



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

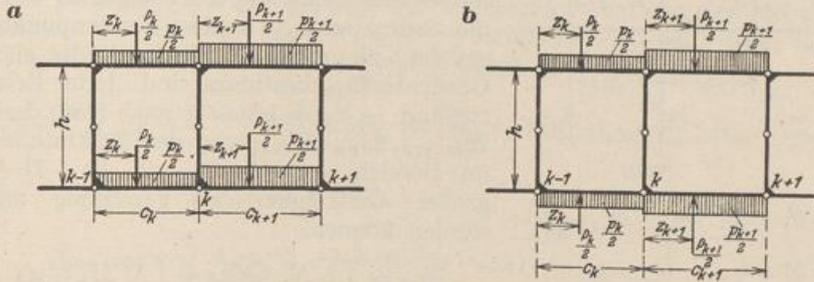
Die Einflußlinien

---

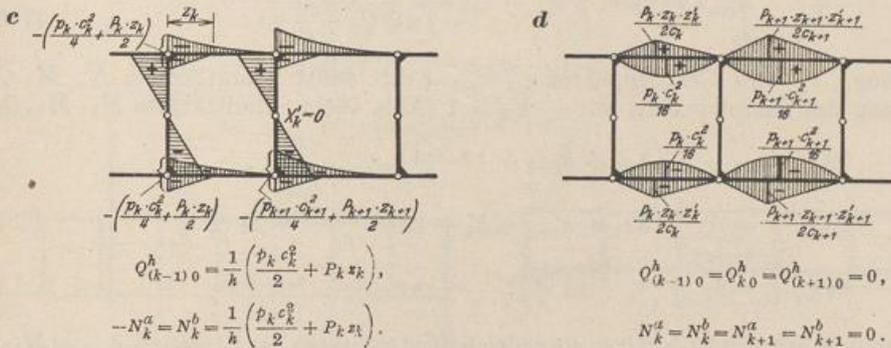
[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

b) Pfosten: 
$$\left. \begin{aligned} X'_k &= \frac{1}{\tau_{k',k'}} (\tau_{k',0} - X_k \tau_{k',k} - X_{k+1} \tau_{k',(k+1)}), \\ M_k^a &= -M_{k(k+1)0}^a - (Y_{k+1} - Y_k - X'_k) = M_{k(k-1)}^a - M_{k(k+1)}^a, \\ M_k^b &= M_{k(k+1)0}^b + (Y_{k+1} - Y_k + X'_k) = M_{k(k+1)}^b - M_{k(k-1)}^b, \\ Q_k^h &= -V_{(k+1)0} \frac{c_{k+1}}{h} + \frac{2}{h} (Y_{k+1} - Y_k). \end{aligned} \right\} (784)$$

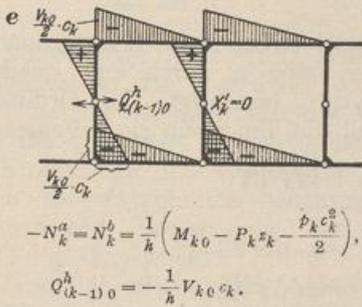
Belastungsumordnung:



Schnittkräfte im System 2. Ordnung:



Schnittkräfte im System 1. Ordnung:



$$^{(2)}T_k = ^{(2)}T_k^a + ^{(2)}T_k^b = p_{k+1} c_{k+1} + \sum_{(k+1)} P,$$

$A, V_{k0}, M_{k0}$  wie im Hauptssystem.  $V_{k0} = V_{(k-1)0} - T_{k-1}$ . Die Längskräfte der beiden Systeme werden addiert und in  $\delta_{k0,1}$  eingerechnet. Hierdurch entsteht wieder Gl. (777).

Abb. 468.

**Die Einflußlinien.** Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden in der Regel nur für mittelbare Belastung des Ober- oder Untergurts gezeichnet. Sie sind dann zwischen den Pfosten gerade Linien. Die Gruppenlasten  $X_k, X'_k$  sind Null und die Einflußlinien der Schnittkräfte daher nur von den statisch unbestimmten Gruppenlasten  $Y_k$  abhängig.

