



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

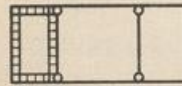
54. Die Bogenträger

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)



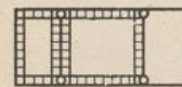
$$a' = a \frac{J_c}{J_a}; \quad b'_1 = b_1 \frac{J_c}{J_b}; \quad b'_2 = b_2 \frac{J_c}{J_b}; \quad \lambda = \frac{a}{b_1}; \quad \beta = \frac{b_2}{b_1}; \quad \lambda' = \frac{a'}{b'_1}.$$

$$\mu = (2 + 3\lambda)(2 + 3\beta) - 1; \quad \nu = (2 + 3\lambda)(2 + \beta) - 1.$$



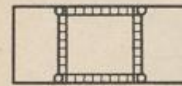
$$X_1 = X'_1 = -\frac{p b_1^2}{8} \left[\frac{1 + 3\beta + \lambda^2 \lambda' (2 + 3\beta)}{\mu} \pm \frac{1 + \beta + \lambda^2 \lambda' (2 + \beta)}{\nu} \right],$$

$$X_2 = X'_2 = -\frac{p b_1^2}{8} (1 + 3\lambda - \lambda^2 \lambda') \left(\frac{1}{\mu} \pm \frac{1}{\nu} \right).$$



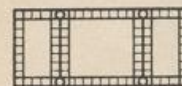
$$X_1 = X'_1 = -\frac{p b_1^2}{8} \left[\frac{1 + 3\beta - 2\beta^3 + \lambda^2 \lambda' (2 + 3\beta)}{\mu} \pm \frac{1 + \beta + \lambda^2 \lambda' (2 + \beta)}{\nu} \right],$$

$$X_2 = X'_2 = -\frac{p b_1^2}{8} \left[\frac{1 + 3\lambda + 2\beta^3 (2 + 3\lambda) - \lambda^2 \lambda'}{\mu} \pm \frac{1 + 3\lambda - \lambda^2 \lambda'}{\nu} \right].$$



$$X_1 = X'_1 = +\frac{p b_1^2}{4} \frac{\beta^3}{\mu},$$

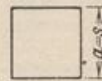
$$X_2 = X'_2 = -\frac{p b_1^2}{4} \frac{\beta^3}{\mu} (2 + 3\lambda),$$



$$X_1 = X'_1 = -\frac{p b_1^2}{4} \frac{1 + 3\beta - \beta^3 + \lambda^2 \lambda' (2 + 3\beta)}{\mu},$$

$$X_2 = X'_2 = -\frac{p b_1^2}{4} \frac{1 + 3\lambda + (2 + 3\lambda) \beta^3 - \lambda^2 \lambda'}{\mu}.$$

Eckmomente für konstanten Innendruck



Quadrat
0,08333 p a²



Sechseck
0,02778 p a²



Achteck
0,01430 p a²

Marcus, H.: Die Berechnung von Silozellen. Z. Arch. Ing.-Wes. 1911. — Ritter, A.: Zur Berechnung von Silozellen. Arm. Beton 1913 S. 21. — Derselbe: Beitrag zur Berechnung rechteckiger Silozellen. Stuttgart 1916. — Schwarz, R.: Zur Berechnung der Zwickelzellen von Silos mit kreiszylindrischen Behältern. Bauing. 1930 S. 87.

54. Die Bogenträger.

Der Brücken- und Hochbau verwendet den Bogenträger als einzelnes Element oder in Verbindung mit Pfosten als Teil einer Bogenstellung. Die Mittellinie wird entweder geometrisch als Parabel, Kreis und Kettenlinie oder nach statischen Gesichtspunkten als Mittelkraftlinie einer gegebenen Belastung beschrieben. Sie ist in der Regel zu einer senkrechten Achse rechtwinklig oder schiefwinklig symmetrisch.

