



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

52. Der Rahmenträger

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

i	$\frac{W_i h_i}{2C}$	$\frac{6}{h'_{i,1}}$	$\frac{W_i h_i}{2C} / \frac{6}{h'_{i,1}}$	ω_{J-1}	φ_J	ψ_i	Fehler ψ_i %
a	4,90	3,372	1,45	0	4,47	3,69	+ 1,1
b	5,02	2,040	2,46	4,47	5,10	7,24	- 1,3
c	4,10	1,524	2,69	5,10	4,25	7,37	- 1,9
d	3,20	1,524	2,10	4,25	3,24	5,84	- 2,2
e	2,26	1,188	1,90	3,24	2,17	4,70	- 2,1
f	1,34	0,510	2,63	2,17	1,05	4,24	- 5,1
g	0,41	0,354	1,16	1,05	0,40	1,88	- 10,1

Werden diese Werte als Grundlage der Iteration der statischen Bedingungsgleichungen von S. 362/363 verwendet, so liefern die zweiten verbesserten Werte

φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G
+ 5,08	+ 6,11	+ 5,14	+ 3,96	+ 3,08	+ 1,73	+ 0,75
φ_H	φ_J	φ_K	φ_L	φ_M	φ_N	φ_R
+ 4,17	+ 4,65	+ 3,86	+ 2,94	+ 1,86	+ 0,80	+ 0,26
ψ_a	ψ_b	ψ_c	ψ_d	ψ_e	ψ_f	ψ_g
+ 3,65	+ 7,32	+ 7,46	+ 5,92	+ 4,79	+ 4,46	+ 2,21

bereits eine gute Annäherung für die Biegemomente.

$M_J^{(h)}$	Betrag	Fehler %									
$M_C^{(c)}$	- 3,04	0,3	$M_F^{(f)}$	- 1,16	0,0	$M_H^{(h)}$	- 4,11	0,5	$M_N^{(n)}$	- 2,10	0,0
$M_C^{(c)}$	+ 4,72	1,3	$M_F^{(f)}$	+ 1,42	2,1	$M_H^{(h)}$	+ 4,48	0,0	$M_N^{(n)}$	+ 1,11	1,8
$M_C^{(c)}$	- 1,79	1,7	$M_F^{(f)}$	- 0,26	7,1	$M_H^{(h)}$	+ 7,86	0,1	$M_N^{(n)}$	+ 1,51	1,9
						$M_H^{(h)}$	- 8,16	0,3	$M_N^{(n)}$	- 0,52	8,8

Die Näherungslösung für die Stabdrehwinkel ψ_e auf S. 482 ist also auch zur strengen statischen Untersuchung des Tragwerks nützlich, da sie gute Anfangswerte zur Iteration der allgemeinen Lösung liefert. Ihre Konvergenz ist daher günstig, so daß die algebraische Auflösung der Bedingungen nach Abschn. 29 unnötig wird.

Spiegel, G.: Mehrstielige Rahmen. Berlin 1920. — Traub: Beitrag zur Berechnung von Stockwerkrahmen. Bauing. 1922 S. 18. — Fritsche: Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzgleichungen. Berlin 1923. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin 1925. — Bleich-Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik. Berlin 1927. — Pasternack, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefestiger Stab- und Flächentragwerke. Zürich 1927. — Worch, G.: Studie über die Wahl der Unbekannten bei der Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. Beton u. Eisen 1928 S. 363. — Takabeya, F.: Rahmentafeln. Berlin 1930. — Bleich, F.: Stahlhochbauten Bd. 1. Berlin 1932. — Michnik, P.: Näherungsverfahren zur Berechnung von Stockwerkrahmen für vertikale und horizontale Belastungen. Bauing. 1932 S. 74.

52. Der Rahmenträger.

Der Rahmenträger ist ebenso wie der Stockwerkrahmen ein durch Stabführung und Stützung ausgezeichnetes Netz steifer Vierecke. Die Stäbe sind gerade, die Pfosten parallel zueinander. Die Träger unterscheiden sich durch die Gurtführung und durch die Art ihrer Abstützung. Abb. 461.

Die statische Eigenart des Rahmenträgers beruht im Gegensatz zu anderen Tragwerken des Eisenbetonbaues in der Verwendung von Bauteilen, in denen neben Biegemomenten gleichzeitig auch große Längs- und Querkräfte auftreten. Die bauliche Ausgestaltung der Rahmenstäbe und die Überleitung der Kräfte am Stabknoten verlangt daher besondere Sorgfalt. Diese Schwierigkeiten zwingen oft dazu, Teile des Rahmenträgers vollwandig oder als Fachwerk auszuführen, soweit dies durch die Art der Bauaufgabe möglich ist.

Der Spannungs- und Formänderungszustand ist bei n geschlossenen steifen Vierecken durch $3n$ statisch unbestimmte Schnittkräfte oder durch $2(n+1)$ Knotendrehwinkel und n Stabdrehwinkel bestimmt. Die vollständige Lösung wird jedoch in der Regel nur für Träger mit besonderen elastischen Eigenschaften angegeben, welche die Aufgabe vereinfachen. In anderen Fällen begnügt man sich mit einer Annäherung.

Rahmenträger mit beliebiger Gurtform und Belastung durch Einzelkräfte in den Stabknoten.

Die Trägheitsmomente der Stäbe werden im Bereich ihrer theoretischen Länge als konstant, die Trägheitsmomente der Gurtstäbe im Felde k außerdem noch proportional zu ihren Längen angenommen; $J_k^a \cos \alpha_k = J_k^b \cos \beta_k$ (Abb. 462). Die elastische Mitwirkung der Zwischenkonstruktion (Decke, Fahrbahn) als Teil einer Gurtung kann daher bei dieser Untersuchung ebensowenig Berücksichtigung finden wie Risse im Beton der Zuggurte. Im Grenzfall wird nur ein Gurt als biegeungssteif angenommen (Abb. 461f).

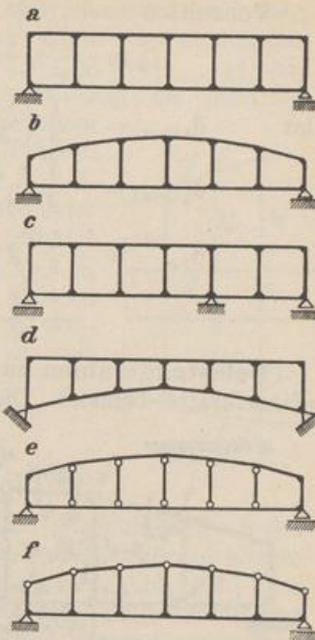


Abb. 461. Die Abb. 461 e, f können als Grenzfälle des Rahmenträgers angesehen werden, bei denen entweder die Pfosten oder der Obergurt nur Längskräfte erhalten.

Werden die Längenänderungen der Pfosten vernachlässigt, so sind die senkrechten Verschiebungen zweier Stabknoten k^a, k^b und die Drehwinkel der Gurtstäbe des Feldes (k) eines Trägers mit $J_k^a \cos \alpha_k = J_k^b \cos \beta_k$ gleich groß. Die Differenz der Gleichgewichtsbedingungen (523) $\delta A_k^a = 0, \delta A_k^b = 0$ ($k = 1, \dots, n$) enthält daher nur die unbekanntenen Differenzen ($\varphi_k^a - \varphi_k^b$) senkrecht zugeordneter Knotendrehwinkel. Der Ansatz ist bei Eintragung der Lasten in den Knotenpunkten homogen und daher: $\varphi_k^a = \varphi_k^b$. Nach der Definition des Drehsinns in Abb. 462 sind dann die Biegemomente M_k^a, M_k^b der Gurte einander gleich und die Biegemomente M_k^a, M_k^b an den Pfostenenden entgegengesetzt gleich. Das Biegemoment in Pfostenmitte ist also Null ($X_k' = 0$) und

$$Y_k = \frac{M_k^a + M_k^b}{2}, \quad k = 1, \dots, n \quad (767)$$

die einzige statisch unbestimmte Größe des Spannungszustandes. Die Rechnung enthält daher durch diese Annahmen nur n statisch überzählige Größen. Sie werden aus ebenso vielen geometrischen Bedingungsgleichungen bestimmt,

$$1_k (\delta_k^a + \delta_k^b) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Außer der ersten und letzten enthält nach Abb. 462 jede von ihnen drei Unbekannte.

$$Y_{k-1} \delta_{k(k-1)} + Y_k \delta_{kk} + Y_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k\otimes}.$$

Die Vorzeichen und Belastungszahlen werden für einen Träger mit geradem Untergurt und gebrochenem Obergurt unter Berücksichtigung der Längenänderungen der Gurtstäbe und der Querkräfte in den Pfosten angeschrieben. Das Hauptsystem ist in Abb. 462a aufgezeichnet.

Vorzahlen nach Abb. 462b. Mit den Abkürzungen:

$$\zeta_k' = \frac{c_k}{s_{ka}} + \frac{(h_k - h_{k-1})^2}{2 c_k s_k^a}, \quad v_k = \kappa \frac{E J_c}{G F_k^h}, \quad J_k^b = J_k^a \cos \alpha_k,$$

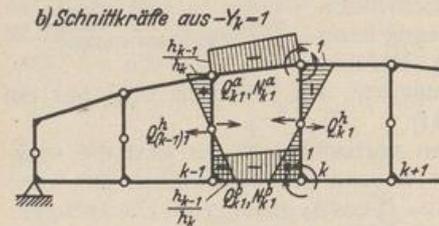
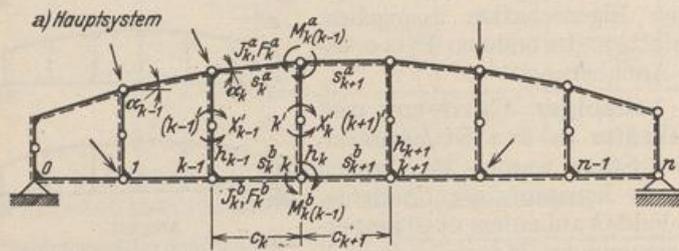
ist

$$\delta_{k(k-1)} = -\frac{1}{3} \left(\frac{h_{k-1}}{h_k} h_{k-1}' + 12 v_{k-1} \frac{1}{h_k} \right),$$

$$\delta_{k(k+1)} = -\frac{1}{3} \left(\frac{h_k}{h_{k+1}} h_k' + 12 v_k \frac{1}{h_{k+1}} \right),$$

$$\delta_{kk} = \frac{1}{3} \left[2 c_k' \left(\frac{h_{k-1}^2}{h_k^2} + \frac{h_{k-1}}{h_k} + 1 \right) + \frac{h_{k-1}}{h_k^2} h_{k-1}' + h_k' \right. \\ \left. + \frac{12}{h_k^2} (v_{k-1} h_{k-1} + v_k h_k) + 12 \frac{c_k}{h_k^2} \left(\frac{J_c}{F_k^a} \frac{s_k^2}{c_k} \zeta_k' + \frac{J_c}{F_k^b} \right) \right]. \quad (768)$$

