



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Der symmetrische Stockwerkrahmen mit zwei geneigten Pfosten

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

c) Die Vorzahlen der statischen Bedingungen.

$$a_{AK} = -\dot{i}_A (M_{AK}^{(a)} + M_{AK}^{(b)} + M_{AK}^{(c)}), \quad a_{BK} = -\dot{i}_B (M_{BK}^{(b)} + M_{BK}^{(c)} + M_{BK}^{(d)}).$$

Mit $M_{aK} = M_{AK}^{(a)} + M_{aK}^{(a)}$, der Summe der Stabendmomente im positiven Drehsinn aus $K \equiv A \dots F, 1, 2, 3$, ist

$$a_{1K} = \dot{i}_1 M_{aK} + \dot{i}_1 M_{dK} - \frac{1}{3} \cdot \dot{i}_1 (M_{bK} + M_{cK} + M_{eK} + M_{fK} + M_{gK} + M_{hK} + M_{iK}),$$

$$a_{2K} = \dot{i}_2 M_{bK} + \dot{i}_2 M_{cK} - \frac{1}{2} \cdot \dot{i}_2 (M_{cK} + M_{fK} + M_{hK} + M_{iK}).$$

d) Die Belastungszahlen (Abb. 424).

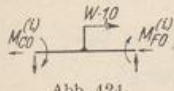


Abb. 424.

$$M_{C0}^{(d)} = M_{F0}^{(d)} = + \frac{W \cdot l \cdot 0}{4} \quad (\text{Tabelle 25}),$$

$$a_{C0} = -\dot{i}_C \cdot M_{C0}^{(d)} = -0,25 W, \quad a_{F0} = -\dot{i}_F \cdot M_{F0}^{(d)} = -0,25 W.$$

$$a_{10} = \dot{i}_1 \left(-\frac{1}{3}\right) (2 \cdot 0,25 W - 5,0 W), \quad a_{20} = \dot{i}_2 \left(-\frac{1}{2}\right) (2 \cdot 0,25 W - 5,0 W),$$

$$a_{30} = \dot{i}_3 (-1) (2 \cdot 0,25 W - 5,0 W).$$

e) Matrix der statischen Bedingungen. ($W = 1$).

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	ψ_1	ψ_2	ψ_3	a_{j0}
A	-2,1096	-0,2774	.	-0,5000	.	.	+0,0548	+0,8322	.	
B	-0,2774	-2,6096	-0,2774	.	-0,7500	.	-1,3048	-0,7089	+0,8322	
C	.	-0,2774	-1,5548	.	.	-0,5000	-0,7774	-1,1661	-0,6678	-0,25
D	-5,000	.	.	-2,3336	-0,3334	.	+0,1668	+1,0002	.	
E	.	-0,7500	.	-0,3334	-2,8336	-0,3334	-1,4168	-0,6249	+1,0002	
F	.	.	-0,5000	.	-0,3334	-1,6668	-0,8334	-1,2501	-0,4998	-0,25
1	+0,0548	-1,3048	-0,7774	+0,1668	-1,4168	-0,8334	-5,6459	-0,6392	+0,2216	+1,50
2	+0,8322	-0,7089	-1,1661	+1,0002	-0,6249	-1,2501	-0,6392	-6,4560	+0,3324	+2,25
3	.	+0,8322	-0,6678	.	+1,0002	-0,4998	+0,2216	+0,3324	-6,6648	+4,50

3. Auflösung durch Iteration (Abschn. 30).

φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	ψ_1	ψ_2	ψ_3
+0,2788	-0,1178	-1,1160	+0,3444	-0,0378	-0,9834	+0,5546	+0,8379	+0,9006

4. EJ_c fache waagerechte Verschiebung des Knotens F (Stab i).

$$u_F = \psi_1 u_{F1} + \psi_2 u_{F2} + \psi_3 u_{F3} = \psi_1 \cdot 2,00 + \psi_2 \cdot 3,00 + \psi_3 \cdot 6,00 = 9,0265.$$

EJ_c fache Verdrehung des Stabes i.

$$\vartheta_i = \psi_1 \vartheta_{i1} + \psi_2 \vartheta_{i2} + \psi_3 \vartheta_{i3} = \psi_1 \left(-\frac{1}{3}\right) + \psi_2 \left(-\frac{1}{2}\right) + \psi_3 (-1) = -1,5045.$$

