Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Stockwerkrahmen mit mehr als zwei Pfosten und biegungssteifer Verbindung von Pfosten und Riegel

E. Biegungsmomente aus Windbelastung. Das Ergebnis wird durch Superposition des symmetrischen und des antimetrischen Anteils in der Tabelle S. 479 erhalten. Die Momente sind in Abb. 456 aufgezeichnet.

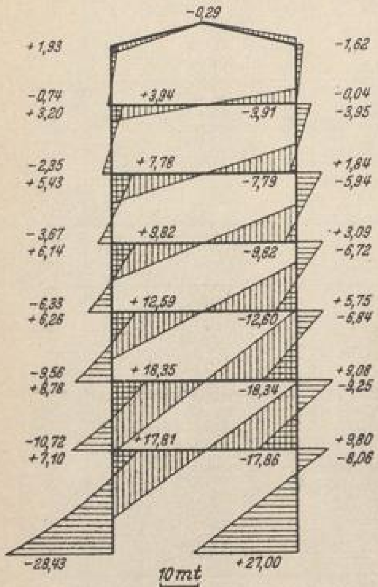

Abb. 456.

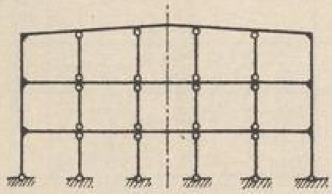
Abb. 457.

Der symmetrische Stockwerkrahmen mit mehr als zwei Pfosten und frei drehbar angeschlossenen Zwischenstielen. Die Untersuchung des Stockwerkrahmens mit zwei Pfosten für symmetrische Belastung nach S. 469, für antimetrische Belastung nach S. 470 kann unmittelbar auf das erweiterte symmetrische System mit gelenkig angeschlossenen Zwischenpfosten übertragen werden. Die Riegel des Hauptsystems werden jedoch nicht mehr allein in der Symmetrieachse, sondern nach Abb. 457 auch durch Zwischenpfosten gestützt. Sie bilden daher bei beiden Lösungen durchlaufende Träger mit frei drehbaren Zwischenstützen, das Hauptsystem ist also statisch unbestimmt. Trotzdem werden die überzähligen Größen ebenso wie nach (761) und (763) aus dreigliedrigen geometrischen Bedingungsgleichungen berechnet, nur daß die Vorzahlen $\delta_{kk}^{(r)}$, $\delta_{k(k+1)}^{(r)}$ und die Belastungszahlen $\delta_{k0}^{(r)}$ aus der Formänderung eines durchlaufenden nach Abb. 458a oder Abb. 458b gestützten Trägers k infolge $-X_k = 1$, $-X_{k+1} = 1$ und der Belastung $\mathfrak{P}$ hervorgehen (311). Hierzu werden die Biegungsmomente $M_k^{(r)}$, $M_{k+1}^{(r)}$, $M_0^{(r)}$ für jeden Riegelabschnitt nach Abb. 458a oder Abb. 458b nach Abschn. 47 bestimmt.

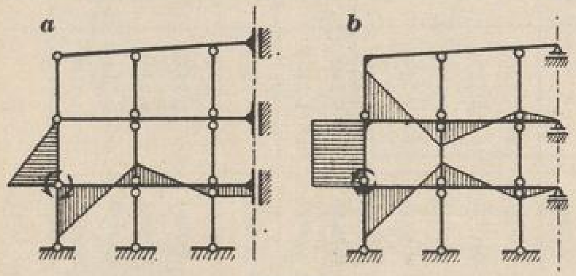

Abb. 458.

Das Ergebnis hat für Ausführungen in Eisenbeton keine Bedeutung, so daß die Lösung abgebrochen wird. Sie bietet bei Anwendung der Angaben des Abschn. 37, der sich mit statisch unbestimmten Hauptsystemen beschäftigt, keine Schwierigkeiten.

Stockwerkrahmen mit mehr als zwei Pfosten und biegungssteifer Verbindung von Pfosten und Riegel. Die Schnittkräfte werden aus den Knoten- und Stabdrehwinkeln des Tragwerks entwickelt (Abschn. 38ff.). Die Untersuchung ist auf S. 345ff. gezeigt und in Abschn. 42 auf die Berechnung von symmetrischen Stockwerkrahmen mit zwei, drei und vier Stützen angewendet worden. Der Ansatz bietet keine Schwierigkeiten. Die Zahlenrechnung ist zuverlässig, leider jedoch zeitraubend. Man begnügt sich aus diesem Grunde in der Regel mit Näherungslösungen auf Grund einer Abschätzung des Verschiebungszustandes.

