



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Abb. 434 c n Gleichungen enthält. Bei frei drehbarem Anschluß der Pfosten h_1 nach Abb. 434 a sind $(n - 1)$ Gleichungen aufzulösen. Die Nebenglieder der Matrix des symmetrischen Anteils sind positiv, diejenigen des antisymmetrischen Anteils negativ. Durch die Belastung eines Riegels l_k oder eines Pfostens h_k sind die Belastungszahlen δ_{10} bis δ_{k0} von Null verschieden, dagegen

$$\delta_{(k+1)0} = 0, \dots, \delta_{n0} = 0.$$

Die statisch unbestimmten Größen X_r, Y_r werden nach der Vorschrift S. 236 berechnet. Bei zahlreichen Belastungsfällen wird die Lösung mit den Vorzahlen $\beta_{rk}^{(a)}$ und $\beta_{rk}^{(y)}$ der den beiden Ansätzen zugeordneten konjugierten Matrix angeschrieben.

$$X_r = \sum \beta_{rk}^{(a)} \tau_{k0},$$

$$Y_r = \sum \beta_{rk}^{(y)} \delta_{k0}.$$

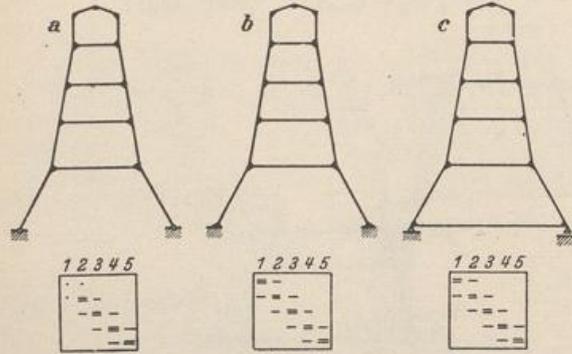


Abb. 434.

Die Vorzahlen ergeben sich nach S. 237 aus je 2 Kettenbrüchen. Die statisch unbestimmten Einzelkräfte der Ableitung auf S. 458 sind

$$M_a^{(r)} = X_r + Y_r, \quad M_b^{(r)} = X_r - Y_r.$$

Aus (757) und (760) wird

$$\frac{X_r'}{h_r} = \frac{H_a^{(r)} + H_b^{(r)}}{2} = \frac{1}{h_r b_r} (\tau_{r'} \otimes - X_r a_r + X_{r+1} l_r'),$$

$$H_a^{(r)} = \frac{X_r'}{h_r} + C_0^{(r)}, \quad H_b^{(r)} = \frac{X_r'}{h_r} - C_0^{(r)}.$$

Die Schnittkräfte werden mit den Gleichgewichtsbedingungen aus den Lasten und den in Abb. 435 eingetragenen Anschlußkräften rechnerisch oder zeichnerisch bestimmt.

Die Rechenvorschrift wird für einzelne ausgezeichnete Belastungsfälle an dem Binder einer Aufbereitungsanlage (Abb. 436) erläutert. Sie behandeln die gleichförmige Belastung $p_1 = 1 \text{ t/m}$ einer Bühne, Einzellasten $P_0 = 1 \text{ t}$ aus Maschinengewichten, Windbelastung $W = 1 \text{ t}$ und einseitige Sonnenbestrahlung $i = 10^\circ$ (Abb. 437 bis 440).

Die Vorzahlen der Bedingungsgleichungen für das obere Stockwerk mit gekrümmtem Abschlußriegel werden mit Hilfe der Tabelle 12 abgeleitet. Darnach ist ohne besondere Begründung

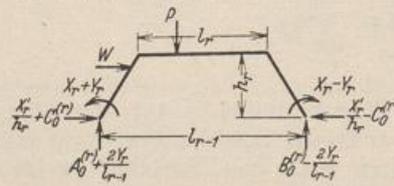


Abb. 435.