Der symmetrische Stockwerkrahmen mit zwei geneigten Pfosten. Die äußeren Ursachen des Spannungs- und Verschiebungszustandes des Tragwerks (Belastung \mathfrak{P} , Temperaturänderung t und die Stützenverschiebungen) werden nach S. 186 in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt. Die Schnittkräfte sind nach Abschn. 28 Funktionen von statisch überzähligen Gruppenlasten eines statisch bestimmten Hauptsystems, die aus den Schnittkräften am unteren Ende

der Pfosten h_r eines jeden Stockwerks (r) gebildet werden. Dies sind links die Kräfte $A^{(r)}, H_a^{(r)}, M_a^{(r)}$, rechts die Kräfte $B^{(r)}, H_b^{(r)}, M_b^{(r)}$ (Abb. 425).

$$X_r = \frac{M_a^{(r)} + M_b^{(r)}}{2}, \quad Y_r = \frac{M_a^{(r)} - M_b^{(r)}}{2}, \quad X'_r = \frac{H_a^{(r)} + H_b^{(r)}}{2} \cdot h_r. \quad (756)$$

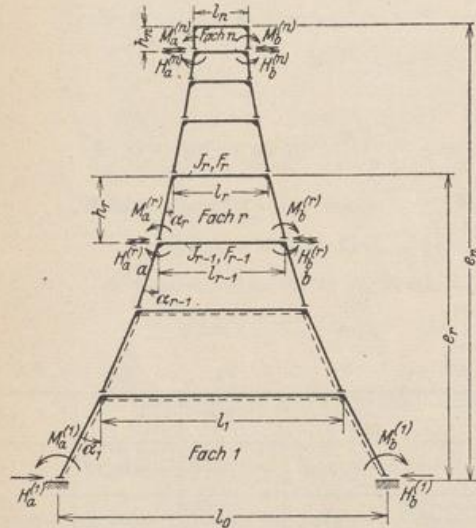


Abb. 425.

Die Kräfte $A^{(r)}, B^{(r)}, C^{(r)} = (H_a^{(r)} - H_b^{(r)})/2$ sind statisch bestimmt. Die Stützkkräfte $A_0^{(r)}, B_0^{(r)}, C_0^{(r)}$ stehen mit den Lasten $\sum P, \sum W$ im Gleichgewicht. Bei symmetrischer Belastung ist

$$C_0^{(r)} = 0, \quad A_0^{(r)} = B_0^{(r)},$$

bei antisymmetrischer Belastung

$$A_0^{(r)} = -B_0^{(r)},$$

$$C_0^{(r)} = H_a^{(r)} = -H_b^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_r W.$$

Die statisch unbestimmten Größen X_r, X'_r, Y_r ergeben sich nach Abschn. 28 aus den geometrischen Bedingungen für die Formänderung des Hauptsystems. Diese werden aus den Schaubildern für die Schnittkräfte infolge von $-X_r = 1, -X'_r = 1, -Y_r = 1$ (Abb. 426) abgeleitet und bilden zwei Gruppen voneinander unabhängiger Gleichungen mit den Unbekannten X_r, X'_r und

mit Y_r . Bei symmetrischer Belastung sind die Kräfte Y_r , bei antisymmetrischer Belastung die Kräfte X_r, X'_r Null.

Symmetrischer Anteil:

$$\left. \begin{aligned} X'_{r-1} \tau_{(r-1)'(r-1)'} + X_{r-1} \tau_{(r-1)'(r-1)} + X_r \tau_{(r-1)'r} &= \tau_{(r-1)' \otimes} \\ X_{(r-1)} \tau_{r(r-1)} + X_r \tau_{rr} + X_{(r+1)} \tau_{r(r+1)} + X'_{r-1} \tau_{r(r-1)'} + X'_r \tau_{rr'} &= \tau_r \otimes \\ X'_r \tau_{r'r'} + X_r \tau_{r'r} + X_{r+1} \tau_{r'(r+1)} &= \tau_{r' \otimes} \end{aligned} \right\} \quad (757)$$