Die Pfostendrehwinkel ψ_c sind bei senkrechter Belastung der Riegel stets klein, so daß sie bei der angenäherten Beschreibung des Spannungs- und Formänderungszustandes vernachlässigt werden können. Man beschränkt die Untersuchung in diesem Falle oft nur auf einen durchlaufenden Riegel, dessen Pfosten an den benachbarten beiden Riegeln mit vorgeschriebenen statischen oder geometrischen Eigenschaften enden. Dabei werden die Anschlußmomente der Pfosten oder die Knotendrehwinkel der benachbarten Riegel Null gesetzt (frei drehbare Verbindung oder starre Einspannung der Pfosten). Die wahre Lösung für $\psi_c = 0$ wird durch das Ergebnis aus beiden Annahmen eingeschlossen. Sie entspricht einer elastischen Einspannung der Pfostenenden, die oft auch als Grundlage des Spannungsnachweises geschätzt wird. Dabei werden die Wendepunkte der elastischen Linien, also die Nullpunkte der Momentenlinien der dem Riegel benachbarten Pfosten, im Abstand $3/4 \cdot h$ vom Riegel angenommen.

Der durchlaufende Riegel ist in Abschn. 48 mit statisch unbestimmten Schnittkräften und mit Knotendrehwinkeln berechnet worden. Die Untersuchung bedarf nach geeigneten Annahmen über die elastische Einspannung der Pfosten keiner Ergänzung. Sie kann rechnerisch (S. 230) oder zeichnerisch (S. 262) durchgeführt werden. Die Momentenlinien schneiden dabei meist die Achsen der Pfosten im Abstand $0{,}25\,h$ von dem benachbarten Riegel.

Zur Abschätzung der Schnittkräfte genügen die Ergebnisse auf S. 438 für den durchlaufenden Träger mit unendlich vielen Feldern $l'_k = l'$ oder Annahmen über

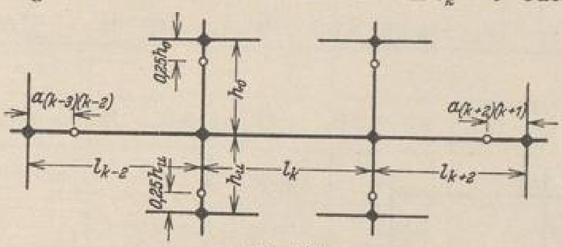

Abb. 459.

die Lage der Festpunkte in den Trägern l_{k-2}, l_{k+2} neben dem belasteten Felde l_k (Abb. 459). Man wählt ebenso wie bei den Pfosten

$$a_{(k-3)(k-2)} = 0{,}25\, l_{k-2}\,, \qquad a_{(k+2)(k+1)} = 0{,}25\, l_{k+2}\,.$$

Waagerechte Belastung. Man unterscheidet Lastangriff am Knoten und Pfosten, rechnet jedoch in der Regel den allgemeinen Fall nur für unverschiebliche Abstützung der Pfosten durch die Riegel, um dann die Stützkräfte gemeinsam mit den vorgeschriebenen Knotenlasten als äußere Kräfte des Stockwerkrahmens zu verwenden. Die Annahme $\psi_c = 0$ ist dann auch in einer Näherungslösung unbrauchbar.

Das Schaubild der Biegungsmomente besteht bei Knotenbelastung aus geraden Linien, welche die Stabachsen schneiden, so daß die Schnittpunkte oft zur Abschätzung der Lösung in die Halbierungspunkte der Stäbe gelegt und die Querkräfte eines jeden Stockwerks proportional zu den Trägheitsmomenten der Pfosten auf diese verteilt werden. Damit sind dann die Stabendmomente bestimmt. Leider ist das Ergebnis selbst als Näherungslösung ohne große Bedeutung, da der Spannungszustand des Stockwerkrahmens durch die Annahme der Momentennullpunkte in den Pfostenmitten zu günstig beurteilt wird.

