



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

56. Der beiderseits eingespannte Bogenträger

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Verkürzung wird bei Anordnung des Zugbandes nach Abb. 502a durch eine Sprengung

$$f_s = \sqrt{z_1 \Delta z} = \sqrt{10,0 \cdot 0,023} = 0,480 \text{ m;}$$

bei Anordnung des Zugbandes nach Abb. 502b durch Sprengung nach einem Kreisbogen mit einem Pfeil von

$$f_s = \sqrt{\frac{3}{8} z \Delta z} = \sqrt{\frac{3}{8} \cdot 30,0 \cdot 0,023} = 0,509 \text{ m, } r_s = 221,28 \text{ m}$$

erreicht.

Die Biegemomente aus Eigengewicht und Schwinden sind in Abb. 503 bei geradem und bei nachträglich gesprengtem Zugband miteinander verglichen worden.

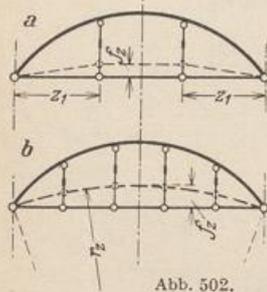


Abb. 502.

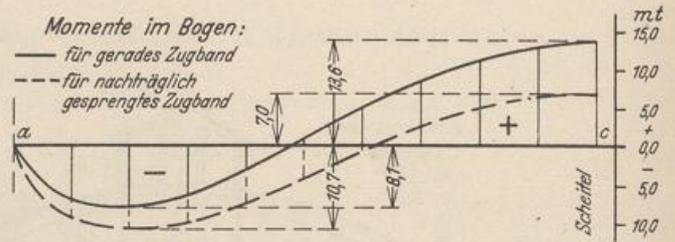


Abb. 503.

Die Erhöhung der positiven Momente bei geradem Zugband aus der Verlagerung der Bogenachse bleibt unberücksichtigt. Für nachträglich gesprengtes Zugband ist sie verschwindend klein.

Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 2. Abt. S. 513. Leipzig 1908. — Hartmann, F.: Statisch unbestimmte Systeme. Berlin 1913. — Kuball, H.: Zweigelenrahmen aus Eisenbeton mit Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes. Berlin 1920. — Troche, A.: Der Einfluß der Temperatur auf den Horizontalschub parabolischer Zweigelenbogen. Bauing. 1925. — Derselbe: Der Horizontalschub kreisförmiger Zweigelenbogen. Beton u. Eisen 1925. — Vgl. auch die Literatur auf S. 557.

56. Der beiderseits eingespannte Bogenträger.

Die Bogenform ist gegeben, der Verschiebungszustand des Trägers unabhängig von denjenigen Bauteilen, welche zur Eintragung der Lasten dienen. Die Bogenkämpfer sind auf starre Widerlager abgestützt oder elastisch in den Enden eines Balkenträgers eingespannt. Wird dieser außerdem durch Zugglieder mit dem Bogenträger verbunden, so überschreitet die Berechnung den Umfang einer einfachen statischen Aufgabe (Abschn. 58).

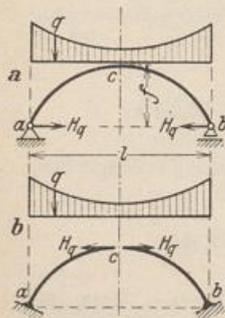


Abb. 504.

Der beiderseits eingespannte Bogenträger ist dreifach statisch unbestimmt. Die Schnittkräfte werden aus einem statisch bestimmten oder einem zweifach statisch unbestimmten Hauptsystem berechnet. Die statisch überzähligen Größen sind bei der Wahl eines Dreigelenkbogens als Hauptsystem am kleinsten, so daß nach S. 170 die besten Ergebnisse bei der Überlagerung der statisch bestimmten Anteile aus Belastung und überzähligen Größen erzielt werden. Dafür ist die Berechnung und Aufzeichnung der Einflußlinien als Biegelinie des Hauptsystems durch die Art der Randbedingungen nicht so einfach wie beim Balkenträger auf zwei Stützen und wie beim Freitragerpär. Diese werden daher als Hauptsystem in der Regel vorgezogen. Um da-

bei trotzdem relativ kleine überzählige Größen aus einer vorgeschriebenen Belastung q zu erhalten, wird diese durch geeignete Zusatzkräfte H_q ergänzt, die bekannt sind, untereinander im Gleichgewicht stehen und einen Anteil der inneren Kräfte des Trägers bedeuten (Abb. 504).

Ableitung der Schnittkräfte aus einem statisch bestimmten Hauptsystem.

Die überzähligen Größen X_1, X_2, X_3 sind entweder nach (475) durch eine mechanische Transformation statisch unbestimmter Schnittkräfte oder nach S. 274 als Gruppenlasten derart bestimmt, daß die Nebenglieder $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$ der Matrix der Elastizitätsgleichungen Null sind. In diesem Falle ist dann

$$X_1 = \frac{\delta_{1\infty}}{\delta_{11}}, \quad X_2 = \frac{\delta_{2\infty}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = \frac{\delta_{3\infty}}{\delta_{33}}. \quad (817)$$

Dieses einfache Ergebnis darf jedoch nur verwendet werden, wenn die Nebenbedingungen

$$\delta_{12} = 0, \quad \delta_{23} = 0, \quad \delta_{31} = 0 \quad (818)$$

nachgeprüft und vollständig erfüllt sind.

Lösung bei Symmetrie des Tragwerks.

a) Das Hauptsystem ist ein Balkenträger auf zwei Stützen (Abb. 505).

Die überzählige Größe X_1 besteht nach S. 274 aus den beiden, um die Strecke $y_{1,0}$ parallel verschobenen, statisch unbestimmten Komponenten H der Stützkkräfte, als Gruppenlast nach S. 283 aus den Kräften H und zwei gleich großen Biegemomenten $Y_{a1} = Y_{b1} = -H \cdot y_{1,0}$. Die beiden anderen, von X_1 unabhängigen überzähligen Größen X_2 und X_3 beziehen sich mit $X_1 = 0$ auf den beiderseits eingespannten Balkenträger, dessen Einspannungsmomente in a und b durch Y_a, Y_b bezeichnet werden.

$$X_2 = \frac{1}{2}(Y_a - Y_b), \quad X_3 = \frac{1}{2}(Y_a + Y_b).$$

Die Verschiebung δ_{13} ist nach S. 196 Null für

$$y_{1,0} = \int_c^a y_1 \frac{J_c}{J} ds : \int_c^a \frac{J_c}{J} ds. \quad (819)$$



Abb. 505.

b) Das Hauptsystem ist ein Freitragerpär (Abb. 506).

Die überzählige Größe X_1 besteht nach S. 274 aus den beiden um die Strecke $y_{2,0}$ parallel verschobenen Längskräften $-N_c$ im Bogenscheitel c oder nach S. 283 aus einer Gruppenlast, die sich aus der Längskraft $-N_c$ und dem Biegemoment $Y_{c1} = -N_c y_{2,0}$ im Bogenscheitel zusammensetzt. Die überzählige, von X_1 unabhängige Größe X_3 ist das Biegemoment Y_c im Scheitel des beiderseits eingespannten Balkenträgers.

Als überzählige Größe X_2 wird eine Funktion der Querkraft Q_c im Bogenscheitel verwendet. $X_2 = +Q_c l_1$. Die Verschiebung δ_{13} ist nach (471) Null, wenn

$$y_{2,0} = \int_c^a y_2 \frac{J_c}{J} ds : \int_c^a \frac{J_c}{J} ds. \quad (820)$$



Abb. 506.

c) Das Hauptsystem ist ein Dreigelenkbogenträger (Abb. 507).

Die statisch unbestimmten Biegemomente M_a, M_b, M_c sind nach (468) Funktionen dreier statisch überzähliger Gruppenlasten, von denen X_1 und X_3 symmetrisch, X_2 antisymmetrisch ist. Sie werden daher nach folgender Transformation angeschrieben (Abschn. 36):

$$\left. \begin{aligned} -M_a &= Y_a = X_3 + X_2 + Y_{a1} X_1; \\ -M_b &= Y_b = X_3 - X_2 + Y_{b1} X_1; \quad -M_c = Y_c = X_3 + X_1. \end{aligned} \right\} (821)$$

Infolge der Symmetrie ist

$$Y_{a1} = Y_{b1}, \quad \delta_{12} = 0, \quad \delta_{23} = 0$$

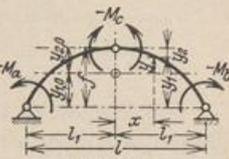


Abb. 507.

und nach S. 284 auch $\delta_{13} = 0$, wenn:

$$Y_{a1} = -\frac{\delta_{c1}}{\delta_{a1} + \delta_{b1}} = -\frac{\int y_1 \frac{J_c}{J} ds}{\int y_2 \frac{J_c}{J} ds} = -\frac{y_{1,0}}{y_{2,0}}. \quad (822)$$

Daher sind die Biegemomente infolge von $-X_1 = 1$

$$M_1 = \frac{y_1}{f} - \frac{y_2}{f} \frac{y_{1,0}}{y_{2,0}} = \frac{1}{y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0}) = \frac{1}{y_{2,0}} (y_{2,0} - y_2) = \frac{1}{y_{2,0}} y \quad (823)$$

bis auf einen konstanten Beiwert ebenso groß wie in den beiden Fällen a) und b).

Die Schnittkräfte werden nach der Begründung auf S. 522 nur für das erste und zweite Hauptsystem angegeben. Die Lösungen stimmen in formaler Beziehung überein, wenn die Einflußlinien N_0, M_0, Q_0 des Balkenträgers oder Freitragerspaars unter Beachtung der Vorzeichen aufgetragen und die Schnittkräfte N_0, M_0, Q_0 aus einer vorgeschriebenen Belastung q und den erwähnten Zusatzkräften H_q berechnet werden. $H_q = M_{0c}/f$. In diesem Ausdruck bedeutet M_{0c} das Moment der äußeren Kräfte aus der Belastung q eines Balkenträgers, bezogen auf den Schwerpunkt des Scheitelquerschnitts c .

Die Hauptglieder $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$ der Matrix der Elastizitätsgleichungen werden nach (299) gebildet.

Belastungszustand $-X_1 = 1$: $M_1 = y$, $N_1 = \cos \alpha$, $Q_1 = \sin \alpha$.

Belastungszustand $-X_2 = 1$: $M_2 = -x/l_1$, $N_2 = 1/l_1 \cdot \sin \alpha$, $Q_2 = -1/l_1 \cdot \cos \alpha$.

Belastungszustand $-X_3 = 1$: $M_3 = 1$, $N_3 = 0$, $Q_3 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{J_c}{F_c} \int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx; & \delta_{22} &= \frac{J_c}{F_c} \int \frac{\sin^2 \alpha}{l_1^2} \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int \frac{x^2}{l_1^2} \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx; \\ \delta_{33} &= \int \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \end{aligned} \right\} (824)$$

$$\int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds \approx l, \quad \int \frac{\sin^2 \alpha}{l_1^2} \alpha \frac{F_c}{F} ds \approx 0.$$

Die Belastungszahlen ergeben sich nach (299) mit M_0, N_0 für die äußeren Kräfte

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_0 \cos \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int M_0 y \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx; & \int N_0 \cos \alpha \frac{F_c}{F} ds &\approx 0, \\ \delta_{20} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_0 \frac{\sin \alpha}{l_1} ds - \int M_0 \frac{x}{l_1} \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx; & \int N_0 \frac{\sin \alpha}{l_1} \frac{F_c}{F} ds &\approx 0, \\ \delta_{30} &= \int M_0 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx. \end{aligned} \right\} (825)$$

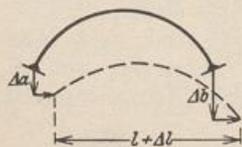


Abb. 508.

Belastungszahlen aus Temperaturänderung t , Δt und Stützenbewegung:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1t} &= E J_c \left(\alpha_t t l + \int y \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds \right); \\ \delta_{2t} &= 0; & \delta_{3t} &= E J_c \int \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds. \end{aligned} \right\} (826)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1s} &= E J_c [y_{1,0} (\varphi_a - \varphi_b) - \Delta l], \\ \delta_{2s} &= -E J_c \left[(\varphi_a + \varphi_b) + \frac{2}{l} (\Delta_a - \Delta_b) \right], \\ \delta_{3s} &= -E J_c (\varphi_a - \varphi_b). \end{aligned} \right\} (827)$$

Die Vorzeichen und Belastungszahlen werden bei einer beliebig vorgeschriebenen Bogenform durch numerische Integration nach S. 95, am besten mit den Rechenverfahren des Zahlenbeispiels S. 545 bestimmt.

Unter Umständen empfiehlt sich auch die Verwendung von n Stufen konstanter elastischer Wirkung nach S. 96 (Abb. 509)

$$c = e_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} = \frac{1}{n} \sum_0^l \frac{J_c}{J \cos \alpha} \Delta x \quad \text{oder} \quad \bar{c} = \bar{e}_m \frac{F_c}{F_m} = \frac{1}{n} \sum_0^l \frac{F_c}{F} \Delta x. \quad (828)$$

Dabei bedeuten die Summanden die mittleren Ordinaten einer beliebigen Unterteilung Δx des Integrationsbereiches l (also auch $l = r \cdot \Delta x$) der beiden Funktionen $J_c/J \cos \alpha$ (Abb. 509a) und F_c/F (Abb. 509b). Die Vorzahlen werden dann durch einfache Summenbildung über die mittleren Ordinaten (m') der Intervalle e_m oder \bar{e}_m erhalten (Rechenvorschrift S. 550).

$$\delta_{11} = \frac{J_c}{F_c} \bar{c} \sum_1^n \cos \alpha + c \sum_1^n y^2,$$

$$\delta_{22} = \frac{J_c}{F_c} \bar{c} \sum_1^n \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + c \sum_1^n \left(\frac{x}{l_1}\right)^2, \quad (829)$$

$$y_{2,0} = \frac{1}{n} \sum_1^n y_2, \quad \delta_{33} = n c.$$

$$\delta_{10} = \frac{J_c}{F_c} \bar{c} \sum_1^n N_0 + c \sum_1^n M_0 y,$$

$$\delta_{20} = \frac{J_c}{F_c} \bar{c} \sum_1^n N_0 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_1} - c \sum_1^n M_0 \frac{x}{l_1}, \quad (830)$$

$$\delta_{30} = c \sum_1^n M_0.$$

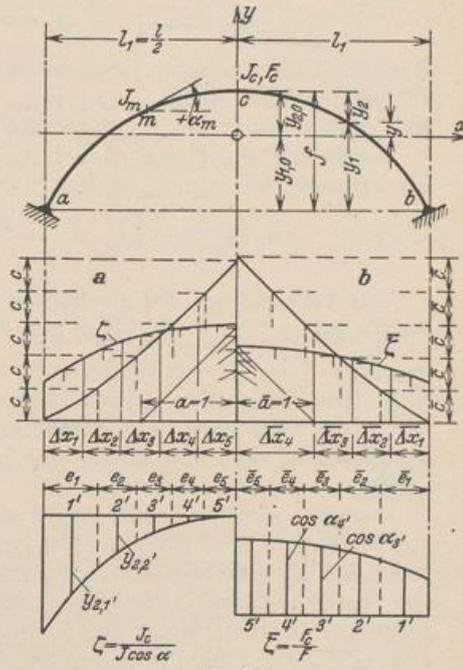


Abb. 509.