Die Einflußlinien  $Y_k$  werden nach (328) aus den Vorzahlen  $\beta_{kh}^{(y)}$  der konjugierten Matrix zu (772) berechnet.

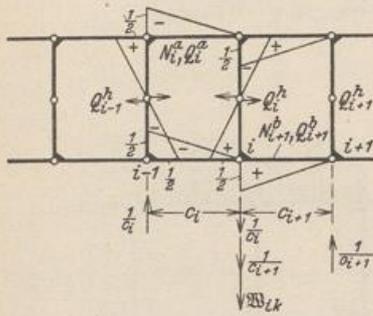
$$Y_k = \sum \beta_{kh}^{(y)} \delta_{mh}.$$

Da die Hauptglieder  $\beta_{kk}^{(y)}$  der Matrix in der Regel wesentlich größer sind als deren Nebenglieder, so genügt bereits  $Y_k = \beta_{kk}^{(y)} \delta_{mk}$  als Näherung und

$$Y_k = \beta_{k(k-1)}^{(y)} \delta_{m(k-1)} + \beta_{kk}^{(y)} \delta_{mk} + \beta_{k(k+1)}^{(y)} \delta_{m(k+1)} \quad (785)$$

als Lösung.

Die Belastungszahlen  $\delta_{mk}$  bezeichnen die Biegelinien des Lastgurtes des Hauptsystems (Abb. 464) für  $-Y_k = 1$ , ( $k = 1 \dots n$ ). Bei mittelbarer Belastung des Lastgurtes werden nur die Ordinaten  $\delta_{mk}$  in den Knotenpunkten verwendet, die nach S. 125 durch die elastischen Gewichte  $\mathfrak{B}_{ik}$  bestimmt sind. Jeder Belastungszustand  $-Y_k = 1$  liefert nach (786) drei Kräfte  $\mathfrak{B}_{(k-1)k}$ ,  $\mathfrak{B}_{kk}$ ,  $\mathfrak{B}_{(k+1)k}$ , so daß die Einflußlinien  $Y_k$  im Bereich von  $0 \div (k-2)$ ,  $(k+2) \div n$  mit großer Genauigkeit als geradlinig angesehen werden können.



$$-\bar{Q}_i^a = -\bar{Q}_i^b = -\frac{1}{2c_i}, \quad -\bar{Q}_{i+1}^a = -\bar{Q}_{i+1}^b = -\frac{1}{2c_{i+1}},$$

$$-\bar{Q}_{i-1}^a = -\bar{Q}_{i-1}^b = -\frac{1}{h}, \quad \bar{Q}_{i+1}^h = 0,$$

$$-\bar{N}_i^a = \bar{N}_i^b = \frac{1}{h}, \quad \bar{N}_{i+1}^a = \bar{N}_{i+1}^b = 0.$$

Abb. 469.

$$\mathfrak{B}_{ik} = \int \bar{N} N_k \frac{J_c}{F} ds + \int \bar{M} M_k \frac{J_c}{J} ds + \int \bar{Q} Q_k \frac{E J_c}{G F} ds. \quad (786)$$

Belastung „1<sub>i</sub>“ des Geradenpaares  $c_i, c_{i+1}$  (Abb. 469): Schnittkräfte  $\bar{N}, \bar{M}, \bar{Q}$ ; Belastung des Hauptsystems mit  $-Y_k = 1$  (Abb. 465): Schnittkräfte  $N_k, M_k, Q_k$ .

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_{(k-1)k} &= -\frac{1}{6} \left( 3c'_k + h'_{k-1} + 12 \frac{v_{k-1}}{h} \right), \\ \mathfrak{B}_{kk} &= +\frac{1}{6} \left( 3c'_k + h'_{k-1} + h'_k + 12 \frac{v_{k-1} + v_k}{h} + 24 \frac{c_k J_c}{h^2 F_k} \right), \\ \mathfrak{B}_{(k+1)k} &= -\frac{1}{6} \left( h'_k + 12 \frac{v_k}{h} \right). \end{aligned} \right\} \quad (787)$$

Die Momente aus den  $\mathfrak{B}$ -Kräften sind gleich den Ordinaten der Biegelinie  $\delta_{mk} = M_{kw}$ . Werden die mit den  $\beta$ -Zahlen erweiterten  $\mathfrak{B}$ -Kräfte verwendet, so liefert das Moment  $M_w$  unmittelbar die Einflußordinate  $Y_k$ .