Bleibt die Näherungslösung auf Stockwerkrahmen mit rechteckigem Umriß und rechteckigen Feldern beschränkt, so wird man auch bei ungleicher Verteilung der Nutzlast damit rechnen können, daß die Trägheitsmomente der Säulen der Geschosse in einem konstanten Verhältnis stehen, die Trägheitsmomente der Säulen des ersten Geschosses also mit $J_a c_1$, $J_a c_2 \ldots J_a c_k$, diejenigen eines anderen mit $J_b c_1$, $J_b c_2 \ldots J_b c_k$ beschrieben werden, wobei die Säulen $J_a c_2$, $J_b c_2$ demselben Strang (2) angehören.

Da nun die horizontalen Verschiebungen der Knotenpunkte eines Riegels gleich groß sind und die Schaubilder der Biegungsmomente aller Pfosten der Form nach übereinstimmen, können nach dem wirklich vorhandenen Verschiebungszustand die waagerechten Biegelinien der Pfosten in erster Annäherung als kongruent und daher die Knotendrehwinkel eines Riegels gleich groß angenommen werden ($\varphi_{J,r} = \varphi_J$, $r = 1 \ldots s$).

Die Addition der Gleichungen $\delta A_J = 0$ für alle Knoten J eines Geschosses liefert unter Berücksichtigung der Kongruenz der Biegelinien (Abb. 460)

$$2\varphi_H \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} + \varphi_J \left(4 \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} + 12 \sum_{r=2}^{r=s} \frac{1}{l'_{i,r}} + 4 \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{k,r}}\right)$$

$$+ 2\varphi_K \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{k,r}} - 6\psi_i \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} - 6\psi_k \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{k,r}} = 0. \tag{a}$$

Die Gleichungen $\delta A_e = 0$ lauten für die beiden dem Riegel i benachbarten Stockwerke

$$\left.\begin{aligned} &6 \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} (\varphi_H + \varphi_J - 2\psi_i) + W_i h_i = 0, \quad W_i = \sum_i^n H_m, \\ &6 \sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{k,r}} (\varphi_J + \varphi_K - 2\psi_k) + W_k h_k = 0, \quad W_k = \sum_k^n H_m. \end{aligned}\right| \tag{b}$$

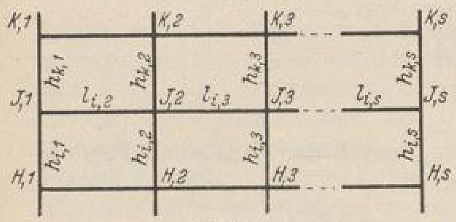

Abb. 460.

Mit

$$h'_{i,r} = h_i \frac{J_c}{J_{i,r}} = h_i \frac{J_c}{J_{i,1} c_r} = \frac{h'_{i,1}}{c_r}, \qquad C = \sum_{r=1}^{r=s} c_r$$

wird

$$\sum_{r=1}^{r=s} \frac{1}{h'_{i,r}} = \frac{1}{h'_{i,1}} \sum_{r=1}^{r=s} c_r = \frac{C}{h'_{i,1}}.$$

$\sum_{r=2}^{r=s} \frac{1}{l'_{i,r}} = \frac{s-1}{l'_{i,m}}$ liefert einen Mittelwert $l'_{i,m}$. Die Substitution der Pfostendrehwinkel ψ_i, ψ_k nach (b)

$$\left.\begin{aligned} 6\psi_i \frac{C}{h'_{i,1}} &= \frac{3C}{h'_{i,1}} (\varphi_H + \varphi_J) + \frac{W_i h_i}{2}, \\ 6\psi_k \frac{C}{h'_{k,1}} &= \frac{3C}{h'_{k,1}} (\varphi_J + \varphi_K) + \frac{W_k h_k}{2} \end{aligned}\right\} \tag{765}$$

in (a) liefert die folgenden dreigliedrigen Beziehungen zwischen den Knotendrehwinkeln dreier benachbarter Riegel:

$$-\varphi_H \frac{1}{h'_{i,1}} + \varphi_J \left(\frac{1}{h'_{i,1}} + \frac{12(s-1)}{C\, l'_{i,m}} + \frac{1}{h'_{k,1}}\right) - \varphi_K \frac{1}{h'_{k,1}} - \frac{W_i h_i}{2C} - \frac{W_k h_k}{2C} = 0, \tag{766a}$$

allgemein:

$$\varphi_H \bar{a}_{JH} + \varphi_J \bar{a}_{JJ} + \varphi_K \bar{a}_{JK} + \bar{a}_{J0} = 0. \tag{766b}$$

Sie werden am einfachsten durch Iteration gelöst, da die Hauptglieder wesentlich größer als die Nebenglieder sind.