Symmetrie der Belastung: $\delta_{20} = 0, X_2 = 0, X_1 \neq 0, X_3 \neq 0, Q_c = 0.$

Antimetrie der Belastung: $\delta_{10} = 0, \delta_{30} = 0, X_1 = 0, X_3 = 0, X_2 \neq 0.$

Die Einflußlinien der überzähligen Größen stimmen bis auf einen Multiplikator mit den Biegelinien überein, welche für die Belastung $-X_1 = 1, -X_2 = 1$ oder $-X_3 = 1$ eines Balkenträgers auf zwei Stützen oder eines Freitragerpaares festgestellt werden. Dies geschieht rechnerisch oder zeichnerisch nach Abschn. 21. Dabei werden die elastischen Gewichte $\mathfrak{W}_{m1}, \mathfrak{W}_{m2}, \mathfrak{W}_{m3}$ verwendet, die nach (206) aus den stetigen elastischen Kräften $w_1 = y \cdot J_c/J \cos \alpha, w_2 = -\xi \cdot J_c/J \cos \alpha, w_3 = 1 \cdot J_c/J \cos \alpha$ entwickelt werden. Ohne Rücksicht auf die Längskräfte aus $-X_1 = 1$ usw. ist bei geometrisch verschiedenen großen Intervallen $c'_m \equiv c_m$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{W}_{m1} &= \frac{c'_m}{6} \left(y_{m-1} \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 2 y_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} \right) \\ &\quad + \frac{c'_{m+1}}{6} \left(2 y_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + y_{m+1} \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}} \right), \\ -\mathfrak{W}_{m2} &= \frac{c'_m}{6} \left(\frac{x_{m-1}}{l_1} \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 2 \frac{x_m}{l_1} \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} \right) \\ &\quad + \frac{c'_{m+1}}{6} \left(2 \frac{x_m}{l_1} \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + \frac{x_{m+1}}{l_1} \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}} \right), \\ \mathfrak{W}_{m3} &= \frac{c'_m}{6} \left(\frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 2 \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} \right) \\ &\quad + \frac{c'_{m+1}}{6} \left(2 \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (831)$$

Sonderfall geometrisch gleich großer Intervalle $c'_m = c'$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{6}{c'} \mathfrak{B}_{m1} &= y_{m-1} \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 4 y_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + y_{m+1} \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}}, \\ - \frac{6}{c'} \mathfrak{B}_{m2} &= \frac{x_{m-1}}{l_1} \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 4 \frac{x_m}{l_1} \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + \frac{x_{m+1}}{l_1} \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}}, \\ \frac{6}{c'} \mathfrak{B}_{m3} &= \frac{J_c}{J_{m-1} \cos \alpha_{m-1}} + 4 \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m} + \frac{J_c}{J_{m+1} \cos \alpha_{m+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (832)$$

Wird die Funktion w im Bereiche $(m-1) \dots (m+1)$ durch einen Parabelabschnitt mit den Ordinaten w_{m-1}, w_m, w_{m+1} ersetzt, so treten an die Stelle von (832) die \mathfrak{B} -Gewichte nach den Angaben (207).

Sonderfall elastisch gleich großer Intervalle $c = e_m J_c / J_m \cos \alpha_m$ mit den Funktionswerten $y_{m'}$, $x_{m'}/l_1$ und 1 in den Mittelpunkten m' der Intervalle e_m .

$$\frac{1}{c} \mathfrak{B}_{m1} = y_{m'}, \quad - \frac{1}{c} \mathfrak{B}_{m2} = \frac{x_{m'}}{l_1}, \quad \frac{1}{c} \mathfrak{B}_{m3} = 1. \quad (833)$$

Die Verwendung der elastischen Gewichte zur Berechnung der Ordinaten der Biegelinien $\delta_{m1}, \delta_{m2}, \delta_{m3}$ wird auf S. 550 gezeigt. Da $\delta_{12} = \int y \cdot J_c / J \cos \alpha \cdot dx = 0$ und $\delta_{13} = \int xy \cdot J_c / J \cos \alpha \cdot dx = 0$, ist $A_{w,1} = 0$; $B_{w,1} = 0$ und $Q_{w,1}$ in Bogenmitte Null. Die Tangenten an die Biegelinie der beiden Hauptssysteme infolge von $-X_1 = 1$ sind daher am Bogenkämpfer und am Bogenscheitel waagrecht. Die Verschiebung δ_{11} kann durch eine horizontale Biegelinie geometrisch nachgeprüft werden.

Dagegen sind, wie sich leicht einsehen läßt, δ_{22} und δ_{33} in den Biegelinien $\delta_{m2} = \mathfrak{M}_{w2}$, $\delta_{m3} = \mathfrak{M}_{w3}$ bereits geometrisch enthalten. Die Ordinaten der Einflußlinien X_1 usw. werden daraus nach (817), also durch Division von δ_{m1} mit δ_{11} usw. berechnet und aufgetragen. Sie können nach S. 125 auch unmittelbar aufgezeichnet werden, wenn das Richtungsbüschel der Biegelinien δ_{m1} usw. nicht die Polweite $|E J_c| \mathfrak{B}_1$ -Einheiten, sondern $|\delta_{11}| \mathfrak{B}_1$ -Einheiten erhält. Dasselbe gilt für die Einflußlinien X_2 und X_3 . Die Polweiten der beiden anderen Richtungsbüschel sind $H_{w2} = |\delta_{22}| \mathfrak{B}_2$ -Einheiten, $H_{w3} = |\delta_{33}| \mathfrak{B}_3$ -Einheiten. Der Betrag der elastischen Gewichte kann auch nach den Ansätzen S. 135 entwickelt werden.

Die Schnittkräfte des Balkenträgers oder Freitragerpaares aus einer vorgeschriebenen Belastung q , den Zusatzkräften H_q und den zugeordneten statisch überzähligen Größen sind

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 - X_1 \cos \alpha - X_2 \frac{\sin \alpha}{l_1}, & Q &= Q_0 - X_1 \sin \alpha + X_2 \frac{\cos \alpha}{l_1}, \\ M &= M_0 - X_1 y + X_2 \frac{x}{l_1} - X_3. \end{aligned} \right\} \quad (834)$$

Symmetrie der Belastung:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= 0, & Q_c &= 0, & N_c &= N_{c0} - X_1, & M_c &= M_{c0} - X_1 y_{2,0} - X_3, \\ M_a &= M_b = -X_3 + X_1 y_{1,0}, & M &= {}^{(1)}M_0 - X_1 y - X_3. \end{aligned} \right\} \quad (835)$$

Antimetrie der Belastung:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= 0, & X_3 &= 0, & M_c &= 0, & N_c &= 0, & Q_c &= Q_{c0} + X_2/l_1, \\ M_a &= -M_b = -X_2, & M &= {}^{(2)}M_0 + X_2 x/l_1. \end{aligned} \right\} \quad (836)$$

Die Buchstaben x, y bezeichnen die Koordinaten des Bezugspunktes des Biegemomentes. Die Vorzeichen richten sich nach dem Achsensystem der Abb. 505. Sie beziehen sich bei der Bildung der Kernmomente auf einen der beiden Kernpunkte des Querschnitts (vgl. S. 28).

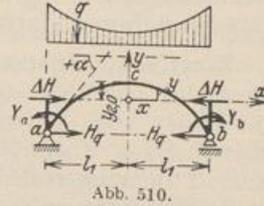
Die Biegemomente für vorgeschriebene Belastungen lassen sich nach den Regeln auf S. 71 aufzeichnen. Darnach ist mit $\xi = x/l_1$

$$M = X_1 \left(\frac{M_0 + X_2 \xi - X_3}{X_1} - y \right) = X_1 \left(\frac{M_0^{(0)}}{X_1} - y \right). \quad (837)$$

Fällt die Mittelkraftlinie aus der Belastung q und den Zusatzkräften H_q mit der Mittellinie des Bogens zusammen, so ist mit $X_1 = \Delta H$ (Abb. 510)

$$M_0 = 0, \quad N_0 = -H_q / \cos \alpha,$$

$$\left. \begin{aligned} H &= H_q + X_1, & X_1 &= -H_q \frac{J_c}{F_c} \int \frac{F_c}{F} ds / \delta_{11}, \\ M &= -X_1 y, \end{aligned} \right\} \quad (838)$$



$$\delta_{11} = \frac{J_c}{F_c} \int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int y^2 \frac{J_c}{J} ds = (1 + \nu) \int y^2 \frac{J_c}{J} ds. \quad (839)$$

Mit

$$\frac{J_c}{F_c} \int \frac{F_c}{F} ds : \int y^2 \frac{J_c}{J} ds = \frac{J_c}{F_c} \int (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \frac{F_c}{F} ds / \delta'_{11} \approx \nu \quad (840)$$

ist

$$X_1 = -\frac{\nu}{1 + \nu} H_q, \quad M = \frac{\nu}{1 + \nu} H_q y, \quad (841)$$

$$N = -\frac{H_q}{\cos \alpha} \frac{1 + \nu \sin^2 \alpha}{1 + \nu} \approx -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{H_q}{1 + \nu}. \quad (842)$$

Ableitung der Schnittkräfte aus einem statisch unbestimmtem Hauptsystem. Die Schnittkräfte lassen sich auch aus einem statisch unbestimmtem Hauptsystem mit der Längskraft $-N_c$ als überzähliger Größe X_1 in dem beiderseits eingespannten Träger entwickeln. Die Belastung erzeugt die Schnittkräfte $N_0^{(2)}, M_0^{(2)}, Q_0^{(2)}$ und die Spannungsmomente $M_{a0}^{(2)}, M_{b0}^{(2)}$, die Kräftegruppe $-X_1 = 1$ die Schnittkräfte $N_1^{(2)}, M_1^{(2)}, Q_1^{(2)}$ und die Spannungsmomente $M_{a1}^{(2)}, M_{b1}^{(2)}$. Sie werden bei beliebiger Trägerform nach (345), bei Symmetrie nach (359) mit den überzähligen Größen Y_a, Y_b eines statisch bestimmten Hauptsystems berechnet. Wird diese für die folgenden Angaben ebenso vorausgesetzt wie auf S. 523, so ist

$$\left. \begin{aligned} Y_{a0} &= \frac{1}{2} (M_{a0}^{(2)} + M_{b0}^{(2)}), & Y_{b0} &= \frac{1}{2} (M_{a0}^{(2)} - M_{b0}^{(2)}), \\ Y_{a1} &= \frac{1}{2} (M_{a1}^{(2)} + M_{b1}^{(2)}), & Y_{b1} &= \frac{1}{2} (M_{a1}^{(2)} - M_{b1}^{(2)}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (843)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{a1} &= M_{a1}^{(2)} = M_{b1}^{(2)} = -1 \cdot y_{1,0} = -\int y_1 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx : \int \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \\ X_1 &= \delta_{10}^{(2)} / \delta_{11}^{(2)}, & X_1 &= \delta_{m1}^{(2)} / \delta_{11}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (844)$$

Zähler und Nenner werden nach (305) berechnet.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10}^{(2)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_0^{(0)} \cos \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int M_0^{(0)} y \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \\ \delta_{11}^{(2)} &= \frac{J_c}{F_c} \int \cos^2 \alpha \frac{F_c}{F} ds + \int y_1 (y_1 - y_{1,0}) \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \end{aligned} \right\} \quad (845)$$

$$\delta_{1t}^{(2)} = E J_c \alpha_t t l, \quad \delta_{1s}^{(2)} = E J_c [y_{1,0} (\varphi_a - \varphi_b) - \Delta l] \quad (\text{Abb. 508}). \quad (846)$$

Die Biegelinie $\delta_{m1}^{(2)}$ des beiderseits eingespannten Trägers wird ebenso wie auf S. 525 aus der stetigen Belastung $w_1^{(2)} = y J_c / J \cos \alpha$ entwickelt.

$$N = N_0^{(2)} - X_1 \cos \alpha, \quad M = M_0^{(2)} - X_1 y, \quad Q = Q_0^{(2)} - X_1 \sin \alpha. \quad (847)$$

Bei veränderlicher Belastung sind $N_0^{(2)}, M_0^{(2)}, Q_0^{(2)}$ Einflußlinien des beiderseits eingespannten Trägers. Bei vorgeschriebener Belastung werden die Biegemomente wieder nach S. 71 aufgezeichnet.

$$M = X_1 \left(\frac{M_0^{(2)}}{X_1} - y \right). \tag{848}$$

Damit ist gleichzeitig auch die Mittelkraftlinie der Belastung unter Beachtung der vorgeschriebenen statischen Randbedingungen gefunden worden.

Elastische Einspannung des symmetrischen Bogenträgers. Die elastische Bewegung der Widerlager führt zur Erweiterung des elastischen Systems. Dasselbe gilt daher auch für die virtuellen Arbeiten $l_1 \delta_{11}, l_2 \delta_{22}, l_3 \delta_{33}$. Jeder Anschlußquerschnitt a, b des Bogenträgers verschiebt sich infolge einer hier angreifenden Kraft 1 in waagerechter Richtung um die Strecke ϵ_{11}/EJ_c , infolge eines hier angreifenden Kräftepaars um die Strecke ϵ_{12}/EJ_c . Dabei verdreht sich der Querschnitt um den Winkel ϵ_{22}/EJ_c . Die Buchstaben $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{22}$ bezeichnen daher den EJ_c -fachen Betrag der Verschiebungen. Ihr Einfluß auf den Parameter $y_{1,0}$ ist auf S. 277 abgeleitet.

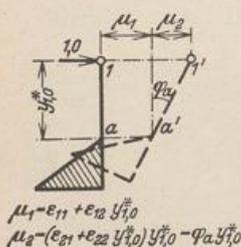


Abb. 511.

$$y_{1,0}^* = \left(\int_c^a y_1 \frac{J_c}{J} ds - \epsilon_{21} \right) : \left(\int_c^a \frac{J_c}{J} ds + \epsilon_{22} \right) \tag{Abb. 511}.$$

Die Vorzahlen des Ansatzes (824) werden in $\delta_{11}^*, \delta_{22}^*, \delta_{33}^*$ geändert. Sie sind nach Abb. 511

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^* &= \delta_{11} + 2 [(\epsilon_{11} + \epsilon_{12} y_{1,0}^*) + (\epsilon_{21} + \epsilon_{22} y_{1,0}^*) y_{1,0}^*], \\ \delta_{11}^* &= \delta_{11} + 2 (\epsilon_{11} + 2 \epsilon_{12} y_{1,0}^* + \epsilon_{22} y_{1,0}^{*2}), \\ \delta_{22}^* &= \delta_{22} + 2 \epsilon_{22}, \quad \delta_{33}^* = \delta_{33} + 2 \epsilon_{22}, \\ X_1 &= \delta_{10} / \delta_{11}^*, \quad X_2 = \delta_{20} / \delta_{22}^*, \quad X_3 = \delta_{30} / \delta_{33}^*. \end{aligned} \right\} \tag{849}$$

Bogenträger mit ungleich hohen Kämpfern. Die unabhängige Berechnung der drei statisch überzähligen Größen ist auf S. 274 gezeigt worden. Dasselbe Ergebnis kann auch durch die Bildung von statisch überzähligen Gruppenlasten nach Abschn. 36 erzielt werden. Der Ansatz ist auf S. 286 angeschrieben. Daneben läßt sich auch mit Vorteil der beiderseits eingespannte Balkenträger als Hauptsystem verwenden. Die Untersuchung bedarf nach den Bemerkungen auf S. 275 keiner Erläuterung.

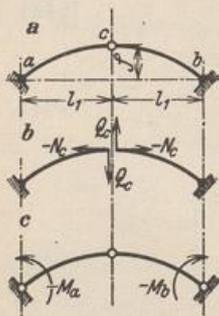


Abb. 512.

Der Eingelenkbogen. Der beiderseits eingespannte Bogenträger mit Scheitelgelenk hat nur Bedeutung für Bauwerke mit kleinem Pfeilverhältnis, deren Spannungen aus dem Schwinden des Baustoffs und aus Temperaturänderung im Vergleich zum Bogenträger ohne Gelenke vermindert werden sollen und deren Bogenstärken nächst dem Bogenscheitel nur klein sein können. Um die waagerechte Stützkraft des Eingelenkbogens herabzusetzen, kann dieser bei kleinen Stützweiten als Kragträger ausgerüstet werden. In diesem Falle entstehen waagerechte Kräfte nur aus Temperaturänderung und Nutzlast.

Die statische Untersuchung bedarf nach den ausführlichen Bemerkungen dieses Abschnitts keiner Erläuterung. Die beiden statisch überzähligen Größen können nach Abschn. 35 und 36 stets unabhängig voneinander angegeben werden. Bei Symmetrie des Tragwerks sind entweder $X_1 = -N_c, X_2 = Q_c$ äußere Kräfte eines Freitragerspaars oder $X_1 = \frac{1}{2} (M_a + M_b), X_2 = \frac{1}{2} (M_a - M_b)$ die statisch unbestimmten Gruppenlasten eines Dreigelenkbogenträgers (Abb. 512).

Besondere Bogenformen des beiderseits eingespannten Bogenträgers.

Um die Vorzeichen und die Belastungszahlen des Ansatzes formal integrieren zu können, wird die Funktion y der Mittellinie nach S. 508 als Parabel, Kreisbogen oder Kettenlinie mathematisch beschrieben und die für den Querschnitt maßgebende Funktion $J_c/J \cos \alpha = \zeta(x)$ nach

$$\zeta(x) = 1 - (1 - n) \xi^{2r} \quad (\text{Abb. 486}) \quad \text{oder} \quad \zeta(x) = \mu(1 - \varphi \mathfrak{C}_0 \xi c)$$

angenommen. Die Beiwerte n und r sind auf S. 509, die Beiwerte μ , φ und c auf S. 534 erläutert worden. Die Rechnung wird für $n = 1$ oder für $\mu = 1$ am einfachsten. Die Ergebnisse sind in Tabelle 42 enthalten.