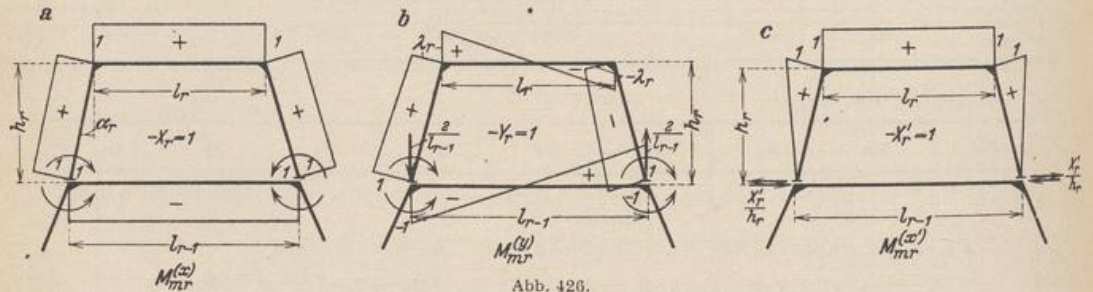


Abb. 426.

Die Regelgleichung entsteht durch Elimination von X'_{r-1} und X'_r .

$$\left. \begin{aligned} X_{r-1} \left[\tau_{r(r-1)} - \frac{\tau_{(r-1)'(r-1)} \tau_{r(r-1)'}}{\tau_{(r-1)'(r-1)}} \right] + X_r \left[\tau_{rr} - \frac{\tau_{r'r'}^2}{\tau_{r'r'}} - \frac{\tau_{r'(r-1)'}}{\tau_{(r-1)'(r-1)'}} \right] \\ + X_{r+1} \left[\tau_{r(r+1)} - \frac{\tau_{r'(r+1)}}{\tau_{r'r'}} \tau_{r'r'} \right] &= \tau_r \otimes - \frac{\tau_{r(r-1)'}}{\tau_{(r-1)'(r-1)'}} \tau_{(r-1)' \otimes} - \frac{\tau_{r'r'}}{\tau_{r'r'}} \tau_{r' \otimes} \end{aligned} \right\} \quad (758a)$$

Sie kann auch unmittelbar als geometrische Bedingung (285) für die Formänderung eines statisch unbestimmten Hauptsystems angeschrieben werden, das aus Zweigelenrahmen besteht. Diese lautet in der üblichen Schreibweise (294)

$$X_{r-1} \tau_{r(r-1)}^{(1)} + X_r \tau_{rr}^{(1)} + X_{r+1} \tau_{r(r+1)}^{(1)} = \tau_r^{(1)} \otimes. \quad (758b)$$

Die Vorzahlen und Belastungszahlen dieser Gleichungen sind bereits in (758a) als Funktionen der Verschiebungen eines statisch bestimmten Stabzugs entwickelt worden. Antimetrischer Anteil:

$$Y_{(r-1)} \delta_{r(r-1)} + Y_r \delta_{rr} + Y_{(r+1)} \delta_{r(r+1)} = \delta_{r \otimes}. \quad (759)$$

Ableitung der Vorzahlen nach Abb. 426.

$$\left. \begin{aligned} l_r \frac{J_c}{J_r} &= l'_r, & h_r \frac{J_c}{J_{rk}} &= h'_r, & \frac{l_r}{l_{r-1}} &= \lambda_r, \\ \tau_{r,r'} &= l'_r + \frac{2}{3} h'_r \sec \alpha_r = b_r, & \tau_{r,r'} &= l'_r + h'_r \sec \alpha_r = a_r, \\ \tau_{r(r-1)} &= \tau_{r(r-1)'} = -l'_{r-1}, & \tau_{r(r+1)} &= \tau_{r(r+1)'} = -l'_r, \\ \tau_{rr} &= l'_r + 2 h'_r \sec \alpha_r + l'_{r-1} = a_r + h'_r \sec \alpha_r + l'_{r-1}, \\ \delta_{r(r-1)} &= -\frac{\lambda_{r-1} l'_{r-1}}{3}, & \delta_{r(r+1)} &= -\frac{\lambda_r l'_r}{3}, \\ \delta_{rr} &= \frac{1}{3} [\lambda_r^2 l'_r + l'_{r-1} + 2 h'_r \sec \alpha_r (1 + \lambda_r + \lambda_r^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (760)$$

