



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Tabellen zur Ermittlung der Schnittkräfte eines Zweigelenkbogenträgers mit analytisch bestimmter Mittellinie für verschiedene Funktionen $J_c/J \cos \alpha$

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

1. Die Mittellinie ist eine Parabel mit $y = 4f\xi\xi'$; $\xi = x/l$. Die Stützweite des Bogenträgers ist l , der Querschnitt im Scheitel bestimmt durch J_c, F_c , am Kämpfer bestimmt durch α_k, J_k, F_k, n . Die elastischen Eigenschaften eines Zuggliedes ergeben sich aus dessen Länge z , dem Querschnitt F_z , dem Elastizitätsmodul des Baustoffes E_z . Die Ansätze (804) u. (807) für δ_{11}, δ_{10} lassen sich dann formal integrieren.

a) Bogenform: $J_c/J \cos \alpha = 1; n = 1; l = z$.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad y = 4f\xi\xi', \quad \delta_{11} = \frac{8}{15}f^2l(1+\nu),$$

$$\nu = \frac{15}{8} \frac{1}{f^2} \frac{J_c}{F_c} \quad \text{oder} \quad \nu = \frac{15}{8} \frac{1}{f^2} \left(\frac{J_c}{F_c} + \frac{E_b}{E_z} \frac{J_c}{F_z} \right).$$

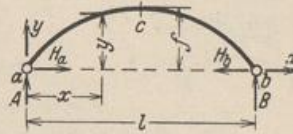
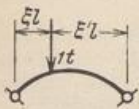


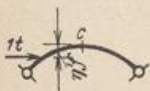
Abb. 492.

$$\delta_{1m} = \frac{fl^2}{3} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) = \frac{fl^2}{3} \omega_R (1 + \omega_R) = \frac{fl^2}{3} \omega_p', \quad (\omega_p' \text{ Tab. 22}).$$



Gleichung der Einflußlinie: $X_1 = H_a = H_b$

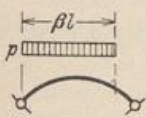
$$H_a = \frac{5}{8} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu} \omega_p'; \quad M_c = \frac{l}{8} \left(4\xi - \frac{5}{1+\nu} \omega_p' \right).$$



$$H_a = -\frac{1}{2} \left[\pm 1 + \frac{5 - \eta'}{4(1+\nu)} \eta'^{\frac{3}{2}} \right];$$

$$M_c = -\frac{f\eta'}{2} \left[1 - \frac{5 - \eta'}{4(1+\nu)} \sqrt{\eta'} \right].$$

$$H_a = \frac{pl^2}{16f(1+\nu)} \beta^2 (5 - 5\beta^2 + 2\beta^3).$$



$$A = \frac{pl}{2} \beta (2 - \beta).$$

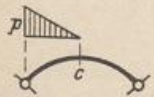
$$B = \frac{pl}{2} \beta^2.$$



$$H_a = \frac{pl^2}{8f(1+\nu)},$$

$$A = B = \frac{pl}{2},$$

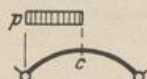
$$M_c = \frac{pl^2}{8} \frac{\nu}{1+\nu}.$$



$$H_a = 0,02279 \frac{pl^2}{f(1+\nu)},$$

$$A = \frac{5}{24} pl,$$

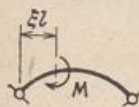
$$B = \frac{1}{24} pl.$$



$$H_a = \frac{pl^2}{16f(1+\nu)},$$

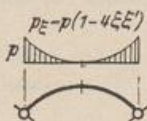
$$A = 3B = \frac{3}{8} pl,$$

$$M_c = \frac{pl^2}{16} \frac{\nu}{1+\nu}.$$



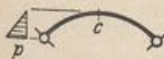
$$H_a = \frac{5}{8f} \frac{M}{1+\nu} (1 - 6\xi^2 + 4\xi^3).$$

$$A = -B = -\frac{M}{l}.$$



$$H_a = 0,02381 \frac{pl^2}{f(1+\nu)}$$

$$A = B = \frac{pl}{6}.$$

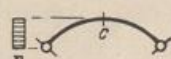


$$H_a = -0,4008 pl,$$

$$H_b = +0,0992 pl,$$

$$A = -B = -pl^2/6l,$$

$$M_c = -0,01587 pl^2.$$



$$H_a = -0,7143 pl,$$

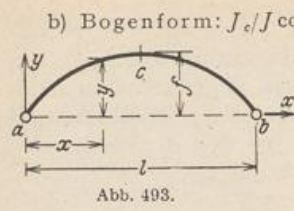
$$H_b = +0,2857 pl,$$

$$A = -B = -pl^2/2l,$$

$$M_c = -0,0357 pl^2.$$

Temperaturänderung t und Stützenverschiebung Δl :

