rahmen unter Anwendung statisch unbestimmter Hauptssysteme. Berlin 1924. — Kleinogel, A.: Mehrstielige Rahmen 2. Aufl. Berlin 1927.

50. Die Erweiterung der Aufgabe.

Im Bauwesen sind zahlreiche Tragwerke im Gebrauch, die als bauliche Ausgestaltung eines durchlaufenden Trägers oder Rahmens angesehen und daher auch in ähnlicher Weise statisch untersucht werden. Die Anordnung schräger Stützen ist in Abb. 298 gezeigt und auf S. 328 nachgeprüft worden. An die Stelle einzelner End- oder Zwischenpfosten können zur Übertragung waagerechter Kräfte auch Stützböcke dienen. Die Schnittkräfte des Tragwerks werden in diesem Falle nach S. 319 aus den Knotendrehwinkeln abgeleitet. Die elastischen Verschiebungen der

Anschlußpunkte der Riegel in senkrechter Richtung besitzen nur in Ausnahmefällen Bedeutung.

Tragwerke nach Abb. 414 können als durchlaufende Träger oder durchlaufende Rahmen mit aufgelöstem Riegel angesehen werden, wenn die Änderung der Stützenentfernung durch die Belastung klein genug bleibt, um vernachlässigt zu werden. Die Berechnung der Schnittkräfte aus den Komponenten des Verschiebungszustandes der Knotenpunktfigur ist auf S. 310 erwähnt worden. Sie kann auch auf die Ansätze des Abschn. 24 zurückgeführt werden, wenn die Formänderungen δ_{k0} ,

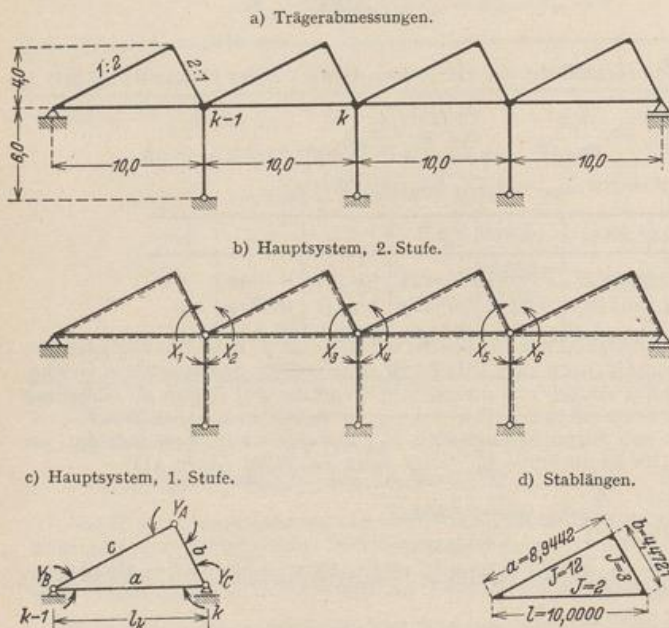


Abb. 414.

$\delta_{kk,1}$ usw. des innerlich statisch unbestimmten, als Balken gestützten Rahmenriegels bekannt sind. Das wird an der Untersuchung eines Shedbinders gezeigt, dessen Zuggurte zur Abstützung von Transmissionen biegeunflexibel ausgebildet worden sind, so daß mit der senkrechten Belastung p_a, p_b, p_c aller drei Stäbe gerechnet werden muß.

Die Lösung zerfällt in zwei Stufen. Die erste behandelt die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_A, Y_B, Y_C des Rahmenriegels l_k für dessen Belastung mit p_a, p_b oder p_c und durch die äußeren Kräfte $-X_{k-1} = 1, -X_k = 1$ und die Berechnung der Verdrehung der Endquerschnitte $(k-1), k$ infolge dieser äußeren Ursachen. In der zweiten Stufe werden die nunmehr bekannten Verdrehungen $\delta_{k0}, \delta_{kk,1}, \delta_{k(k-1)}, \delta_{(k-1)(k-1),1}$ zur Berechnung der Stützenmomente X_k, X_{k+1} rechts und links von einer Stütze k nach Abb. 414 verwendet. Mit diesen und den Schnitt-

kräften des statisch unbestimmten Hauptsystems aus \mathfrak{P} , $-X_{k-1} = 1$, $-X_k = 1$ ist dann eine beliebige Schnittkraft des Rahmenriegels

$$M = M_0^{(3)} - X_{k-1} M_{(k-1)}^{(3)} - X_k M_k^{(3)}.$$

1. Stufe (Abb. 414c). Berechnung der Eckmomente Y_A, Y_B, Y_C .

Matrix der Elastizitätsgleichungen

	Y_A	Y_B	Y_C
1	+ 1,4907	+ 0,2484	+ 0,4969
2	+ 0,2484	+ 3,8302	+ 1,6667
3	+ 0,4969	+ 1,6667	+ 4,3271

Konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{AB} .