Die Bogenwirkung entsteht durch die waagerechte Abstützung der Träger gegen starre oder elastische Widerlager, die damit einen wichtigen Bestandteil

des Tragwerks bilden. Ihr Verschiebungszustand ist daher bei der statischen Untersuchung ebenso zu bewerten wie die Belastung. Er wird durch die Verschiebung und Verdrehung der Kämpferquerschnitte beschrieben. Diese sind durch die elastischen Eigenschaften der Pfeiler, der Widerlager und der Zugglieder bestimmt, welche die Bogenenden verbinden. Die einfachen und mehrteiligen Bogenträger werden nach der Art ihrer Abstützung unterteilt. Ihre Verbindung mit biegesteifen geraden Stäben bedeutet die Erweiterung der Aufgabe. Man unterscheidet Bogenträger mit biegesteifem Zugband, Bogenträger mit durchgehendem Streckgurt und Rahmenträger.

Der einfache Bogenträger mit starren Widerlagern. Der einfache Bogenträger ist ein gekrümmter, elastischer Stab, dessen Stärke d im Vergleich zum Krümmungsradius ρ klein ist ($d \leq 0,1 \rho$), so daß die Verzerrung $\varepsilon_0, d\psi$ eines elementaren Abschnitts ds mit großer Genauigkeit nach denselben Funktionen der Schnittkräfte (N, M, Q) wie beim geraden Stabe angegeben werden kann (51). Dasselbe gilt auch für den durch zwei Längsschnitte im Abstand l begrenzten, der Quere nach gleichförmig belasteten Abschnitt des Gewölbes.

Die Belastung besteht aus Kräften und Kräftepaaren, die in der Trägerebene oder senkrecht dazu wirken. Außerdem sind Eigenspannungen aus Temperatur und Schwinden möglich. Die Schnittkräfte sind bei Abstützung des Trägers nach S. 196 dreifach statisch unbestimmt. Die Anzahl der statisch überzähligen Größen wird durch die Anordnung von Gelenken vermindert. Man verwendet den Ein-, Zwei- und Dreigelenkbogen. Die statisch bestimmte Anordnung ist in Abschn. 16 behandelt worden.

In allen drei Fällen wird oft nach derjenigen Bogenform gesucht, deren Randspannungen in jedem Querschnitt bei der ungünstigsten Belastung einander gleich und kleiner sind als ein vorgeschriebener Grenzwert, um die Festigkeitseigenschaften des homogenen Baustoffs vollständig auszunutzen. Bei einer einzelnen vorgeschriebenen Belastung wird daher deren Mittelkraftlinie mit der Bogenachse zusammenfallen oder diese in zahlreichen Punkten schneiden, sobald Eigenspannungen aus Temperaturänderung, Schwinden und Stützenbewegung wegfallen. Die Biegespannungen des Trägers sind dann Null oder nahezu Null. Um unter derselben Voraussetzung auch bei veränderlicher, gleichmäßig verteilter Nutzlast p gleich große Grenzwerte zu erhalten, wird die Mittelkraftlinie aus ständiger Last und halber Nutzlast $p/2$ als Bogenachse verwendet. Da sich diese jedoch infolge der Längskräfte und der Eigenspannungen elastisch verkürzt, wird das Ziel auf diese Weise bei statisch unbestimmter Stützung nicht erreicht und daher oft die Mittelkraftlinie der ständigen Last als Bogenachse gewählt. Durch die nachträgliche Berücksichtigung der Verkürzung bei der Formgebung läßt sich eine Verkleinerung der absoluten Grenzwerte der Randspannungen erreichen. Im übrigen ist die Bogenform durch die Abmessungen am Scheitel ($J = J_c; \alpha = 0$) und Kämpfer ($J = J_k; \alpha = \alpha_k$) bestimmt, die in eine für jedes Gewölbe ausgezeichnete Kennziffer $n = J_c/J_k \cos \alpha_k$ eingehen. Die Abmessungen der Querschnitte im Scheitel und Kämpfer werden auf Grund von Erfahrungen und Überschlagsrechnungen gewählt und stetig ineinander übergeführt.