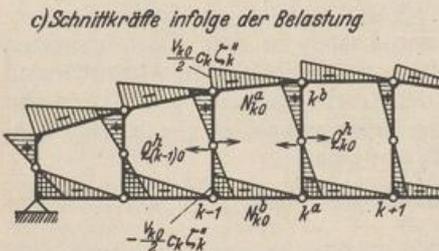
Belastungszahlen nach Abb. 462c. Der Träger wird in den Stabknoten durch Einzelkräfte belastet. Die Stützkräfte sind statisch bestimmt und damit auch die Komponenten V_{k0} , H_{k0} aller äußeren Kräfte links von einem Schnitt durch das Feld k und deren Momente M_{k0}^a , M_{k0}^b in bezug auf die Punkte k^a , k^b bekannt.



$$Q_{k1}^a = -\frac{h_k - h_{k-1}}{h_k s_k^a}, \quad Q_{k1}^b = -\frac{h_k - h_{k-1}}{h_k c_k},$$

$$Q_{(k-1)1}^a = -\frac{2}{h_k}, \quad Q_{k1}^b = -\frac{2}{h_k},$$

$$N_{k1}^a = -\frac{2}{h_k} \zeta_k', \quad N_{k1}^b = +\frac{2}{h_k}.$$



$$Q_{k0}^a = \frac{V_{k0}}{2} \frac{c_k}{s_k^a} \zeta_k'', \quad Q_{k0}^b = \frac{V_{k0}}{2} \zeta_k'',$$

$$Q_{(k-1)0}^a = -V_{k0} \frac{c_k}{h_{k-1}} \zeta_k'', \quad Q_{k0}^b = -V_{(k+1)0} \frac{c_{k+1}}{h_k} \zeta_{k+1}'',$$

$$N_{k0}^a = -\frac{M_{k0}^b}{h_k} \zeta_{k0}, \quad N_{k0}^b = +\frac{M_{k0}^a}{h_k}.$$

Abb. 462.

Mit diesen werden zur Berechnung der Belastungszahlen δ_{k0} die Funktionen ζ_{k0} , ζ_k' , ζ_k'' gebildet.

$$V_{k0} = A - \sum_0^{k-1} P; \quad \zeta_k'' = \left(1 - \frac{M_{k0}^b}{V_{k0}} \frac{h_k - h_{k-1}}{h_k c_k} \right);$$

$$\zeta_k''' = \left(1 + \frac{M_{k0}^a}{V_{k0}} \frac{h_k - h_{k-1}}{h_k c_k} \right); \quad \zeta_{k0} = \frac{c_k}{s_k^a} \left[1 + \frac{V_{k0}}{M_{k0}^b} \frac{\zeta_k'''}{2} \frac{h_k}{c_k} (h_k - h_{k-1}) \right]; \quad (769)$$

$$\delta_{k0} = V_{k0} \frac{\zeta_k''}{6} \frac{c_k}{h_k} [c_k (2 h_{k-1} + h_k) + h_{k-1}' h_{k-1} + 12 v_{k-1}] \\ - V_{(k+1)0} \frac{\zeta_{k+1}''}{6} c_{k+1} \left(h_k' + 12 \frac{v_k}{h_k} \right) + 2 \frac{c_k}{h_k^2} \left(\frac{J_c}{F_k^a} \frac{s_k^2}{c_k} M_{k0}^b \zeta_{k0} \zeta_k' + \frac{J_c}{F_k^b} M_{k0}^a \right).$$

Die Vorzahlen und Belastungszahlen des Ansatzes sind wesentlich einfacher, wenn die Biegung der Pfosten durch Querkräfte ($v_k = 0$) allein oder gemeinsam mit der Längenänderung der Gurtstäbe ($J_c/F_k^a = 0, J_c/F_k^b = 0, k = 1, \dots, n$) vernachlässigt wird. Die Regelgleichungen bleiben dabei dreigliedrig. Sie gestatten auch ohne Zahlen leicht, die Größenordnung der Vorzahlen abzuschätzen. Die Nebenglieder der Matrix sind bei Trägern mit starken Pfosten wesentlich kleiner als die Glieder der Hauptdiagonale. Die Annahme $\delta_{k(k-1)} = \delta_{k(k+1)} = 0$ führt daher zu einer Näherungslösung, mit der das Kräftebild im Felde c_k abgeschätzt werden kann. Die Vorzahlen $\delta_{k(k-1)}, \delta_{k(k+1)}$ werden mit h'_{k-1}, h'_k Null. Dies gilt für einen Rahmenträger mit sehr steifen Pfosten ($J_k^h = \infty$). Die statisch überzähligen Größen Y_k sind dann voneinander unabhängig. Für senkrechte Knotenlasten ist mit

$$M_{k0}^a = M_{k0}^b = M_{k0}$$

$$Y_k \approx \frac{1}{4} \frac{2h_{k-1} + h_k}{h_{k-1}^2 + h_{k-1}h_k + h_k^2} (M_{k0}h_{k-1} - M_{(k-1)0}h_k)$$

$$= \frac{1}{2} \left(M_{k0} - M_{k0}^* \frac{h_k}{h_k^*} \right). \quad (770)$$

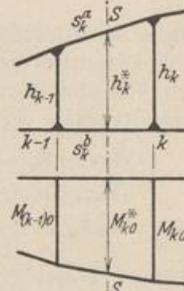
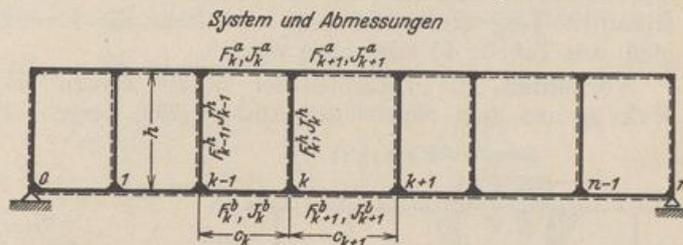


Abb. 463.

Hierin bedeutet h_k^* den Trägerabstand in der vertikalen Schwerlinie $S-S$ des Trapezes aus den Stäben $s_k^a, s_k^b, h_{k-1}, h_k$ und M_{k0}^* das Moment der äußeren Kräfte links vom Feld c_k in bezug auf einen Punkt dieser Schwerlinie. (Abb. 463.) Das Ergebnis läßt sich leicht auch für ein beliebiges Verhältnis der Trägheitsmomente der Gurtstäbe eines Feldes anschreiben, um damit auf die Bedeutung der Annahme

$J_k^a \cos \alpha_k = J_k^b \cos \beta_k$ einer allgemeinen Lösung zu schließen.

Rahmenträger mit parallelen Gurten ($J_k^a = J_k^b$) und Belastung zwischen den Stabknoten. Die Untersuchung wird auf einen



Rahmenträger beschränkt, dessen elastische Eigenschaften in bezug auf die waagerechte Mittellinie des Stabnetzes symmetrisch sind. Die Längskräfte der Pfosten sind klein, so daß deren Längenänderungen vernachlässigt werden können. Die $3n$ statisch un-

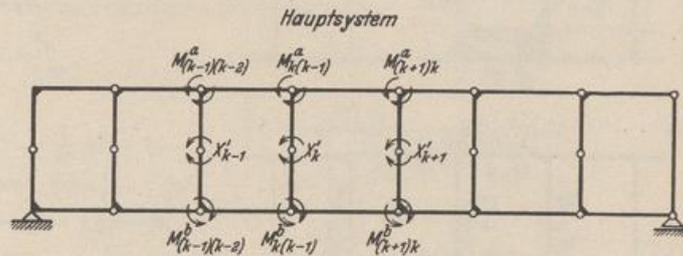


Abb. 464.

bestimmten Schnittkräfte eines Trägers mit n Feldern werden zur Symmetrieachse symmetrisch angeordnet. Für die Auswahl des Hauptsystems sind dieselben Gesichtspunkte maßgebend wie bei der Untersuchung des Stockwerkrahmens mit zwei Pfosten, mit der diejenige des Rahmenträgers, abgesehen von der Stützung, übereinstimmt. Im Gegensatz zu S. 458 wird eine Kette von Dreigelenkrahmen als Hauptsystem gewählt (Abb. 464), so daß die statisch unbestimmten Schnittkräfte des Rahmenträgers $M_{k(k-1)}^a, M_{k(k-1)}^b, X_k'$ zu den folgenden überzähligen Größen zusammengefaßt werden können:

$$Y_k = \frac{1}{2} (M_{k(k-1)}^a + M_{k(k-1)}^b); \quad X_k = \frac{1}{2} (M_{k(k-1)}^a - M_{k(k-1)}^b); \quad X_k' = M_k'. \quad (771)$$

Die statisch unbestimmten Gruppenlasten Y_k sind nach Abb. 464 antisymmetrisch, die Gruppenlasten X_k, X'_k symmetrisch zur Achse. Sie sind daher unabhängig voneinander. Die n Gruppenlasten Y_k werden aus n Gleichungen mit je drei Unbekannten berechnet.

$$Y_{k-1} \delta_{k(k-1)} + Y_k \delta_{kk} + Y_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k \otimes} \quad (772)$$

Die n Gruppenlasten X_k sind in $2n$ Gleichungen gemeinsam mit den n statisch unbestimmten Schnittkräften X'_k enthalten. Diese werden eliminiert, so daß auch die Gruppenlasten X_k aus n dreigliedrigen Gleichungen berechnet werden. Die Schnittkräfte X'_k ergeben sich daraus durch Rekursion.

$$\begin{aligned} X_{(k-1)} \tau_{k(k-1)} + X_k \tau_{kk} + X_{(k+1)} \tau_{k(k+1)} + X'_{(k-1)} \tau_{k(k-1)'} + X'_k \tau_{kk'} &= \tau_{k \otimes}, \\ X'_{(k-1)} \tau_{(k-1)'(k-1)'} + X_{(k-1)} \tau_{(k-1)'(k-1)} + X_k \tau_{(k-1)'k} &= \tau_{(k-1)' \otimes}, \\ X'_k \tau_{k'k'} + X_k \tau_{k'k} + X_{(k+1)} \tau_{k'(k+1)} &= \tau_{k' \otimes}, \\ X_{(k-1)} \left(\tau_{k(k-1)} - \tau_{k(k-1)'} \frac{\tau_{(k-1)'(k-1)}}{\tau_{(k-1)'(k-1)'}} \right) + X_k \left(\tau_{kk} - \tau_{k(k-1)'} \frac{\tau_{(k-1)'k}}{\tau_{(k-1)'(k-1)'}} - \tau_{kk'} \frac{\tau_{kk'}}{\tau_{k'k'}} \right) \\ + X_{(k+1)} \left(\tau_{k(k+1)} - \tau_{k'k'} \frac{\tau_{k'(k+1)}}{\tau_{k'k'}} \right) &= \tau_{k \otimes} - \tau_{(k-1)' \otimes} \frac{\tau_{k(k-1)'}}{\tau_{(k-1)'(k-1)'}} - \tau_{k' \otimes} \frac{\tau_{k'k'}}{\tau_{k'k'}}. \end{aligned} \quad (773)$$

Diese Bedingungsgleichungen gelten für ein statisch unbestimmtes Hauptsystem, das aus einer Kette von Zweigelenrahmen besteht. Sie können daher auch folgendermaßen angeschrieben werden:

$$X_{k-1} \tau_{k(k-1)}^{(1)} + X_k \tau_{kk}^{(1)} + X_{k+1} \tau_{k(k+1)}^{(1)} = \tau_{k \otimes}^{(1)}.$$

Die Vorzahlen sind in (773) als Funktion der Verschiebungen des statisch bestimmten Tragwerks (Abb. 464) enthalten. Sie können auch unmittelbar nach (489) aus Tabelle 43 angegeben werden.