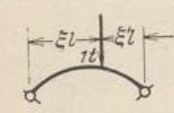
$$H_a = \frac{15 E J_c (\alpha_t t l - \Delta l)}{8 f^2 l (1 + \nu)}, \quad A = B = 0, \quad M_c = -H f.$$



$y = 4f\xi\xi'$; $n = J_c/J_k \cos \alpha_k$; $l = z$.

$\delta_{11} = \frac{8}{15} \frac{6+n}{7} f^2 l(1+v)$;

$v = \frac{15}{8} \frac{7}{6+n} \frac{1}{f^2} \frac{J_c}{F_c}$ oder $v = \frac{15}{8} \frac{7}{6+n} \frac{1}{f^2} \left(\frac{J_c}{F_c} + \frac{E_b J_c}{E_a F_a} \right)$.



$\delta_{1m} = \frac{f l^2}{3} \omega_p'' + \frac{f l^2}{15} (n-1)(1+\omega_R - 8\omega_R^2)$.

Gleichung der Einflußlinie: $H_a = H_b = X_1$.

$X_1 = \frac{l}{f(1+v)} \frac{7\omega_R}{8(6+n)} [5(1+\omega_R) + (n-1)(1+\omega_R - 8\omega_R^2)] = \frac{l}{f(1+v)} \kappa$.

Die Funktion κ ist symmetrisch. Sie wird für den Leitwert n und ausgezeichnete Abszissen ξ l der Lastpunkte angegeben.

Funktion κ für $0,1 \leq n \leq 1,2$.

n	Werte κ für die Lastpunkte $\xi =$						
	0,1	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5
0,1	0,0585	0,1134	0,1377	0,1590	0,1710	0,1895	0,1994
0,2	0,0588	0,1138	0,1379	0,1590	0,1708	0,1890	0,1990
0,3	0,0591	0,1141	0,1382	0,1590	0,1707	0,1886	0,1986
0,4	0,0595	0,1144	0,1385	0,1590	0,1706	0,1882	0,1982
0,5	0,0598	0,1147	0,1387	0,1590	0,1705	0,1878	0,1978
0,6	0,0602	0,1150	0,1388	0,1590	0,1703	0,1874	0,1973
0,7	0,0605	0,1153	0,1389	0,1590	0,1701	0,1870	0,1968
0,8	0,0608	0,1156	0,1390	0,1590	0,1699	0,1867	0,1963
0,9	0,0610	0,1158	0,1390	0,1590	0,1697	0,1863	0,1959
1,0	0,0613	0,1160	0,1391	0,1590	0,1696	0,1860	0,1954
1,2	0,0619	0,1166	0,1392	0,1590	0,1693	0,1855	0,1948

Streckenlast p . (Für $\beta = \frac{1}{2}$ und $\beta = 1$ wird X_1 von n unabhängig. Es gelten dann die Formeln auf S. 515):

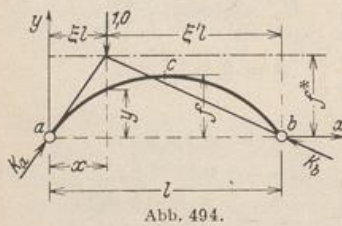


$X_1 = \frac{p l^2}{16 f(1+v)} \frac{7}{6+n} \beta^2$

$\cdot \left[4 + n - 5n\beta^2 - (8 - 10n)\beta^3 + 8(1-n)\beta^4 \left(1 - \frac{2}{7}\beta \right) \right]$.