Um die Vorzahlen und Belastungszahlen zur Berechnung der statisch unbestimmten Größen formal integrieren zu können, wird die Mittellinie $y(x)$ in einfacher Weise als Parabel, Kreisbogen oder Kettenlinie mathematisch beschrieben (S. 514 ff.). Dasselbe geschieht dann auch für das Trägheitsmoment J des Querschnitts. Die Approximation des Trägheitsmomentes J richtet sich nach dem mathematischen Ausdruck $y(x)$ der Mittellinie. Bei einem Kreisbogen ($\rho = \text{const}$) wird J konstant, bei einer Parabel wird $J_c/J \cos \alpha$ nach einer Parabel zweiter oder höherer ($2r$ -ter) Ordnung angenommen. Der Parameter r kann, falls man sich nicht von vornherein für $r = 1$ entschließt, aus Abb. 486 abgeleitet werden. In dieser

wird die Funktion $\frac{1}{1-n} \frac{J_c}{J \cos \alpha}$ des vorgeschriebenen Gewölbes mit den Funktionen $\zeta^*(n, r) = \frac{1}{1-n} - \xi^{2r}$ und angenommenem r verglichen. Bei einer Kettenlinie wird

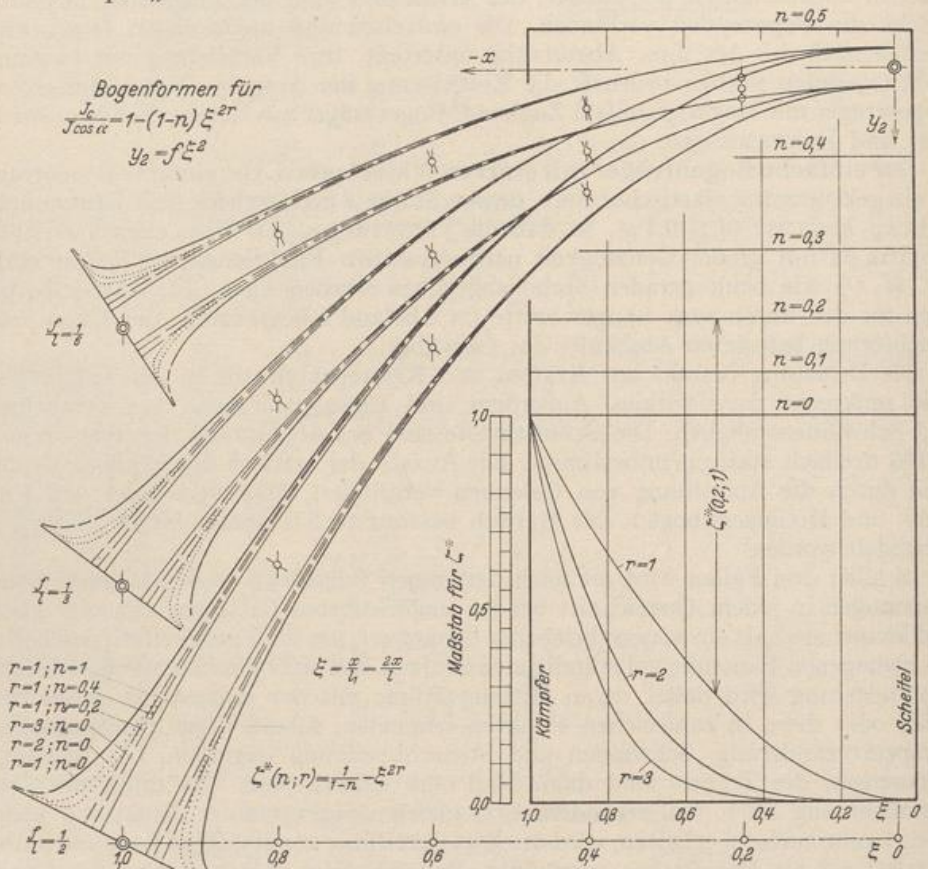


Abb. 486.