Sonderfall senkrechter Pfosten:

$$\alpha_r = 0, \quad \sec \alpha_r = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha_r = 0, \quad \lambda_r = 1, \\ b_r = l'_r + \frac{2}{3} h'_r, \quad a_r = l'_r + h'_r.$$

Ableitung der Belastungszahlen.
a) Symmetrische Belastung. 1. Eigengewicht. Das Eigengewicht g_k eines jeden Rahmens k wird gleichförmig über die Strecke $l_k + 2 h_k \operatorname{tg} \alpha_k = l_{k-1}$ verteilt und das Biegemoment im Bereich der Pfosten näherungsweise linear angenommen (Abb. 427).

$$\tau_{r0} = a_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n g_k l_{k-1} - l'_{r-1} h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{r-1}^n g_k l_{k-1} + \frac{1}{12} (g_r l_r^2 l'_r - g_{r-1} l_{r-1}^2 l'_{r-1});$$

$$\tau_{r'0} = b_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n g_k l_{k-1} + g_r \frac{l_r^2 l'_r}{12}.$$

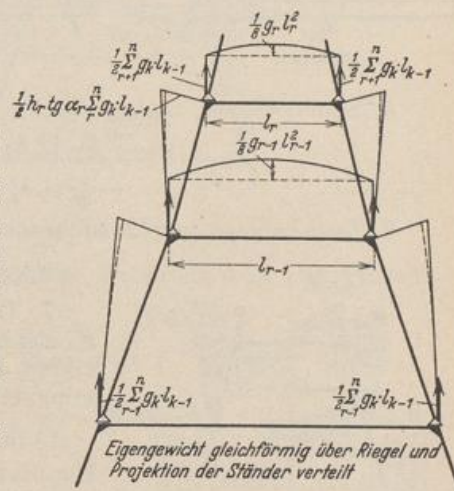


Abb. 427.

2. Gleichförmig über jeden Riegel l_k verteilte Nutzlast p_k (Abb. 428).

$$\tau_{r0} = a_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n p_k l_k - l'_{r-1} h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{r-1}^n p_k l_k + \frac{1}{12} (p_r l_r^2 l'_r - p_{r-1} l_{r-1}^2 l'_{r-1});$$

$$\tau_{r'0} = b_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n p_k l_k + \frac{1}{12} p_r l_r^2 l'_r.$$

3. Symmetrische Anordnung von Einzellasten $\sum P$ über jedem Riegel.

$$\tau_{r0} = a_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n \sum_k P - l'_{r-1} h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{r-1}^n \sum_k P + \frac{1}{2} (l_r l'_r \sum_r P \omega_R - l_{r-1} l'_{r-1} \sum_{r-1} P \omega_R);$$

$$\tau_{r'0} = b_r h_r \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \frac{1}{2} \sum_r^n \sum_k P + \frac{l_r l'_r}{2} \sum_r P \omega_R;$$

Die $\sum_k P$ und $\sum_k P \omega_R$ enthalten alle Lasten des Riegels l_k .

4. Symmetrische, gleichförmig verteilte horizontale Belastung $w_h/2$ der Pfosten (Abb. 429).

$$\tau_{r,0} = -\frac{1}{12} w_r h_r^2 (2a_r + l'_r) + \frac{1}{4} w_{r-1} h_{r-1}^2 l'_{r-1} = -\frac{1}{4} w_r h_r^2 b_r + \frac{1}{4} w_{r-1} h_{r-1}^2 l'_{r-1};$$

$$\tau_{r',0} = -\frac{1}{8} w_r h_r^2 (a_r + l'_r).$$

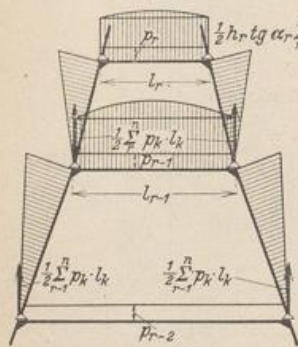


Abb. 428.