$X_1 = \frac{p l^2}{36 f(1+v)} \frac{5+n}{6+n}$.

c) Bogenform zur vereinfachten Ableitung der Einflußlinien. Ohne Rücksicht auf die vorhandene Bogenform kann zur näherungsweise Berechnung der Einflußlinien auch



$\frac{J_c}{J \cos \alpha} \cdot y = \text{const} = f$

und

$\cos \alpha \frac{F_c}{F} = \text{const} = 1$

gesetzt werden. Nach (803) ist dann mit

$y = 4f\xi\xi'$, $\eta = y/f$

$X_1 = \frac{\int M_0 y \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx}{\int y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx + \frac{J_c}{F_c} \int \cos \alpha \frac{F_c}{F} dx} = \frac{f \int M_0 dx}{f \int y dx + \frac{J_c}{F_c} \int dx} = \frac{\int M_0 dx}{\frac{2}{3} f l(1+v)}$; $v = \frac{3}{2} \frac{J_c}{F_c f^2}$.

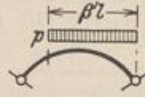
Gleichung der Einflußlinie:

$$X_1 = \frac{3}{4} \frac{l}{f} \frac{\omega_R}{1+\nu} = \frac{3}{16} \frac{l}{f(1+\nu)} \frac{y}{f} \quad (\text{Parabel})$$

Die Stützkkräfte K_a, K_b aus $P_m = 1$ (Abb. 494) schneiden sich auf der Kämpferdrucklinie, in diesem Falle einer Parallelen zu $a \div b$ im Abstände

$$f^* = \frac{l}{H} \omega_R = \frac{4}{3} f(1+\nu), \quad H = X_1 = \frac{l}{f^*} \cdot \omega_R.$$

$$X_1 = \frac{p l^2}{8f} \frac{1}{1+\nu} \beta'^2 (3 - 2\beta'), \quad \beta' = 1,0: \quad X_1 = \frac{p l^2}{8f} \frac{1}{1+\nu}.$$



Das Ergebnis ist trotz der Vereinfachung der Integranden brauchbar. Der Fehler läßt sich für die Einflußlinie X_1 und $J_c/J \cos \alpha = 1$ anschreiben:
Mit

$$X_1 = \frac{\int M_0 y dx}{\int y^2 dx (1+\nu)} = \frac{\int M_0 dx}{\frac{2}{3} \cdot f l (1+\nu)} \left[1 + \frac{x-\chi}{1-x} \right] \quad \text{und} \quad y' = f - y,$$

$$x = \frac{\int y y' dx}{\int y dx}, \quad \chi = \frac{\int M_0 y' dx}{\int M_0 dx}, \quad \text{wird} \quad \varphi = \frac{x-\chi}{1-x} = \frac{5\omega_R - 1}{6}.$$

Der größte Fehler beträgt daher: ($\xi = \xi' = \frac{1}{3}$), $\varphi = 1/24 \approx 4\%$. Er wird für Bogenform b S. 516 mit wachsendem $n = J_c/J_k \cos \alpha$ (sichelförmige Träger) immer geringer und für $n = 10/3$ nahezu Null.

Einflußlinie des Biegemomentes im Querschnitt r :

$$\psi = \frac{3}{16} \frac{l}{f(1+\nu)}, \quad \eta_r = \frac{y_r}{f},$$

$$M_r = \psi \eta_r \left(\frac{M_{0r}}{\psi \eta_r} - y \right) = \psi \eta_r \cdot \bar{y},$$

mit

$$\frac{M_{0r,r}}{\psi \eta_r} = \frac{4}{3} f(1+\nu) = f^*$$



Abb. 495.

als ausgezeichnete Ordinate in r (Abb. 495). Die Einflußlinien der Biegemomente in den Querschnitten $r \rightarrow h$ mit ξ_h oder $\xi'_h \leq (1+\nu)/3$ erhalten daher eine Lastscheide $E_h(\epsilon_h, \epsilon'_h)$ (Abb. 496). Die Lastscheiden der übrigen Querschnitte $r \rightarrow h$ werden mit $C_k(\zeta_k, \zeta'_k)$; $E_k(\epsilon_k, \epsilon'_k)$ bezeichnet.

Bestimmung der Lastscheiden:

$$\epsilon_h = (1+\nu)/3 \xi'_h, \quad \epsilon'_h = 1 - \epsilon_h,$$

$$\epsilon_k = (1+\nu)/3 \xi'_k, \quad \epsilon'_k = 1 - \epsilon_k,$$

$$\zeta_k = 1 - \zeta'_k, \quad \zeta'_k = (1+\nu)/3 \xi_k.$$

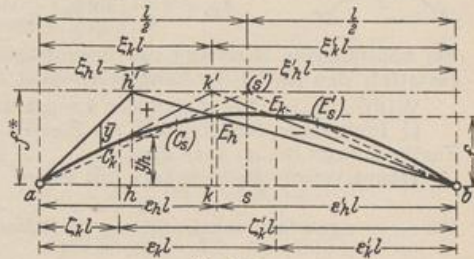


Abb. 496.