Nach dem Ergebnis der Zahlenrechnung auf S. 538ff. stimmen die Einflußlinien der überzähligen Größen und ihr Betrag für ausgezeichnete Belastungen für die beiden Annahmen der Bogenkrümmung nach einer Parabel oder nach einer Kettenlinie nahezu überein. Sie sind also nur unwesentlich von der Bogenachse abhängig, können daher angenähert auch dann nach den einfachen Ansätzen beim Parabelbogen berechnet werden, wenn die Bogenachse nach einer Kettenlinie gekrümmt ist. Dies gilt jedoch nicht für die Wirkungslinie von X_1 , also für den Abstand $y_{1,0}$ (819) und für die Biegemomente. Diese sind von der Bogenform wesentlich abhängig und, wie zu erwarten, bei einem überschütteten Bogen mit der Kettenlinie als Achse günstiger als bei der Parabel. Dies liegt an dem Einfluß des Eigengewichts.

Tabelle 42. Beiderseits eingespannter Bogenträger mit analytisch bestimmter Mittellinie.

1. Die Mittellinie des Bogenträgers ist eine Parabel¹.

$$\xi = x/l_1, \quad \xi' = 1 - \xi,$$

$$\eta_{1,0} = y_{1,0}/f, \quad \eta_{2,0} = 1 - \eta_{1,0},$$

$$y = f(1 - \xi^2) - \eta_{1,0}.$$

Hauptsystem: Balkenträger auf zwei Stützen ($l = 2l_1$).

$$X_1 = H,$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(Y_a - Y_b),$$

$$X_3 = \frac{1}{2}(Y_a + Y_b),$$

$$A = A_0 + \frac{X_2}{l_1}, \quad B = B_0 - \frac{X_2}{l_1}, \quad M_a = X_1 y_{1,0} \mp X_2 - X_3.$$

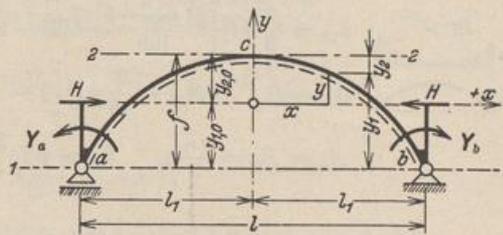


Abb. 513.

Die Integration der Ansätze (824ff.) liefert in Verbindung mit (819) folgende Ergebnisse:

a) Bogenform mit $J_c/J \cos \alpha = 1 - (1 - n) \xi^{2r}$,

$$r = 1, 2, 3 \dots \infty, \quad n = J_c/J_a \cos \alpha_a \quad (\text{Abb. 486}).$$

$$\eta_{1,0} = \frac{2}{3} \frac{4r(2+r) + 3n}{(3+2r)(n+2r)}, \quad \eta_{2,0} = 1 - \eta_{1,0} = \frac{1}{3} \frac{(1+2r)(3n+2r)}{(3+2r)(n+2r)},$$

$$\cos^2 \alpha \approx 1: \quad v = \frac{J_c}{F_c} \frac{2l_1}{\delta_{11}} = \frac{J_c}{F_c} f^2 \frac{1}{\left[\frac{8}{15} - \frac{8(1-n)}{(1+2r)(3+2r)(5+2r)} - \eta_{1,0}^2 \left(1 - \frac{1-n}{1+2r} \right) \right]},$$

$$\delta_{11} = 2l_1 f^2 (1 + v) \left[\frac{8}{15} - \frac{8(1-n)}{(1+2r)(3+2r)(5+2r)} - \eta_{1,0}^2 \left(1 - \frac{1-n}{1+2r} \right) \right].$$

$$\delta_{22} = 2l_1 \left[\frac{1}{3} - \frac{1-n}{3+2r} \right], \quad \delta_{33} = 2l_1 \left[1 - \frac{1-n}{1+2r} \right].$$

¹ Anwendung: Beispiel S. 535 und S. 538.

Beyer, Baustatik, 2. Aufl., 2. Neudruck.

Gleichungen der Biegelinien:

$$\frac{d^2 \delta_{m1}}{dx^2} = -\gamma_2 [1 - (1-n)\xi^{2r}], \quad \frac{d^2 \delta_{m2}}{dx^2} = +\frac{x}{l_1} [1 - (1-n)\xi^{2r}],$$

$$\frac{d^2 \delta_{m3}}{dx^2} = -[1 - (1-n)\xi^{2r}].$$

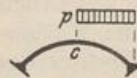
Die Integration ergibt

$$\delta_{m1} = \frac{l_1^2}{12} f \left\{ 6\eta_{2,0}(1-\xi^2) - (1-\xi^4) - 6(1-n) \left[\frac{\eta_{2,0}}{1+2r} \frac{1-\xi^{2(1+r)}}{1+r} - \frac{1}{3+2r} \frac{1-\xi^{2(2+r)}}{2+r} \right] \right\},$$

$$\delta_{m2} = -\frac{l_1^2}{6} \xi \left[(1-\xi^2) - \frac{3(1-n)}{3+2r} \frac{1-\xi^{2(1+r)}}{1+r} \right],$$

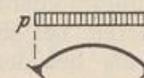
$$\delta_{m3} = \frac{l_1^2}{2} \left[(1-\xi^2) - \frac{1-n}{1+2r} \frac{1-\xi^{2(1+r)}}{1+r} \right].$$

Belastungszahlen für besondere Belastungsfälle:



$$\delta_{10} = \frac{p l_1^2}{4f} \frac{1}{1+\nu} \delta_{11},$$

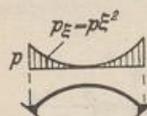
$$\delta_{20} = -\frac{p l_1^2}{24} \left[1 - \frac{6(1-n)}{(3+2r)(2+r)} \right],$$

$$\delta_{30} = \frac{p l_1^2}{3} \left[1 - \frac{3(1-n)}{(1+2r)(3+2r)} \right],$$


$$\delta_{10} = \frac{p l_1^2}{2f} \frac{1}{1+\nu} \delta_{11},$$

$$\delta_{20} = 0,$$

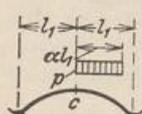
$$\delta_{30} = \frac{2}{3} p l_1^2 \left[1 - \frac{3(1-n)}{(1+2r)(3+2r)} \right],$$



$$\delta_{10} = \frac{2}{3} f l_1^3 \left[\frac{21\eta_{2,0}-5}{105} - (1-n) \left(\frac{\eta_{2,0}}{(1+2r)(5+2r)} - \frac{1}{(3+2r)(5+2r)} \right) \right],$$

$$\delta_{20} = 0, \quad \delta_{30} = \frac{2}{15} p l_1^3 \left[1 - \frac{5(1-n)}{(1+2r)(5+2r)} \right],$$

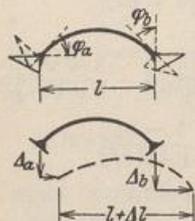
$$A_0 = B_0 = \frac{p l_1}{3}; \quad V_0 = p l_1 \frac{\xi^3}{3}; \quad M_0 = \frac{p l_1^2}{12} (1-\xi^4).$$



$$\delta_{20} = -\frac{p l_1^2}{12} \alpha^2 \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) - \frac{3(1-n)}{(3+2r)(1+r)} \left(1 - \frac{\alpha^{2(1+r)}}{2+r} \right) \right];$$

$$\delta_{30} = +\frac{p l_1^2}{2} \alpha \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) - \frac{1-n}{(1+2r)(1+r)} \left(1 - \frac{\alpha^{2(1+r)}}{3+2r} \right) \right];$$

$$\delta_{10} = \frac{p l_1^2 f}{12} \left\{ 6\eta_{2,0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) - \left(1 - \frac{\alpha^4}{5} \right) - 6(1-n) \left[\frac{\eta_{2,0}}{(1+2r)(1+r)} \left(1 - \frac{\alpha^{2(1+r)}}{3+2r} \right) - \frac{1}{(3+2r)(2+r)} \left(1 - \frac{\alpha^{2(2+r)}}{5+2r} \right) \right] \right\};$$



$$\delta_{1s} = +E J_c [(\varphi_a - \varphi_b) \eta_{1,0} f - \Delta l]; \quad l = 2l_1;$$

$$\delta_{2s} = -E J_c [(\varphi_a + \varphi_b) + \frac{2}{l} (\Delta_a - \Delta_b)];$$

$$\delta_{3s} = -E J_c (\varphi_a - \varphi_b);$$

$$\delta_{1t} = E J_c \alpha_s t l; \quad \delta_{2t} = \delta_{3t} = 0.$$

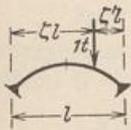
b) Bogenform mit $J_c/J \cos \alpha = 1 - (1 - n) \xi^2$; $n = J_c/J_a \cos \alpha_a$ (Abb. 486).

$$\eta_{1,0} = \frac{2}{5} \frac{4+n}{2+n}; \quad \nu = \frac{175}{4} \frac{J_c}{F_c \cdot f^2} \frac{2+n}{n(8+n)+8/3};$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{175} l f^2 (1+\nu) \frac{n(8+n)+8/3}{2+n};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{15} l(2+3n); \quad \delta_{33} = \frac{1}{3} l(2+n).$$

Gleichungen der Einflußlinien:

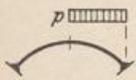


$$X_1 = \frac{35}{4} \frac{l}{f} \xi^2 \xi'^2 \frac{3n(4+n)+8(1-n)(2+n)\xi\xi'}{[3n(8+n)+8](1+\nu)};$$

$$X_2 = -\frac{l}{2} \xi \xi' (1-2\xi') \left(1 + 6\xi' \xi \frac{1-n}{2+3n}\right);$$

$$X_3 = \frac{l}{2} \xi \xi' \left(1 + 2\xi' \xi \frac{1-n}{2+n}\right).$$

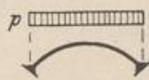
Besondere Belastungsfälle:



$$X_1 = \frac{p l^2}{16 f} \frac{1}{1+\nu};$$

$$X_2 = -\frac{p l^2}{64} \frac{3+2n}{2+3n};$$

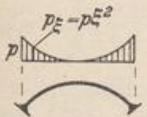
$$X_3 = \frac{p l^2}{40} \frac{4+n}{2+n}.$$



$$X_1 = \frac{p l^2}{8 f} \frac{1}{1+\nu};$$

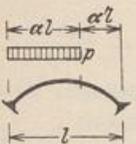
$$X_2 = 0;$$

$$X_3 = \frac{p l^2}{20} \frac{4+n}{2+n}.$$



$$X_1 = \frac{p l^2}{72 f} \frac{1}{1+\nu} \frac{8(1+4n)+5n^2}{3n(8+n)+8};$$

$$V_0, M_0 \text{ (S. 530). } X_2 = 0; \quad X_3 = \frac{1}{420} p l^2 \frac{16+5n}{2+n}.$$



$$X_2 = \frac{p l^2}{4} \alpha^2 \alpha'^2 \left(1 + 4 \frac{1-n}{2+3n} \alpha \alpha'\right);$$

$$X_3 = \frac{p l^2}{60} \alpha^2 \left\{5(1+2\alpha') + 2 \frac{1-n}{2+n} \alpha [1+3\alpha'(1+2\alpha')]\right\};$$

$$X_1 = \frac{p l^2}{8 f} \alpha^3 \frac{7n(4+n)[1+3\alpha'(1+2\alpha')] + 4(1-n)(2+n)\alpha\{1+2\alpha'[2+5\alpha'(1+2\alpha')]\}}{[3n(8+n)+8](1+\nu)}.$$

Temperaturänderung und Stützensenkung wie unter 1, a) S. 530.

c) Bogenform mit $J_c/J \cos \alpha = 1$ (Abb. 486).

$$\eta_{1,0} = \frac{2}{3}; \quad \nu = \frac{45}{4} \frac{J_c}{F_c f^2}; \quad \delta_{11} = \frac{4}{45} l f^2 (1+\nu); \quad \delta_{22} = \frac{l}{3}; \quad \delta_{33} = l.$$

Gleichungen der Einflußlinien: (Abb. 514, S. 532).

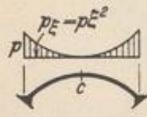
$$X_1 = \frac{15}{4} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu} \xi^2 \xi'^2; \quad X_2 = -\frac{l}{2} \xi \xi' (1-2\xi'); \quad X_3 = \frac{l}{2} \xi \xi'.$$

$$A = \xi'^2 (1+2\xi); \quad B = \xi^2 (1+2\xi'); \quad H = X_1.$$

$$M_a = l \xi \xi'^2 \left[\frac{5}{2(1+\nu)} \xi - 1 \right]; \quad M_b = l \xi^2 \xi' \left[\frac{5}{2(1+\nu)} \xi' - 1 \right];$$

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}; \quad M_c = \frac{l}{2} \xi^2 \left[1 - \frac{5}{2(1+\nu)} \xi'^2 \right].$$

Besondere Belastungsfälle:



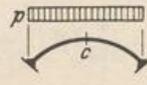
$$A = B = \frac{pl}{6},$$

$$H = \frac{pl}{56} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu},$$

$$M_a = M_b = -\frac{pl^2}{420} \frac{7\nu+2}{1+\nu},$$

$$M_c = -\frac{pl^2}{1680} \frac{3-7\nu}{1+\nu}.$$

$$\nu = 0: \max M_m = +\frac{pl^2}{509}; \zeta_m = 0,233.$$

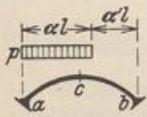


$$A = B = \frac{pl}{2},$$

$$H = \frac{pl}{8} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu};$$

$$M_a = M_b = -\frac{pl^2}{12} \frac{\nu}{1+\nu},$$

$$M_c = +\frac{pl^2}{24} \frac{\nu}{1+\nu}.$$



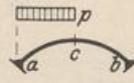
$$A = \frac{pl}{2} \alpha [1 + \alpha' (1 + \alpha \alpha')];$$

$$B = \frac{pl}{2} \alpha^2 (1 - \alpha'^2),$$

$$H = \frac{pl^2}{8f} \alpha^3 \frac{1 + 3\alpha'(1 + 2\alpha')}{1 + \nu},$$

$$M_a = -\frac{pl^2}{12} \alpha^2 \frac{6\alpha'^3 + \nu(1 + 2\alpha' + 3\alpha'^2)}{1 + \nu},$$

$$M_b = \frac{pl^2}{12} \alpha^3 \frac{6\alpha'^2 - \nu(1 + 3\alpha')}{1 + \nu}.$$



$$A = \frac{13}{32} pl,$$

$$B = \frac{3}{32} pl,$$

$$H = \frac{pl}{16} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu},$$

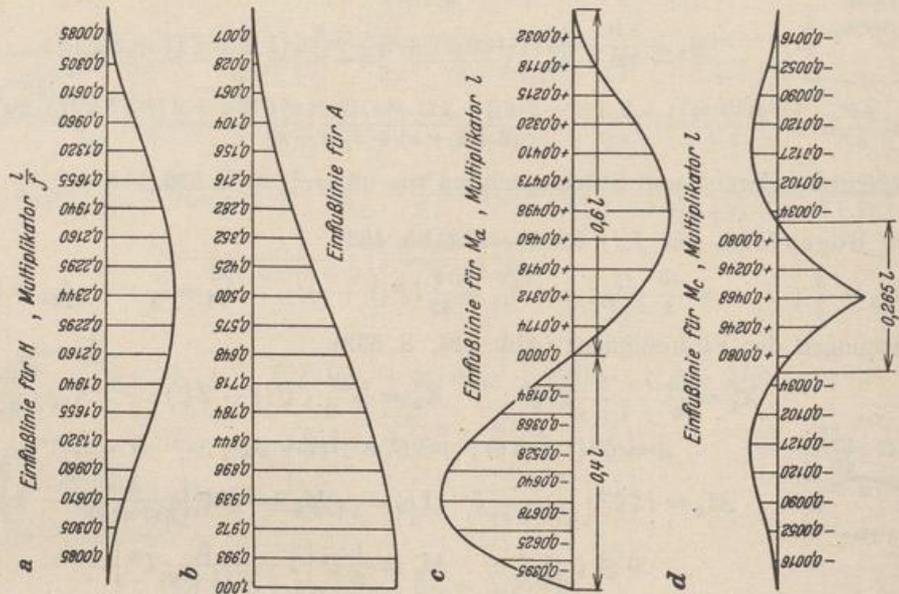
$$M_a = -\frac{pl^2}{192} \frac{3 + 11\nu}{1 + \nu},$$

$$M_b = \frac{pl^2}{192} \frac{3 - 5\nu}{1 + \nu},$$

$$M_c = \frac{pl^2}{48} \frac{\nu}{1 + \nu}.$$

Temperaturänderung und Stützensenkung wie unter 1, a), S. 530.

Abb. 514. Einflußlinien für Bogen mit $Jc/J\cos\alpha = 1$ (S. 531).