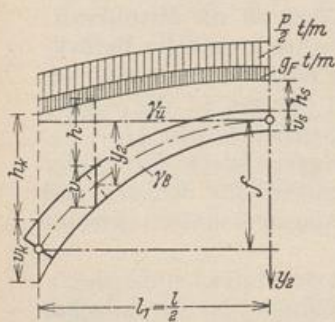


Abb. 487.

$J_c/J \cos \alpha$ durch eine hyperbolische Funktion approximiert, um einfache Integrationen zu erhalten.

Die Bogenachse als Mittelkraftlinie einer vorgeschriebenen Belastung. Die Mittelkraftlinie einer Gruppe von Kräften kann nach Abschn. 13 berechnet und aufgezeichnet werden, sobald diese, im vorliegenden Falle also die Kräfte aus Eigengewicht von Träger ($v \cdot \gamma_B$), Überbau ($h \cdot \gamma_u$) und Fahrbahntafel (g_F) bekannt sind (Abb. 487). Da aber die Bogenform zunächst bestimmt werden soll, kann die Aufgabe nur durch allmähliche Annäherung gelöst werden. Diese ist um so kürzer, je besser die erste Annahme mit dem endgültigen Ergebnis übereinstimmt. Die Stützweite ($l = l_1 + l_2$) und die Ordinate $y = f$ des

Bogens im Scheitel sind gegeben. Dasselbe kann auch für die Belastung im Scheitel (q_s) und im Kämpfer (q_k) auf Grund eines Vorentwurfs angenommen werden. Für das Brückengewölbe (Abb. 487) ist unter Berücksichtigung der halben Verkehrslast

$$q_s = \frac{1}{2} p + g_F + h_s \gamma_u + v_s \gamma_B; \quad q_k = \frac{1}{2} p + g_F + h_k \gamma_u + v_k \gamma_B. \quad (795)$$

Darnach darf die stetige Belastung eines symmetrischen Gewölbes angenähert durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$q = q_s + \frac{y_2}{f} (q_k - q_s) = \frac{1}{2} \hat{p} + g_F + h_s \gamma_{\bar{u}} + v_s \gamma_B + \frac{y_2}{f} [(h_k - h_s) \gamma_{\bar{u}} + (v_k - v_s) \gamma_B]. \quad (796)$$

Der Ansatz gilt auch für einen Bogen mit aufgelöstem Überbau und den auf die Längeneinheit bezogenen gemittelten Gewichten q_s, q_k , nur darf nicht dieselbe Übereinstimmung zwischen der angenommenen und der berechneten Bogenform, wie bei stetiger Belastung des Bogenträgers, erwartet werden.

Die Differentialgleichung der Mittelkraftlinie ist nach (93)

$$H \frac{d^2 y_2}{dx^2} = q = q_s + \frac{y_2}{f} (q_k - q_s). \quad (797)$$

Sie beschreibt eine Kettenlinie. Die Lösung liefert bei symmetrischer Belastung und symmetrischer Bogenform folgendes Ergebnis:

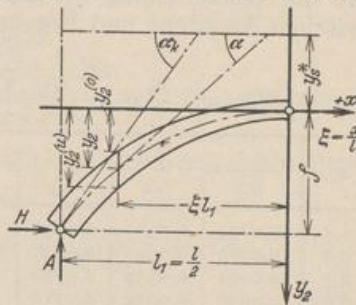


Abb. 488.