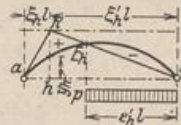
Grenzwerte der Biegemomente für gleichförmig verteilte Nutzlast.

Für $\nu = 0$ sind der positive und negative Anteil der Einflußfläche einander gleich. Daher ist für gleichförmig verteilte Nutzlast p :

$r \rightarrow h$: eine Lastscheide

$$\epsilon'_h = 1 - \frac{1}{3 \xi'_h}, \quad H_h = \frac{p l^2}{8f} \epsilon_h^2 (3 - 2 \epsilon'_h),$$

$$\max |M_h| = \frac{p l^2}{2} \epsilon_h^2 \xi_h - H_h y_h.$$



$r \rightarrow h$: zwei Lastscheiden

$$\epsilon'_k = 1 - 1/3 \xi'_k, \quad \zeta_k = 1 - 1/3 \xi_k,$$

$$H_k = \frac{p l^2}{8f} [\epsilon_k^2 (3 - 2 \epsilon'_k) + \zeta_k^2 (3 - 2 \zeta_k)],$$

$$\max |M_k| = \frac{p l^2}{2} [(\epsilon_k^2 - \zeta_k^2) \xi_k + \zeta_k^2] - H_k y_k.$$



$e'_r; \zeta_r; H_r$ und $\max |M_r|$ für $p = \text{const}$ in den Schnitten $\xi_r = 0,1 \dots 0,5$.

ξ_r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
e'_r	$\frac{17}{27}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$
ζ_r				$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
H_r	$0,690 p l^2/8 f$	$0,624 p l^2/8 f$	$0,536 p l^2/8 f$	$0,491 p l^2/8 f$	$0,519 p l^2/8 f$
$\max M_r $	$0,01123 p l^2$	$0,01587 p l^2$	$0,01508 p l^2$	$0,01109 p l^2$	$0,00925 p l^2$

2. Die Mittellinie ist ein Kreisbogen mit gleichbleibendem Querschnitt (F, J), von dem $l = 2l_1$ und f gegeben sind.

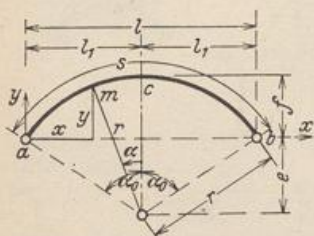


Abb. 497.

$$r = \frac{f}{2} \left[1 + \left(\frac{l_1}{f} \right)^2 \right], \quad e = r - f, \quad s = 2r\alpha_0.$$

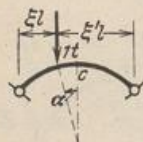
$$\sin \alpha_0 = l_1/r, \quad \cos \alpha_0 = e/r.$$

$$x = l_1 - r \sin \alpha, \quad \xi = x/l,$$

$$y = r \cos \alpha - e, \quad \eta = y/f.$$

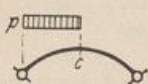
Damit wird nach (805)

$$\delta_{11} = r^3 (\alpha_0 - 3 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0) + r \frac{J}{F} (\alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) + l \frac{E_b J}{E_z F_z};$$



Einzellast $1 t$ im Punkt m (α) ohne Berücksichtigung von N_0 :

$$\delta_{m1} = \frac{r l^2}{2} \omega_B + e r^2 [(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) - (\cos \alpha_0 + \alpha_0 \sin \alpha_0)].$$



Halbseitige Belastung durch p :

$$\delta_{10} = \frac{p r^4}{4} \left[\sin \alpha_0 \left(\frac{4}{3} \sin^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 \right) + \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 - 2 \sin^2 \alpha_0) \right] - \frac{p l_1^3 J}{3 r F}.$$

Bei vollständiger Belastung des Bogenträgers durch p ist δ_{10} doppelt so groß. Das Ergebnis gestattet, den Anteil der Längskräfte auch in allgemeinen Ansätzen für δ_{10}, δ_{11} abzuschätzen.