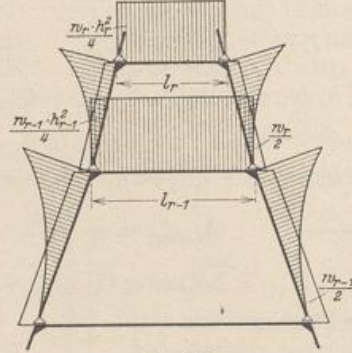


Abb. 429.

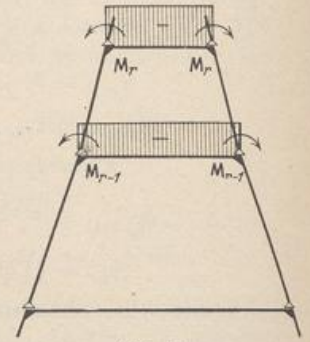


Abb. 430.

5. Symmetrische, hydrostatische horizontale Belastung w_k der Pfosten.

$$\tau_{r,0} = -\frac{1}{24} w_r h_r^2 (3a_r + l'_r) + \frac{1}{8} w_{r-1} h_{r-1}^2 l'_{r-1};$$

$$\tau_{r',0} = -\frac{1}{60} w_r h_r^2 (11a_r + 9l'_r).$$

6. Zwei entgegengesetzt drehende Momente M_k am Riegel l_k (Abb. 430).

$$\tau_{r,0} = -M_r l'_r + M_{r-1} l'_{r-1}; \quad \tau_{r',0} = -M_r l'_r.$$

7. Gleichförmige Erwärmung des Rahmens um t^0 . Bei statisch bestimmter Stützung nach Abb. 434c treten keine Schnittkräfte auf, bei statisch unbestimmter Stützung nach Abb. 434a oder b wird

$$\tau_{1t} = 0; \quad \tau_{1't} = E J_c \alpha t l_0.$$

Die übrigen Formänderungen $\tau_{r,t}$ sind Null.

b) Antimetrische Belastung.

1. Antimetrische, senkrecht gerichtete gleichförmige Belastung $p_k/2$ der Riegel (Abb. 431).

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{pr} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{\mathfrak{M}_{p(r-1)} l'_{r-1}}{3} + \frac{p_r \lambda_r l_r^2 l'_r - p_{r-1} l_{r-1}^2 l'_{r-1}}{192},$$

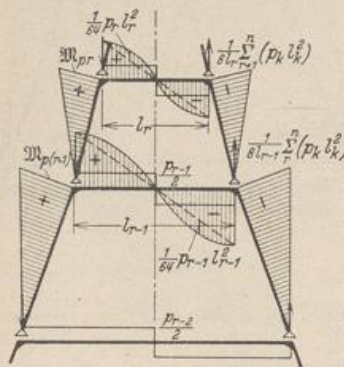


Abb. 431.

$$\mathfrak{M}_{pr} = \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{8 l_{r-1}} \sum_r p_k l_k^2, \quad \mathfrak{M}_{p(r-1)} = \frac{h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1}}{8 l_{r-2}} \sum_{r-1} p_k l_k^2.$$

2. Antimetrische, zum Riegel senkrechte Gruppe von Einzellasten $P/2$.

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{Pr} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{P(r-1)} l'_{r-1} - \frac{\lambda_r l_r l'_r}{6} \sum_r P \omega_D'' + \frac{l_{r-1} l'_{r-1}}{6} \sum_{r-1} P \omega_D'', \quad (\text{Tabelle 22})$$

$$\mathfrak{M}_{Pr} = \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{l_{r-1}} \sum_r \sum_k P c, \quad \mathfrak{M}_{P(r-1)} = \frac{h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1}}{l_{r-2}} \sum_{r-1} \sum_k P c \quad (\text{Abb. 432}).$$

3. Antimetrische Belastung des Riegels durch horizontale Einzellasten $W_k/2$.

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{W_r} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{W_{(r-1)}} l'_{r-1},$$

$$\mathfrak{M}_{W_r} = \frac{h_r}{2} \sum_r W_k - \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{l_{r-1}} \sum_r W_k (e_k - e_{r-1}) \quad (\text{Abb. 433}),$$

$$\mathfrak{M}_{W_{(r-1)}} = \frac{h_{r-1}}{2} \sum_{r-1} W_k - \frac{h_{r-1} \operatorname{tg} \alpha_{r-1}}{l_{r-2}} \sum_{r-1} W_k (e_k - e_{r-2}).$$

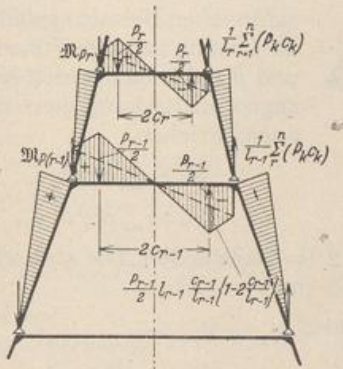


Abb. 432.