Um die Einflußlinie  $Y_k$  auch bei Lastangriff zwischen den Pfosten nach (787) aufzuzeichnen, wird jede Biegelinie  $\delta_{mk}$  im Felde  $c_k$  durch eine quadratische Parabel mit den Ordinaten  $\Delta \delta_{mk} = -\frac{1}{2} c_k c'_k \omega_R$  berichtigt. Die Ordinaten der Einflußlinien  $X_k$  sind in den Stabknoten Null und innerhalb eines Feldes  $c_k$

$$X_k = \beta_{k(h-1)}^{(\omega)} \tau_{m(h-1)}^{(1)} + \beta_{kh}^{(\omega)} \tau_{mh}^{(1)}.$$

Daher ist im

$$\left. \begin{aligned} \text{Feld } c_k &: X_k = \beta_{kk}^{(\omega)} (\tau_{mk}^{(1)} - \alpha_{(k-1)k} \tau_{m(k-1)}^{(1)}), \\ \text{Feld } c_{k+1} &: X_k = \beta_{kk}^{(\omega)} (\tau_{mk}^{(1)} - \alpha_{(k+1)k} \tau_{m(k+1)}^{(1)}). \end{aligned} \right\} \quad (788)$$

Ebenso werden die Ordinaten der Einflußlinien  $X'_k$  berechnet. Die Biegelinien  $\tau_{mk}^{(1)}$  ergeben sich aus (782) für  $p = 0$  und  $P_k = 1, P_{k+1} = 0$ . In den übrigen Feldern ist  $X_k \approx 0$ , da die Nebenglieder der konjugierten Matrix in der Regel so klein sind, daß ihre Beiträge vernachlässigt werden können.

$$M_{k(k-1)}^a = Y_k + X_k, \quad M_{k(k-1)}^b = Y_k - X_k.$$

Die Ordinaten der Einflußlinien  $Y_k$  in den Knotenpunkten können auch als Einflußgrößen  $Y_{km}$  berechnet und aufgetragen werden. Die Last  $P = 1$  wird dabei der Reihe nach jedem Knoten  $m$  des Lastgurtes zugewiesen. Auch in diesem Falle

genügen in der Regel zur Berechnung von  $Y_{km}$  aus der konjugierten Matrix neben dem Hauptglied  $\beta_{kk}^{(y)}$  die beiden benachbarten Nebenglieder der Zeile.

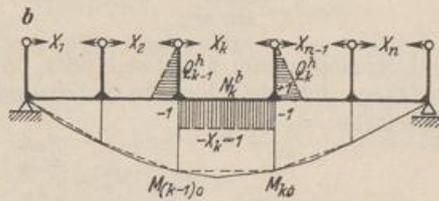
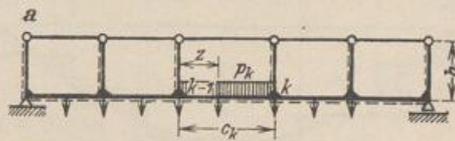
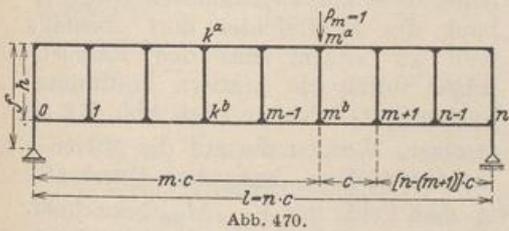
$$Y_{km} = \beta_{k(k-1)}^{(y)} \delta_{(k-1)m} + \beta_{kk}^{(y)} \delta_{km} + \beta_{k(k+1)}^{(y)} \delta_{(k+1)m}.$$

$\delta_{mk}$  sind die Belastungszahlen für  $P = 1$  im Lastpunkt  $m$ . Die Einflußlinie ist nach (785) wiederum durch  $Y_{km}$ , ( $m = (k-2) \dots (k+2)$ ) ausreichend bestimmt, da der Bereich  $0 \div (k-2)$ ,  $(k+2) \div n$  geradlinig angenommen werden kann.