$$\left. \begin{aligned} x/l_1 = \xi; \quad q_k/q_s = \kappa = \text{Co}f c; \quad \text{Sin} c = \sqrt{\kappa^2 - 1}; \\ y_s^* = f/(\kappa - 1); \quad c = \text{ArCo}f \kappa = \ln(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}); \\ y_2 = y_s^* (\text{Co}f \xi c - 1) = y_s^* \left[\frac{(\xi c)^2}{2!} + \frac{(\xi c)^4}{4!} + \frac{(\xi c)^6}{6!} + \dots \right]; \\ \text{tg} \alpha = \frac{dy_2}{dx} = \frac{c}{l_1} y_s^* \text{Sin} \xi c = \frac{c}{l_1} y_s^* \left[\xi c + \frac{(\xi c)^3}{3!} + \frac{(\xi c)^5}{5!} + \dots \right]; \\ \text{tg} \alpha_k = \frac{c}{l_1} y_s^* \text{Sin} c; \quad \frac{y_2}{f} = \frac{\text{Co}f \xi c - 1}{\kappa - 1}; \end{aligned} \right\} \quad (798)$$

$$A = B = \int_0^{l_1} q dx = q_s \frac{l_1}{c} \text{Sin} c; \quad H = q_s \varrho_s = q_s \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{1}{y_s^*}. \quad (800)$$

$$v = v_s + (y_2/f) (v_k - v_s) \quad (\text{Abb. 487}). \quad (801)$$

Darnach wird nach der Abschätzung von q_s, q_k zunächst der für den Bogenträger charakteristische Leitwert c aus der Tabelle 39 entnommen oder nach den bekannten Funktionstafeln¹ festgestellt. Mit diesem sind die Stützkräfte $A = B, H$ und die

Tabelle 39. $c = \text{ArCo}f \kappa, \quad \kappa = q_k/q_s.$

κ	c	κ	c	κ	c	κ	c	κ	c	κ	c
—	—	2,0	1,317	3,0	1,763	4,0	2,063	6,0	2,478	8,0	2,769
1,1	0,444	2,1	1,373	3,1	1,797	4,2	2,114	6,2	2,511	8,5	2,830
1,2	0,622	2,2	1,425	3,2	1,831	4,4	2,162	6,4	2,543	9,0	2,887
1,3	0,756	2,3	1,475	3,3	1,863	4,6	2,207	6,6	2,574	9,5	2,942
1,4	0,867	2,4	1,522	3,4	1,895	4,8	2,251	6,8	2,605	10,0	2,993
1,5	0,962	2,5	1,567	3,5	1,925	5,0	2,292	7,0	2,634	11,0	3,089
1,6	1,047	2,6	1,609	3,6	1,954	5,2	2,332	7,2	2,662	12,0	3,176
1,7	1,123	2,7	1,650	3,7	1,983	5,4	2,371	7,4	2,690	13,0	3,257
1,8	1,193	2,8	1,689	3,8	2,010	5,6	2,408	7,6	2,717	14,0	3,331
1,9	1,257	2,9	1,727	3,9	2,037	5,8	2,443	7,8	2,743	15,0	3,400

¹ Taschenbuch f. Bauing. Bd. I 5. Aufl. S. 35 ff.

Ordinaten y_2 der Mittellinie bestimmt. Diese können oft auch für abgerundete Leitwerte c nach Tabelle 40 angeschrieben werden. Die Bogenlaibungen

$$y_2^{(0)} = y_2 \left(1 - \frac{v_k - v_b}{2f} \right) - \frac{v_b}{2}; \quad y_2^{(u)} = y_2 \left(1 + \frac{v_k - v_b}{2f} \right) + \frac{v_b}{2} \quad (802)$$

sind ebenfalls Kettenlinien (Abb. 488). Damit ist eine geeignete Grundlage für die Form von Träger und Überbau vorhanden, nach der die Mittellinie aus Eigengewicht oder aus Eigengewicht + $p/2$ berechnet werden kann (S. 75). Der Vergleich mit der angenommenen Kettenlinie ist in der Regel so günstig, daß die Wiederholung der Untersuchung zu keinem wesentlichen Unterschiede zwischen Annahme und Ergebnis führt.