Vorzahlen. Die Vorzahlen der Matrix werden bei der Eigenart der Kraftwirkung aus dem allgemeinen Ansatz (299) berechnet, in dem nicht allein die

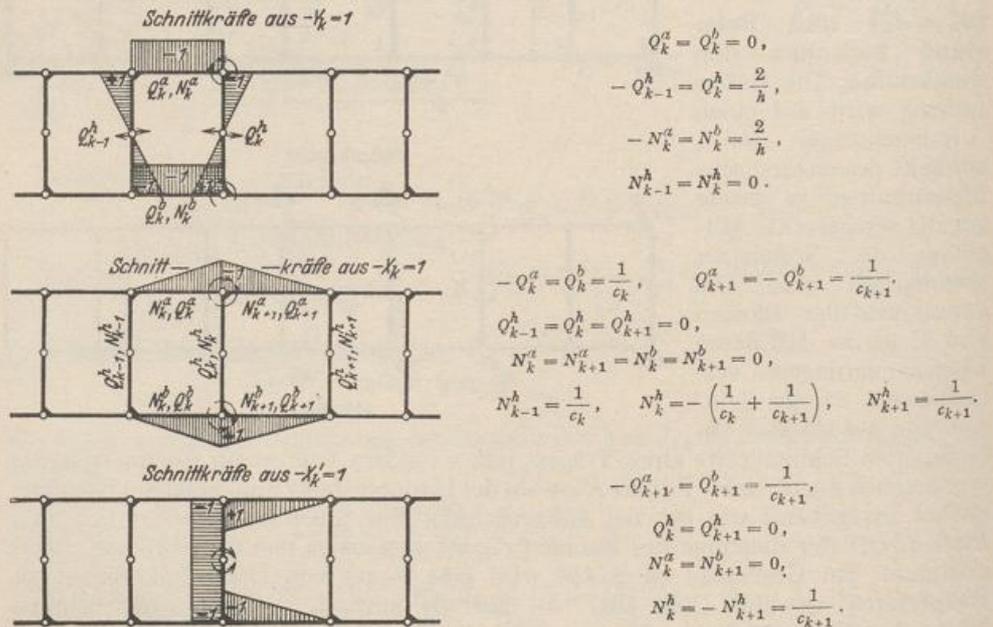


Abb. 465.

Biegemomente, sondern auch Quer- und Längskräfte berücksichtigt sind. Ihr Anteil enthält im Bereich der Gurtstäbe l_k den elastischen Beiwert $\gamma_k = \kappa E J_c : G F_k^a$,

im Bereich der Pfosten h_k den Beiwert $v_k = \alpha E J_c : G F_k^h$. Die Schnittkräfte des Hauptsystems aus $-Y_k = 1, -X_k = 1, -X'_k = 1$ sind in den Abb. 465 eingetragen.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{k(k-1)} &= -\frac{1}{3} \left(h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right), & \delta_{k(k+1)} &= -\frac{1}{3} \left(h'_k + \frac{12 v_k}{h} \right), \\ \delta_{kk} &= \frac{1}{3} \left[h'_{k-1} + h'_k + 6 c'_k + \frac{12}{h_k} (v_{k-1} + v_k) + 24 \frac{J_c}{F_k^2} \frac{c_k}{h^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (774)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{k(k-1)}^{(1)} &= \frac{h'_{k-1} \left(c'_k - 6 \frac{v_k}{c_k} \right)}{2 c'_k + 3 h'_{k-1} + 6 \frac{v_k}{c_k}}, & \tau_{k(k+1)}^{(1)} &= \frac{h'_k \left(c'_{k+1} - 6 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}} \right)}{2 c'_{k+1} + 3 h'_k + 6 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}}}, \\ \tau_{kk}^{(1)} &= \left(\frac{2}{3} c'_k + 2 \frac{v_k}{c_k} \right) + \left(\frac{2}{3} c'_{k+1} + 2 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}} \right) - \frac{\left(c'_k - 6 \frac{v_k}{c_k} \right)^2}{3 \left(2 c'_k + 3 h'_{k-1} + 6 \frac{v_k}{c_k} \right)} \\ &\quad - \frac{\left(2 c'_{k+1} + 6 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}} \right)^2}{3 \left(2 c'_{k+1} + 3 h'_k + 6 \frac{v_{k+1}}{c_{k+1}} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (775)$$

Belastungszahlen. Senkrechte Einzellasten in den Knotenpunkten des Ober- und Untergurtes. $P_h^a + P_h^b = P_h$.

$V_{k0}, M_{k0}^a, M_{k0}^b$ bezeichnen die Querkräfte und die Momente der äußeren Kräfte A, \mathfrak{B} links von einem Schnitt durch das Feld k in bezug auf die Punkte k^a, k^b .

$$V_{k0} = A - \sum_{h=0}^{k-1} P_h, \quad M_{k0}^a = M_{k0}^b = M_{k0} = A x_k - \sum_{h=0}^{k-1} P_h (x_k - a_h), \quad (776)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{k0} &= V_{k0} \frac{c_k c'_k}{2} + \frac{1}{6} V_{k0} c_k \left(h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} V_{(k+1)0} c_{k+1} \left(h'_k + 12 \frac{v_k}{h} \right) + 4 M_{k0} \frac{c_k}{h^2} \frac{J_c}{F_k^2}, \end{aligned} \right\} \quad (777)$$

$$\tau_{k0}^{(1)} = 0 \text{ und daher } X_k = 0, \quad X'_k = 0.$$

Waagerechte Einzellasten am Obergurt (Bremskräfte), Abb. 466.

$$\left. \begin{aligned} V_{k0} &= \frac{f}{l} H, & M_{k0}^a &= -f \xi'_k H, \\ M_{k0}^b &= h \sum_{i=k}^n H_i - f \xi'_k H. \end{aligned} \right\} \quad (778)$$

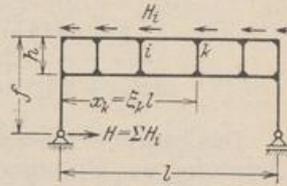


Abb. 466.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{k0} &= \frac{1}{2} H \frac{f}{l} \left[c_k c'_k + \frac{c_k}{3} \left(h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right) - \frac{c_{k+1}}{3} \left(h'_k + 12 \frac{v_k}{h} \right) \right] \\ &\quad - 2 \frac{J_c}{F_k^2} \frac{c_k}{h^2} \left(2 f \xi'_k H - h \sum_{i=k}^n H_i \right). \end{aligned} \right\} \quad (779)$$

Greifen die waagerechten Kräfte, wie dies bei Bremskräften die Regel sein wird, exzentrisch zu den Knotenpunkten an, so werden die Schnittkräfte aus der Knotenlast und einem Kräftepaar am Knoten berechnet, das in einen antimetrischen und einen symmetrischen Anteil zerlegt worden ist.

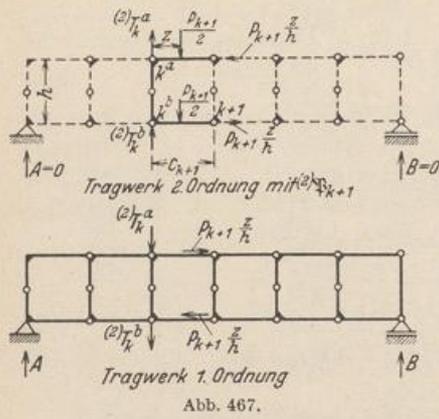
Temperaturänderung. Obergurt t_a , Untergurt t_b .

Antimetrischer Anteil: $\frac{1}{2} (t_a - t_b)$

$$\delta_{kt} = 2 E J_c \frac{c_k}{h} \alpha_t (t_b - t_a). \quad (780)$$

Symmetrischer Anteil: $\frac{1}{2} (t_a + t_b)$. Die Schnittkräfte sind Null.

Senkrechte Belastung der Gurtstäbe zwischen den Stabknoten. Die Kräfte \mathfrak{P} werden in einen antimetrischen und einen symmetrischen Anteil zerlegt



$\mathfrak{P} = {}^{(2)}\mathfrak{P} + {}^{(1)}\mathfrak{P}$ (Abb. 468a,b). Jeder wirkt in einem Dreigelenkrahmen, welcher die Belastung zunächst als Tragwerk zweiter Ordnung auf die Knoten k^a, k^b der Rahmenkette überträgt. Das Hauptsystem erhält daher in den Knotenpunkten Einzelkräfte T_k^a, T_k^b . Diese sind bei antimetrischer Belastung des Tragwerks gleich groß und gleichgerichtet (${}^{(2)}T_k$), bei symmetrischer Belastung entgegengesetzt gleich (${}^{(1)}T_k$). Die Belastungsglieder $\delta_{k0}, \tau_{k0}^{(1)}$ lassen sich daher aus je zwei Teilen zusammensetzen ($\delta_{k0} = \delta_{k0,1} + \delta_{k0,2}$, $\tau_{k0}^{(1)} = \tau_{k0,1}^{(1)} + \tau_{k0,2}^{(1)}$). Die Anteile $\delta_{k0,2}, \tau_{k0,2}^{(1)}$ gelten für die Rahmen als Tragglieder zweiter Ordnung (Abb. 467). Der Anteil $\delta_{k0,1}$ wird nach (777) berechnet, der Anteil $\tau_{k0,1}^{(1)}$ ist Null, da das Hauptsystem, abgesehen von der Längskraft der Pfosten, spannungslos ist.

$$\delta_{k0,2} = \frac{p_k c_k^2}{12} (2c'_k + h'_{k-1}) - \frac{p_{k+1} c_{k+1}^2}{12} h'_k + \frac{c'_k}{2c_k} \sum_k P z^2 + \frac{h'_{k-1}}{6} \sum_k P z - \frac{h'_k}{6} \sum_{k+1} P z + \frac{2v_{k-1}}{h} \left(\frac{p_k c_k^2}{2} + \sum_k P z \right) - \frac{2v_k}{h} \left(\frac{p_{k+1} c_{k+1}^2}{2} + \sum_{k+1} P z \right). \tag{781}$$

$$\tau_{k0}^{(1)} = \pm \left[- \left(\frac{p_k c_k^2 c'_k}{24} + \frac{p_{k+1} c_{k+1}^2 c'_{k+1}}{24} \right) - \left(\frac{c_k c'_k}{6} \sum_k P \omega_D + \frac{c_{k+1} c'_{k+1}}{6} \sum_{k+1} P \omega'_D \right) + \frac{c'_k - 6 \frac{\gamma_k}{c_k}}{2c_k + 3h'_{k-1} + 6 \frac{\gamma_k}{c_k}} \left(\frac{p_k c_k^2 c'_k}{24} + \frac{c_k c'_k}{6} \sum_k P \omega'_D \right) + \frac{2c'_{k+1} + 6 \frac{\gamma_{k+1}}{c_{k+1}}}{2c'_{k+1} + 3h'_k + 6 \frac{\gamma_{k+1}}{c_{k+1}}} \left(\frac{p_{k+1} c_{k+1}^2 c'_{k+1}}{24} + \frac{c_{k+1} c'_{k+1}}{6} \sum_{k+1} P \omega'_D \right) \right]. \tag{782}$$

Das positive Vorzeichen gilt bei Belastung des Obergurtes, das negative bei Belastung des Untergurtes.