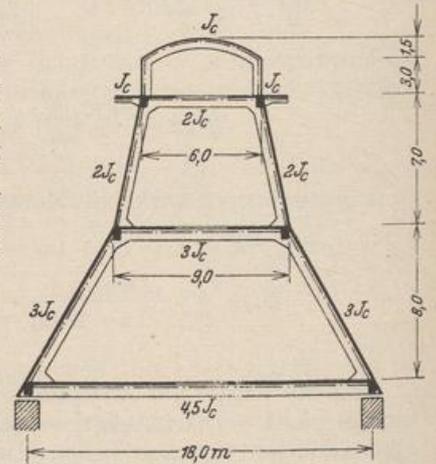


Abb. 436.

$$\tau_{3,3} = l_3' + \frac{2}{3} h_3' + \frac{8}{15} \left(\frac{f}{h_3}\right)^2 l_3' + \frac{4}{3} \frac{f}{h_3} l_3' = b_3 + \frac{8}{15} \left(\frac{f}{h_3}\right)^2 l_3' + \frac{4}{3} \frac{f}{h_3} l_3'$$

$$\tau_{3,3} = l_3' + h_3' + \frac{2}{3} \frac{f}{h_3} l_3' = a_3 + \frac{2}{3} \frac{f}{h_3} l_3'$$

Die übrigen Vorzahlen ergeben sich aus den Ansätzen (758) und (760). Die Zahlenrechnung wird folgendermaßen entwickelt:

r	0	1	2	3
l_r	18,00	9,00	6,00	6,00
h_r	—	8,50	7,00	3,00
$l'_r = -\tau_{r(r+1)} = -\tau_{r'(r+1)}$	4,00	3,00	3,00	6,00
h'_r	—	2,833	3,500	3,000
$\operatorname{tg} \alpha_r$	—	0,529412	0,214286	0,0000
$\sec \alpha_r$	—	1,131493	1,022701	1,0000
$h'_r \sec \alpha_r$	—	3,20590	3,57945	3,0000
$a_r = l'_r + h'_r \sec \alpha_r$	—	6,20590	6,57945	9,0000
$b_r = l'_r + 2/3 \cdot h'_r \sec \alpha_r$	—	5,13727	5,38630	8,0000
$\tau_{rr'}$	—	6,20590	6,57945	11,0000
$\tau_{r'r'}$	—	5,13727	5,38630	12,8000
$\tau_{rr} = a_r + h'_r \sec \alpha_r + l'_{r-1}$	—	13,41180	13,15891	15,0000
$-\frac{\tau_{r'(r+1)} \tau_{rr'}}$	—	3,62405	3,66455	5,15625
$\tau_{r(r+1)}^{(3)} = \tau_{r(r+1)} - \frac{\tau_{r'(r+1)} \tau_{rr'}}$	—	0,62405	0,66455	—
$\tau_{r'r'}^2 / \tau_{r'r'}$	—	7,49682	8,03690	9,45313
$\tau_{r'(r-1)}^2 / \tau_{(r-1)'(r-1)'}$	—	—	1,75190	1,67091
$\tau_{r'r}^{(3)} = \tau_{rr} - \frac{\tau_{r'r'}^2}{\tau_{r'r'}} - \frac{\tau_{r'(r-1)'}^2}{\tau_{(r-1)'(r-1)'}}$	—	5,91498	3,37011	3,87597
λ_r	—	0,500	0,66667	1,0000
$3 \delta_{r(r+1)} = -\lambda_r l'_r$	—	-1,500	-2,000	—
$1 + \lambda_r + \lambda_r^2$	—	1,7500	2,11111	3,0000
$2 h'_r \sec \alpha_r (1 + \lambda_r + \lambda_r^2)$	—	11,22065	15,11323	18,0000
$\lambda_r^2 l'_r$	—	0,7500	1,33333	6,0000
$3 \delta_{rr} = \lambda_r^2 l'_r + l'_{r-1} + 2 h'_r \sec \alpha_r (1 + \lambda_r + \lambda_r^2)$	—	15,97065	19,44656	27,0000

Die beiden voneinander unabhängigen Gruppen der Bedingungsgleichungen (758 b) und (759) sind daher für

Antimetrische Belastung

	Y ₁	Y ₂	Y ₃
1	+ 15,971	- 1,500	—
2	- 1,500	+ 19,447	- 2,00
3	—	- 2,00	+ 27,00

Symmetrische Belastung

	X ₁	X ₂	X ₃
1	+ 5,9150	+ 0,6240	—
2	+ 0,6240	+ 3,3701	+ 0,6645
3	—	+ 0,6645	+ 3,8760

Kettenbrüche zur Ermittlung der Kennbeziehungen und der Vorzahlen $\beta^{(v)} = \beta^{(v)}/3$:

$$\beta'_{11} = \frac{1}{15,971 - (-1,50) \frac{(-1,50)}{19,447 - (-2,0) \frac{(-2,0)}{27,00}}}$$

$$\beta'_{33} = \frac{1}{27,0 - (-2,00) \frac{(-2,00)}{19,447 - (-1,50) \frac{(-1,50)}{15,969}}}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{32} &= \frac{-2,0}{27,00} = -0,0740741, & \kappa_{12} &= \frac{-1,50}{15,971} = -0,0939202, \\ \kappa_{21} &= \frac{-1,50}{19,447 - 0,148} = -0,0777248, & \kappa_{23} &= \frac{-2,00}{19,447 - 0,141} = -0,1035941, \\ \beta'_{11} &= \frac{1}{15,971 - 0,117} = +0,0630739, & \beta'_{33} &= \frac{1}{27 - 0,207} = +0,0373234, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\kappa_{21} &= & -\kappa_{32} &= \\ +0,0777248 & & +0,0740741 & \end{aligned}$$

Matrix der Vorzahlen $\beta^{(y)}$

1	+0,0630739	+0,0049024	+0,0003631	+0,0939202 = $-\kappa_{12}$
2	+0,0049024	+0,0521976	+0,0038665	+0,1035941 = $-\kappa_{23}$
3	+0,0003631	+0,0038665	+0,0373234	
	1	2	3	

Kettenbrüche zur Ermittlung der Kennbeziehungen und der Vorzahlen $\beta^{(x)}$:

$$\beta_{11} = \frac{1}{5,9150 - \frac{0,6240 \cdot 0,6240}{3,3701 - \frac{0,6645 \cdot 0,6645}{3,8760}}}, \quad \beta_{33} = \frac{1}{3,8760 - \frac{0,6645 \cdot 0,6645}{3,3701 - \frac{0,6240 \cdot 0,6240}{5,9150}}}$$

$$\kappa_{32} = \frac{0,6645}{3,8760} = +0,171454, \quad \kappa_{12} = \frac{0,6240}{5,9150} = +0,105503,$$

$$\kappa_{21} = \frac{0,6240}{3,3701 - 0,1139} = +0,191652, \quad \kappa_{23} = \frac{0,6645}{3,3701 - 0,0658} = +0,201119,$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{5,9150 - 0,1196} = +0,172551, \quad \beta_{33} = \frac{1}{3,8760 - 0,1336} = +0,267214.$$

$$\begin{aligned} -\kappa_{21} &= & -\kappa_{32} &= \\ -0,191652 & & -0,171454 & \end{aligned}$$

Matrix der Vorzahlen $\beta^{(x)}$

1	+0,172551	-0,033070	+0,005670	-0,105503 = $-\kappa_{12}$
2	-0,033070	+0,313447	-0,053742	-0,201119 = $-\kappa_{23}$
3	+0,005670	-0,053742	+0,267214	
	1	2	3	

Die vorgeschriebenen Belastungen werden in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil aufgespalten (Abb. 437 bis 440). Ansatz und Größe der Belastungsglieder für p_1, p_0, W sind auf S. 465, für die Temperaturänderung t auf S. 466 angegeben.

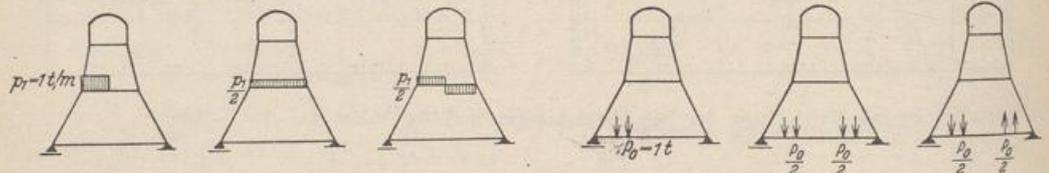


Abb. 437.

Abb. 438.

Auswertung der überzähligen Größen

$$X_r = \sum \beta_{rh}^{(y)} \tau_{h0}^{(y)}, \quad Y_r = \sum \frac{\beta_{rh}^{(y)}}{3} \cdot 3 \delta_{h0} = \sum \beta_{rh}^{(y)} \cdot 3 \delta_{h0},$$

$$\frac{1}{h_r} X'_r = \frac{1}{h_r \tau_{r,r}} (\tau_{r,0} - X_r \tau_{r,r} - X_{r+1} \tau_{r,(r+1)}).$$

Belastungsglieder.