	δ_{A0}	δ_{B0}	δ_{C0}
Y_A	+ 0,69802	- 0,01248	- 0,07535
Y_B	- 0,01248	+ 0,31388	- 0,11946
Y_C	- 0,07535	- 0,11946	+ 0,28577

Die Formänderungen $\delta_{A0}, \delta_{B0}, \delta_{C0}$ werden für $-X_{k-1} = 1, -X_k = 1$ und für die Belastung der Stäbe mit p_a, p_b, p_c berechnet. Damit sind die statisch überzähligen Eckmomente nach (354) bekannt, so daß die Biegemomente für jeden Belastungsfall angegeben werden können ($-X_{k-1} = 1$: Abb. 415a, $-X_k = 1$: Abb. 415b, p_a : Abb. 415c, p_b : Abb. 415d, p_c : Abb. 415e). Mit diesen sind die Verdrehungen der Endquerschnitte $(k-1), k$ des Rahmenriegels nach (305) ($J_c = 2$, Pfosten: $J = 4$)

$$\delta_{kk,1}^{(3)} = \int M_k^{(3)} M_k^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 0,6135,$$

$$\delta_{(k-1)(k-1),1}^{(3)} = 0,3792,$$

$$\delta_{k(k-1)}^{(3)} = -0,0055,$$

$$-\delta_{k(k+1)} = \delta_{kk,2} = \delta_{(k+1)(k+1),2} = +1.$$

Damit kann nach (488) auch die zweite Stufe der statischen Untersuchung zur Berechnung der Stützenmomente X_{k-1}, X_k, X_{k+1} usw. angeschrieben werden. Sie besteht aus dreigliedrigen Gleichungen und zeichnet sich dadurch aus, daß die Vorzahlen $\delta_{23} = \delta_{45}$ so klein sind, daß der Ansatz in drei unabhängige Teile zerlegt und der elastische Zusammenhang damit auf zwei Rahmenriegel mit dem Zwischenpfosten beschränkt werden kann.

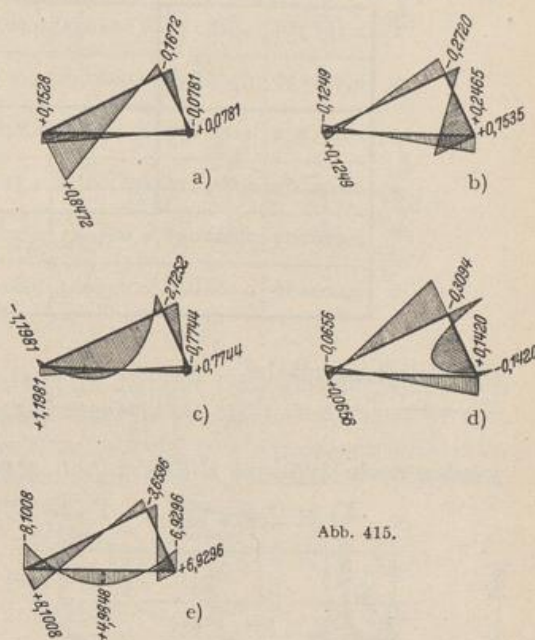


Abb. 415.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	+ 1,6135	- 1,0000				
2	- 1,0000	+ 1,3792	- 0,0055			
3		- 0,0055	+ 1,6135	- 1,0000		
4			- 1,0000	+ 1,3792	- 0,0055	
5				- 0,0055	+ 1,6135	- 1,0000
6					- 1,0000	+ 1,3792

Der vollständige Ansatz wird nach der Rechenvorschrift S. 232 aufgelöst. Die Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}$, $\kappa_{k(k-1)}$ und die Vorzahlen β_{ik} der konjugierten Matrix bestätigen die erwähnte Aufteilung der elastischen Wirkung des Tragwerks. Das Verhältnis zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten des homogenen Ansatzes mit $\delta_{10} = 1$ oder $\delta_{50} = 1$ ist stets positiv. Die statischen Eigenschaften des durchgehenden Trägers sind durch die Auflösung des Riegels verlorengegangen.