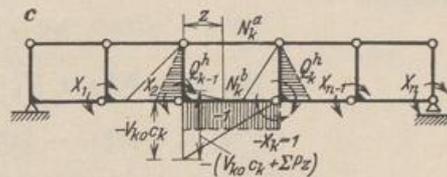
Belastungszahlen  $\delta_{km}$  ( $k = 1 \dots m-1, m, m+1 \dots n$ ) für den Rahmenträger mit parallelen Gurten, gleichgroßen Feldern ( $c_k = c, l = nc$ ) und gleichen Abmessungen der Pfosten ( $h'_k = h', v_k = v$ ). Lastpunkt  $m$ :  $x_m = mc, x'_m = m'c = (n-m)c$  (Abb. 470). Elastisch wirksame Länge der Gurtstäbe  $k$ :

$c'_k$  und  $\frac{c_k}{h^2} \frac{J_c}{F_k^a} = \bar{c}'_k$ . Stützkkräfte für  $P_m = 1$ :  $A_m = \frac{m'}{n}, B_m = \frac{m}{n}$ .

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1m} &= \frac{1}{2} A_m c (c'_1 + 8 \bar{c}'_1), \dots \\ \delta_{(m-1)m} &= \frac{1}{2} A_m c (c'_{m-1} + 8 (m-1) \bar{c}'_{m-1}), \\ \delta_{mm} &= \frac{1}{2} A_m c (c'_m + 8 m \bar{c}'_m) + \frac{c}{6} \left( h' + 12 \frac{v}{h} \right), \\ \delta_{(m+1)m} &= -\frac{1}{2} B_m c (c'_{m+1} + 8 (m'-1) \bar{c}'_{m+1}), \dots \\ \delta_{nm} &= -\frac{1}{6} B_m c \left( 3 c'_n + h' + 12 \frac{v}{h} \right). \end{aligned} \right\} (789)$$



$$-Q_{(k-1)1}^h = Q_{k1}^h = \frac{1}{h}, \quad N_{k1}^h = \frac{1}{h}.$$



$$\begin{aligned} -Q_{(k-1)1}^h &= Q_{k1}^h = \frac{1}{h}, \quad Q_{(k-1)0}^h = -V_{k0}, \\ Q_{k0}^h &= V_{(k+1)0}, \quad -N_{k1}^h = N_{k1}^h = \frac{1}{h}, \\ -N_{k0}^h &= N_{k0}^h = \frac{M_{k0}}{h}. \end{aligned}$$

Abb. 471.

Die vollwandige Ausführung einzelner Trägerabschnitte, die namentlich an den Enden einfacher Rahmenträger zur Übertragung der Querkraft notwendig ist, hat keinen Einfluß auf den Ansatz. Die vollwandigen Trägerabschnitte bedeuten für die Berechnung Pfosten mit unendlich großem Trägheitsmoment.

Der versteifte Balkenträger Abb. 471a ist auf S. 485 als Grenzfall eines Rahmenträgers bezeichnet worden, dessen elastische Eigenschaften durch  $J_k^b \gg J_k^a$  ausgezeichnet sind. Der Obergurt erhält in diesem Falle nur Längskräfte, die Querkräfte werden allein vom Lastgurt aufgenommen. Das Kräftebild kann mit einem Hauptsystem Abb. 471b berechnet werden. Ein unmittelbarer Vergleich mit der statischen Unter-

suchung des Rahmenträgers ist durch die Wahl eines Hauptsystems Abb. 471c möglich. In beiden Lösungen ergeben sich dreigliedrige Bedingungsgleichungen.