2. Die Mittellinie des Bogenträgers ist ein symmetrischer Kreisbogen mit $l = 2 l_1$, f und $2 \alpha_0$ (Abb. 515)¹.

$$\xi = x/l_1, \quad \xi' = 1 - \xi,$$

$$ds = r d\alpha.$$

$$r = \frac{f}{2} \left[1 + \left(\frac{l_1}{f} \right)^2 \right], \quad e = r - f,$$

$$\sin \alpha_0 = l_1/r, \quad \cos \alpha_0 = e/r.$$

$$x = r \cdot \sin \alpha,$$

$$y_1 = r (\cos \alpha - \cos \alpha_0).$$

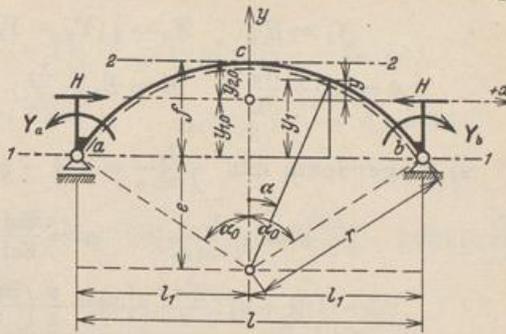


Abb. 515.

Hauptsystem: Balkenträger auf zwei Stützen ($l = 2 l_1$)

$$X_1 = H, \quad X_2 = \frac{1}{2} (Y_a - Y_b), \quad X_3 = \frac{1}{2} (Y_a + Y_b),$$

$$A = A_0 + \frac{X_2}{l_1}, \quad B = B_0 - \frac{X_2}{l_1}, \quad M_b^a = X_1 y_{1,0} \mp X_2 - X_3.$$

Die Bogenstärke wird konstant angenommen: $J_c/J = 1$.

$$y_{1,0} = r \left(\frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} - \cos \alpha_0 \right), \quad y = r \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \right].$$

$$\delta_{11} = 2 \int_0^{\alpha_0} y^2 ds = r^3 \alpha_0 \left[1 + \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \cos \alpha_0 - 2 \left(\frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \right)^2 \right] + \frac{J}{F} r \alpha_0 \left(1 + \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \cos \alpha_0 \right),$$

$$\delta_{22} = 2 \int_0^{\alpha_0} \left(\frac{x}{l_1} \right)^2 ds = \frac{r \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0} \left(1 - \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \cos \alpha_0 \right); \quad \delta_{33} = 2 \int_0^{\alpha_0} ds = 2 r \alpha_0.$$

Die Einflußlinien ergeben sich aus den Biegelinien δ_{m1} , δ_{m2} , δ_{m3} , deren Gleichungen nach (195) angeschrieben werden.

$$\frac{d^2 \delta_{m1}}{dx^2} = - \frac{\left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \right)}{\cos \alpha}, \quad \frac{d^2 \delta_{m2}}{dx^2} = \frac{r \sin \alpha}{l_1 \cos \alpha}, \quad \frac{d^2 \delta_{m3}}{dx^2} = - \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Durch Integration ist mit Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$\delta_{m1} = r^3 \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \left[(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) - (\cos \alpha_0 + \alpha_0 \sin \alpha_0) + \frac{\alpha_0}{2 \sin \alpha_0} (\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha) \right],$$

$$\delta_{m2} = - \frac{r^2}{2 \sin \alpha_0} \left[(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha) - \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} (\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \alpha_0) \right],$$

$$\delta_{m3} = r^2 [(\cos \alpha_0 + \alpha_0 \sin \alpha_0) - (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha)].$$

3. Die Mittellinie des Bogenträgers ist eine symmetrische Kettenlinie²:

$$y_2 = y_s^* (\operatorname{Cof} \xi c - 1), \quad \xi = x/l_1.$$

Sie ist bestimmt durch $l = 2 l_1$, f und die Belastungshöhen im Scheitel q_s , im Kämpfer q_k . Verhältnis $q_k/q_s = \kappa$. Abb. 487.

$$y_s^* = \frac{1}{\kappa - 1} f,$$

$$c = \operatorname{ArCof} \kappa,$$

$$\operatorname{Cof} c = \kappa, \quad \operatorname{Sin} c = \sqrt{\kappa^2 - 1}.$$

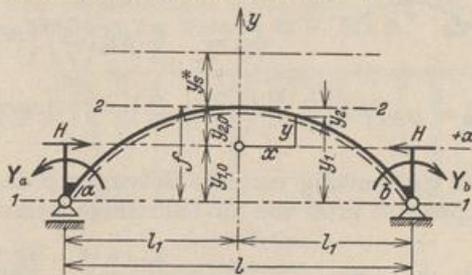


Abb. 516.

¹ Wegen der Fehlerempfindlichkeit der Formeln empfiehlt sich die Verwendung einer Rechenmaschine.

² Anwendung: Beispiel S. 540.

Hauptsystem: Balkenträger auf zwei Stützen ($l = 2l_1$)

$$X_1 = H, \quad X_2 = \frac{1}{2}(Y_a - Y_b), \quad X_3 = \frac{1}{2}(Y_a + Y_b).$$

$$A = A_0 + \frac{X_2}{l_1}, \quad B = B_0 - \frac{X_2}{l_1}, \quad M_0^a = X_1 y_{1,0} \mp X_2 - X_3.$$

a) Bogenform mit $\frac{J_c}{J \cos \alpha} = \mu (1 - \varphi \mathfrak{Cof} \xi c)$,

$$n = \frac{J_c}{J_a \cos \alpha_a}, \quad \mu = \frac{\mathfrak{Cof} c - n}{\mathfrak{Cof} c - 1}, \quad \varphi = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

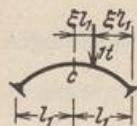
$$y_{2,0} = y_s^* \frac{(1 + \varphi) \left(\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} - 1 \right) - \frac{\varphi}{2} \left(\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \mathfrak{Cof} c - 1 \right)}{1 - \varphi \frac{\mathfrak{Sin} c}{c}}, \quad \psi = 1 + \frac{y_{2,0}}{y_s^*}.$$

Zur Abschätzung des Einflusses der Längskräfte genügen die Werte ν für parabolisch gekrümmte Mittellinie und gleich großes n der Tabelle 42, 1, b) S. 531.

$$\delta_{11} = 2 \mu l_1 y_s^{*2} (1 + \nu) \left[\psi^2 - 2 \psi \left(1 + \frac{\varphi \psi}{2} \right) \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} + \frac{1}{2} (1 + 2 \varphi \psi) \left(\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \mathfrak{Cof} c + 1 \right) - \frac{\varphi}{3} \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} (2 + \mathfrak{Cof}^2 c) \right],$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{3} \mu l_1 \left\{ 1 - 3 \varphi \left[\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} + \frac{2}{c^2} \left(\frac{\mathfrak{Sin} c}{c} - \mathfrak{Cof} c \right) \right] \right\}, \quad \delta_{33} = 2 \mu l_1 \left(1 - \varphi \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \right).$$

Gleichungen der Biegelinien:

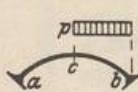


$$\delta_{m1} = \frac{\mu}{2} y_s^* \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left\{ \left[c^2 \left(\psi + \frac{\varphi}{2} \right) - 2 (1 + \varphi \psi) \mathfrak{Cof} c + \frac{\varphi}{4} \mathfrak{Cof} 2c \right] - \left[\left(\psi + \frac{\varphi}{2} \right) (\xi c)^2 - 2 (1 + \varphi \psi) \mathfrak{Cof} \xi c + \frac{\varphi}{4} \mathfrak{Cof} 2 \xi c \right] \right\},$$

$$\delta_{m2} = -\frac{\mu}{6c} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \xi c \left\{ \left[c^2 - 6 \varphi (\mathfrak{Cof} c - 2 \frac{\mathfrak{Sin} c}{c}) \right] - \left[(\xi c)^2 - 6 \varphi (\mathfrak{Cof} \xi c - 2 \frac{\mathfrak{Sin} \xi c}{\xi c}) \right] \right\},$$

$$\delta_{m3} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left\{ \left[c^2 - 2 \varphi \mathfrak{Cof} c \right] - \left[(\xi c)^2 - 2 \varphi \mathfrak{Cof} \xi c \right] \right\}.$$

Besondere Belastungsfälle:

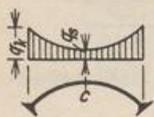


$$\delta_{20} = -\frac{\mu}{24} p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left[c^2 - 12 \varphi (\mathfrak{Cof} c - 4 \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} + 6 \frac{\mathfrak{Cof} c - 1}{c^2}) \right],$$

$$\delta_{30} = \frac{\mu}{3} p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left[c^2 - 3 \varphi (\mathfrak{Cof} c - \frac{\mathfrak{Sin} c}{c}) \right],$$

$$\delta_{10} = \mu y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \left[\frac{c^2}{3} \left(\psi + \frac{\varphi}{2} \right) - (1 + \varphi \psi) \left(\mathfrak{Cof} c - \frac{\mathfrak{Sin} c}{c} \right) + \frac{\varphi}{8} \left(\mathfrak{Cof} 2c - \frac{\mathfrak{Sin} 2c}{2c} \right) \right].$$

Für gleichmäßig verteilte Belastung p des ganzen Trägers ist $\delta_{20} = 0$, δ_{10} und δ_{30} doppelt so groß wie für halbseitige Belastung.



$$H_a = \frac{q_s}{y_s^*} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2; \quad (\text{S. 511}) \quad M = \frac{\nu}{1 + \nu} H_a \cdot y;$$

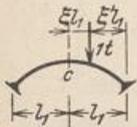
$$N = -\frac{H_a}{\cos \alpha} \frac{1 + \nu \sin^2 \alpha}{1 + \nu} \approx -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{H_a}{1 + \nu}; \quad (\text{S. 527}).$$

b) Bogenform mit $\frac{J_c}{J \cos \alpha} = 1$.

$$\eta_0 = 1 - \frac{\gamma_{2,0}}{f}, \quad \gamma_{2,0} = y_s^* \left(\frac{\sin c}{c} - 1 \right); \quad y = y_s^* \left(\frac{\sin c}{c} - \cos \xi c \right).$$

$$\delta_{11} = l_1 y_s^{*2} (1 + \nu) \left[1 + \frac{\sin c}{c} \cos c - 2 \left(\frac{\sin c}{c} \right)^2 \right]; \quad \delta_{22} = \frac{2}{3} l_1; \quad \delta_{33} = 2 l_1.$$

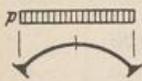
Gleichungen der Einflußlinien:



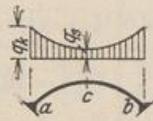
$$X_1 = \frac{y_s^*}{2} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{1}{\delta_{11}} \left[\left(c^2 \frac{\sin c}{c} - 2 \cos c \right) - \left((\xi c)^2 \frac{\sin c}{c} - 2 \cos \xi c \right) \right];$$

$$X_2 = -\frac{l_1}{4} \xi (1 - \xi^2) = -\frac{l_1}{4} \omega_D; \quad X_3 = \frac{l_1}{4} (1 - \xi^2).$$

Besondere Belastungsfälle:



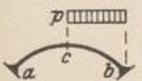
$$X_2 = 0; \quad X_3 = \frac{p l_1^2}{3};$$



$$H_a = \frac{q_s}{y_s^*} \left(\frac{l_1}{c} \right)^2;$$

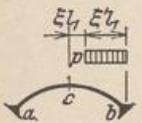
$$M = \frac{\nu}{1 + \nu} H_a \cdot y;$$

$$X_1 = y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{2}{\delta_{11}} \left[\left(1 + \frac{c^2}{3} \right) \frac{\sin c}{c} - \cos c \right]. \quad N \approx -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{H_a}{1 + \nu} \text{ (s. unter a).}$$



$$X_1 = y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{1}{\delta_{11}} \left[\left(1 + \frac{c^2}{3} \right) \frac{\sin c}{c} - \cos c \right];$$

$$X_2 = -\frac{p l_1^2}{16}; \quad X_3 = \frac{p l_1^2}{6}.$$



$$X_1 = y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c} \right)^2 \frac{1}{\delta_{11}} \times \left[\left(1 + \frac{c^2}{3} \right) \frac{\sin c}{c} - \cos c - \frac{\sin \xi c - \xi c \cos c}{c} + \frac{c^2}{6} \xi (\xi^2 - 3) \frac{\sin c}{c} \right];$$

$$X_2 = -\frac{p l_1^2}{16} (1 - \xi^2)^2; \quad X_3 = \frac{p l_1^2}{12} \xi^2 (3 - \xi').$$

Temperaturänderung und Stützensenkung wie unter 1, a) S. 530.

Statische Untersuchung eines beiderseits eingespannten Gewölbes (Abb. 517) mit parabolisch gekrümmter Mittellinie und verschiedenen Annahmen über die Bogenform als Beispiel für die Anwendung der Tabelle 42 S. 529 ff.

$$y_1 = f(1 - \xi^2).$$

Der Querschnitt ist nach S. 510 bestimmt durch

$$J_c / J \cos \alpha = 1 - (1 - n) \xi^{2r}.$$

Die Untersuchung wird durchgeführt für

$$n = J_c / J_k \cos \alpha_k = 0$$

und veränderliches r ($r = 1, 2, 3$ und ∞). $r = \infty$

liefert mit $J_c / J \cos \alpha = 1$ dieselbe Bogenform

wie $n = 1$. Die geometrische Bedeutung der

Annahmen für die Bogenform zeigt Abb. 486 S. 510. Die Zahlenrechnung nach S. 529 wird für

$r = 2$ angegeben, im übrigen auf die Mitteilung der Ergebnisse beschränkt.

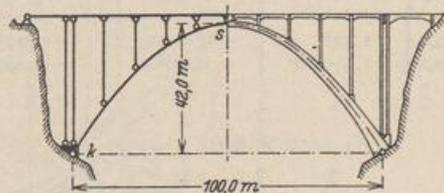


Abb. 517.

1. Geometrische Grundlagen. $l = 2l_1 = 100,0 \text{ m}$; $f = 42,0 \text{ m}$.

$$F_s = F_c = 2,1 \text{ m}^2; \quad J_s = J_c = 0,772 \text{ m}^4; \quad J_e/J \cos \alpha = 1 - \xi^2 r.$$

2. Hauptsystem nach S. 529: Balken auf 2 Stützen (Abb. 513)

$\eta_{1,0} = \frac{2}{3} \frac{4+2r}{3+2r}$	$r =$	1	2	3	∞
$\eta_{2,0} = \frac{1}{3} \frac{1+2r}{3+2r}$	$\eta_{1,0} =$	0,800	0,762	0,741	0,666
	$\eta_{2,0} =$	0,200	0,238	0,259	0,333

3. Vorzahlen für $r = 2$ nach S. 529

$$k = \left[\frac{8}{15} - \frac{8}{(1+2r)(3+2r)(5+2r)} - \eta_{1,0}^2 \left(1 - \frac{1}{1+2r} \right) \right] = \frac{8}{15} - \frac{8}{5 \cdot 7 \cdot 9} - 0,762^2 \left(1 - \frac{1}{5} \right)$$

$$= 0,04342; \quad r = \frac{0,772}{2,1} \frac{1}{42,0^2 k} = 0,004800;$$

$$\delta_{11} = 100,0 \cdot 42,0^2 (1+r) k = 7695,98;$$

$$\delta_{22} = 100,0 \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right] = 19,0476; \quad \delta_{33} = 100,0 \left[1 - \frac{1}{5} \right] = 80,00.$$

$r =$	1	2	3	∞
$k =$	0,03047	0,04342	0,05115	0,08889
$r =$	0,006840	0,004800	0,004074	0,002345
$\delta_{11} =$	5411,60	7695,98	9059,55	15716,89
$\delta_{22} =$	13,3333	19,0476	22,2222	33,3333
$\delta_{33} =$	66,6667	80,0000	85,7143	100,000

4. Einflußlinien der überzähligen Größen für $r = 2$.

a) X_1 nach S. 530 mit $\eta_{2,0} = 0,238$; $6\eta_{2,0} = 1,428$.

$$\frac{6\eta_{2,0}}{(1+2r)(1+r)} = 0,0952, \quad X_1 = \frac{l_1^2 f}{12\delta_{11}} \cdot K_1 = 1,13696 \cdot K_1,$$

$$\frac{6}{(3+2r)(2+r)} = 0,21429, \quad \xi^2, \xi^4 \text{ vgl. Tab. 22 S. 116.}$$

ξ	ξ^2	ξ^4	ξ^6	ξ^8	$1 - \xi^2$	$1 - \xi^4$	$1 - \xi^6$	$1 - \xi^8$
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,2	0,04	0,0016	0,00006	0,00000	0,96	0,9984	0,99994	1,000000
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