Winddruck. (Der Anteil der Längskräfte in δ_{10} wird vernachlässigt.)

a) Einseitiger Winddruck w im Bereich a bis c . Das feste Auflager von Bogenträgern mit Zugband liegt bei a . Abb. 498.

Hauptsystem: Balkenträger mit festem Auflager in a .

Für $w = w_0 \sin^2 \alpha$ winkelrecht zur Mittellinie ist: $\delta_{10} = \frac{w_0 r^4}{3} \Phi$,

$$\Phi = -\sin \alpha_0 \left(\frac{2}{3} + 3 \cos \alpha_0 - \frac{7}{6} \cos^2 \alpha_0 \right) + \alpha_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cos \alpha_0 + 2 \cos^2 \alpha_0 - \cos^3 \alpha_0 \right).$$

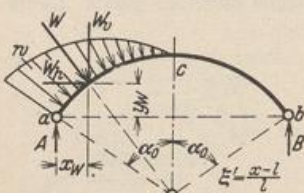


Abb. 498.

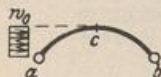
$$W_h = \frac{w_0 r}{3} [2 - \cos \alpha_0 (3 - \cos^2 \alpha_0)], \quad W_v = \frac{w_0 r}{3} \sin^3 \alpha_0.$$

$$y_w = \frac{3}{4} l_1 \frac{\sin^3 \alpha_0}{2 - \cos \alpha_0 (3 - \cos^2 \alpha_0)} - e = \frac{3}{4} l_1 \frac{W_v}{W_h} - e,$$

$$x_w = \frac{l_1}{4}.$$

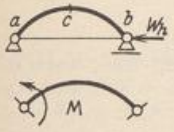
$$B = \frac{1}{l} (W_v l_1 - W_h e); \quad a \text{ bis } c: M_0 = B l \xi' - \frac{w_0 r^2}{3} (1 - \cos \alpha)^2; \quad c \text{ bis } b: M_0 = B l \xi'.$$

Für die waagerechte Belastung $w = w_0 = \text{const}$ auf die Höhe f ist $\delta_{10} = \frac{w_0 r^4}{2} \Phi$.



$$W_h = w_0 \cdot f; \quad a \text{ bis } c: M_0 = \frac{w_0 f^2}{2} (2 \eta - \xi - \eta^2); \quad c \text{ bis } b: M_0 = \frac{w_0 f^2}{2} \xi'.$$

b) Einseitiger Winddruck w im Bereich c bis b eines Bogenträgers mit Zugband. Das feste Auflager liegt bei a . Der Belastungsfall entsteht durch Überlagerung des Kräftebildes aus Belastungsfall a mit dem Kräftebild aus W_h in b . Hauptsystem wie unter a. $\delta'_{10} = 0$.



$$M_0 = W_h y; \quad \delta_{10} = -W_h r^3 (\alpha_0 - 3 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0).$$

$$\delta_{10} = -r l_1 M \left(1 - \alpha_0 \frac{c}{l_1}\right) \quad \left| \quad \delta_{1t} = E J_c \alpha_t t l, \quad \delta_{1s} = E J_c \cdot \Delta l.$$

Statische Untersuchung eines Brückenträgers mit Zugband (Abb. 499).

Beispiel zur Anwendung der Tabelle 41 S. 514ff. unter Berücksichtigung folgender Ausführungsmöglichkeiten:

1. Genietetes Zugband. $F_z = F_{ez}$. Anschluß am Kämpfer vor Ausrüstung des Bogens.
2. Zugband aus Eisenbeton. Anschluß am Kämpfer vor Ausrüstung des Bogens.
3. Genietetes Zugband $F_z = F_{ez}$, vor dem Anschluß am Bogenkämpfer um die Länge Δz gereckt und nach Ausrüstung des Bogens einbetoniert.