$k(k-1)$	65	54	43	32	21
$-\kappa_{k(k-1)}$	-0,725058	-0,006191	-0,725076	-0,006191	-0,725076
$(k-1)k$	12	23	34	45	56
$-\kappa_{(k-1)k}$	-0,619771	-0,007242	-0,619786	-0,007242	-0,619786

Vorzahlen β_{ik} .

	0,725076	0,006191	0,725076	0,006191	0,725058	
1	1,125589	0,816136	0,005052	0,003663	0,000023	0,000016
2	0,816136	1,316833	0,008152	0,005911	0,000037	0,000027
3	0,005052	0,008152	1,125632	0,816168	0,005053	0,003663
4	0,003663	0,005911	0,816168	1,316853	0,008152	0,005911
5	0,000023	0,000037	0,005053	0,008152	1,125623	0,816139
6	0,000016	0,000027	0,003663	0,005911	0,816139	1,316805
	1	2	3	4	5	6

Die Belastungsglieder

$$\delta_{k0}^{(3)} = \int M_0^{(0)} M_k^{(3)} \frac{J_c}{J} ds = \int M_0^{(3)} M_k^{(0)} \frac{J_c}{J} ds$$

werden nach (305) mit Hilfe der Abb. 415 berechnet. Damit sind dann

$$X_k = \sum \beta_{kh} \delta_{h0}^{(3)}, \quad Y_A = Y_{A0}^{(3)} - X_{k-1} Y_{A(k-1)}^{(3)} - X_k Y_{Ak}^{(3)}$$

bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abb. 416 für zwei Belastungsfälle aufgezeichnet worden.

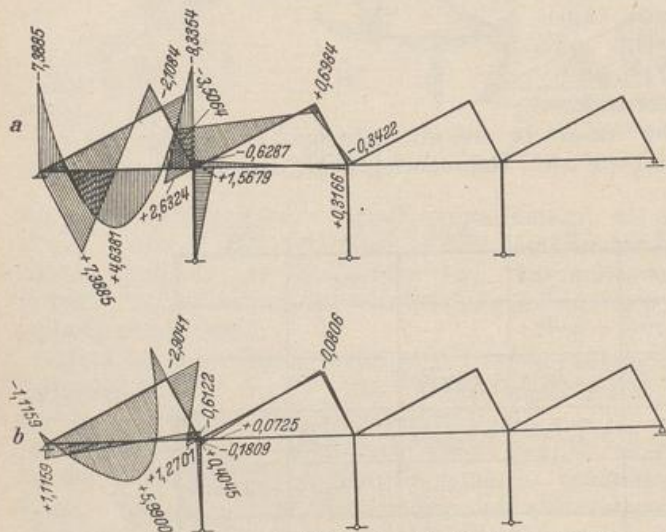


Abb. 416. a) Belastung des Untergurtes, b) Belastung des Stabes e im ersten Felde.

Die Verwendung des durchgehenden Trägers als Hauptsystem. Die Untersuchung hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke bietet in zahlreichen Fällen Gelegenheit, den durchgehenden Träger auch als statisch unbestimmtes Hauptsystem, also im Gegensatz zur Untersuchung des Shedträgers (Abb. 414) als Hauptsystem der ersten Stufe des Ansatzes zu verwenden. Die Längskraft X_n eines

Rahmens (Abb. 417a) ist die statisch überzählige Größe eines durchlaufenden Trägers. Sie wird nach S. 296 in einer zweiten Stufe berechnet. $X_n = \delta_{n0}^{(n-1)} / \delta_{nn}^{(n-1)}$. Da die Längenänderungen der biegesteifen Stäbe jedoch vernachlässigt werden, ist X_n bei jeder Belastung Null und nur für eine Temperaturänderung des Riegels zu berechnen.