Die Ergebnisse dieser Näherungsrechnung lassen sich durch Iteration der statischen Bedingungen (599) bis (601) verbessern.

Die Brauchbarkeit der Lösung wird an dem Stockwerkrahmen Abb. 331 nachgeprüft, dessen Stab- und Knotendrehwinkel nach Abschn. 42 bekannt sind. Er besitzt $s = 4$ Pfosten, also $12\,(s-1) = 36$, und ist zur Mittellinie symmetrisch, daher $c_1 = c_4 = 1{,}00$, $c_2 = c_3 = 1{,}28$, $C = 2\,(c_1 + c_2) = 4{,}56$. Für den Abschlußriegel l_g ist $1/l'_{g,m} = 1/3 \cdot (2 \cdot 0{,}105 + 0{,}211) = 0{,}140$, für alle übrigen Riegel $1/l'_{i,m} = 0{,}216$. Die reziproken Werte $1/h'_{g,1}$ werden nach S. 359 angeschrieben, so daß alle Vorzahlen und Belastungszahlen des Ansatzes (766) bekannt sind.

i	$1/h'_{i,1} = \bar{a}_{(J-1)J}$	$1/h'_{(i+1),1} = \bar{a}_{J(J+1)}$	$\dfrac{1}{l'_{i,m}}$	$\dfrac{36}{C\,l'_{i,m}}$	$\bar{a}_{JJ}$	W_i	$W_i h_i$	$\dfrac{W_i h_i}{2C}$	$\bar{a}_{J_0}$
g	— 0,059	—	0,140	1,105	1,164	1,105	3,757	0,41	— 0,41
f	— 0,085	— 0,059	0,216	1,705	1,849	3,380	12,168	1,34	— 1,75
e	— 0,198	— 0,085	0,216	1,705	1,988	5,720	20,592	2,26	— 3,60
d	— 0,254	— 0,198	0,216	1,705	2,157	8,060	29,016	3,20	— 5,46
c	— 0,254	— 0,254	0,216	1,705	2,213	10,400	37,440	4,10	— 7,30
b	— 0,340	— 0,254	0,216	1,705	2,299	12,740	45,864	5,02	— 9,12
a	—	— 0,340	0,216	1,705	2,607	14,885	44,655	4,90	— 9,92

Ansatz der Bedingungsgleichungen (766).

	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	$\bar{a}_{J_0}$
A	2,607	— 0,340						— 9,92
B	— 0,340	2,299	— 0,254					— 9,12
C		— 0,254	2,213	— 0,254				— 7,30
D			— 0,254	2,157	— 0,198			— 5,46
E				— 0,198	1,988	— 0,085		— 3,60
F					— 0,085	1,849	— 0,059	— 1,75
G						— 0,059	1,164	— 0,41

Iteration der Lösung.

φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G
3,80	4,52	3,82	2,98	2,11	1,04	0,40
4,39	5,04	4,22	3,22	2,17	1,05	0,40
4,46	5,09	4,25	3,24	2,17	1,05	0,40
4,47	5,10	4,25	3,24	2,17	1,05	0,40
4,47	5,10					

Fehler gegenüber dem genauen Ergebnis auf S. 365.

Winkel . . .	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G
Fehler in % .	— 12	— 17	— 18	— 19	— 28	— 40	— 50
Winkel . . .	φ_H	φ_J	φ_K	φ_L	φ_M	φ_N	φ_R
Fehler in % .	+ 7	+ 9	+ 9	+ 10	+ 16	+ 30	+ 48

Berechnung der Stabdrehwinkel nach (765).

$$\psi_i = \frac{W_i h_i}{2C} \frac{h'_{i,1}}{6} + \frac{1}{2} (\varphi_{J-1} + \varphi_J)\,.$$