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}.$$

Nach Abb. 471c ist

$$\left. \begin{aligned} 3 \delta_{k(k-1)} &= - \left( h'_{k-1} + 3 \frac{v_{k-1}}{h} \right), & 3 \delta_{k(k+1)} &= - \left( h'_k + 3 \frac{v_k}{h} \right), \\ 3 \delta_{kk} &= \left[ 3 c'_k + h'_{k-1} + h'_k + \frac{3}{h} (v_{k-1} + v_k) + 3 \frac{c_k}{h^2} \left( \frac{J_c}{F_o} + \frac{J_c}{F_u} \right) \right], \\ 3 \delta_{k0} &= \frac{c'_k}{2} \left[ 3 V_{k0} c_k + p_k c_k^2 + \frac{3}{c_k} \Sigma P_k z_k^2 \right] \\ &\quad + 3 \frac{M_{k0}}{h^2} \left( \frac{J_c}{F_o} + \frac{J_c}{F_u} \right) c_k + V_{k0} \left( c_k h'_{k-1} + 3 \frac{c_k}{h} v_{k-1} \right) \\ &\quad - V_{(k+1)0} \left( c_{k+1} h'_k + 3 \frac{c_{k+1}}{h} v_k \right). \end{aligned} \right\} \quad (790)$$

**Näherungsberechnung eines Rahmenträgers.** Die statische Untersuchung eines Rahmenträgers mit parallelen Gurten und elastischer Symmetrie in bezug auf eine waagerechte Achse lehrt, daß die Biegemomente bei senkrechten Einzellasten in den Knotenpunkten nicht nur in der Mitte der Pfosten, sondern auch in der Nähe der Gurtstabsmitten Null sind. Es liegt daher nahe, diese zur angenäherten Beschreibung des Kräftebildes dort ebenfalls Null zu setzen, also den Rahmenträger durch ein statisch bestimmtes System mit Gelenken nach Abb. 472 zu ersetzen. Werden die auf die Mitten  $\bar{k}$  der Gurtstäbe  $c_k$  bezogenen Querkräfte

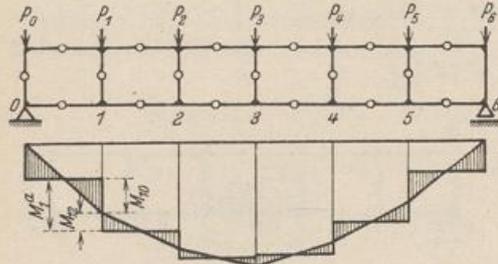


Abb. 472.

und Momente aller äußeren Kräfte links von dem Felde mit  $\bar{V}_{k0}$ ,  $\bar{M}_{k0}$  bezeichnet, so lassen sich die folgenden Schnittkräfte anschreiben:  
Gurtstäbe:

$$\left. \begin{aligned} -N_k^a &= N_k^b = \frac{\bar{M}_{k0}}{h}, & Q_k^a &= Q_k^b = \frac{1}{2} \bar{V}_{k0}, \\ M_{k(k-1)}^a &= -M_{(k-1)k}^a = \frac{1}{4} \bar{V}_{k0} c_k, & M_{k(k-1)}^b &= -M_{(k-1)k}^b = \frac{1}{4} \bar{V}_{k0} c_k. \end{aligned} \right\} \quad (791)$$

Pfosten:

$$\left. \begin{aligned} N_k^h &= \frac{1}{2} (P_k^b - P_k^a), \\ Q_{k-1}^h &= -N_{k-1}^a + N_k^a = -\frac{1}{h} (\bar{M}_{k0} - \bar{M}_{(k-1)0}), \\ M_k^a &= -M_k^b = -\frac{1}{2} Q_k^h h = \frac{1}{2} (\bar{M}_{k0} - \bar{M}_{(k-1)0}). \end{aligned} \right\} \quad (792)$$

Die Abb. 472 zeigt die graphische Verwendung der Ergebnisse. Darnach sind zunächst die Momente für die Einzellasten  $P/2$  aufgetragen und daraus die Momente  $\bar{M}_{k0}$  gebildet worden. Dieses elementare Ergebnis zeigt die ungünstigen statischen Eigenschaften des Rahmenträgers, die sich namentlich aus den großen Querkräften in Pfosten und Gurten nächst den Auflagern ergeben. Sie lassen sich hier durch vollwandige Ausführung des Trägers und engere Stellung der Pfosten mildern.