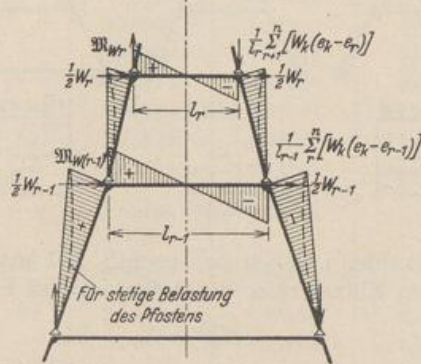


Abb. 433.

4. Antimetrische, waagerechte und gleichförmige Belastung $w_k/2$ der Pfosten (Abb. 433).

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{w_r} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{w_{(r-1)}} l'_{r-1} + \frac{w_r h_r^2}{24} (a_r - l'_r) \lambda_{r+1},$$

$$\mathfrak{M}_{w_r} = \frac{h_r}{2} \sum_r w_k h_k - \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{l_{r-1}} \sum_r w_k h_k (e_k - e_{r-1} - \frac{h_k}{2}) - \frac{w_r h_r^2}{4},$$

bei konstantem $w_k = w$,

$$\mathfrak{M}_{w_r} = \frac{w h_r}{2} \sum_r h_k - \frac{w h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{2 l_{r-1}} \left(\sum_r h_k \right)^2 - \frac{w h_r^2}{4}$$

5. Antimetrisch wirkende Momente $M_k/2$ an den Rahmenknoten.

$$\delta_{r,0} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{M_r} [\lambda_r (2a_r - l'_r) + (a_r - l'_r)] - \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{M_{(r-1)}} l'_{r-1} + \frac{1}{3} (\lambda_r l'_r M_r - l'_{r-1} M_{r-1}),$$

$$\mathfrak{M}_{M_r} = - \frac{h_r \operatorname{tg} \alpha_r}{l_{r-1}} \sum_r M_k.$$

Sind die Riegel am Anschluß mit den Pfosten durch Vouten verstärkt, deren Einfluß nicht vernachlässigt werden soll, so lassen sich die Vorzahlen mit einer Approximation der elastischen Eigenschaften nach den Tabellen 13 bis 15 berichtigen. Dasselbe gilt auch bei anderen Riegelformen, die vor allem zum oberen Abschluß des Tragwerks dienen. In diesem Falle wird mit Vorteil die Tabelle 12 zu Rate gezogen.

Ansatz und Lösung. Die statisch unbestimmten Gruppenlasten X_r, Y_r werden aus zwei voneinander unabhängigen Ansätzen berechnet, von denen jeder bei n Feldern des Tragwerks und starrer Einspannung oder Auflagerung nach

Abb. 434 c n Gleichungen enthält. Bei frei drehbarem Anschluß der Pfosten h_1 nach Abb. 434 a sind $(n - 1)$. Gleichungen aufzulösen. Die Nebenglieder der Matrix des symmetrischen Anteils sind positiv, diejenigen des antimetrischen Anteils negativ. Durch die Belastung eines Riegels l_k oder eines Pfostens h_k sind die Belastungszahlen δ_{10} bis δ_{k0} von Null verschieden, dagegen

$$\delta_{(k+1)0} = 0, \dots, \delta_{n0} = 0.$$

Die statisch unbestimmten Größen X_r, Y_r werden nach der Vorschrift S. 236 berechnet. Bei zahlreichen Belastungsfällen wird die Lösung mit den Vorzahlen $\beta_{rk}^{(a)}$ und $\beta_{rk}^{(y)}$ der den beiden Ansätzen zugeordneten konjugierten Matrix angeschrieben.