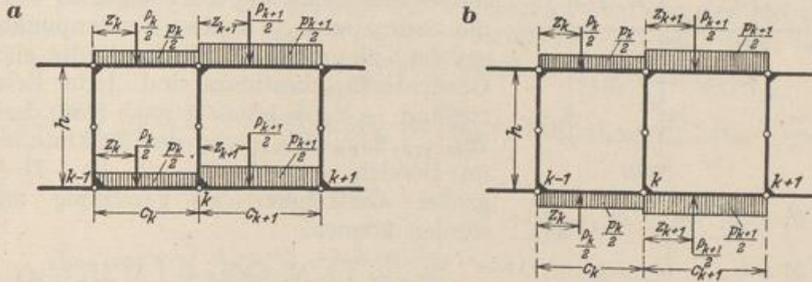
Die statisch überzähligen Gruppenlasten X_k für den symmetrischen Anteil ${}^{(1)}\mathfrak{P}$, Y_k für den antimetrischen Anteil ${}^{(2)}\mathfrak{P}$ sind in zwei dreigliedrigen Gruppen von Gleichungen enthalten, die nach der Rechenvorschrift S. 232 oder durch Iteration aufgelöst werden. Die Gruppenlasten X_k sind bei Lastangriff in den Stabknoten Null. Die für den Festigkeitsnachweis wichtigen Schnittkräfte ergeben sich aus dem Superpositionsgesetz (288) oder aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte am Hauptsystem.

a) Gurte:

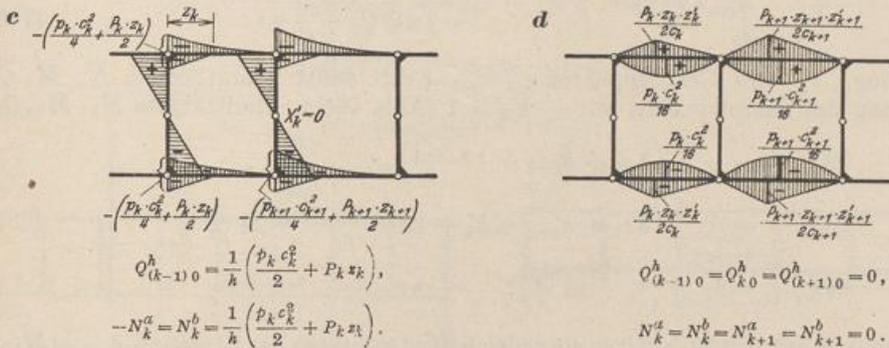
$$\left. \begin{aligned} M_{k(k-1)}^a &= Y_k + X_k; & M_{k(k-1)}^b &= Y_k - X_k, \\ M_{(k-1)k}^a &= M_{(k-1)k0}^a + Y_k + X_{k-1} - X'_{k-1}, \\ M_{(k-1)k}^b &= M_{(k-1)k0}^b + Y_k - X_{k-1} + X'_{k-1} \\ - N_k^a &= N_k^b = \frac{M_{k0} - 2Y_k}{h}, \\ Q_k^a &= Q_{k0}^a - \frac{1}{c_k} (X_{k-1} - X_k - X'_{k-1}), \\ Q_k^b &= Q_{k0}^b + \frac{1}{c_k} (X_{k-1} - X_k - X'_{k-1}). \end{aligned} \right\} \tag{783}$$

b) Pfosten:
$$\left. \begin{aligned} X'_k &= \frac{1}{\tau_{k',k'}} (\tau_{k',0} - X_k \tau_{k',k} - X_{k+1} \tau_{k',(k+1)}), \\ M_k^a &= -M_{k(k+1)0}^a - (Y_{k+1} - Y_k - X'_k) = M_{k(k-1)}^a - M_{k(k+1)}^a, \\ M_k^b &= M_{k(k+1)0}^b + (Y_{k+1} - Y_k + X'_k) = M_{k(k+1)}^b - M_{k(k-1)}^b, \\ Q_k^h &= -V_{(k+1)0} \frac{c_{k+1}}{h} + \frac{2}{h} (Y_{k+1} - Y_k). \end{aligned} \right\} (784)$$

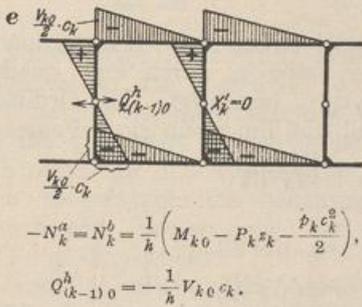
Belastungsumordnung:



Schnittkräfte im System 2. Ordnung:



Schnittkräfte im System 1. Ordnung:



$$^{(2)}T_k = ^{(2)}T_k^a + ^{(2)}T_k^b = p_{k+1} c_{k+1} + \sum_{(k+1)} P,$$

A, V_{k0}, M_{k0} wie im Hauptsystem. $V_{k0} = V_{(k-1)0} - T_{k-1}$. Die Längskräfte der beiden Systeme werden addiert und in $\delta_{k0,1}$ eingerechnet. Hierdurch entsteht wieder Gl. (777).

Abb. 468.

Die Einflußlinien. Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden in der Regel nur für mittelbare Belastung des Ober- oder Untergurts gezeichnet. Sie sind dann zwischen den Pfosten gerade Linien. Die Gruppenlasten X_k, X'_k sind Null und die Einflußlinien der Schnittkräfte daher nur von den statisch unbestimmten Gruppenlasten Y_k abhängig.

Die Einflußlinien Y_k werden nach (328) aus den Vorzahlen $\beta_{kh}^{(y)}$ der konjugierten Matrix zu (772) berechnet.

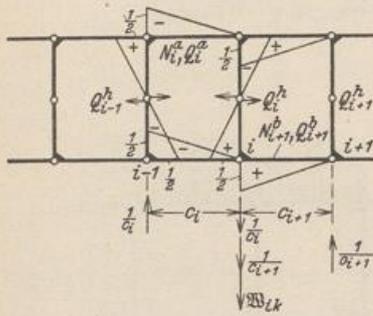
$$Y_k = \sum \beta_{kh}^{(y)} \delta_{mh}.$$

Da die Hauptglieder $\beta_{kk}^{(y)}$ der Matrix in der Regel wesentlich größer sind als deren Nebenglieder, so genügt bereits $Y_k = \beta_{kk}^{(y)} \delta_{mk}$ als Näherung und

$$Y_k = \beta_{k(k-1)}^{(y)} \delta_{m(k-1)} + \beta_{kk}^{(y)} \delta_{mk} + \beta_{k(k+1)}^{(y)} \delta_{m(k+1)} \quad (785)$$

als Lösung.

Die Belastungszahlen δ_{mk} bezeichnen die Biegelinien des Lastgurtes des Hauptsystems (Abb. 464) für $-Y_k = 1$, ($k = 1 \dots n$). Bei mittelbarer Belastung des Lastgurtes werden nur die Ordinaten δ_{mk} in den Knotenpunkten verwendet, die nach S. 125 durch die elastischen Gewichte \mathfrak{B}_{ik} bestimmt sind. Jeder Belastungszustand $-Y_k = 1$ liefert nach (786) drei Kräfte $\mathfrak{B}_{(k-1)k}$, \mathfrak{B}_{kk} , $\mathfrak{B}_{(k+1)k}$, so daß die Einflußlinien Y_k im Bereich von $0 \div (k-2)$, $(k+2) \div n$ mit großer Genauigkeit als geradlinig angesehen werden können.



$$-\bar{Q}_i^a = -\bar{Q}_i^b = -\frac{1}{2c_i}, \quad -\bar{Q}_{i+1}^a = -\bar{Q}_{i+1}^b = -\frac{1}{2c_{i+1}},$$

$$-\bar{Q}_{i-1}^a = -\bar{Q}_{i-1}^b = -\frac{1}{h}, \quad \bar{Q}_{i+1}^h = 0,$$

$$-\bar{N}_i^a = \bar{N}_i^b = \frac{1}{h}, \quad \bar{N}_{i+1}^a = \bar{N}_{i+1}^b = 0.$$

Abb. 469.

$$\mathfrak{B}_{ik} = \int \bar{N} N_k \frac{J_c}{F} ds + \int \bar{M} M_k \frac{J_c}{J} ds + \int \bar{Q} Q_k \frac{E J_c}{G F} ds. \quad (786)$$

Belastung „1_i“ des Geradenpaares c_i, c_{i+1} (Abb. 469): Schnittkräfte $\bar{N}, \bar{M}, \bar{Q}$; Belastung des Hauptsystems mit $-Y_k = 1$ (Abb. 465): Schnittkräfte N_k, M_k, Q_k .

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_{(k-1)k} &= -\frac{1}{6} \left(3c'_k + h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right), \\ \mathfrak{B}_{kk} &= +\frac{1}{6} \left(3c'_k + h'_{k-1} + h'_k + 12 \frac{v_{k-1} + v_k}{h} + 24 \frac{c_k}{h^2} \frac{J_c}{F_k} \right), \\ \mathfrak{B}_{(k+1)k} &= -\frac{1}{6} \left(h'_k + 12 \frac{v_k}{h} \right). \end{aligned} \right\} \quad (787)$$

Die Momente aus den \mathfrak{B} -Kräften sind gleich den Ordinaten der Biegelinie $\delta_{mk} = M_{kw}$. Werden die mit den β -Zahlen erweiterten \mathfrak{B} -Kräfte verwendet, so liefert das Moment M_w unmittelbar die Einflußordinate Y_k .