	$p_1 = 1$	$P_0 = 1$	$W = 1$	Symmetrischer Anteil $\frac{p_1}{2}, \frac{P_0}{2}, \frac{W}{2}$	Antimetrischer Anteil $\frac{p_1}{2}, \frac{P_0}{2}, \frac{W}{2}$
τ_{10}	$a_1(h_1 \tan \alpha_1) \frac{p_1 l_1}{4} + \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24}$	$-\frac{l_0 l_0'}{4} P_0(0,16 + 0,21) \cdot 2$	0	0	
τ_{20}	$-l_1'(h_1 \tan \alpha_1) \frac{p_1 l_1}{4} - \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24}$	0	0	0	
τ_{30}	0	0	$-\frac{W}{3} f \cdot l_3'$	$-\frac{W}{3} f \cdot l_3'$	$= -3,00$
$\tau_{1'0}$	$b_1(h_1 \tan \alpha_1) \frac{p_1 l_1}{4} + \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24} = 62,13981$	0	0	0	
$\tau_{2'0}$	0	0	0	0	
$\tau_{3'0}$	0	0	0	$-\frac{W}{15} f l_3' (5 + 4 \frac{f}{h_3})$	$= -4,20$
$\tau_{10}^{(3)}$	$-\frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24} \left(\frac{a_1}{b_1} - 1 \right) = -2,106161$	$-\frac{l_0 l_0'}{4} P_0(0,16 + 0,21) \cdot 2 = -13,32$	0	0	
$\tau_{20}^{(3)}$	$-\frac{p_1 l_1^2 l_1'}{24} \left(1 - \frac{l_1'}{b_1} \right) = -4,212322$	0	0	0	
$\tau_{30}^{(3)}$	0	0	0	0	
\mathfrak{M}_1	$\frac{p_1 l_1^2}{8 l_0} (h_1 \tan \alpha_1)$	0	0	$-3,00 + 0,8593 \cdot 4,20$	$= + 0,609375$
\mathfrak{M}_2	0	0	0	$\frac{h_1 \cdot 3W}{2} - \frac{h_1 \tan \alpha_1}{l_0} (8,5 + 15,5 + 18,5)W = + 2,125$	
\mathfrak{M}_3	0	0	0	$\frac{h_2 \cdot 2W}{2} - \frac{h_2 \tan \alpha_2}{l_1} (7,0 + 10,0)W = + 4,16667$	
$3\delta_{10}$	$\mathfrak{M}_{p1} [\lambda_1 (2a_1 - l_1) + (a_1 - l_1')] + \lambda_1 \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{64} = +21,92517$	$-\frac{l_0 l_0'}{4} P_0(0,192 + 0,168) = -6,48$	0	$\frac{h_3 \cdot W}{2} - \frac{h_3 \tan \alpha_3}{l_2} \cdot 3,0W = + 1,500$	
$3\delta_{20}$	$-\mathfrak{M}_{p1} l_1' - \frac{p_1 l_1^2 l_1'}{64} = -11,39062$	0	0	$\mathfrak{M}_{w1} [(2a_1 - l_1') \lambda_1 + (a_1 - l_1')] = +16,8126$	
$3\delta_{30}$	0	0	0	$\mathfrak{M}_{w2} [(2a_2 - l_2') \lambda_2 + (a_2 - l_2')] - \mathfrak{M}_{w1} l_1' = +36,7585$	
				$\mathfrak{M}_{w3} [(2a_3 - l_3') \lambda_3 + (a_3 - l_3')] - \mathfrak{M}_{w2} l_2' = +10,00$	

Belastung p_1 (Abb. 437).

Antimetrischer Anteil.

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= + 0,0630739 \cdot 21,92517 - 0,0049244 \cdot 11,39062 = + 1,32706, \\
 Y_2 &= + 0,0049024 \cdot 21,92517 - 0,0521976 \cdot 11,39062 = - 0,48708, \\
 Y_3 &= + 0,0003631 \cdot 21,92517 - 0,0038665 \cdot 11,39062 = - 0,03608.
 \end{aligned}$$

Symmetrischer Anteil.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= - 0,172551 \cdot 2,106161 + 0,033070 \cdot 4,212322 = - 0,22412, \\
 X_2 &= + 0,033070 \cdot 2,106161 - 0,313447 \cdot 4,212322 = - 1,25069, \\
 X_3 &= - 0,005670 \cdot 2,106161 + 0,053742 \cdot 4,212322 = + 0,21444.
 \end{aligned}$$