$$X_r = \sum \beta_{rk}^{(a)} \tau_{k0},$$

$$Y_r = \sum \beta_{rk}^{(y)} \delta_{k0}.$$

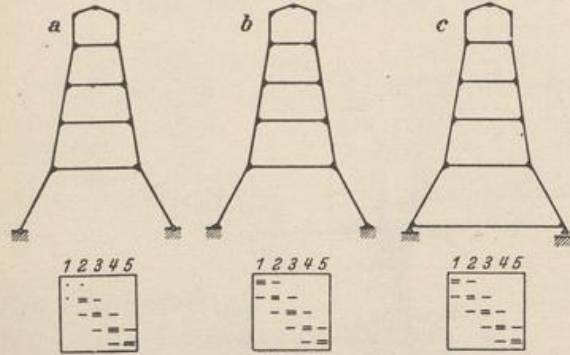


Abb. 434.

Die Vorzahlen ergeben sich nach S. 237 aus je 2 Kettenbrüchen. Die statisch unbestimmten Einzelkräfte der Ableitung auf S. 458 sind

$$M_a^{(r)} = X_r + Y_r, \quad M_b^{(r)} = X_r - Y_r.$$

Aus (757) und (760) wird

$$\frac{X_r'}{h_r} = \frac{H_a^{(r)} + H_b^{(r)}}{2} = \frac{1}{h_r b_r} (\tau_{r'} \otimes - X_r a_r + X_{r+1} l_r'),$$

$$H_a^{(r)} = \frac{X_r'}{h_r} + C_0^{(r)}, \quad H_b^{(r)} = \frac{X_r'}{h_r} - C_0^{(r)}.$$

Die Schnittkräfte werden mit den Gleichgewichtsbedingungen aus den Lasten und den in Abb. 435 eingetragenen Anschlußkräften rechnerisch oder zeichnerisch bestimmt.

Die Rechenvorschrift wird für einzelne ausgezeichnete Belastungsfälle an dem Binder einer Aufbereitungsanlage (Abb. 436) erläutert. Sie behandeln die gleichförmige Belastung $p_1 = 1 \text{ t/m}$ einer Bühne, Einzellasten $P_0 = 1 \text{ t}$ aus Maschinengewichten, Windbelastung $W = 1 \text{ t}$ und einseitige Sonnenbestrahlung $i = 10^\circ$ (Abb. 437 bis 440).

Die Vorzahlen der Bedingungsgleichungen für das obere Stockwerk mit gekrümmtem Abschlußriegel werden mit Hilfe der Tabelle 12 abgeleitet. Darnach ist ohne besondere Begründung

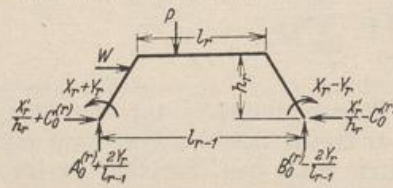


Abb. 435.

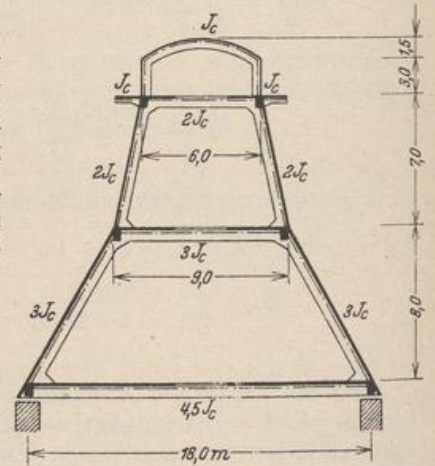


Abb. 436.

$$\tau_{3,3} = l_3' + \frac{2}{3} h_3' + \frac{8}{15} \left(\frac{f}{h_3}\right)^2 l_3' + \frac{4}{3} \frac{f}{h_3} l_3' = b_3 + \frac{8}{15} \left(\frac{f}{h_3}\right)^2 l_3' + \frac{4}{3} \frac{f}{h_3} l_3'$$

$$\tau_{3,3} = l_3' + h_3' + \frac{2}{3} \frac{f}{h_3} l_3' = a_3 + \frac{2}{3} \frac{f}{h_3} l_3'$$