Um die Einflußlinie Y_k auch bei Lastangriff zwischen den Pfosten nach (787) aufzuzeichnen, wird jede Biegelinie δ_{mk} im Felde c_k durch eine quadratische Parabel mit den Ordinaten $\Delta \delta_{mk} = -\frac{1}{2} c_k c'_k \omega_R$ berichtigt. Die Ordinaten der Einflußlinien X_k sind in den Stabknoten Null und innerhalb eines Feldes c_k

$$X_k = \beta_{k(h-1)}^{(\omega)} \tau_{m(h-1)}^{(1)} + \beta_{kh}^{(\omega)} \tau_{mh}^{(1)}.$$

Daher ist im

$$\left. \begin{aligned} \text{Feld } c_k &: X_k = \beta_{kk}^{(\omega)} (\tau_{mk}^{(1)} - \alpha_{(k-1)k} \tau_{m(k-1)}^{(1)}), \\ \text{Feld } c_{k+1} &: X_k = \beta_{kk}^{(\omega)} (\tau_{mk}^{(1)} - \alpha_{(k+1)k} \tau_{m(k+1)}^{(1)}). \end{aligned} \right\} \quad (788)$$

Ebenso werden die Ordinaten der Einflußlinien X'_k berechnet. Die Biegelinien $\tau_{mk}^{(1)}$ ergeben sich aus (782) für $p = 0$ und $P_k = 1, P_{k+1} = 0$. In den übrigen Feldern ist $X_k \approx 0$, da die Nebenglieder der konjugierten Matrix in der Regel so klein sind, daß ihre Beiträge vernachlässigt werden können.

$$M_{k(k-1)}^a = Y_k + X_k, \quad M_{k(k-1)}^b = Y_k - X_k.$$

Die Ordinaten der Einflußlinien Y_k in den Knotenpunkten können auch als Einflußgrößen Y_{km} berechnet und aufgetragen werden. Die Last $P = 1$ wird dabei der Reihe nach jedem Knoten m des Lastgurtes zugewiesen. Auch in diesem Falle

genügen in der Regel zur Berechnung von Y_{km} aus der konjugierten Matrix neben dem Hauptglied $\beta_{kk}^{(y)}$ die beiden benachbarten Nebenglieder der Zeile.

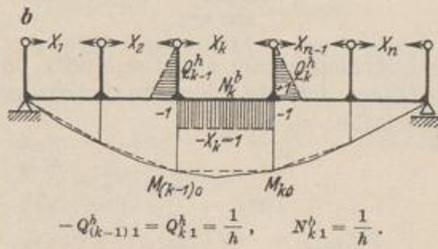
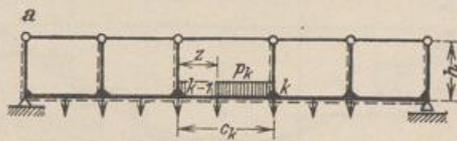
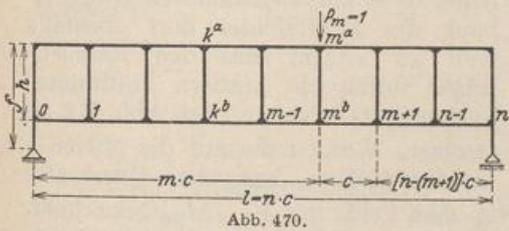
$$Y_{km} = \beta_{k(k-1)}^{(y)} \delta_{(k-1)m} + \beta_{kk}^{(y)} \delta_{km} + \beta_{k(k+1)}^{(y)} \delta_{(k+1)m}.$$

δ_{mk} sind die Belastungszahlen für $P = 1$ im Lastpunkt m . Die Einflußlinie ist nach (785) wiederum durch Y_{km} , ($m = (k-2) \dots (k+2)$) ausreichend bestimmt, da der Bereich $0 \div (k-2)$, $(k+2) \div n$ geradlinig angenommen werden kann.

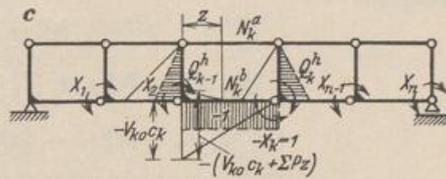
Belastungszahlen δ_{km} ($k = 1 \dots m-1, m, m+1 \dots n$) für den Rahmenträger mit parallelen Gurten, gleichgroßen Feldern ($c_k = c, l = nc$) und gleichen Abmessungen der Pfosten ($h'_k = h', v_k = v$). Lastpunkt m : $x_m = mc, x'_m = m'c = (n-m)c$ (Abb. 470). Elastisch wirksame Länge der Gurtstäbe k :

c'_k und $\frac{c_k}{h^2} \frac{J_c}{F_k^a} = \bar{c}'_k$. Stützkkräfte für $P_m = 1$: $A_m = \frac{m'}{n}, B_m = \frac{m}{n}$.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1m} &= \frac{1}{2} A_m c (c'_1 + 8 \bar{c}'_1), \dots \\ \delta_{(m-1)m} &= \frac{1}{2} A_m c (c'_{m-1} + 8 (m-1) \bar{c}'_{m-1}), \\ \delta_{mm} &= \frac{1}{2} A_m c (c'_m + 8 m \bar{c}'_m) + \frac{c}{6} (h' + 12 \frac{v}{h}), \\ \delta_{(m+1)m} &= -\frac{1}{2} B_m c (c'_{m+1} + 8 (m'-1) \bar{c}'_{m+1}), \dots \\ \delta_{nm} &= -\frac{1}{6} B_m c (3 c'_n + h' + 12 \frac{v}{h}). \end{aligned} \right\} (789)$$



$$-Q_{(k-1)1}^h = Q_{k1}^h = \frac{1}{h}, \quad N_{k1}^b = \frac{1}{h}.$$



$$\begin{aligned} -Q_{(k-1)1}^h &= Q_{k1}^h = \frac{1}{h}, & Q_{(k-1)0}^h &= -V_{k0}, \\ Q_{k0}^h &= V_{(k+1)0}, & -N_{k1}^a &= N_{k1}^b = \frac{1}{h}, \\ -N_{k0}^a &= N_{k0}^b = \frac{M_{k0}}{h}. \end{aligned}$$

Abb. 471.

Die vollwandige Ausführung einzelner Trägerabschnitte, die namentlich an den Enden einfacher Rahmenträger zur Übertragung der Querkraft notwendig ist, hat keinen Einfluß auf den Ansatz. Die vollwandigen Trägerabschnitte bedeuten für die Berechnung Pfosten mit unendlich großem Trägheitsmoment.

Der versteifte Balkenträger Abb. 471a ist auf S. 485 als Grenzfall eines Rahmenträgers bezeichnet worden, dessen elastische Eigenschaften durch $J_k^b \gg J_k^a$ ausgezeichnet sind. Der Obergurt erhält in diesem Falle nur Längskräfte, die Querkräfte werden allein vom Lastgurt aufgenommen. Das Kräftebild kann mit einem Hauptsystem Abb. 471b berechnet werden. Ein unmittelbarer Vergleich mit der statischen Unter-

suchung des Rahmenträgers ist durch die Wahl eines Hauptsystems Abb. 471c möglich. In beiden Lösungen ergeben sich dreigliedrige Bedingungsgleichungen.

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}.$$

Nach Abb. 471c ist

$$\left. \begin{aligned} 3 \delta_{k(k-1)} &= - \left(h'_{k-1} + 3 \frac{v_{k-1}}{h} \right), & 3 \delta_{k(k+1)} &= - \left(h'_k + 3 \frac{v_k}{h} \right), \\ 3 \delta_{kk} &= \left[3 c'_k + h'_{k-1} + h'_k + \frac{3}{h} (v_{k-1} + v_k) + 3 \frac{c_k}{h^2} \left(\frac{J_c}{F_o} + \frac{J_c}{F_u} \right) \right], \\ 3 \delta_{k0} &= \frac{c'_k}{2} \left[3 V_{k0} c_k + p_k c_k^2 + \frac{3}{c_k} \Sigma P_k z_k^2 \right] \\ &\quad + 3 \frac{M_{k0}}{h^2} \left(\frac{J_c}{F_o} + \frac{J_c}{F_u} \right) c_k + V_{k0} \left(c_k h'_{k-1} + 3 \frac{c_k}{h} v_{k-1} \right) \\ &\quad - V_{(k+1)0} \left(c_{k+1} h'_k + 3 \frac{c_{k+1}}{h} v_k \right). \end{aligned} \right\} \quad (790)$$

Näherungsberechnung eines Rahmenträgers. Die statische Untersuchung eines Rahmenträgers mit parallelen Gurten und elastischer Symmetrie in bezug auf eine waagerechte Achse lehrt, daß die Biegemomente bei senkrechten Einzellasten in den Knotenpunkten nicht nur in der Mitte der Pfosten, sondern auch in der Nähe der Gurtstabsmitten Null sind. Es liegt daher nahe, diese zur angenäherten Beschreibung des Kräftebildes dort ebenfalls Null zu setzen, also den Rahmenträger durch ein statisch bestimmtes System mit Gelenken nach Abb. 472 zu ersetzen. Werden die auf die Mitten \bar{k} der Gurtstäbe c_k bezogenen Querkräfte

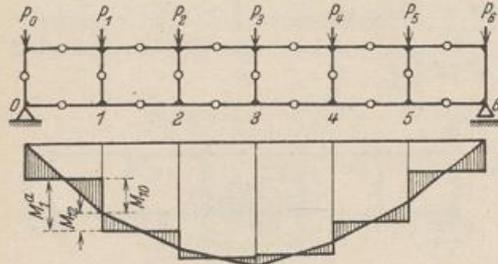


Abb. 472.

und Momente aller äußeren Kräfte links von dem Felde mit \bar{V}_{k0} , \bar{M}_{k0} bezeichnet, so lassen sich die folgenden Schnittkräfte anschreiben:
Gurtstäbe:

$$\left. \begin{aligned} -N_k^a &= N_k^b = \frac{\bar{M}_{k0}}{h}, & Q_k^a &= Q_k^b = \frac{1}{2} \bar{V}_{k0}, \\ M_{k(k-1)}^a &= -M_{(k-1)k}^a = \frac{1}{4} \bar{V}_{k0} c_k, & M_{k(k-1)}^b &= -M_{(k-1)k}^b = \frac{1}{4} \bar{V}_{k0} c_k. \end{aligned} \right\} \quad (791)$$

Pfosten:

$$\left. \begin{aligned} N_k^h &= \frac{1}{2} (P_k^b - P_k^a), \\ Q_{k-1}^h &= -N_{k-1}^a + N_k^a = -\frac{1}{h} (\bar{M}_{k0} - \bar{M}_{(k-1)0}), \\ M_k^a &= -M_k^b = -\frac{1}{2} Q_k^h h = \frac{1}{2} (\bar{M}_{k0} - \bar{M}_{(k-1)0}). \end{aligned} \right\} \quad (792)$$

Die Abb. 472 zeigt die graphische Verwendung der Ergebnisse. Darnach sind zunächst die Momente für die Einzellasten $P/2$ aufgetragen und daraus die Momente \bar{M}_{k0} gebildet worden. Dieses elementare Ergebnis zeigt die ungünstigen statischen Eigenschaften des Rahmenträgers, die sich namentlich aus den großen Querkräften in Pfosten und Gurten nächst den Auflagern ergeben. Sie lassen sich hier durch vollwandige Ausführung des Trägers und engere Stellung der Pfosten mildern.