ξ	$1,428(1-\xi^2)$	$-(1-\xi^4)$	$-0,0952(1-\xi^6)$	$+0,21429(1-\xi^8)$	$\{\Sigma\} = K_1$	$X_1 = 1,137 \cdot K_1$
0,0	1,428	-1,0000	-0,09520	0,21429	0,54709	0,62201
0,2	1,37088	-0,9984	-0,09519	0,21429	0,49157	0,55890
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

b) X_2 nach S. 530

$$\frac{3}{3+2r} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{7} = 0,14286,$$

$$X_2 = -\frac{l_1^2}{6\delta_{22}} \xi \cdot K_2 = -21,875 \cdot K_2 \cdot \xi.$$

c) X_3 nach S. 530

$$\frac{1}{1+2r} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{15} = 0,06667,$$

$$X_3 = +\frac{l_1^2}{2\delta_{33}} \cdot K_3 = 15,625 \cdot K_3.$$

ξ	$1 - \xi^2$	$-0,14285 (1 - \xi^6)$	$[\Sigma] = K_2$	$K_2 \cdot \xi$	$X_2 = -21,875 \cdot K \cdot \xi$
0,0	1,00	- 0,14286	0,85714	0,00000	- 0,0000
0,2	0,96	- 0,14285	0,81715	0,16343	- 3,5750
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ξ	$1 - \xi^2$	$-0,06667 (1 - \xi^6)$	$[\Sigma] = K_3$	$X_3 = 15,625 \cdot K_3$
0,0	1,00	- 0,06667	0,93333	14,583
0,2	0,96	- 0,06666	0,89334	13,958
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Ergebnisse für die Abb. 518

ξ	X_1 [t]			X_2 [mt]			X_3 [mt]		
	$r = 1$	$r = 2$	$r = \infty$	$r = 1$	$r = 2$	$r = \infty$	$r = 1$	$r = 2$	$r = \infty$
0,0	0,647	0,622	0,557	- 0,00	- 0,00	- 0,00	15,63	14,58	12,50
0,2	0,572	0,559	0,513	- 4,13	- 3,58	- 2,40	14,88	13,96	12,00
0,4	0,383	0,392	0,393	- 6,85	- 6,11	- 4,20	12,71	12,09	10,50
0,6	0,170	0,186	0,228	- 7,10	- 6,61	- 4,80	9,28	9,01	8,00
0,8	0,030	0,036	0,072	- 4,57	- 4,46	- 3,60	4,91	4,86	4,50
1,0	0,000	0,000	0,000	- 0,00	- 0,00	- 0,00	0,00	0,00	0,00

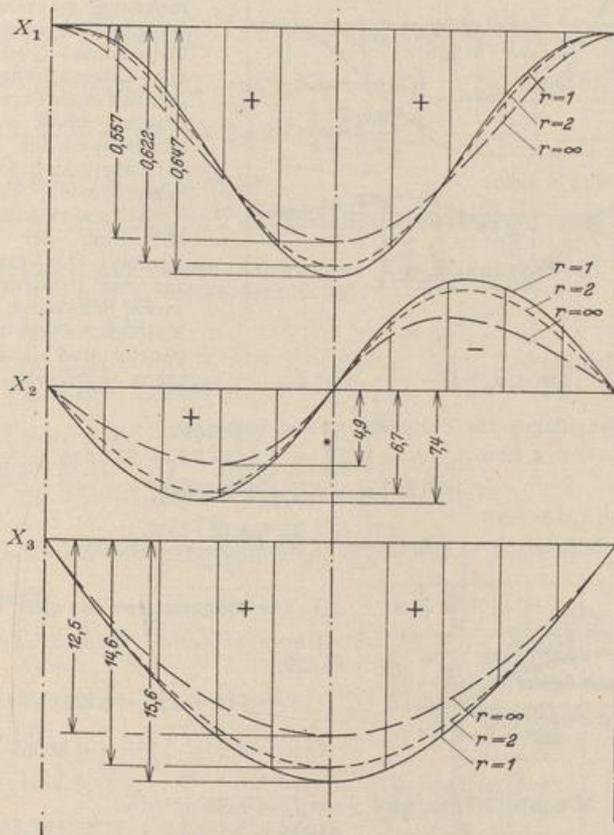
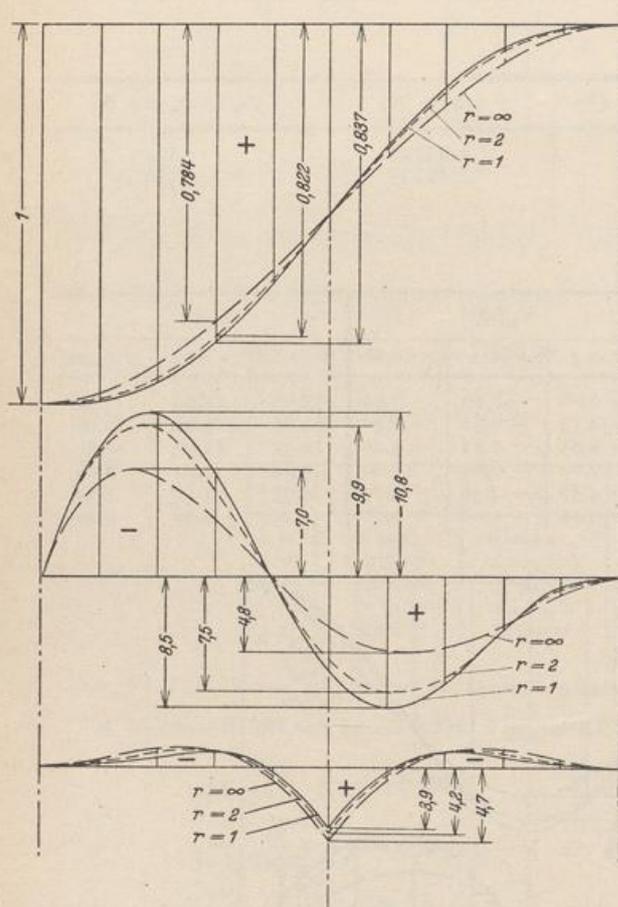


Abb. 518.

5. Einflußlinien der Stützkraft A und der Biegemomente im Kämpfer und Scheitel (Abb. 519).

$$A = A_0 + X_2/l_1 = A_0 + X_2/50,0.$$

$$M_a = X_1 \cdot y_{1,0} - X_2 - X_3; \quad M_c = M_{c0} - X_1 y_{2,0} - X_3.$$



A Schnittkräfte und Randspannungen eines symmetrischen Bogenträgers als Funktion der Bogenform.

Um den Spannungszustand eines Bogenträgers als Funktion einer mathematisch beschriebenen Mittellinie und Querschnittsänderung zu studieren, werden sechs Träger untersucht, von denen drei nach der quadratischen Parabel, drei andere nach der Kettenlinie gekrümmt sind, die mit großer Annäherung als Stützlinie für Eigengewicht angesehen werden kann. Das Verhältnis

$$n = J_c/J_k \cos \alpha_k$$

(S. 509) wird mit 0,4, 1,0 und 1,29 gewählt. Das Verhältnis $n = 0,4$ ist bei zahlreichen Bauwerken eingehalten, das Verhältnis $n = 1,0$ vereinfacht die Zahlenrechnung, während $n = 1,29$ für $f/l \approx 1/5$ Bogenträger mit gleichbleibendem Querschnitt liefert. Die Untersuchung des Bogenträgers mit einer Parabel oder Kettenlinie als Achse und $n = 0,4$ wird als Beispiel für die Anwendung der Tabelle 42 S. 529 ff. ausführlich angeschrieben, für die anderen Verhältniszahlen n jedoch auf die Mitteilung der Ergebnisse beschränkt. Der Vergleich stützt sich auf eine Belastung aus Eigengewicht, Schwinden und halbseitiger Nutzlast. Diese ist relativ ungünstig und daher zur summarischen Bewertung geeignet.

Abb. 519.

Gemeinsame Grundlagen für Formgebung und Belastung.

$$f = 4,12 \text{ m}, \quad l_1 = 13,72 \text{ m}, \quad l = 2l_1 = 27,44 \text{ m},$$

$$d_c = 0,52 \text{ m}, \quad J_c = 0,0118 \text{ m}^4.$$

Belastungsordinaten (Abb. 520)

$$\text{Scheitel: } q_s = 2,55 \text{ t/m}^2; \quad \text{Kämpfer: } q_k = 11,02 \text{ t/m}^2.$$

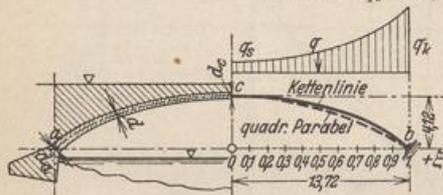


Abb. 520.

$$\cos \alpha_a = 0,8562.$$

Mit $d_a = 0,77 \text{ m}$ wird $J_a = J_b = 0,038 \text{ m}^4$ und

$$n = \frac{J_c}{J_a \cos \alpha_a} = \frac{0,0118}{0,038 \cdot 0,8562} = 0,36 \approx 0,4.$$

I. Die Bogenachse ist eine Parabel.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 513) nach S. 529.

$$y_1 = f(1 - \xi^2) = 4,12(1 - \xi^2);$$

$$\text{tg } \alpha = -2 \left(\frac{f}{l_1} \right) \xi = -0,60058 \xi;$$

Approximation des Querschnittes (Abb. 486) nach Tab. 42, 1, b: $J_c/J \cos \alpha = 1 - 0,6 \xi^2$.

Hieraus Gewölbbestärken d (Abb. 520), Querschnitte F und Widerstandsmomente W .

2. Hauptsystem nach S. 529 Balken auf 2 Stützen (Abb. 513).

$$\eta_{1,0} = \frac{2 \cdot 4 + 0,4}{5 \cdot 2 + 0,4}$$

$$y = y_1 - y_{1,0}$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$\eta_{1,0} =$	0,73333	0,66667	0,64316
$y_{1,0} =$	3,02132	2,74668	2,64982

3. Vorzahlen nach S. 531. Bogenträger $n = 0,4$; $F_c = 0,52 \text{ m}^2$; $f^2 = 16,9744$:

$$v = \frac{175}{4} \frac{0,0118}{0,52 \cdot 16,9744} \frac{2 + 0,4}{0,4(8 + 0,4) + 8/3} = 0,02329$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{175} \cdot 27,44 \cdot 16,9744 \cdot 1,02329 \frac{0,4(8 + 0,4) + 8/3}{2 + 0,4}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{15} 27,44 (2 + 3 \cdot 0,4)$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{3} 27,44 (2 + 0,4)$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$v =$	0,02329	0,01504	0,01313
$\delta_{11} =$	27,35682	42,02512	48,03193
$\delta_{22} =$	5,85387	9,14667	10,73819
$\delta_{33} =$	21,95200	27,44000	30,09253

4. Einflußlinien der überzähligen Größen nach S. 531. Bogenträger $n = 0,4$:

$$X_1 = \frac{35}{4} \frac{27,44}{4,12} \omega_R^2(\zeta) \frac{3 \cdot 0,4(4 + 0,4) + 8(1 - 0,4)(2 + 0,4) \omega_R(\zeta)}{[3 \cdot 0,4(8 + 0,4) + 8] \cdot 1,02329}$$

$$= 16,63150 \omega_R^2(\zeta) + 36,28690 \omega_R(\zeta) \quad (\text{Abb. 524a});$$

$$X_2 = -\frac{27,44}{2} \omega_R(\zeta) (1 - 2\zeta') \left[1 + 6 \omega_R(\zeta) \frac{1 - 0,4}{2 + 3 \cdot 0,4} \right]$$

$$= -1,715 \omega_R(\zeta) (1 - 2\zeta') [8 + 9 \omega_R(\zeta)] \quad (\text{Abb. 524b});$$

$$X_3 = \frac{27,44}{2} \omega_R(\zeta) \left[1 + 2 \omega_R(\zeta) \frac{1 - 0,4}{2 + 0,4} \right]$$

$$= 6,86 [2 \omega_R(\zeta) + \omega_R^2(\zeta)] \quad (\text{Abb. 524c}).$$

Die Einflußlinien X_1 , X_2 und X_3 für $n = 1,29$ unterscheiden sich nur wenig von den Ergebnissen für $n = 1,0$.

5. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht.

Bogenträger $n = 0,4$; $q_k - q_s = 8,47$ nach S. 531:

a) $p = \text{const} = q_s = 2,55$:

$$X'_1 = \frac{2,55 \cdot 27,44^2}{8 \cdot 4,12} \frac{1}{1,02329}; \quad X'_2 = 0; \quad X'_3 = \frac{2,55 \cdot 27,44^2}{20} \frac{4 + 0,4}{2 + 0,4}$$

b) $p\xi = p\xi^2 = (q_k - q_s)\xi^2 = 8,47\xi^2$:

$$X''_1 = \frac{8,47 \cdot 27,44^2}{72 \cdot 4,12} \frac{1}{1,02329} \frac{8(1 + 4 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,16)}{3 \cdot 0,4(8 + 0,4) + 8}$$

$$X''_2 = 0; \quad X''_3 = \frac{8,47 \cdot 27,44^2}{420} \frac{16 + 5 \cdot 0,4}{2 + 0,4}$$

c) Hieraus folgt:

$$X_1 = X'_1 + X''_1;$$

$$X_2 = 0;$$

$$X_3 = X'_3 + X''_3.$$

d) Längskräfte:

$$V_0 = l_1 \left[q_s \xi + \frac{q_k - q_s}{3} \xi^3 \right]$$

$$= 13,72 [2,55 \xi + 2,8233 \xi^3];$$

$$N = -[V_0 \sin \alpha + X_1 \cos \alpha] \quad (\text{Abb. 523}).$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$X'_1 =$	56,9277	57,3903	57,4984
$X''_1 =$	25,1003	27,2322	27,8100
$X_1 =$	82,0280	84,6225	85,3084
$X'_3 =$	176,0025	160,0028	154,3612
$X''_3 =$	113,8842	106,2919	103,6150
$X_3 =$	289,8867	266,2947	257,9762

e) Momente:

$$M_0 = \frac{l_1^3}{12} [q_k + 5 q_s - 6 q_s \xi^2 - (q_k - q_s) \xi^4]$$

$$= 372,8688 - 240,0039 \xi^2 - 132,8649 \xi^4;$$

$$M = M_0 - X_1 y - X_3 \quad (\text{Abb. 525}).$$

f) Um die Bauwürdigkeit der drei Gewölbe miteinander zu vergleichen, werden die Randspannungen $\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}$ (Abb. 527) für den homogenen Querschnitt angegeben, wenn auch $\sigma_{bz} > 5 \text{ kg/cm}^2$.

6. Schnittkräfte aus einseitiger Verkehrslast $p = 1,0 \text{ t/m}^2$. Bogenträger $n = 0,4$:

a) Überzählige Größen: $X_1 = 1,0 \frac{27,44^2}{16 \cdot 4,12} \frac{1}{1,02329};$

$$X_2 = -1,0 \frac{27,44^2}{64} \frac{3 + 2 \cdot 0,4}{2 + 3 \cdot 0,4}; \quad X_3 = 1,0 \frac{27,44^2}{40} \frac{4 + 0,4}{2 + 0,4};$$

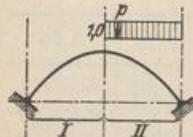


Abb. 521.

n =	0,4	1,0	1,29
$X_1 =$	11,1623	11,2530	11,2742
$X_2 =$	-13,9708	-11,7649	-11,1837
$X_3 =$	34,5103	31,3731	30,26669

b) Längskräfte:

$$A_0 = \frac{p l_1}{4} = 3,43; \quad V_{0I} = A_0; \quad V_{0II} = A_0 (1 - 4 \xi).$$

$$N = -[V_0 \sin \alpha + X_1 \cos \alpha + X_2/l_1 \sin \alpha] \quad (\text{Abb. 523}).$$

c) Momente:

$$M_{0I} = A l_1 (1 + \xi); \quad M_{0II} = A l_1 (1 + \xi - 2 \xi^2).$$

$$M = M_0 - X_1 y + X_2 \xi - X_3 \quad (\text{Abb. 526}).$$

7. Schnittkräfte aus Schwinden ($t = -15^\circ$).

Bogenträger $n = 0,4$: $\alpha_t = 0,00001$, $E = 2100000 \text{ t/m}^2$.

a) $\delta_{1t} = -2100000 \cdot 0,011815 \cdot 0,00001 \cdot 27,44 = -101,99448;$

n =	0,4	1,0	1,29
X_{1t}	-3,72830	-2,42699	-2,12347

$$X_{2t} = X_{3t} = 0.$$

b) Längskräfte:

$$N_t = -X_{1t} \cos \alpha \quad (\text{Abb. 523});$$

c) Momente:

$$M_t = -X_{1t} \cdot y \quad (\text{Abb. 525}).$$

8. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden.

Momente: Abb. 528; Randspannungen: Abb. 529.