Der Ansatz findet auch bei Tragwerken nach Abb. 418 Anwendung. In diesem Falle sind jedoch Längskräfte X_a infolge einer Belastung des Stabzugs vorhanden. $X_a \approx 0$ bedeutet daher nur eine Näherungslösung, deren Gültigkeit nicht ohne weiteres übersehen werden kann und daher

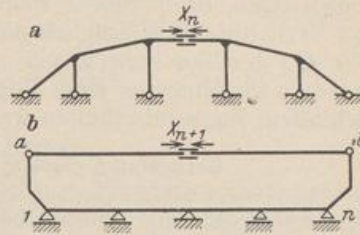


Abb. 417.

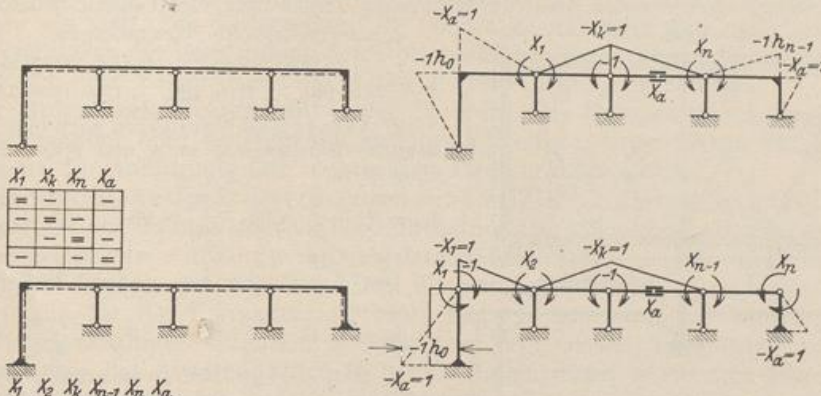


Abb. 418.

nachzuprüfen ist. Die Art der Untersuchung kann auch auf den Behälterrahmen (Abb. 417b) übertragen werden.

Die Änderung der Länge \bar{ab} ist aber in der Regel so klein, daß bei symmetrischer Ausbildung des Rahmens mit unverschieblichen Punkten a, b gerechnet werden kann.

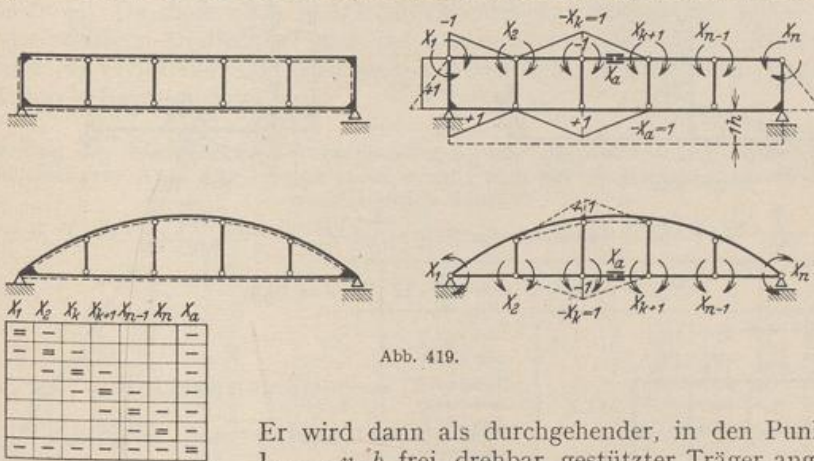


Abb. 419.

Er wird dann als durchgehender, in den Punkten $a, 1, \dots, n, b$ frei drehbar gestützter Träger angesehen, dessen Längskraft X_{n+1} statisch bestimmt ist.

Das Hauptsystem zur Berechnung der Längskraft X_a eines Bogenträgers mit biegesteifem Zugband (Abb. 419) oder biegesteifem Streckbalken kann bei Vernachlässigung der Längenänderung der Stäbe zwischen Balken und Bogen als durch-

laufender Balkenträger mit senkrecht verschieblichen Zwischenstützen angesehen werden. Die statischen Eigenschaften lassen sich am einfachsten für $J_c/J \cos \alpha = \text{const}$ beschreiben, da in diesem Falle die Belastung den beiden biegesteifen Gurten im Verhältnis ihrer Trägheitsmomente zufällt. Dasselbe gilt dann nach S. 270 auch für den geschlossenen Träger, nur daß in diesem Falle nicht die Balkenmomente, sondern die Momente eines Bogenträgers aufgeteilt werden, die für den Träger mit schlaffem Zugband erhalten werden würden.

Berechnung eines symmetrischen Behälterrahmens Abb. 420.