Näherungsrechnung für den Rahmenträger (Abb. 474).

Belastung $P = 2,5 \text{ t}$ in den Knoten 1, 2, 3, 4, 5, 6.

k	0	$\bar{1}$	1	$\bar{2}$	2	$\bar{3} = 3'$	3	$\bar{4} = 4'$
P	(-7,5)	0	2,5	0	2,5	0	2,5	0 t
V_{k0}	0	7,5	7,5	5	5	2,5	2,5	0 t
$c/2$	—	1,25	1,25	1,25	1,25	2,5	2,5	2,5 m
$V_{k0} c/2$	—	9,38	9,38	6,25	6,25	6,25	6,25	0 mt
$M_{k0}/2$	—	4,69	9,38	12,50	15,63	18,75	21,88	21,88 mt
$M_{k(k+1)}$	-4,69		-3,12		-3,12		0	mt
$M_{k(k-1)}$			4,69		3,12		3,12	mt

Die Momente sind in Abb. 473 dargestellt. Die genauen Werte sind nach S. 497 berechnet und das Ergebnis in Klammern und gestrichelten Linien eingetragen.

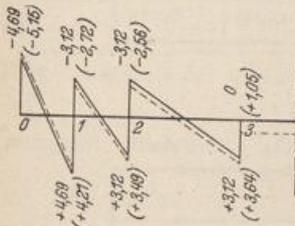


Abb. 473.

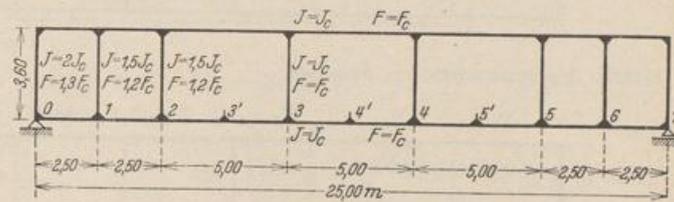


Abb. 474.

Zahlenbeispiel für die Berechnung eines Rahmenträgers (Abb. 474).

Das Tragwerk ist symmetrisch zu einer waagerechten und zu einer senkrechten Mittellinie.

Geometrische Grundlagen.

$$h_0 = 1,8, \quad h_1 = h_2 = 2,4, \quad h_3 = 3,6 \text{ m},$$

$$c_1 = c_2 = 2,5, \quad c_3 = c_4 = 5,0 \text{ m};$$

$$\alpha = 1,2, \quad E/G = 2, \quad J_c = 0,0533 \text{ m}^4, \quad F_c = 1,0 \text{ m}^2, \quad J_c/F_c^2 = 0,0533 \text{ m}^2;$$

$$v_0 = 1,2 \cdot 2 \cdot 0,0533/1,3 = 0,0985, \quad v_1 = v_2 = 0,1067, \quad v_3 = 0,128, \quad \gamma_k = 0,128.$$

Antimetrischer Ansatz, Vorzahlen nach (774):

$$\delta_{21} = -\frac{1}{3} \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) = -0,919, \quad \delta_{23} = -\frac{1}{3} \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) = -0,919,$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3} \left(2,4 + 2,4 + 6 \cdot 2,5 + \frac{12}{3,6} \cdot 2 \cdot 0,1067 + 24 \cdot 0,0533 \cdot \frac{2,5}{3,6^2} \right) = 6,921.$$

Symmetrischer Ansatz, Vorzahlen nach (775):

$$\tau_{21}^{(1)} = \frac{2,4 \left(2,5 - 6 \frac{0,128}{2,5} \right)}{2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 2,4 + 6 \frac{0,128}{2,5}} = 0,421, \quad \tau_{23}^{(1)} = \frac{2,4 \left(5,0 - 6 \frac{0,128}{5,0} \right)}{2 \cdot 5,0 + 3 \cdot 2,4 + 6 \frac{0,128}{5,0}} = 0,670,$$

$$\tau_{22}^{(1)} = \left(\frac{2}{3} \cdot 2,5 + 2 \frac{0,128}{2,5} \right) + \left(\frac{2}{3} \cdot 5,0 + 2 \frac{0,128}{5,0} \right) - \frac{\left(2,5 - 6 \frac{0,128}{2,5} \right)^2}{3 \left(2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 2,4 + 6 \frac{0,128}{2,5} \right)}$$

$$\frac{\left(2 \cdot 5,0 + 6 \frac{0,128}{5,0} \right)^2}{3 \left(2 \cdot 5,0 + 3 \cdot 2,4 + 6 \frac{0,128}{5,0} \right)} = 3,046.$$

Matrix des antimetrischen Ansatzes:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
	+ 6,712	- 0,919					
	- 0,919	+ 6,921	- 0,919				
		- 0,919	+ 12,425	- 1,342			
			- 1,342	+ 12,846	- 1,342		
				- 1,342	+ 12,425	- 0,919	
					- 0,919	+ 6,921	- 0,919
						- 0,919	+ 6,712

Matrix des symmetrischen Ansatzes:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
	2,638	0,421					
	0,421	3,046	0,670				
		0,670	4,677	0,833			
			0,833	4,756	0,833		
				0,833	4,031	0,421	
					0,421	2,660	0,421
						0,421	1,641

Bemerkenswert ist die geringe Abhängigkeit der überzähligen Größen, so daß die Formänderungen δ_{ki} und $\tau_{ki}^{(1)}$ mit $k \neq i$ zur Bildung eines ersten Näherungsergebnisses Null gesetzt werden können.

Konjugierte Matrix $\beta_{ki}^{(2)}$ des antimetrischen Ansatzes:

	$-\kappa_{21}$	$-\kappa_{32}$	$-\kappa_{43}$	$-\kappa_{54}$	$-\kappa_{65}$	$-\kappa_{76}$	
	0,1341	0,0748	0,1057	0,1091	0,1352	0,1370	→
1	0,1518	0,0204	0,0015	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0204	0,1486	0,0111	0,0012	0,0001	0,0000	0,0000
3	0,0015	0,0111	0,0822	0,0087	0,0009	0,0001	0,0000
4	0,0002	0,0012	0,0087	0,0796	0,0087	0,0012	0,0002
5	0,0000	0,0001	0,0009	0,0087	0,0822	0,0111	0,0015
6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0111	0,1486	0,0204
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0015	0,0204	0,1518

\uparrow
 $0,1370 = -\kappa_{12}$
 $0,1352 = -\kappa_{23}$
 $0,1091 = -\kappa_{34}$
 $0,1057 = -\kappa_{45}$
 $0,0748 = -\kappa_{56}$
 $0,1341 = -\kappa_{67}$
 \downarrow

Konjugierte Matrix $\beta_{ki}^{(y)}$ des symmetrischen Ansatzes.

	$-\kappa_{21}$	$-\kappa_{32}$	$-\kappa_{43}$	$-\kappa_{54}$	$-\kappa_{65}$	$-\kappa_{76}$	
	$-0,1429$	$-0,1481$	$-0,1817$	$-0,2103$	$-0,1650$	$-0,2564$	\rightarrow
1	$+0,3880$	$-0,0554$	$+0,0082$	$-0,0015$	$+0,0003$	$-0,0001$	$+0,0000$
2	$-0,0554$	$+0,3477$	$-0,0515$	$+0,0094$	$-0,0020$	$+0,0003$	$-0,0001$
3	$+0,0082$	$-0,0515$	$+0,2290$	$-0,0416$	$+0,0087$	$-0,0014$	$+0,0004$
4	$-0,0015$	$+0,0094$	$-0,0416$	$+0,2260$	$-0,0475$	$+0,0078$	$-0,0020$
5	$+0,0003$	$-0,0020$	$+0,0087$	$-0,0475$	$+0,2622$	$-0,0433$	$+0,0111$
6	$-0,0001$	$+0,0003$	$-0,0014$	$+0,0078$	$-0,0433$	$+0,3990$	$-0,1024$
7	$+0,0000$	$-0,0001$	$+0,0004$	$-0,0020$	$+0,0111$	$-0,1024$	$+0,6360$

Rechenvorschrift der überzähligen Größen.

$$Y_k = \sum \beta_{ki}^{(y)} \delta_{k0}, \quad X_k = \sum \beta_{ki}^{(x)} \tau_{k0}^{(1)}$$

Senkrechte Einzellasten in den Punkten 1, 2, 3', 3, 4', ...

$$\delta_{20,1} = V_{20} \left[\frac{2,5 \cdot 2,5}{2} + \frac{1}{6} 2,5 \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) \right] - \frac{1}{6} V_{30} 5,0 \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) + 4 M_{20} \frac{2,5}{3,6^2} \cdot 0,0533.$$

$$\begin{aligned} \delta_{10,1} &= 4,011 V_{10} - 1,148 V_{20} + 0,0412 M_{10}, \\ \delta_{20,1} &= 4,273 V_{20} - 2,296 V_{30} + 0,0412 M_{20}, \\ \delta_{30,1} &= 14,796 V_{30} - 3,356 V_{40} + 0,0824 M_{30}, \\ \delta_{40,1} &= 15,856 V_{40} - 3,356 V_{50} + 0,0824 M_{40}, \\ \delta_{50,1} &= 15,856 V_{50} - 1,148 V_{60} + 0,0824 M_{50}, \\ \delta_{60,1} &= 4,273 V_{60} - 1,148 V_{70} + 0,0412 M_{60}, \\ \delta_{70,1} &= 4,273 V_{70}. \end{aligned}$$

$$\delta_{k0,2} = \frac{c'_k}{2 c_k} P_k z_k^2 + \frac{1}{6} P_k z_k \left(h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right) - \frac{1}{6} P_{k+1} z_{k+1} \left(h'_k + 12 \frac{v_k}{h} \right).$$

Gleichförmige Belastung $g = 1,0 \text{ t/m}$ liefert $P = 2,5 \text{ t}$ in 1, 2, 3', 3, 4', ...