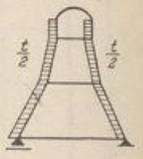
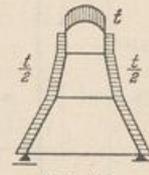
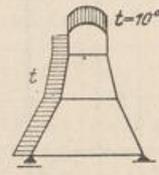
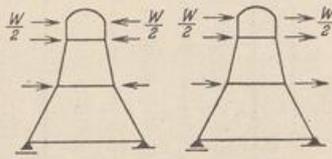
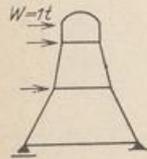


Abb. 439.

Abb. 440.

$$\frac{1}{h_1} X'_1 = \frac{1}{8,5 \cdot 5,1373} (62,13981 + 0,22412 \cdot 6,2059 - 1,25069 \cdot 3,00) = + 1,36899,$$

$$\frac{1}{h_2} X'_2 = \frac{1}{7,0 \cdot 5,3863} (\quad + 1,25069 \cdot 6,5795 + 0,21444 \cdot 3,00) = + 0,23531,$$

$$\frac{1}{h_3} X'_3 = \frac{1}{3,0 \cdot 12,800} (\quad - 0,21444 \cdot 11,0000 \quad) = - 0,06143.$$

Biegemomente des Stabwerks in Abb. 441.

Belastung P_0 (Abb. 438).

Antimetrischer Anteil.

$$Y_1 = - 0,0630739 \cdot 6,48 = - 0,4087,$$

$$Y_2 = - 0,0049024 \cdot 6,48 = - 0,0318,$$

$$Y_3 = - 0,003631 \cdot 6,48 = - 0,0024. \quad (\text{Fortsetzung auf S. 467.})$$

Belastungsglieder für symmetrische und antimetrische Temperaturänderung $t = 10^0$.

$$E \alpha_t = 21 \text{ t/m}^2$$

$$J_c = 0,012825 \text{ m}^4$$

Be- lastung	$t = 10^0 \text{ C}$	
$\tau_{1,t}$	$E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \text{tg } \alpha_1$	$= + 1,42584$
$\tau_{2,t}$	$E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \text{tg } \alpha_2$	$= + 0,57712$
$\tau_{3,t}$	$E J_c \alpha_t \cdot t \cdot l_3/h_3$	$= + 5,38650$
$\tau_{1,t}^{(3)}$	$- 1,208015 \cdot 1,42584$	$= - 1,72244$
$\tau_{2,t}^{(3)}$	$- 1,221516 \cdot 0,57712 + \frac{3,00}{5,13727} \cdot 1,42584$	$= + 0,12768$
$\tau_{3,t}^{(3)}$	$- 0,859375 \cdot 5,38650 + \frac{3,00}{5,38630} \cdot 0,57712$	$= - 4,31872$
$3 \delta_{1,t}$	$6 E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \frac{h_1}{l_0}$	$= + 7,63087$
$3 \delta_{2,t}$	$6 E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \frac{h_2}{l_1}$	$= + 12,56849$
$3 \delta_{3,t}$	$6 E J_c \alpha_t \cdot t \cdot \frac{h_3}{l_2}$	$= + 8,07975$

Symmetrische Erwärmung der Pfosten um $t/2$, des obersten Riegels um t .
Antimetrische Erwärmung der Pfosten um $t/2$.

Symmetrischer Anteil.

$$\begin{aligned} X_1 &= -0,172551 \cdot 13,32 = -2,2984, \\ X_2 &= +0,033070 \cdot 13,32 = +0,4405, \\ X_3 &= -0,005670 \cdot 13,32 = -0,0755, \end{aligned}$$

$$\frac{X'_1}{h_1} = \frac{1}{8,5 \cdot 5,1373} (+2,2984 \cdot 6,2059 + 0,4405 \cdot 3,00) = +0,3569,$$

$$\frac{X'_2}{h_2} = \frac{1}{7,0 \cdot 5,3863} (-0,4405 \cdot 6,5795 - 0,0755 \cdot 3,00) = -0,0829,$$

$$\frac{X'_3}{h_3} = \frac{1}{3,0 \cdot 12,8000} (+0,0755 \cdot 11,0000) = +0,0216.$$

Biegemomente des Stabwerks in Abb. 442.