$l = 68,00 \text{ m}, \quad f = 11,33 \text{ m}, \quad F_c = 1,39 \text{ m}^2, \quad J_c = 0,47 \text{ m}^4, \quad J_c/J \cos \alpha = 1.$
 Zugband: $F_{ez} = 0,045 \text{ m}^2, \quad F_{bz} = 1,40 \text{ m}^2, \quad F_{tz} = F_{bz} + F_{ez} \cdot E_c/E_b = 1,85 \text{ m}^2.$
 $E_b = 2100000 \text{ tm}^2,$
 $E_t/E_e = 1/10, \quad \alpha_t = 0,00061.$

A. Belastung durch gleichförmig verteiltes Eigengewicht (Gleichgewichtsgruppe q , H_0) unter Berücksichtigung des Schwindens. $q = 10,7 \text{ t/m}$.
 $H_0 = q l^2/8 f = 545,861 \text{ t}$; Schwindwirkung nach S. 35 mit $t = -15^\circ$.
 Nach (816) ist:

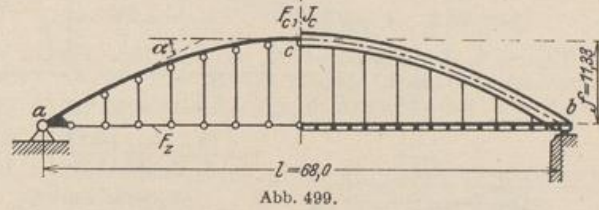


Abb. 499.

$$X_1 = -\frac{\nu}{1+\nu} H_0, \quad X_{1t} = \frac{15}{8} \frac{E J_c \alpha_t t l}{f^2 l (1+\nu)},$$

$Z = H_0 + X_1 + X_{1t}, \quad M = -\nu (X_1 + X_{1t}), \quad \nu$ nach S. 515.

Lösung 1. $\nu = \frac{15}{8} \frac{1}{11,33^2} \left(\frac{0,47}{1,39} + \frac{1}{10} \frac{0,47}{0,045} \right) = 0,00494 + 0,01526 = 0,02020.$
 $X_1 = -10,808 \text{ t}, \quad X_{1t} = -2,120 \text{ t}, \quad Z = 532,933 \text{ t},$
 $M = +12,928 \cdot \nu, \quad \Delta z = Z l / E_e F_{ez} = 0,0383 \text{ m}.$

Einsenkung der Scheitelquerschnitte. $\delta_c = \delta_{c,1} + \delta_{c,2} + \delta_{c,3}$. Nach (186) ist

$$\delta_{c,1} = \int \bar{M} M dx = -\frac{5}{48} f l^2 (X_1 + X_{1t}) = -5457,28 (X_1 + X_{1t}) = 70552,$$

Die Anteile $\delta_{c,2}$ und $\delta_{c,3}$ werden für einen Kreisbogen als Achse mit $r = 56,65$, $\cos \alpha_0 = 0,8$ und $F = F_c = \text{const}$ angegeben.

$$\delta_{c,2} = \frac{J_c}{F_c} \int \bar{N} N \frac{F_c}{F} ds = -\frac{J_c}{F_c} H_0 r \left[\ln \cos \alpha_0 - \frac{X_1 + X_{1t}}{H_0} \frac{l^2}{8 r^2} \right] \approx -\frac{J_c}{F_c} H_0 r \ln \cos \alpha_0 = 2331,$$

$$\delta_{c,3} = E J_c \int \bar{N} \alpha_t t ds = -E J_c \alpha_t t r (1 - \cos \alpha_0) = 1677,$$

$$\delta_c / E J_c = 0,0715 + 0,0024 + 0,0017 = 0,0756 \text{ m}.$$

Lösung 2. Die Längskraft Z des Verbundquerschnittes entfällt zum Teil auf die Rundisenbewehrung (Z_e), zum Teil auf den Betonquerschnitt (Z_b). Da hierbei nach Versuchen von E. Mörsch die mittlere Beanspruchung σ_{bz} des Betons 80 t/m^2 nicht überschreitet, ist die mittlere Zugkraft in der Stahlbewehrung $Z_e = Z - 80 F_b$. Der Ansatz für ν Seite 515 enthält die Dehnung des Zugbandes mit $F_z E_z$ für den Verbundquerschnitt. Sie wird durch die Einführung eines ideellen Elastizitätsmoduls E^* auf die Dehnung der Stahlbewehrung bezogen ($F_z E_z = F_e E^*$).

$$\frac{1}{l} \int_0^l \nu ds = \frac{Z}{F_e E^*} = \frac{Z_e}{F_e E_e} \quad \text{und daher} \quad \frac{1}{F_e E^*} = \frac{1}{F_e E_e} \frac{Z_e}{Z} \approx \frac{1}{F_e E_e} \frac{H_0 - 80 F_b}{H_0} = \frac{1}{0,0566 E_e};$$