$k =$	1	2	3	4	5	6	7
$V_{k0} =$	11,25	8,75	3,75	-1,25	-6,25	-8,75	-11,25 t
$M_{k0} =$	28,125	50,0	75,0	75,0	50,0	28,125	0 mt

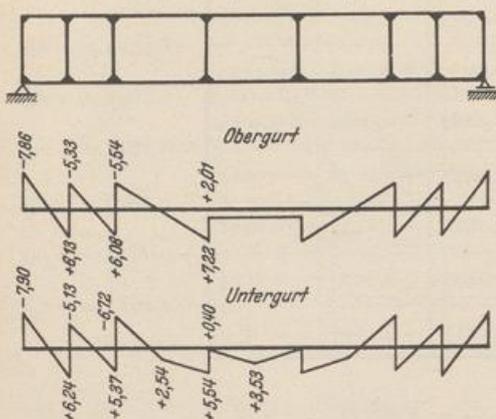
$$\delta_{30,1} = 14,796 \cdot 3,75 + 3,356 \cdot 1,25 + 0,0824 \cdot 75 = 65,860,$$

$$\delta_{30,2} = \frac{5,0}{2 \cdot 5,0} 2,5 \cdot 2,5^2 + \frac{1}{6} 2,5 \cdot 2,5 \left(2,4 + 12 \cdot \frac{0,1067}{3,6} \right) - \frac{1}{6} 2,5 \cdot 2,5 \left(3,6 + 12 \cdot \frac{0,128}{3,6} \right) = 6,4885;$$

δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}	δ_{70}
36,2375	27,9668	-72,3485	15,1475	-72,9283	-23,3150	-48,0713

$$\tau_{30}^{(1)} = - \left[- \frac{5,0 \cdot 5,0}{6} \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{8} - \frac{5,0 \cdot 5,0}{6} \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{8} + \frac{5,0 \cdot 5,0}{6} \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{8} \frac{5,0 - 6 \cdot \frac{0,128}{5,0}}{2 \cdot 5,0 + 3 \cdot 2,4 + 6 \cdot \frac{0,128}{5,0}} + \frac{5,0 \cdot 5,0}{6} \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{8} \frac{2 \cdot 5,0 + 6 \cdot \frac{0,128}{5,0}}{2 \cdot 5,0 + 3 \cdot 3,6 + 6 \cdot \frac{0,128}{5,0}} \right] = 4,8286.$$

$\tau_{10}^{(1)}$	$\tau_{20}^{(1)}$	$\tau_{30}^{(1)}$	$\tau_{40}^{(1)}$	$\tau_{50}^{(1)}$	$\tau_{60}^{(1)}$	$\tau_{70}^{(1)}$
0	1,6208	4,8286	5,0160	3,0028	0	0



Ergebnis der Superposition.

- $Y_1 = 6,1829 \text{ mt}, X_1 = -0,0568 \text{ mt},$
- $Y_2 = 5,7236 \text{ mt}, X_2 = 0,3560 \text{ mt},$
- $Y_3 = 6,3756 \text{ mt}, X_3 = 0,8397 \text{ mt},$
- $Y_4 = 1,2039 \text{ mt}, X_4 = 0,8053 \text{ mt},$
- $Y_5 = -6,1259 \text{ mt}, X_5 = 0,5907 \text{ mt},$
- $Y_6 = -5,2294 \text{ mt}, X_6 = -0,1000 \text{ mt},$
- $Y_7 = -7,8792 \text{ mt}, X_7 = 0,0225 \text{ mt},$
- $M_{21}^a = 5,7236 + 0,3560 = 6,08 \text{ mt},$
- $M_{11}^b = 5,7236 - 0,3560 = 5,37 \text{ mt},$
- $M_{23}^a = M_{54}^a = -6,1259 + 0,5907 = -5,54 \text{ mt},$
- $M_{23}^b = M_{54}^b = -6,1259 - 0,5907 = -6,72 \text{ mt},$
- Einflußlinie Y_3 für $P = 1 \text{ t}$ in 1, 2, 3, 4, 5, 6

Abb. 475. Momente in mt für $g = 1,0 \text{ t/m}$.

$$\mathfrak{B}_{23} = -\frac{1}{6} \left(3 \cdot 5 + 2,4 + 12 \frac{0,1067}{36} \right) = -2,9593,$$

$$\mathfrak{B}_{33} = \frac{1}{6} \left(3 \cdot 5 + 2,4 + 3,6 + 24 \frac{5}{3,6^2} \cdot 0,0533 \right) = +3,7127,$$

$$\mathfrak{B}_{43} = -\frac{1}{6} \left(3,6 + 12 \frac{0,128}{3,6} \right) = -0,6711.$$

$$\beta_{33}^{(Y)} \mathfrak{B}_{23} = -0,2433, \quad \beta_{32}^{(Y)} \mathfrak{B}_{12} = -0,0190, \quad \beta_{34}^{(Y)} \mathfrak{B}_{34} = -0,0276,$$

$$\beta_{33}^{(Y)} \mathfrak{B}_{33} = +0,3052, \quad \beta_{32}^{(Y)} \mathfrak{B}_{22} = +0,0245, \quad \beta_{34}^{(Y)} \mathfrak{B}_{44} = +0,0341,$$

$$\beta_{33}^{(Y)} \mathfrak{B}_{43} = -0,0552, \quad \beta_{32}^{(Y)} \mathfrak{B}_{32} = -0,0051, \quad \beta_{34}^{(Y)} \mathfrak{B}_{54} = -0,0058.$$

Die Superposition der Anteile an jedem Knoten ergibt

\mathfrak{B}_1	\mathfrak{B}_2	\mathfrak{B}_3	\mathfrak{B}_4	\mathfrak{B}_5	\mathfrak{B}_6
-0,0190	-0,2188	+0,2725	-0,0211	-0,0058	0

$$A_{10} = -0,0382, \quad B_{10} = +0,0460, \quad Y_3 = M_{10}.$$

$k =$	1	2	3	4	5	6	7
$Q_{10} =$	-0,0382	-0,0192	+0,1996	-0,0729	-0,0518	-0,0460	-0,0460
$Q_{10}^c =$	-0,0955	-0,0480	+0,3980	-0,3645	-0,2590	-0,1150	-0,1150
$Y_3 =$	-0,096	-0,140	+0,854	+0,490	+0,231	+0,116	0 mt

Ergänzung der Einflußlinie Y_3 für $P = 1 \text{ t}$ in 3', 4', 5'.

$$\Delta \delta_{k'k} = -\frac{c_k c'_k}{2} \omega_R = -\frac{5 \cdot 5}{2} \frac{1}{4} = -3,125, \quad k = 3, 4, 5. \quad \Delta Y_{3k'} = \beta_{3k} \delta_{k'k},$$

$$\Delta Y_{33'} = -0,0822 \cdot 3,125 = -0,257, \quad \Delta Y_{34'} = -0,027, \quad \Delta Y_{35'} = -0,003.$$

$$Y_{33'} = \frac{Y_{33} + Y_{32}}{2} + \Delta Y_{33'} = 0,098 \text{ mt}, \quad Y_{34'} = 0,645 \text{ mt}, \quad Y_{35'} = 0,357 \text{ mt}.$$

Einflußlinie X_3 für $P = 1 \text{ t}$ in 3', 4', 5'.

$$\tau_{3'2}^{(1)} = 0,6483, \quad \tau_{3'3}^{(1)} = 1,1255, \quad \tau_{4'3}^{(1)} = 0,8053, \quad \tau_{4'4}^{(1)} = 1,2011.$$

Feld c_3 : $X_{33'} = 0,2290 (1,1255 - 0,2249 \cdot 0,6483) = 0,224 \text{ mt},$

Feld c_4 : $X_{34'} = 0,2290 (0,8053 - 0,1817 \cdot 1,2011) = 0,134 \text{ mt}.$

Einflußlinien $M_{32}^a = Y_3 + X_3$, $M_{32}^b = Y_3 - X_3$.

$k =$	1	2	3'	3	4'	4	5'	5
$M_{32}^a =$	-0,096	-0,144	0,322	0,854	0,779	0,490	0,334	0,231 mt
$M_{32}^b =$	-0,096	-0,144	-0,126	0,854	0,511	0,490	0,338	0,321 mt

Die beiderseits anschließenden Teile sind geradlinig.

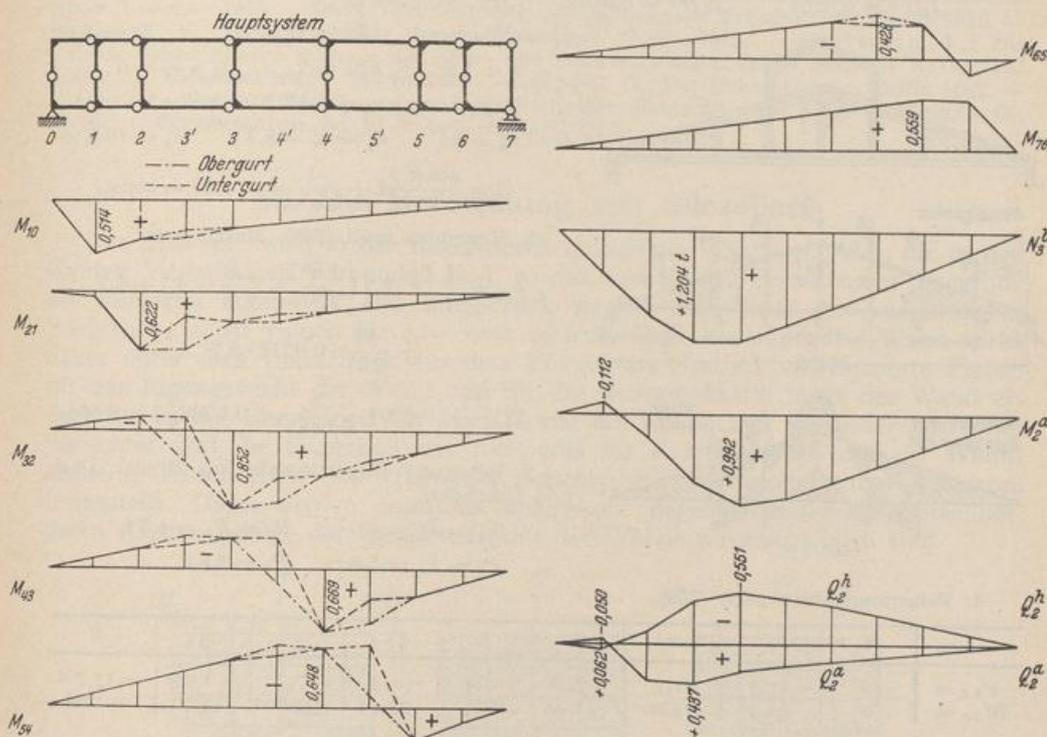


Abb. 476.

Einflußlinie $N_3^b = (M_{03} - 2 Y_3)/h$.

$k =$	1	2	3'	3	4'	4	5'	5
$M_{03} =$	1,500	3,000	4,500	6,000	5,000	4,000	3,000	2,000
$N_3^b =$	0,470	0,913	1,200	1,192	1,031	0,839	0,635	0,491 t

Alle übrigen Einflusslinien ergeben sich in derselben Weise.