II. Die Bogenachse ist eine Kettenlinie.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 516 S. 533)

$$\text{Cof } c = \kappa = \frac{q_k}{q_s} = 4,32, \quad c = \text{Ar Cof } \kappa = 2,14273, \quad y_s^* = \frac{l}{\kappa - 1} = 1,241.$$

$$y_2 = 1,241 (\text{Cof } 2,14273 \xi - 1).$$

$$\text{Sin } c = \sqrt{\kappa^2 - 1} = 4,20267, \quad \text{tg } \alpha = -\frac{c}{l_1} y_s^* \text{Sin } \xi c = -0,19382 \text{ Sin } \xi c.$$

$$\cos \alpha_a = 0,77534. \quad \text{Mit } d_a = 0,77 \text{ m wird } J_a = J_b = 0,038 \text{ m}^4 \text{ und}$$

$$n = \frac{J_c}{J_a \cdot \cos \alpha_a} = \frac{0,0118}{0,038 \cdot 0,77534} = 0,4.$$

Approximation des Querschnitts nach S. 534 mit:

$$\mu = \frac{4,32 - 0,4}{4,32 - 1} = 1,18072, \quad \varphi = \frac{1,18072 - 1}{1,18072} = 0,15306,$$

$$\frac{J_c}{J \cos \alpha} = 1,18072 (1 - 0,15306 \cos 2,14273 \xi).$$

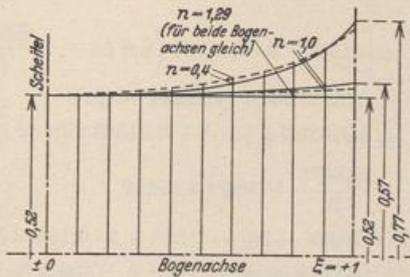
Hieraus Gewölbbestärken d (Abb. 522), Querschnitte F und Widerstandsmomente W .

Zahlen für die Ansätze nach Tabelle 42, 3 S. 533:

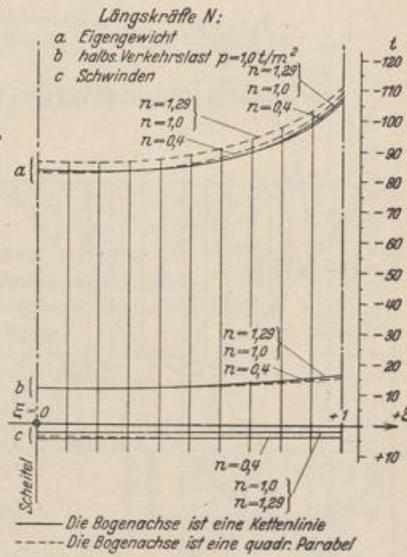
$$y_a^* = 1,540, \quad c^2 = 4,59129, \quad (l_1/c)^2 = 40,999,$$

$$\cos c = 4,32, \quad \cos^2 c = 18,6624, \quad \cos 2c = 36,32531,$$

$$\sin c = 4,20267, \quad \frac{\sin c}{c} = 1,96136, \quad \frac{\sin 2c}{2c} = 8,47320.$$



Die Bogenachse ist eine Kettenlinie
Die Bogenachse ist eine quadr. Parabel
Abb. 522. Gewölbbestärken d .



Die Bogenachse ist eine Kettenlinie
Die Bogenachse ist eine quadr. Parabel
Abb. 523.

2. Hauptsystem nach S. 533 Balken auf 2 Stützen (Abb. 516)

$$y_{2,0} = 1,241 \frac{(1 + 0,15306)(1,96136 - 1) - \frac{0,15306}{2}(1,96136 \cdot 4,32 - 1)}{1 - 0,15306 \cdot 1,96136},$$

$$y_{2,0} = 0,95158, \quad y_{1,0} = 4,12 - 0,951581 = 3,168419,$$

$$\psi = 1 + \frac{0,951581}{1,241} = 1,766786, \quad \begin{cases} \varphi \psi = 0,270424, \\ \psi^2 = 3,121533, \end{cases}$$

$y = y_{2,0} - y_2,$	$n =$	0,4	1,0	1,29
	$y_{2,0} =$	0,95158	1,19305	1,28204

3. Vorzahlen. Die Ergebnisse v aus I, 3 können mit hinreichender Genauigkeit für die Achse nach einer Kettenlinie verwendet werden. $n = 0,4$ ergab $v = 0,02329$, somit:

$$\delta_{11} = 2 \cdot 1,18072 \cdot 13,72 \cdot 1,54 \cdot 1,02329 \left[3,12153 - 2 \cdot 1,76679 \left(1 + \frac{0,27042}{2} \right) 1,19136 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 + 2 \cdot 0,27042) (1,96136 \cdot 4,32 + 1) - \frac{0,15306}{3} 1,96136 (2 + 18,6624) \right] = 24,73071,$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{3} 1,18072 \cdot 13,72 \left\{ 1 - 3 \cdot 0,15306 \left[1,96136 + \frac{2}{4,59129} (1,96136 - 4,22) \right] \right\} = 6,16833,$$

$$\delta_{33} = 2 \cdot 1,18072 \cdot 13,72 (1 - 0,15306 \cdot 1,96136) = 22,67247.$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$\delta_{11} =$	24,73071	38,15818	43,77720
$\delta_{22} =$	6,16833	9,14667	10,58675
$\delta_{33} =$	22,67247	27,44000	29,74524

4. Einflußlinien der überzähligen Größen. Biegelinie des Bogenträgers $n = 0,4$:

$$\begin{aligned} \delta_{m1} &= \frac{1,18072}{2} \cdot 1,241 \cdot 40,999 \left\{ \left[4,59129 \left(1,76679 + \frac{0,15306}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left(1 + 0,270424 \right) 4,32 + \frac{0,15306}{4} 36,32531 \right] - \left[\left(1,76679 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{0,15306}{2} \right) (\xi c)^2 - 2 \left(1 + 0,27042 \right) \mathcal{C}o\left[\xi c \right] + \frac{0,15306}{4} \mathcal{C}o\left[2\xi c \right] \right] \right\} \\ &= 30,03738 \left\{ \left[2,540848 \mathcal{C}o\left[\xi c \right] - 0,038265 \mathcal{C}o\left[2\xi c \right] - 1,84332 (\xi c)^2 - 1,12325 \right] \right\} \end{aligned}$$

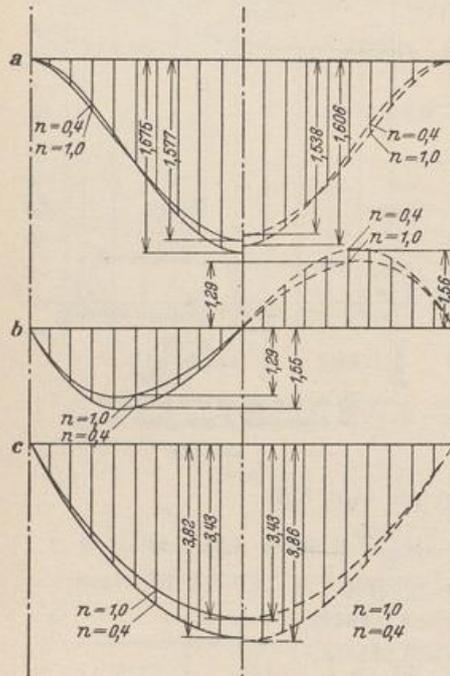


Abb. 524. Einflußlinien X_1, X_2, X_3 .
 — Die Bogenachse ist eine Kettenlinie.
 - - - Die Bogenachse ist eine quadratische Parabel.

$$\begin{aligned} \delta_{m2} &= -\frac{1,18072}{6 \cdot 2,14273} 40,999 \xi c \times \\ &\quad \times \left\{ \left[4,59129 - 6 \cdot 0,15306 \left(4,32 - 2 \cdot 1,96136 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[(\xi c)^2 - 6 \cdot 0,15306 \left(\mathcal{C}o\left[\xi c \right] - 2 \frac{\mathcal{S}in \xi c}{\xi c} \right) \right] \right\} \\ &= -3,7653165 \xi c \left[4,22644 - (\xi c)^2 \right. \\ &\quad \left. + 0,91836 \mathcal{C}o\left[\xi c \right] + 6,91583 \mathcal{S}in \xi c \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{m3} &= \frac{1,18072}{2} 40,999 \left\{ \left[4,59129 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cdot 0,15306 \cdot 4,32 \right] - \left[(\xi c)^2 - 2 \cdot 0,15306 \mathcal{C}o\left[\xi c \right] \right] \right\} \\ &= 24,20417 \left[3,26885 - (\xi c)^2 + 0,30612 \mathcal{C}o\left[\xi c \right] \right] \end{aligned}$$

$$X_1 = \frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}} \quad (\text{Abb. 524a}),$$

$$X_2 = \frac{\delta_{m2}}{\delta_{22}} \quad (\text{Abb. 524b}),$$

$$X_3 = \frac{\delta_{m3}}{\delta_{33}} \quad (\text{Abb. 524c}).$$

Die Einflußlinien X_1, X_2 und X_3 für $n = 1,29$ unterscheiden sich nur sehr wenig von den entsprechenden Werten für $n = 1,0$.

5. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht. Bogenträger $n = 0,4, q_k - q_s = 8,47$, daher nach S. 534:

$$\text{a) } H_q = \frac{8,47}{4,12} 40,999 = 84,247 \text{ t}, \quad 1 + \nu = 1,02329.$$

$$\text{b) Längskräfte: } N \approx -\frac{H_q}{1 + \nu} \frac{1}{\cos \alpha} = -82,330 \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\text{Abb. 523}).$$

$$\text{c) Momente: } M = \frac{\nu}{1 + \nu} H_q \cdot y = 1,91746 \cdot y \quad (\text{Abb. 525}).$$

$$\text{d) Randspannungen: } \sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} \quad (\text{Abb. 527}).$$

6. Schnittkräfte aus halbseitiger Verkehrslast $p = 1,0 \text{ t/m}^2$.

a) Belastungszahlen und überzählige Größen $X_k = \delta_{k0} / \delta_{kk}$:

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= 1,18072 \cdot 1,241 \cdot 40,999 \cdot 1,0 \cdot 13,72 \left[\frac{4,59129}{3} \left(1,766786 + \frac{0,15306}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + 0,270424 \right) \left(4,32 - 1,96136 \right) + \frac{0,15306}{8} \left(36,32531 - 8,47320 \right) \right] = 294,652. \end{aligned}$$

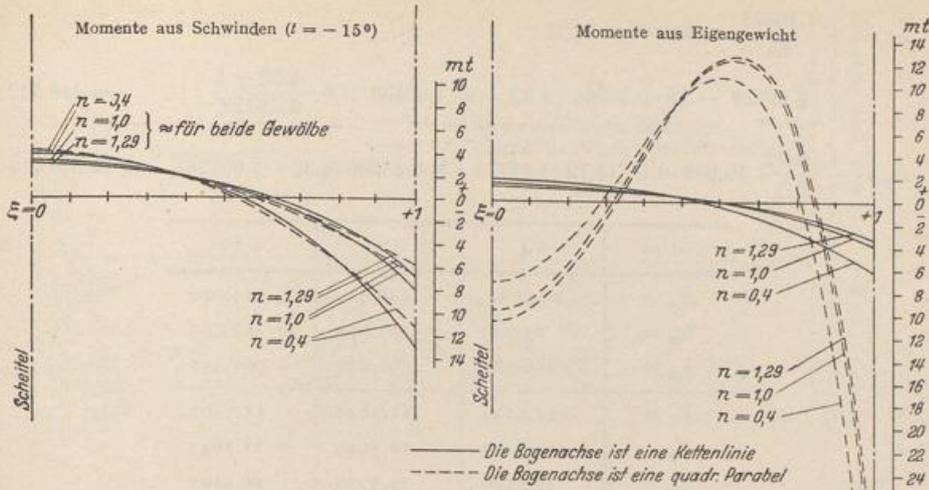


Abb. 525.

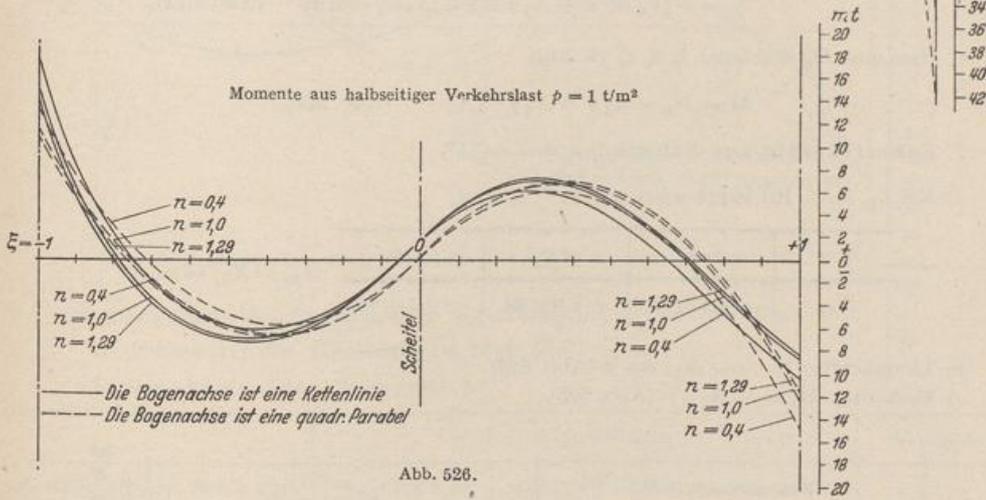


Abb. 526.

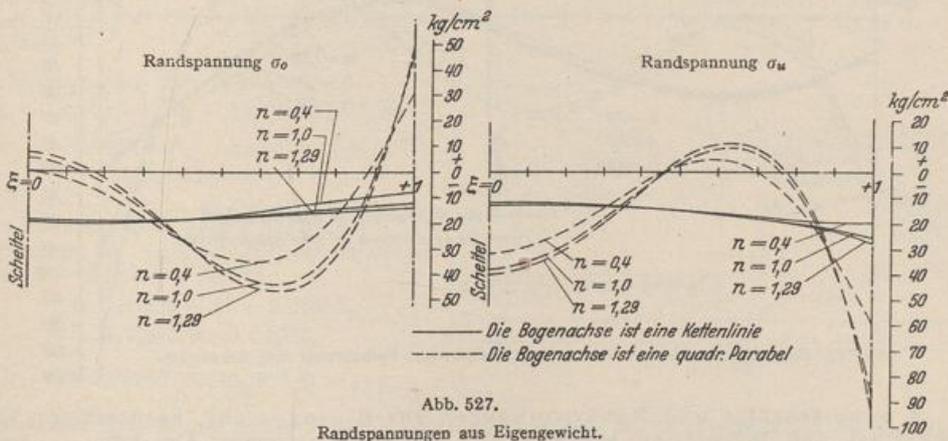


Abb. 527.

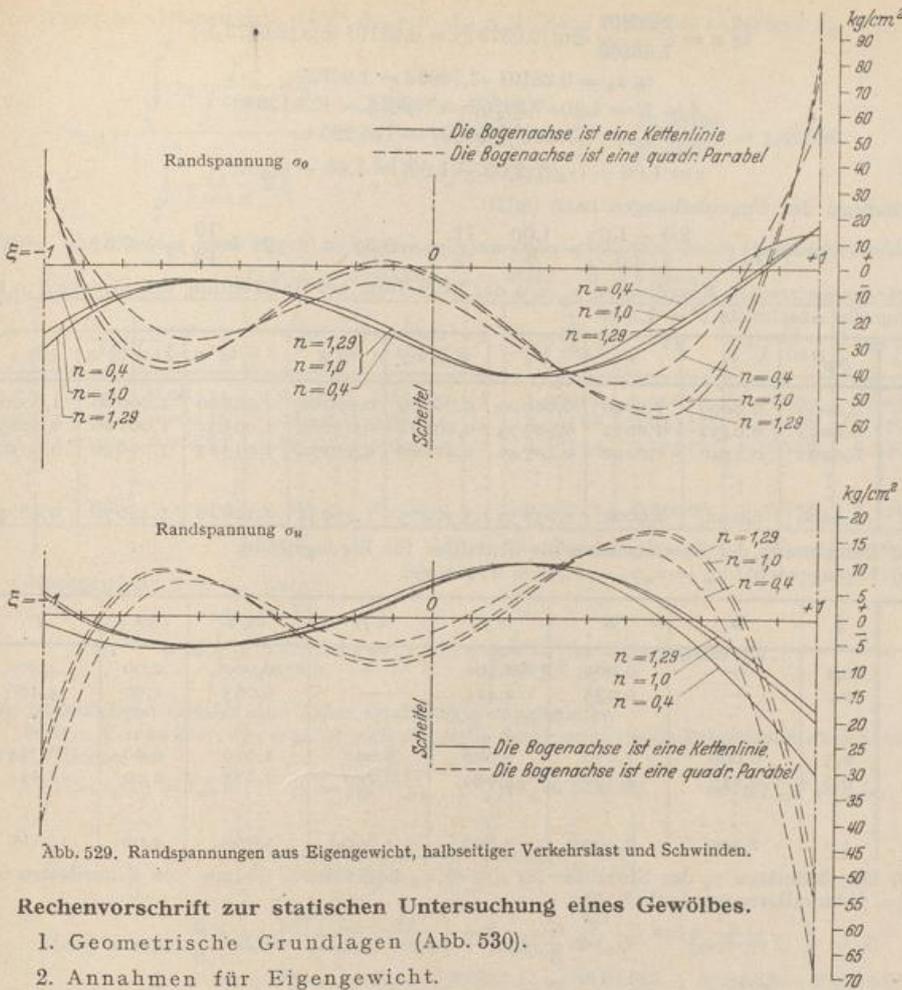


Abb. 529. Randspannungen aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden.