Bei symmetrischer Belastung sind die Querkraft und die Verdrehung der Stabtangente im Querschnitt der Symmetrieachse Null. Daher ändert die Annahme einer beweglichen Einspannung im Querschnitt δ nichts am Spannungs- und Verschiebungszustand des Tragwerks. Die Schnittkräfte werden daher für den einen der beiden symmetrischen, im Querschnitt δ beweglich, im Querschnitt 4 starr eingespannten, durchlaufenden Träger über vier Feldern berechnet.

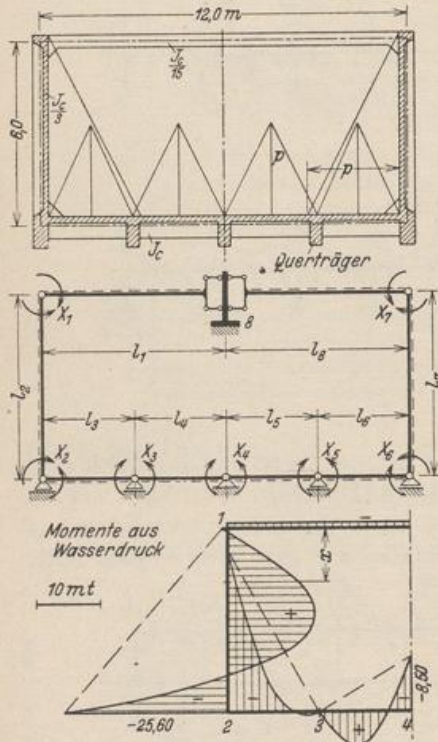


Abb. 420.

1. Geometrische Grundlagen.

$$l_1 = l_2 = 6,0 \text{ m}, \quad l_3 = l_4 = 3,0 \text{ m},$$

$$l'_1 = 90, \quad l'_2 = 18, \quad l'_3 = l'_4 = 3 \text{ m}.$$

2. Ansatz und Vorzahlen nach (651) für bewegliche Einspannung in δ und starre Einspannung in 4 .

$$\delta_{11} = l'_1 + \frac{l'_2}{3} = 90 + \frac{18}{3} = 96, \quad \delta_{12} = \frac{18}{6} = 3,$$

$$\delta_{22} = \frac{18}{3} + \frac{3}{3} = 7, \quad \delta_{23} = \delta_{34} = 0,5,$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{3} (3 + 3) = 2, \quad \delta_{44} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

3. Belastung: Der Wasserdruck wird von der Bodenplatte dreieckförmig auf die Quer- und Längsträger verteilt. Rahmenabstand 2,0 m, $p = 2,0 \cdot 6,0 = 12 \text{ t/m}$.

4. Belastungszahlen nach Tab. 35.

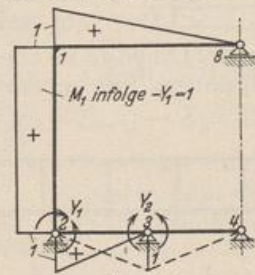


Abb. 421.

$$\delta_{10} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{60} \cdot 12 \cdot 6^2 \cdot 18 = 151,2, \quad \delta_{20} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{15} \cdot 12 \cdot 6^2 \cdot 18 + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{32} \cdot 12 \cdot 3^2 \cdot 3 = 181,5,$$

$$\delta_{30} = 2 \delta_{40} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{32} \cdot 12 \cdot 3^2 \cdot 3 = 16,9.$$

5. Lösung.

X_1	X_2	X_3	X_4	
96	3			151,2
3	7	0,5		181,5
	0,5	2	0,5	16,9
		0,5	1	8,45

$$M_1 = -X_1 = -0,78 \text{ mt} \quad \text{Feld } l_2:$$

$$M_2 = -X_2 = -25,60 \text{ mt} \quad M_{0x} = \frac{p l_2^3}{6} \omega_D,$$

$$M_3 = -X_3 = +0,08 \text{ mt} \quad \text{Feld } l_3, l_4, \left(\xi \leq \frac{1}{2} \right):$$

$$M_4 = -X_4 = -8,50 \text{ mt} \quad M_{0x} = \frac{p l_3^3}{4} \left(\omega_D - \frac{\xi^3}{3} \right).$$