Ist das Trägheitsmoment des Untergurtes groß gegenüber dem des Obergurtes, so kann näherungsweise mit einem System nach Abb. 477 gerechnet werden. Die Einflusslinien für die Untergurtmomente haben dann die in Abb. 477 dargestellte Form.

$$J_k^b = J_c = 0,1 \text{ m}^4, \quad F_k^b = 1,0, \quad F_k^a = 0,2 \text{ m}^2,$$

$$J_0 = J_1 = J_2 = 0,025, \quad J_3 = 0,0125 \text{ m}^4,$$

$$F_0 = F_1 = F_2 = 0,30, \quad F_3 = 0,25 \text{ m}^2,$$

$$v_0 = v_1 = v_2 = 0,8, \quad v_3 = 0,96.$$

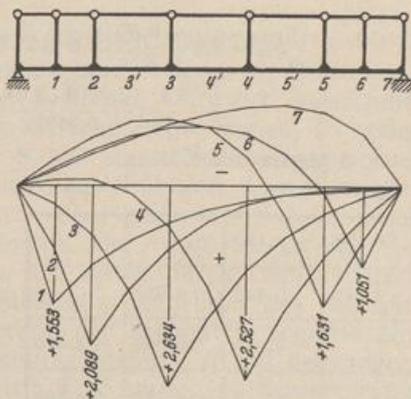


Abb. 477.

Berechnung eines Dachbinders mit vollwandigen Endfeldern (Abb. 478).

1. Geometrische Grundlagen.

$$c = 2,7 \text{ m}, \quad h_0 = 1,8, \quad h_1 = 2,7, \quad h_2 = 3,6 \text{ m},$$

$$c/s_k^\alpha = \cos \alpha = 0,9487, \quad J_c = J^b = J^a \cos \alpha,$$

$$J_c = 0,0031 \text{ m}^4, \quad F^a = 0,155, \quad F^b = 0,150, \quad F^h = 0,105 \text{ m}^2,$$

$$J_c/F^a = 0,0201, \quad J_c/F^b = 0,0208, \quad J_c/F^h = 0,0297 \text{ m}^2,$$

$$J_0^h = J_4^h = \infty, \quad F_0^h = F_4^h = \infty, \quad J_h = J_c/3;$$

$$\kappa = 1,2, \quad E/G = 2, \quad v_0 = v_4 = 0,$$

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0,0712, \quad c' = c,$$

$$h'_0 = h'_4 = 0, \quad h'_1 = h'_3 = 8,1, \quad h'_2 = 10,8 \text{ m}.$$

$$\zeta'_k = \frac{\cos \alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = 1,00 = \text{const.}$$

2. Vorzahlen nach (768). Matrix s. u.

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} \left[2 \cdot 2,7 \left(\frac{1,8^2}{2,7^2} + \frac{1,8}{2,7} + 1 \right) + 8,1 \right. \\ \left. + \frac{12}{2,7^2} \cdot 0,0712 \cdot 2,7 \right. \\ \left. + 12 \frac{2,7}{2,7^2} \left(0,0201 \cdot \frac{1}{0,9487} + 0,0208 \right) \right] = 6,465.$$

3. Belastung: Eigengewicht aus Binder, Dach und Oberlicht.

$$P'_0 = P'_4 = 4,0 \text{ t}, \quad P_0 = P_4 = 4,5 \text{ t},$$

$$P_1 = P_3 = 5,8 \text{ t}, \quad P_2 = 2,8 \text{ t}.$$

4. Belastungszahlen nach (769).

$k =$	A	o'	o	I	2	3	4	4'	B
$V_{k0} =$	o	15,7	11,7	7,2	1,4	-1,4	-7,2	-11,7	-15,7 t
$M_{k0} =$	o	42,40	74,00	93,44	97,22	93,44	74,00	42,40	o mt

k	$\frac{M_{k0}}{V_{k0}}$	$\frac{M_{k0}}{V_{k0}} \frac{h_k - h_{k-1}}{h_k c_k}$	ζ''_k	ζ'''_k	ζ_{k0}
1	12,99	1,60	-0,60	2,60	1,04
2	69,40	6,42	-5,42	7,42	1,01
3	-66,70	8,24	-7,24	9,24	1,01
4	-10,27	1,90	-0,90	2,90	1,03

$$\delta_{10} = 7,2 \frac{-0,60}{6} \cdot 1,0 [2,7 \cdot 6,3 + 0] - 1,4 \frac{-5,42}{6} \cdot 2,7 \left(8,1 + \frac{0,854}{2,7} \right) \\ + \frac{5,4}{2,7^2} \left(\frac{0,0201 \cdot 1,04}{0,9487} + 0,0208 \right) \cdot 93,44 = 19,44.$$

5. δ Matrix und Lösung.

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	
6,465	-2,110			19,44
-2,110	9,445	-4,910		-93,19
	-4,910	16,800	-4,210	90,40
		-4,210	14,890	73,29

$$M_{10} = M_{34} = Y_1 = 0,64 \text{ mt},$$

$$M_{21} = M_{23} = Y_2 = -7,24 \text{ mt},$$

$$M_{32} = M_{12} = Y_3 = 4,78 \text{ mt},$$

$$M_{43} = M_{01} = Y_4 = 6,27 \text{ mt},$$

$$M_{k(k-1)}^a = M_{k(k-1)}^b, \quad M_{kh}^a = -M_{kh}^b.$$

$$M_{1h}^b = -M_{3h}^b = 4,78 - 0,64 = 4,14 \text{ mt},$$

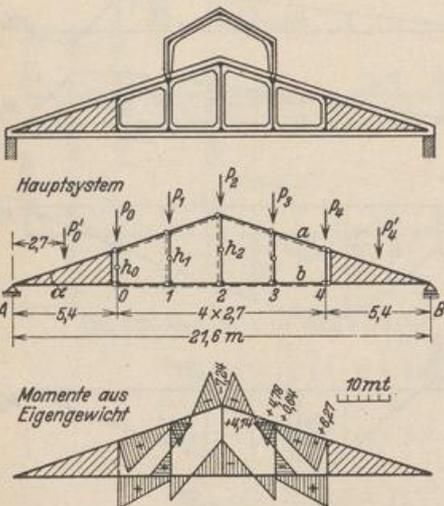


Abb. 478.

Mit den Momenten sind auch die Quer- und Längskräfte bekannt. Die Schnittkräfte aus Wind- und Schneelast werden in gleicher Weise berechnet.

Mann, L.: Statische Berechnung steifer Vierecknetze. Berlin 1909 und Z. Bauw. 1909. — Derselbe: Das strebenlose Ständerfachwerk. Müller-Breslau-Festschrift. Leipzig 1912. — Engesser, F.: Die Berechnung der Rahmenträger. Z. Bauw. 1913. — Grüning, M.: Die Spannungen im Knotenpunkt eines Vierendeelträgers. Eisenbau 1914. — Lührs, J.: Die statische Berechnung des Rahmenträgers. Eisenbau 1915 S. 83. — Mohr, O.: Die Berechnung der Pfosten-träger. Eisenbau 1915. — Derselbe: Beitrag zur Berechnung der Rahmenträger. Berlin 1915. — Engesser, F.: Die Berechnung der Rahmenträger. Berlin 1919. — Hartmann, F.: Die statisch unbestimmten Systeme des Eisen- und Eisenbetonbaues. Berlin 1922. — Kriso, K.: Statik der Vierendeelträger. Berlin 1922. — Spiegel, G.: Der Rahmenträger. Berlin 1922. — Wieser, F.: Statische Berechnung der Vierendeelträger. Bautechn. 1927 S. 263. — Domke, O.: Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 10 3. Aufl. Berlin 1931.

53. Die Berechnung von Silozellen.

Der Zellsilo wird in der Regel durch senkrechte Wände gebildet, die in den Kanten biegesteif verbunden sind, so daß rechteckige Behälter zur Lagerung des Füllgutes entstehen. Der Innendruck wächst nach S. 14 mit zunehmender Schütthöhe z , ist jedoch für $z = \text{const}$ in jeder Zelle konstant. Die Wand wirkt daher unter dem Innendruck aus dem Füllgut als elastisch eingespannte Platte, für das Eigengewicht der Wand und für die Reibungskräfte längs der Wand als Scheibe. In der Regel wird auf die Klärung des räumlichen Spannungszustandes verzichtet und die Sicherheit des Bauwerks für Kräfte winkelrecht zur Wandebene in Abschnitten des Tragwerks zwischen je zwei waagerechten Schnitten festgestellt. Diese werden dann als waagrecht liegende Stabwerke berechnet, deren Knoten infolge der Längssteifigkeit der Wände unverschieblich sind.

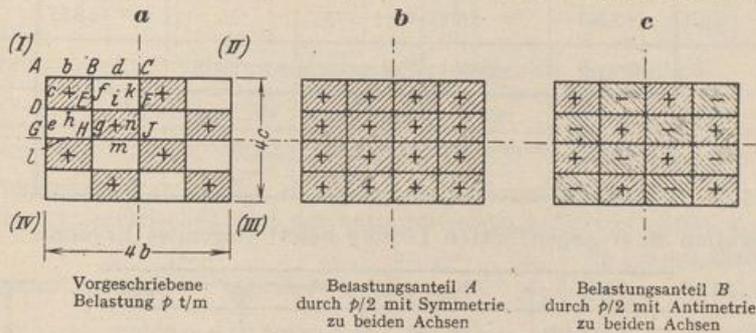


Abb. 479.

Das Tragwerk Abb. 479a besteht darnach aus elastisch eingespannten, gleichförmig belasteten Stäben $JK = l_k$. Ihr Spannungszustand ist durch die Belastung p und die benachbarten Knotendrehwinkel φ_J, φ_K bestimmt. Wird der Querschnitt im Bereich der theoretischen Stablänge l_k als konstant angenommen, so lassen sich n Knotendrehwinkel des Stabnetzes nach S. 320 aus n Bedingungsgleichungen $\delta A_J = 0$ berechnen, in denen die Stabdrehwinkel Null sind. Der allgemeine Ansatz wird bei Symmetrie des Tragwerks nach einer oder zwei Achsen durch Umordnung der Belastung in Anteile mit Symmetrie oder Antimetrie zu einer der beiden Achsen vereinfacht und in jedem Falle am besten durch Iteration nach Abschn. 30 gelöst. Damit sind auch die Schnittkräfte des Stabnetzes bekannt. Sie entstehen nach (530) durch die Überlagerung der bekannten Schnittkräfte des gleichförmig belasteten, beiderseits eingespannten Stabes JK mit denjenigen, welche durch die Verdrehung der Endquerschnitte J, K um φ_J, φ_K hervorgerufen werden. Das Ergebnis läßt sich mit der Bedingung nachprüfen, daß die Summe der