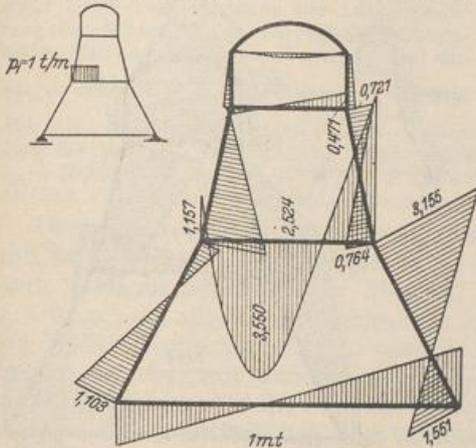


Abb. 441.

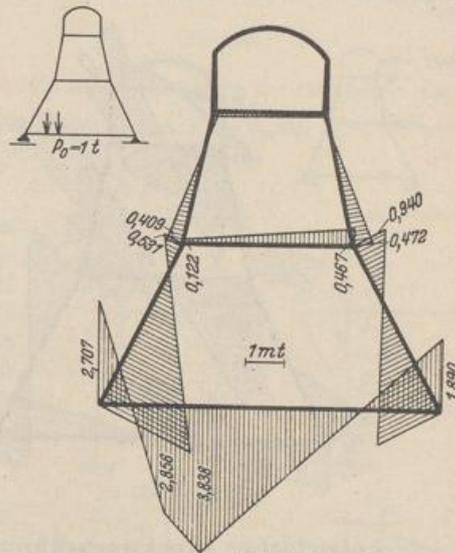


Abb. 442.

Belastung W (Abb. 439).

Antimetrischer Anteil.

$$Y_1 = +0,0630739 \cdot 16,8126 + 0,0049024 \cdot 36,7585 + 0,0003631 \cdot 10,00 = +1,2443,$$

$$Y_2 = +0,0049024 \cdot 16,8126 + 0,0521976 \cdot 36,7585 + 0,0038665 \cdot 10,00 = +2,0398,$$

$$Y_3 = +0,0003631 \cdot 16,8126 + 0,0038665 \cdot 36,7585 + 0,0373234 \cdot 10,00 = +0,5215.$$

Symmetrischer Anteil.

$$X_1 = +0,005670 \cdot 0,609375 = +0,0035,$$

$$X_2 = -0,053742 \cdot 0,609375 = -0,0327,$$

$$X_3 = +0,267214 \cdot 0,609375 = +0,1628.$$

$$\frac{X'_1}{h_1} = \frac{1}{8,5 \cdot 5,1373} (-0,0035 \cdot 6,2059 - 0,0327 \cdot 3,00) = -0,0027,$$

$$\frac{X'_2}{h_2} = \frac{1}{7,0 \cdot 5,3863} (+0,0327 \cdot 6,5795 + 0,1628 \cdot 3,00) = +0,0187$$

$$\frac{X'_3}{h_3} = \frac{1}{3,0 \cdot 12,8000} (-4,20 - 0,1628 \cdot 11,0000) = -0,1560.$$

Biegemomente des Stabwerks in Abb. 443.

Temperaturänderung (Abb. 440).

Antimetrischer Anteil.

$$Y_1 = +0,0630739 \cdot 7,63087 + 0,0049024 \cdot 12,56849 + 0,0003631 \cdot 8,07975 = +0,54586,$$

$$Y_2 = +0,0049024 \cdot 7,63087 + 0,0521976 \cdot 12,56849 + 0,0038665 \cdot 8,07975 = +0,72470,$$

$$Y_3 + 0 = 0,0003631 \cdot 7,63087 + 0,0038665 \cdot 12,56849 + 0,0373234 \cdot 8,07975 = +0,35293.$$