Rechenvorschrift zur statischen Untersuchung eines Gewölbes.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 530).
2. Annahmen für Eigengewicht.

		Abmessungen:	Scheitel	Kämpfer
Gewölbe einschl. Isolierung	$\gamma_v = 2,4 \text{ t/m}^3$	senkrecht gemessen	1,00 m	2,00 m
Ausgleichbeton	$\gamma_b = 2,0 \text{ t/m}^3$		0,00 m	2,30 m
Überschüttung	$\gamma_a = 1,8 \text{ t/m}^3$		0,00 m	3,20 m
Fahrbahn	$g_F = 2,0 \text{ t/m}^2$		—	—

Eigengewicht $q_s = 4,40 \text{ t/m}$;
 $q_k = 17,16 \text{ t/m}$; $\kappa = 17,16/4,4 = 3,90$.
 $J_c = J_s = 0,08333 \text{ m}^4$, $J_c/J \cos \alpha$: Seite 547,
 $F_c = F_s = 1,0 \text{ m}^2$.

3. Bogenform: a) Die Bogenachse y_2 wird nach S. 510 in erster Annäherung als Kettenlinie für Eigengewicht angenommen: $\kappa = 3,90$; $\text{Ein } c = 3,769651$.

$$y_2^* = 6,0 / (3,9 - 1) = 2,06897;$$

$$c = \text{Ar } \text{Coj } 3,90 = 2,0373;$$

$$y_2 = 2,06897 [\text{Coj } (2,0373 \xi) - 1];$$

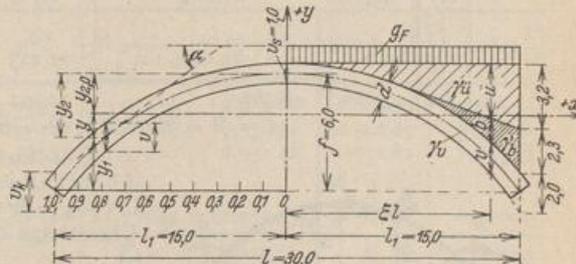


Abb. 530.

angegenäherte Berechnung dieser Funktion mit $y_2 = 6,0$ (y_2/f) durch Interpolation der Tabelle S. 512. $L_1/c = 7,36269$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,06897}{7,36269} \operatorname{Sin}(2,0373 \xi) = 0,28101 \operatorname{Sin}(2,0373 \xi);$$

$$\operatorname{tg} \alpha_k = 0,28101 \cdot 3,76962 = 1,05929;$$

$$A = B = 4,40 \cdot 7,36269 \cdot 3,769615 = 122,120 \text{ t};$$

$$H = 4,40 \cdot 7,36269^2 / 2,06897 = 115,285 \text{ t}.$$

$$v = 1,00 + (y_2/f)(2,00 - 1,00) = 1,00 + (y_2/f);$$

Gleichungen der Bogenlaibungen nach (802):

$$y_2^{(v)} = y_2 \left(1 - \frac{2,0 - 1,0}{2 \cdot 6,0} \right) - \frac{1,00}{2} = \frac{11}{12} y_2 - 0,5; \quad y_2^{(u)} = \frac{13}{12} y_2 + 0,5;$$

Die geometrischen Koordinaten y_2, v, α der Bogenform bei Unterteilung der Strecke l_1 in 10 gleichgroße Abschnitte $c' = 1,5 \text{ m}$:

ξ	y_2/f	y_2	v	$c \xi$	$\operatorname{Sin} c \xi$	$\operatorname{tg} \alpha$	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$	$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\cos \alpha$
0,0	0,0000	0,0000	1,0000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	1,00000	1,0000
0,1	0,0072	0,0432	1,0072	0,20373	0,20514	0,05765	1,00332	1,00166	0,9983
0,2	0,0290	0,1740	1,0290	0,40746	0,41883	0,11770	1,01385	1,00690	0,9931
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,0	1,0000	6,0000	2,0000	2,03730	3,76975	1,05934	2,12220	1,45678	0,6864

b) Berechnung der Gewölbeachse als Stützlinie für Eigengewicht.

a) Eigengewicht: $q_m = v_m \gamma_v + b_m \gamma_b + \bar{u} \gamma_u + g_F$;

m	ξ	b	\bar{u}	$v \gamma_v$	$b \gamma_b$	$\bar{u} \gamma_u$	g_F	q
0	0,1	—	0,000	2,400	—	0,000	2,00	4,400
1	0,2	—	0,035	2,417	—	0,063	2,00	4,480
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	0,5	0,000	1,070	2,868	0,000	1,926	2,00	6,794
6	0,6	0,115	1,490	3,099	0,230	2,682	2,00	8,011
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1,0	2,300	3,200	4,800	4,600	5,760	2,00	17,160

β) Die Ordinaten y_2 der Stützlinie für die zu q_m äquivalente Gruppe von Einzellasten G_m in den Intervallgrenzen nach S. 75:

$$G_1 = \frac{c'}{6} (2q_1 + q_2); \quad G_m = \frac{c'}{6} (q_{m-1} + 4q_m + q_{m+1}); \quad G_n = \frac{c'}{6} (q_{n-1} + 2q_n);$$

$$\bar{V}_{0m} = \sum_0^{m-1} G_m, \quad \bar{M}_{0m} = \sum_0^m (\bar{V}_{0m} \cdot c'), \quad H = \bar{M}_{0,10}/f, \quad y_2 = \bar{M}_{0m}/H.$$

m	ξ	q_m	$q_9 + 2q_{10}$	$2q_1 + q_2$	G_m	\bar{V}_{0m}	$\bar{V}_{0m} \cdot c'$	\bar{M}_{0m}	y_2
			$q_{m-1} + 4q_m + q_{m+1}$						
0	0,0	4,400	—	13,280	3,320	0,000	0,000	0,000	0,00000
1	0,1	4,480		27,069	6,767	3,320	4,980	4,980	0,04335
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	0,9	14,042		84,893	21,223	88,316	132,474	524,510	4,56880
10	1,0	17,160	48,362	—	12,091	109,539	164,309	688,819	6,00000

$$A = B = 121,630 \text{ t}; \quad H = 688,819/6,0 = 114,803 \text{ t}.$$

4. Hauptsystem zur Berechnung der statisch überzähligen Größen. Balkenträger auf 2 Stützen $l = 2l_1 = 30,0 \text{ m}$.

Überzählige Größen nach S. 523:

$$X_1 = H, \quad X_2 = \frac{1}{2} (Y_a - Y_b), \quad X_3 = \frac{1}{2} (Y_a + Y_b),$$

$$M_1 = +y, \quad M_2 = -\xi, \quad M_3 = 1,$$

$$N_1 = \cos \alpha, \quad N_2 = 1/l_1 \cdot \sin \alpha, \quad N_3 = 0.$$

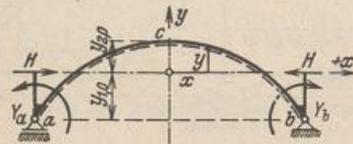


Abb. 581.

Der Träger ist symmetrisch, daher $\delta_{12} = 0, \delta_{23} = 0$. Nach S. 523 ist außerdem $\delta_{13} = 0$, wenn

$$y_{2,0} = \frac{\int_c^a y_2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx}{\int_c^a \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx} = \frac{\Sigma (\lambda \cdot y_2 \frac{J_c}{J \cos \alpha})}{\Sigma (\lambda \cdot \frac{J_c}{J \cos \alpha})} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} = \frac{32,06796}{22,48201} = 1,42638.$$

Zähler und Nenner sind durch numerische Integration nach Simpson (181) entstanden.
($J_c = J_s = 0,08333, J = d^2/12, d = v \cos \alpha$.)

ξ	d	J	$\frac{J_c}{J}$	$\frac{J_c}{J \cos \alpha}$	λ	$\lambda \cdot \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	y_2	$y_2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	$\lambda \cdot y_2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$
0,0	1,0000	0,08333	1,00000	1,00000	1	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	1,0055	0,08471	0,98375	0,98542	4	3,94168	0,04335	0,04272	0,17088
0,2	1,0219	0,08893	0,93707	0,94357	2	1,88714	0,17516	0,16528	0,33056
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,0	1,3728	0,21564	0,38645	0,56311	1	0,56311	6,00000	3,37866	3,37866
				$\Sigma_1 =$		22,48201		$\Sigma_2 =$	32,06796

Nachprüfung von $y_{2,0}$ durch:

$$0 = \int_c^a y \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx = \Sigma (\lambda \cdot y \frac{J_c}{J \cos \alpha}) = -0,00003 \approx 0,0.$$

Die überzähligen Größen sind daher unabhängig voneinander.

5. Die Vorzahlen δ_{kk} ergeben sich ebenfalls durch numerische Integration nach Simpson (181). Hierbei ist

$$c' = l_1/10 = 1,5 \text{ m}, \quad y = y_{20} - y_2, \quad J_c/F_c = 0,08333, \quad \cos \alpha F_c/F = v_s/v,$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \left\{ \int_c^a y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx + \frac{J_c}{F_c} \int_c^a \cos \alpha \frac{F_c}{F} dx \right\} \\ &= 2 \frac{c'}{3} \Sigma (\lambda \cdot y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}) + 2 \frac{c'}{3} \frac{J_c}{F_c} \Sigma (\lambda \cdot \cos \alpha \frac{F_c}{F}) \\ &= \delta'_{11} + \delta''_{11} = 1,0 \Sigma_4 + 0,08333 \Sigma_5 = 58,01617 + 2,01833 = 60,03450, \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = 2 \int_c^a \xi^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx = 2 \frac{c'}{3} \Sigma (\lambda \cdot \xi^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}) = 1,0 \Sigma_3 = 6,13492,$$

$$\delta_{33} = 2 \int_c^a \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx = 2 \frac{c'}{3} \Sigma (\lambda \cdot \frac{J_c}{J \cos \alpha}) = 1,0 \Sigma_1 = 22,48201.$$

ξ	$\xi^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	λ	$\lambda \cdot \xi^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	y	y^2	$y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	$\lambda \cdot y^2 \frac{J_c}{J \cos \alpha}$	$\cos \alpha \frac{F_c}{F}$	$\lambda \cdot \cos \alpha \frac{F_c}{F}$
0,0	0,00000	1	0,00000	1,42638	2,03456	2,03456	2,03456	1,00000	1,00000
0,1	0,00985	4	0,03940	1,38303	1,91277	1,88488	7,53952	0,99285	3,97140
0,2	0,03774	2	0,07548	1,25122	1,56555	1,47721	2,95442	0,97182	1,94364
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,0	0,56311	1	0,56311	-4,57362	20,91800	11,77913	11,77913	0,50000	0,50000
	$\Sigma_3 =$		6,13492			$\Sigma_4 =$	58,01617	$\Sigma_5 =$	24,21992

6. Die Einflußlinien der überzähligen Größen X_k werden nach S. 525 als Biegelinien δ_{mk} des Balkenträgers berechnet. Hierzu dienen die elastischen Gewichte w_{m1}, w_{m2}, w_{m3} , die in eine äquivalente Gruppe von Einzelkräften $\mathfrak{B}_{m,1}, \mathfrak{B}_{m,2}, \mathfrak{B}_{m,3}$ verwandelt werden.

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{c'}{24} (w_1 + 10 w_0 + w_{-1}), \quad \mathfrak{B}_{10} = \frac{c'}{24} (7 w_{10} + 6 w_9 - w_8),$$

$$\mathfrak{B}_m = \frac{c'}{12} (w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}),$$

$$Q_{w,m} = Q_{w,0} + \sum_0^{m-1} \mathfrak{B}_h = A_w - \sum_m^{10} \mathfrak{B}_h, \quad M_{w,(m-1)} = M_{w,m} + Q_{w,m} \cdot c'$$

Der Anteil der Längskräfte an den elastischen Gewichten wird vernachlässigt.

a) $X_1 = \frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}} = \frac{M_w}{60,03450}, \quad w_{m1} = y_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m}$ (Abb. 532).

Mit $\delta_{13} = 2 \int_0^a y \frac{J_c}{J} ds = 0$ und $\delta_{12} = 2 \int_0^a \xi y \frac{J_c}{J} ds$ ist für $\xi = 0$: $Q_w = 0$ und für $\xi = \pm 1$

neben M_w auch $Q_w = 0$. Die Einflußlinie besitzt daher für $\xi = 0$ und $\xi = \pm 1$ waagerechte Tangenten. Dies kann für $\frac{d}{dx} (\delta_{m1})$ auch unmittelbar bewiesen werden.

m	ξ	(1)	(2)		(3)	(4)	(5)
		w_{m1}	$10 w_0 + 2 w_1$	$7 w_{10} + 6 w_9 - w_8$	\mathfrak{B}'_m	Verbesserung $\Delta \mathfrak{B}'_m$	\mathfrak{B}_m
0	0,0	1,42638	16,98954	—	1,06185	+ 0,00033	1,06218
1	0,1	1,36287	16,23569		2,02946	+ 0,00064	2,03010
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
9	0,9	- 1,72804	- 20,97682		- 2,62210	+ 0,00082	- 2,62128
10	1,0	- 2,57545	—	- 27,27542	- 1,70471	+ 0,00053	- 1,70418

$$\sum \mathfrak{B}'_m = \int_0^a y \frac{J_c}{J} ds \neq 0. \text{ Daher Verbesserung um } \Delta \mathfrak{B}'_m = -k |\mathfrak{B}'_m|$$

mit $k = \frac{\sum_0^{10} \mathfrak{B}'_m}{\sum_0^{10} |\mathfrak{B}'_m|} = \frac{-0,00457}{14,62223} = -0,00031254.$

m	(6)	(7)	(8)	(9)
m	$Q_{w,m}$	$Q_{w,m} \cdot c'$	$M_{w,m}$	$X_1 [t]$
0	0,00000	0,00000	72,88861	1,21411
1	1,06218	1,59327	71,29534	1,18757
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	4,32546	6,48819	2,55627	0,04258
10	1,70418	2,55627	0,00000	0,00000

b) $X_2 = \frac{\delta_{m2}}{\delta_{22}} = \frac{M_w}{6,13492}, \quad w_{m2} = -\xi_m \frac{J_c}{J_m \cos \alpha_m}$ (Abb. 532).

Die Funktion w_{m2} ist antimetrisch. Daher ist M_w nicht nur für $\xi = \pm 1$, sondern auch für $\xi = 0$ Null. Die gegenseitige Verdrehung der Endtangente der Biegelinie δ_{m2} ist δ_{22} .

m	ξ	(1)	(2)		(3)	(4)
		w_{m2}	$10 w_0$	$7 w_{10} + 6 w_9 - w_8$	\mathfrak{B}_m	$\xi \cdot \mathfrak{B}_m$
0	0,0	0,00000	0,00000	—	0,00000	0,00000
1	- 0,1	0,09854	1,17411		0,14676	0,01468
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
9	- 0,9	0,49493	5,96339		0,74542	0,67088
10	- 1,0	0,56311	—	6,46037	0,40371	0,40377
$A_w =$						3,06767

Da $w_1 = -w_{-1}$:

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{c'}{24} 10 w_0,$$

$$A_w = \sum_0^{10} (\xi \mathfrak{B}_m),$$

	(5)	(6)	(7)	(8)
m	$Q_{w,m}$	$Q_{w,m} \cdot c'$	$M_{w,m}$	X_2 [mt]
0	-1,82992	-	0,00000	0,00000
1	-1,82992	-2,74488	2,74488	0,44742
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	1,91848	2,87772	3,99585	0,65133
10	2,66390	3,99585	0,00000	0,00000
(a)	(3,06767)			

c) $X_3 = \frac{\delta_{m3}}{\delta_{33}} = \frac{M_w}{22,48201}$, $w_{m3} = 1 \frac{J_0}{J_m \cos \alpha_m}$. (Abb. 532).