Tabelle 40. $\frac{y_2}{f} = \frac{\text{Cof} \frac{x}{l_1} c - 1}{x - 1}$ mit $c = \text{Ar Cof } x$ und $x = \frac{q_k}{q_s}$ als Leitwert.

x	$\xi = x/l_1 =$								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,5	0,0094	0,0372	0,0840	0,1500	0,2358	0,3426	0,4708	0,6220	0,7976
2,0	0,0087	0,0349	0,0791	0,1420	0,2248	0,3288	0,4559	0,6083	0,7887
2,5	0,0081	0,0330	0,0750	0,1353	0,2153	0,3170	0,4429	0,5961	0,7804
3,0	0,0078	0,0314	0,0716	0,1296	0,2071	0,3068	0,4316	0,5852	0,7727
3,5	0,0074	0,0300	0,0686	0,1246	0,2000	0,2978	0,4215	0,5756	0,7661
4,0	0,0071	0,0288	0,0659	0,1202	0,1937	0,2898	0,4125	0,5671	0,7602
4,5	0,0069	0,0277	0,0636	0,1162	0,1881	0,2827	0,4045	0,5594	0,7548
5,0	0,0066	0,0268	0,0615	0,1128	0,1830	0,2762	0,3972	0,5523	0,7498
6,0	0,0062	0,0252	0,0579	0,1066	0,1742	0,2649	0,3843	0,5397	0,7408
7,0	0,0058	0,0237	0,0548	0,1014	0,1667	0,2552	0,3732	0,5288	0,7330
8,0	0,0055	0,0225	0,0522	0,0969	0,1602	0,2468	0,3635	0,5193	0,7261
9,0	0,0052	0,0214	0,0499	0,0930	0,1545	0,2394	0,3550	0,5107	0,7199
10,0	0,0050	0,0205	0,0479	0,0896	0,1495	0,2328	0,3472	0,5031	0,7143

Bülow, F. v., u. J. Wiggers: Zahlentafel zur günstigen Formgebung gewölbter Brücken und Durchlässe bei beliebigem Pfeilverhältnis und beliebiger Überschüttungshöhe. Beton u. Eisen 1930 S. 409.

55. Der Zweigelenkbogen.

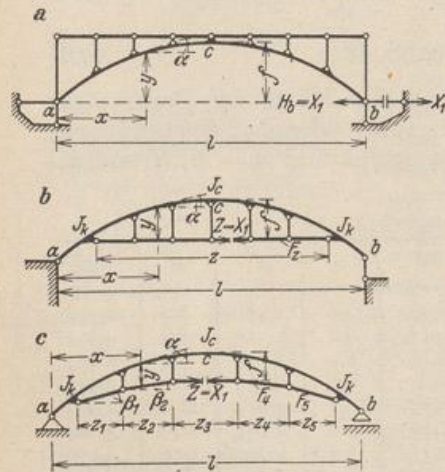


Abb. 489.

Die Gelenke des Trägers liegen in der Regel am Kämpfer. Eines von beiden ist längsbeweglich, wenn die Bogenkraft durch ein gerades oder gesprengtes Zugglied aufgenommen wird, das meist die Bogenkämpfer, in besonderen Fällen aber auch zwei beliebige Querschnitte verbindet.

Die Schnittkräfte sind einfach statisch unbestimmt, da der Verschiebungszustand des Bogenträgers in der Regel als unabhängig von dem zur Eintragung der Lasten notwendigen Überbau angesehen werden darf. Als überzählige Größe X_1 dient die Komponente H einer Stützkraft oder die waagerechte Komponente der Längskraft im Zugglied. Bei Symmetrie des Bogenträgers kann nach S. 196 auch $X_1 = 1/2 \cdot (H_a + H_b)$ gewählt werden, so daß bei Antimetrie der

Belastung $X_1 = 0$, also $H_a = -H_b$, bei Symmetrie der Belastung $X_1 = H_a = H_b$ erhalten wird. Dasselbe gilt auch bei Verwendung der Längskraft N_c im Bogen-