Bei antimetrischer Belastung des Tragwerks durch Winddruck sind das Biegemoment und die senkrechte Verschiebung der Querschnitte 4 und 8 der Symmetrieachse Null. Die Schnittkräfte werden daher mit dem Hauptssystem Abb. 421 berechnet.

$$Y_1 = -M_2 = M_6, \quad Y_2 = -M_3 = M_5, \quad M_4 = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{l_1}{3} + l_2 + \frac{l_3}{3}, \quad \delta_{12} = \frac{l_3}{6}, \quad \delta_{22} = \frac{l_3 + l_4}{3}.$$

51. Der Stockwerkrahmen.

Der Stockwerkrahmen ist in der Gegenwart ein wichtiges Traggerüst des Brücken- und Hochbaues. Während die Verbindung von Zwischenstütze und Riegel bei Ausführungen in Stahl für den Festigkeitsnachweis in der Regel frei drehbar angenommen wird, gilt sie bei der einfachen Ausbildung der Rahmenknoten im Eisenbetonbau als steif. Die Unterteilung in Tragwerke mit zwei und mehr als zwei Pfosten ist durch die Verwendung des Stockwerkrahmens im Bauwesen entstanden; sie läßt sich noch besser durch die statische Untersuchung begründen.

Der Stockwerkrahmen mit zwei Pfosten. Die Rahmenknoten liegen beliebig zueinander oder symmetrisch zu einer Mittellinie. Unter diesen Stockwerkrahmen ist die Anordnung mit senkrechten Pfosten ausgezeichnet.

Die Schnittkräfte des Tragwerks lassen sich stets aus den überzähligen Größen X_k eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems ableiten. Der statisch bestimmte Aufbau von Dreigelenrahmen führt zu geometrischen Bedingungsgleichungen mit acht oder fünf überzähligen Größen. Die geometrischen Bedingungen für die Formänderung eines statisch unbestimmten Hauptsystems aus Zweigelenrahmen enthalten je sechs oder drei statisch überzählige Größen. Die Auflösung des Ansatzes leidet in beiden Fällen durch ungünstige Fehlerfortpflanzung. Daher werden bei einem Stabnetz mit beliebiger Knotenpunktfigur nach Abschn. 38 ff. zunächst die Knoten- und Stabdrehwinkel φ_j, ϑ_h aus den Gleichgewichtsbedingungen (523) der Schnittkräfte berechnet und diese dann selbst als Funktionen der Komponenten φ_j, ϑ_h des Verschiebungszustandes angegeben. Die Gleichgewichtsbedingung $\delta A_j = 0$ enthält vier unbekannte Knotendrehwinkel φ_j und zwei unabhängige Parameter ψ_c des Verschiebungszustandes, die Gleichgewichtsbedingung $\delta A_c = 0$ je vier Knotendrehwinkel φ_j und einen Parameter ψ_c . Da diese nach S. 311 voneinander unabhängig sein sollen, werden dafür die relativen Drehwinkel eines der beiden Pfosten h_k zum Riegelstab l_k der Stabkette (k) verwendet. Die Gleichungen lassen sich für jeden Belastungsfall am besten durch Iteration auflösen.

Berechnung der waagerechten Verschiebung u_F und der Verdrehung ϑ_i des Stabes i des Gerüsts Abb. 422 infolge einer exzentrisch zur Stabachse angreifenden waagerechten Kraft W .

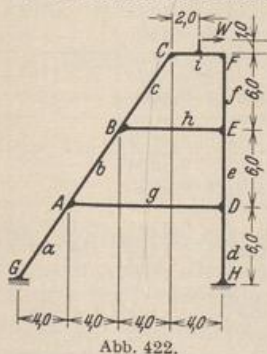


Abb. 422.

1. Geometrische Grundlagen.

k	l_k [m]	J_c/J_k	l_k	$1/l_k$
a	7,211 102	1	7,211 102	0,1387
b	7,211 102	1	7,211 102	0,1387
c	7,211 102	1	7,211 102	0,1387
d	6,000 000	1	6,000 000	0,1667
e	6,000 000	1	6,000 000	0,1667
f	6,000 000	1	6,000 000	0,1667
g	12,000 000	1/2	4,000 000	0,2500
h	8,000 000	1/2	2,666 667	0,3750
i	4,000 000	1	4,000 000	0,2500

2. Die geometrisch überzähligen Größen des Verschiebungszustandes und die statischen Bedingungsgleichungen. Als unabhängige geometrisch überzählige Größen