Die Funktion w_{m3} ist symmetrisch, daher für $\xi = 0$: $Q_w = 0$, für $\xi = \pm 1$: $Q_w = \pm \frac{1}{2} \delta_{33}$. Die Biegelinie erhält in $\xi = 0$ eine waagerechte Tangente.

m	ξ	w_{m3}	$10 w_0 + 2 w_1$ $7 w_{10} + 6 w_9 - w_8$	\mathfrak{B}_m	$Q_{w,m}$	$Q_{w,m} \cdot c'$	$M_{w,m}$	X_3 [mt]
0	0,0	1,00000	11,97084	0,74818	0,00000	0,00000	94,78360	4,21598
1	0,1	0,98542	11,79777	1,47472	0,74818	1,12227	93,66133	4,16606
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	0,9	0,54992	6,62604	0,82826	9,99538	14,99307	16,23546	0,72215
10	1,0	0,56311	-	10,82364	16,23546	0,00000	0,00000	

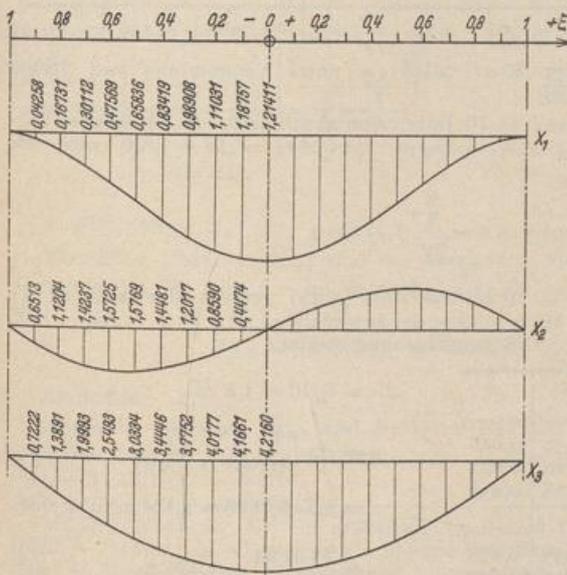


Abb. 532. Einflußlinien X_1, X_2, X_3 .

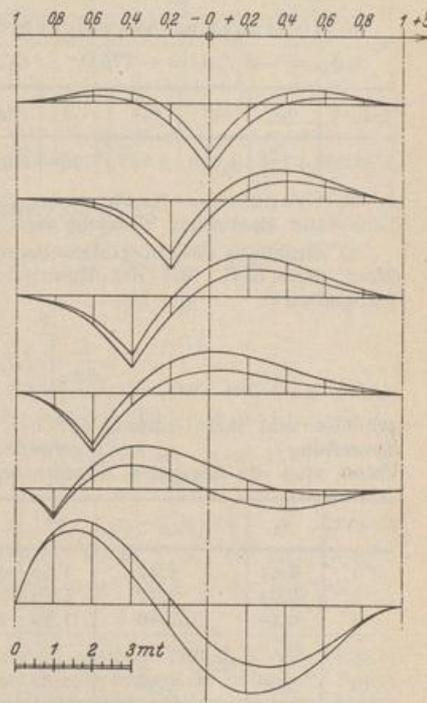


Abb. 533. Einflußlinien für die Kernmomente. Die oberen Linien gelten für die oberen Kernpunkte.

7. Einflußlinie der Schnittkräfte. a) Kernmomente (Abb. 533) im Querschnitt m :

$$M_m = M_{m0} - X_1 \gamma_m + X_2 \xi_m - X_3,$$

im Scheitel c :

$$M_c = M_{c0} - X_1 y_{20} - X_3$$

am Kämpfer (a und b):

$$M_a = + X_1 y_{10} - X_2 - X_3$$

$$M_b = + X_1 y_{10} + X_2 - X_3$$

b) Querkräfte:

$$Q_m = Q_{m0} - X_1 \sin \alpha_m + \frac{X_2}{l_1} \cos \alpha_m$$

8. a) Biegemomente aus Eigengewicht (S. 527).

$$v = \frac{\delta''_{11}}{\delta'_{11}} = \frac{2,01833}{58,01617} = 0,03479; \quad X_1 = \Delta H = -\frac{v}{1+v} H_c = -0,03362 H_c$$

Nach Seite 546 ist $H_c = 114,803$ t. Dabei ist die geringe Abweichung durch Änderung der Bogenform nicht berücksichtigt.

$$H = H_c + X_1 = 114,803 - 3,859 = 110,944 \text{ t}, \quad M = -X_1 y = +3,859 \cdot y \text{ mt.}$$

$\pm \xi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M [mt]	5,505	5,338	4,829	3,959	2,692	0,976	-1,257	-4,102	-7,675	-12,128	-17,652

Der Einfluß der Längskräfte auf δ_{10} ist nach S. 524 klein von zweiter Ordnung, fällt daher in der Rechnung weg.

b) Biegemomente aus Schwinden (S. 524).

$$\alpha_t = 0,00001; \quad t = -15^\circ; \quad \delta_{1t} = E J_c \alpha_t t l = -787,5; \\ \delta_{2t} = \delta_{3t} = 0; \quad X_{1t} = \delta_{1t} / \delta_{11} = -13,117 \text{ t}; \quad M = -X_{1t} \cdot y$$

$\pm \xi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M [mt]	18,710	18,141	16,412	13,455	9,148	3,318	-4,273	-13,941	-26,083	-41,218	-59,992

c) Horizontales Ausweichen der Widerlager um $\Delta l = 0,001$ m.

$$\delta_{1s} = -E J_c \Delta l = -175,0; \quad \delta_{2s} = \delta_{3s} = 0; \quad X_{1s} = -2,915 \text{ t}; \quad M = -X_{1s} \cdot y$$

$\pm \xi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M [mt]	4,158	4,032	3,647	2,990	2,032	0,736	-0,949	-3,097	-5,796	-9,159	-13,331

9. Graphische Nachprüfung der Einflußlinien unter Verwendung von Stufen konstanter elastischer Wirkung nach (828).

a) Einteilung des Integrationsbereiches l_1 in 10 Teile e von gleichbleibender elastischer Wirkung (Abb. 534). Mit der Unterteilung $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = \Delta x = l_1/10$ wird die Integralkurve

$$\frac{1}{\Delta x} \int_0^x J_e / J \cos \alpha \cdot dx = \sum_0^x J_e / J \cos \alpha$$

gebildet und ihre Ordinate für $x = l_1$ in 10 gleiche Teile ($c/\Delta x$) geteilt. Hierdurch ist die Einteilung e_1, e_2, \dots, e_{10} von l_1 gefunden. Mittelpunkte der Intervalle e_m sind $1', 2' \dots m' \dots 10'$. Ihnen sind die folgenden Koordinaten der Bogenachse zugeordnet:

Punkt	y_2	$y = y_{2,0} - y_2$	y^2	ξ	ξ^2
1'	0,01	1,41	1,99	0,032	0,010
2'	0,05	1,37	1,88	0,110	0,012
3'	0,16	1,26	1,59	0,188	0,035
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10'	5,00	-3,58	12,82	0,933	0,870
Σ	14,24	-0,04	25,06	—	2,736

$$\Delta x = l_1/10 = 1,5 \text{ m.}$$

$$c = \Delta x \left[\frac{1}{10} \sum_c^b \frac{J_e}{J \cos \alpha} \right] = 1,5 \cdot 0,7496 = 1,124 \text{ m (Abb. 534).}$$

$$y_{2,0} = \frac{2 \cdot 14,24}{2 \cdot 10} = 1,424 \text{ m.}$$

$$\delta'_{11} = 2 \cdot 1,124 \cdot 25,06 = 56,35, \quad \delta''_{11} = 2,02 \text{ (S. 525)*}, \quad \delta_{11} = \delta'_{11} + \delta''_{11} = 58,37$$

* Der Anteil δ''_{11} kann auch nach den Angaben der S. 514 berechnet werden.

Mit $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \approx 0$ wird

$$\delta_{22} = 2 \cdot 1,124 \cdot 2,736 = 6,153, \quad \delta_{33} = 2 \cdot 10 \cdot 1,124 = 22,49.$$

b) Einflußlinie X_1 :

Verwendung der $(1/c)$ -fachen \mathfrak{B} -Gewichte; Elastische Gewichte $\mathfrak{B}_{m1}/c = \overline{\mathfrak{B}}_{m1}$ sind die Ordinaten y in den Punkten $1', 2' \dots m'$. Mit $H_{11} = \delta_{11}/c$ Einheiten des $\overline{\mathfrak{B}}_{m1}$ ist 1 m im Maßstab der Zeichnung der Maßstab für 1 t der Einflußlinie. Um die Einflußlinie auf den 5fachen Betrag zu vergrößern, wird daher $H_{11} = 58,37/(5 \cdot 1,124) = 10,39$ aufgetragen.

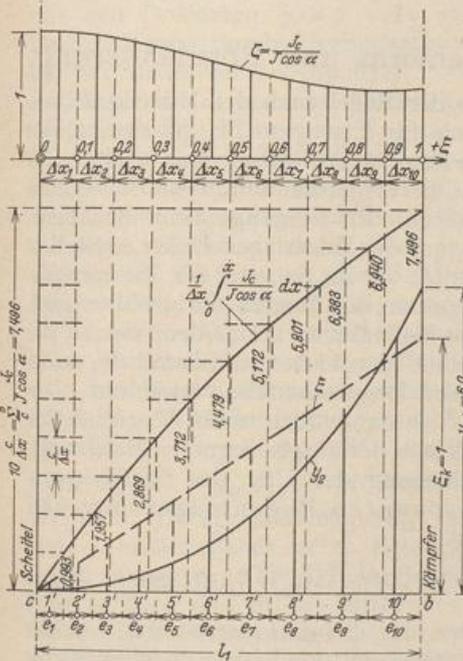


Abb. 534.

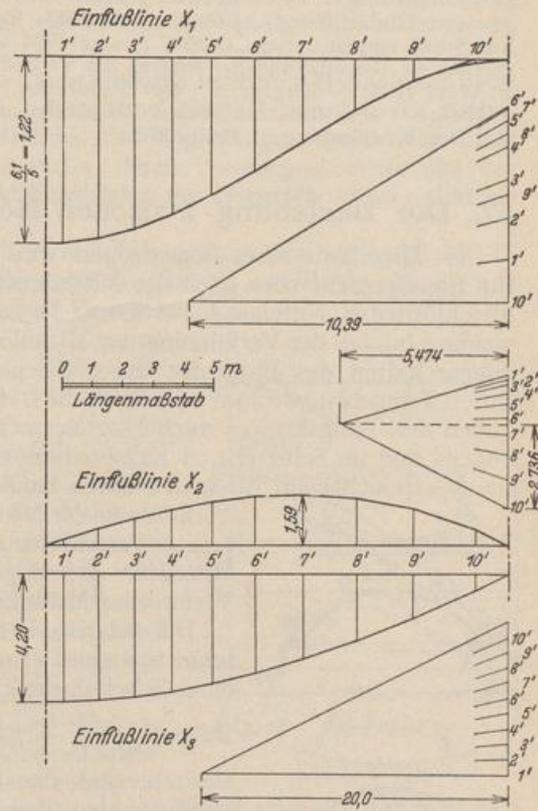


Abb. 535.

c) Einflußlinie X_2 :

Elastische Gewichte $\overline{\mathfrak{B}}_{m2}$ sind die Abszissen ξ der Punkte $1', 2' \dots m'$. Mit $H_{11} = \delta_{22}/c$ Einheiten des $\overline{\mathfrak{B}}_{m2}$ ist 1 m im Maßstab der Zeichnung der Maßstab für 1 m/t der Einflußlinie.

$$H_{11} = 6,153/1,124 = 5,474; \quad A_{11} = \sum_{i=1}^n \xi^2 = 2,736.$$

Einflußlinie X_3 :

Elastische Gewichte $\overline{\mathfrak{B}}_{m3}$ sind die Werte 1 in den Punkten $1', 2' \dots m'$. Mit $H_{11} = \delta_{33}/c$ Einheiten des $\overline{\mathfrak{B}}_{m3}$ ist 1 m im Maßstab der Zeichnung der Maßstab für 1 m/t der Einflußlinie. $H_{11} = 22,49/1,124 = 20,0$.

Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Bd. 2, 2. Abt. Leipzig 1908. — Ritter, M.: Beiträge zur Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger. Berlin 1909. — Schönhöfer, R.: Statische Untersuchung von Bögen und Wölbtragwerken. Berlin 1911. — Gaber, E.: Bau und Berechnung gewölbter Brücken und ihre Lehrgerüste. Berlin 1914. — Schächterle, K.: Beiträge zur Berechnung der im Eisenbetonbau üblichen elastischen Bogen und Rahmen. Berlin 1914. — Färber: Statische Berechnung von Gewölben. Dtsch. Bauztg. 1915 S. 156. — Derselbe: Rasche Ermittlung der Formen und Normalkräfte von

Gewölben. Dtsch. Bauztg. 1915 S. 6. — Schürch, H.: Wärmeeinfluß und Wärmebeobachtungen bei Betongewölben. Arm. Beton 1916. — Hawranek, A.: Berechnung von Bogenbrücken bei räumlichem Kraftangriff. Beton u. Eisen 1918. — Derselbe: Nebenspannungen von Eisenbetonbogenbrücken. Berlin 1919. — Straßner, A.: Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke und der elastischen Bogenträger Bd. 2. Berlin 1921. — Neumann, G.: Bogenform und Momentenbild. Beton u. Eisen 1922. — Pirlet, J.: Kompendium der Statik der Baukonstruktionen Bd. 2. Berlin 1923. — Proksch, E.: Beitrag zur Querschnittsbemessung der Betongewölbe. Beton u. Eisen 1923. — Derselbe: Der Einfluß elastischer Widerlager auf den eingespannten Bogen. Beton u. Eisen 1923. — Craemer, H.: Der Einfluß einseitig verschieden-schwerer Hinterfüllung auf elastische Gewölbe. Beton u. Eisen 1924. — Kasarnowsky, S.: Zur Statik eingespannter Gewölbe. Bauing. 1924. — Hartmann, F.: Die genauere Berechnung gelenkloser Gewölbe und der Einfluß des Verlaufs der Achse und der Gewölbstärke. Leipzig u. Wien 1925. — Kögler, F.: Gewölbetabellen, 2. Aufl. Berlin 1928. — Gesteschi, Th., u. J. Melan: Bogenbrücken. Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 11 4. Aufl. Berlin 1932. — Bergdorfer, E.: Der Eingelenkbogen. Berlin 1929.

57. Die Beziehung zwischen Bogenform und Formänderung.

Die Mittellinie eines Bogenträgers wird in der Regel nach der Mittelkraftlinie für Eigengewicht oder nach der Mittelkraftlinie für Eigengewicht und der halben gleichförmigen Nutzlast p bestimmt. Diese Form ändert sich jedoch mehr oder weniger infolge der Verkürzung der Mittellinie, hervorgerufen durch die elastischen Eigenschaften des Baustoffs, durch die physikalischen Vorgänge beim Erhärten, durch Temperaturwechsel und durch die Bewegung der Widerlager. Daher entstehen neben den Längskräften auch Biegemomente, die im Scheitel des Zweigelenkbogens und im Scheitel und Kämpfer des eingespannten Bogens am größten sind. Sie lassen sich beim Ausrüsten durch bauliche Maßnahmen vermeiden, welche die

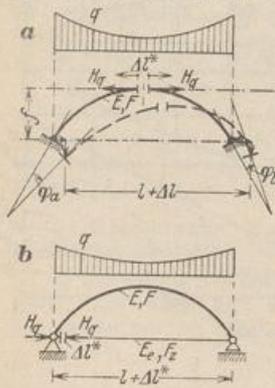


Abb. 536.

Verkürzung der Mittellinie ausgleichen und damit die senkrechte Verschiebung des Bogenscheitels verhindern. Die Mittellinie des Bogens ist dann auch nach Abschluß der Verformung Mittelkraftlinie der ausgezeichneten Belastung.

Die relative Verschiebung der Ufer des Scheitelquerschnitts c eines eingespannten Bogenträgers mit und ohne Scheitelgelenk ist

$$\Delta l^* = H_q \int \frac{ds}{EF} - \alpha_t t l + \Delta l - f(\varphi_a - \varphi_b). \quad (\text{Abb. 536a}) \quad (850)$$

Danach sind die Ufer des Scheitelquerschnitts c eines eingespannten Bogenträgers mit und ohne Scheitelgelenk beim Ausrüsten um den Betrag Δl^* gegenseitig zu entfernen. Der Anteil aus der Verdrehung der Widerlager fällt beim Zweigelenkbogen weg. Die relative Verschiebung der Ufer des Anschlußquerschnitts des Zuggliedes eines Zwei-

gelenkbogens ist mit $(l + \Delta l^*) > l$

$$- \Delta l^* = H_q \int \frac{ds}{EF} - \alpha_t t l + \frac{H_q l}{E_t F_z}, \quad (\text{Abb. 536b}) \quad (851)$$

um die Biegemomente aus der Längenänderung von Bogen und Zugglied zu vermeiden.

Der Ausgleich wird beim Ausrüsten des beiderseits eingespannten Bogenträgers durch Druckpressen erreicht, welche im Bogenscheitel eingebaut werden. Sie liegen beim Ausrüsten des Zweigelenkbogens mit Zugband hinter dem Bogenkämpfer, um hier zunächst die Längskraft des relativ zum Bogenträger beweglichen Zuggliedes aufzunehmen und diesem zuzuführen. Dabei wird die Reckung des Zuggliedes und die Verkürzung des Bogenträgers ausgeglichen, so daß in der Fahrbahn keine Nebenspannungen aus der Formänderung der Hauptträger durch Eigengewicht entstehen (Beispiel S. 519).