Symmetrischer Anteil.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -0,172551 \cdot 1,72244 - 0,033070 \cdot 0,12768 - 0,005670 \cdot 4,31872 = -0,32592, \\
 X_2 &= +0,033070 \cdot 1,72244 + 0,313447 \cdot 0,12768 + 0,053742 \cdot 4,31872 = +0,32908, \\
 X_3 &= -0,005670 \cdot 1,72244 - 0,053742 \cdot 0,12768 - 0,267214 \cdot 4,31872 = -1,17065.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{X'_1}{h_1} &= \frac{1}{8,5 \cdot 5,1373} (1,42584 + 0,32592 \cdot 6,2059 + 0,32908 \cdot 3,00) = +0,10158, \\
 \frac{X'_2}{h_2} &= \frac{1}{7,0 \cdot 5,3863} (0,57712 - 0,32908 \cdot 6,5795 - 1,17065 \cdot 3,00) = -0,13526, \\
 \frac{X'_3}{h_3} &= \frac{1}{3,0 \cdot 12,8000} (5,38650 + 1,17065 \cdot 11,0000) = +0,47562.
 \end{aligned}$$

Biegemomente des Stabwerks in Abb. 444.

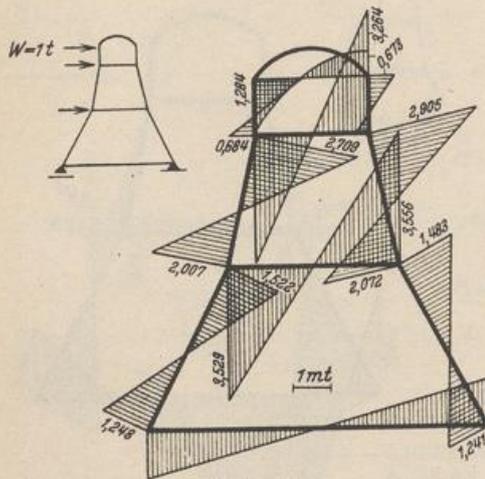


Abb. 443.

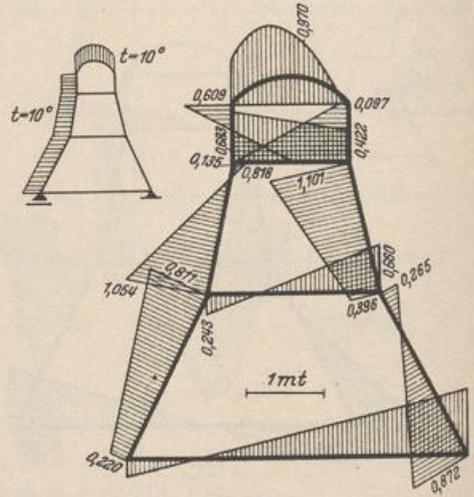


Abb. 444.

Symmetrischer Stockwerkrahmen mit gelenkig angeschlossenen Zwischenriegeln. Bei zahlreichen Bauaufgaben, zu deren Lösung Stockwerkrahmen herangezogen werden, dienen die Zwischenriegel nur zur Aussteifung und zur Knicksicherung der Pfosten. Ihre biegesteife Verbindung ist dann unnötig. Der Stockwerkrahmen mit r Zwischenriegeln ist in diesem Falle bei symmetrischer

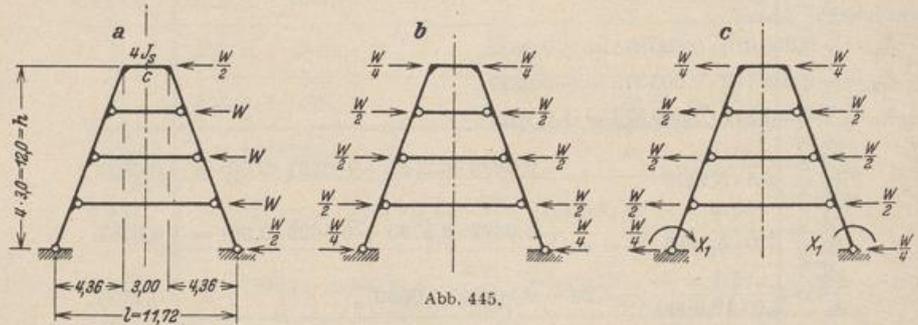


Abb. 445.

Belastung $(r + 1)$ oder $(r + 2)$ fach statisch unbestimmt, je nachdem die Pfostenenden frei drehbar gestützt oder eingespannt sind. Die Schnittkräfte werden dabei aus statisch unbestimmten Gruppenlasten berechnet, die aus der halben Summe symmetrisch liegender Pfostenmomente bestehen. Die Elastizitätsgleichungen erhalten dieselbe Form wie bei der Berechnung des durchlaufenden Trägers. Bei Antimetrie der Belastung sind das Biegemoment im Querschnitt c (Abb. 445a)