Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiele

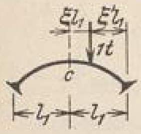
urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

b) Bogenform mit $\frac{J_c}{J\cos\alpha} = 1$.

$$\eta_0 = 1 - \frac{y_{2,0}}{f}, \qquad y_{2,0} = y_s^*\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c} - 1\right); \qquad y = y_s^*\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c} - \mathfrak{Cof}\,\xi c\right).$$

$$\delta_{11} = l_1 y_s^{*2}(1+\nu)\left[1 + \frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c}\mathfrak{Cof}\,c - 2\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c}\right)^2\right]; \qquad \delta_{22} = \frac{2}{3} l_1; \qquad \delta_{33} = 2 l_1.$$

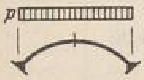
Gleichungen der Einflußlinien:



$$X_1 = \frac{y_s^*}{2}\left(\frac{l_1}{c}\right)^2 \frac{1}{\delta_{11}}\left[\left(c^2\frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c} - 2\,\mathfrak{Cof}\,c\right) - \left((\xi c)^2 \frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c} - 2\,\mathfrak{Cof}\,\xi c\right)\right];$$

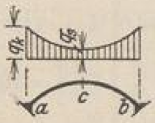
$$X_2 = -\frac{l_1}{4}\xi(1-\xi^2) = -\frac{l_1}{4}\omega_D; \qquad X_3 = \frac{l_1}{4}(1-\xi^2).$$

Besondere Belastungsfälle:



$$X_2 = 0; \qquad X_3 = \frac{p l_1^2}{3};$$

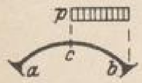
$$X_1 = y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c}\right)^2 \frac{2}{\delta_{11}}\left[\left(1 + \frac{c^2}{3}\right)\frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c} - \mathfrak{Cof}\,c\right].$$



$$H_q = \frac{q_s}{y_s^*}\left(\frac{l_1}{c}\right)^2;$$

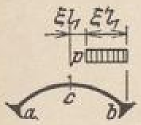
$$M = \frac{\nu}{1+\nu} H_q \cdot y;$$

$$N \approx -\frac{1}{\cos\alpha}\frac{H_q}{1+\nu} \text{ (s. unter a).}$$



$$X_1 = y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c}\right)^2 \frac{1}{\delta_{11}}\left[\left(1 + \frac{c^2}{3}\right)\frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c} - \mathfrak{Cof}\,c\right];$$

$$X_2 = -\frac{p l_1^2}{16}; \qquad X_3 = \frac{p l_1^2}{6}.$$



$$X_1 = y_s^* p l_1 \left(\frac{l_1}{c}\right)^2 \frac{1}{\delta_{11}} \times$$

$$\times\left[\left(1 + \frac{c^2}{3}\right)\frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c} - \mathfrak{Cof}\,c - \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi c - \xi c\,\mathfrak{Cof}\,c}{c} + \frac{c^2}{6}\xi(\xi^2 - 3)\frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c}\right];$$

$$X_2 = -\frac{p l_1^2}{16}(1-\xi^2)^2; \qquad X_3 = \frac{p l_1^2}{12}\xi'^2(3-\xi').$$

Temperaturänderung und Stützensenkung wie unter 1, a) S. 530.

Statische Untersuchung eines beiderseits eingespannten Gewölbes (Abb. 517) mit parabolisch gekrümmter Mittellinie und verschiedenen Annahmen über die Bogenform als Beispiel für die Anwendung der Tabelle 42 S. 529 ff.

$$y_1 = f(1-\xi^2).$$

Der Querschnitt ist nach S. 510 bestimmt durch

$$J_c/J\cos\alpha = 1 - (1-n)\,\xi^{2r}.$$

Die Untersuchung wird durchgeführt für

$$n = J_c/J_k\cos\alpha_k = 0$$

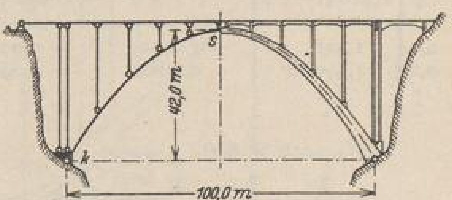


Abb. 517.

und veränderliches r ($r = 1, 2, 3$ und ∞). $r = \infty$ liefert mit $J_c/J\cos\alpha = 1$ dieselbe Bogenform wie $n = 1$. Die geometrische Bedeutung der Annahmen für die Bogenform zeigt Abb. 486 S. 510. Die Zahlenrechnung nach S. 529 wird für $r = 2$ angegeben, im übrigen auf die Mitteilung der Ergebnisse beschränkt.

1. Geometrische Grundlagen. $l = 2\,l_1 = 100{,}0$ m; $f = 42{,}0$ m.

$$F_s = F_c = 2{,}1\ \mathrm{m}^2; \qquad J_s = J_c = 0{,}772\ \mathrm{m}^4; \qquad J_c/J \cos\alpha = 1 - \xi^{2r}.$$

2. Hauptsystem nach S. 529: Balken auf 2 Stützen (Abb. 513)

$$\eta_{1,0} = \frac{2}{3}\,\frac{4+2r}{3+2r}; \qquad \eta_{2,0} = \frac{1}{3}\,\frac{1+2r}{3+2r};$$

$r =$	1	2	3	∞
$\eta_{1,0} =$	0,800	0,762	0,741	0,666
$\eta_{2,0} =$	0,200	0,238	0,259	0,333

3. Vorzahlen für $r = 2$ nach S. 529

$$k = \left[\frac{8}{15} - \frac{8}{(1+2r)(3+2r)(5+2r)} - \eta_{1,0}^2\left(1 - \frac{1}{1+2r}\right)\right] = \frac{8}{15} - \frac{8}{5\cdot 7\cdot 9} - 0{,}762^2\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= 0{,}04342; \qquad \nu = \frac{0{,}772}{2{,}1}\,\frac{1}{42{,}0^2\,k} = 0{,}004800;$$

$$\delta_{11} = 100{,}0 \cdot 42{,}0^2\,(1+\nu)\,k = 7695{,}98;$$

$$\delta_{22} = 100{,}0 \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right] = 19{,}0476; \qquad \delta_{33} = 100{,}0\left[1 - \frac{1}{s}\right] = 80{,}00.$$

$r =$	1	2	3	∞
$k =$	0,03047	0,04342	0,05115	0,08889
$\nu =$	0,006840	0,004800	0,004074	0,002345
$\delta_{11} =$	5411,60	7695,98	9059,55	15716,89
$\delta_{22} =$	13,3333	19,0476	22,2222	33,3333
$\delta_{33} =$	66,6667	80,0000	85,7143	100,000

4. Einflußlinien der überzähligen Größen für $r = 2$.

a) X_1 nach S. 530 mit $\eta_{2,0} = 0{,}238$; $6\,\eta_{2,0} = 1{,}428$.

$$\frac{6\,\eta_{2,0}}{(1+2r)(1+r)} = 0{,}0952, \qquad \frac{6}{(3+2r)(2+r)} = 0{,}21429,$$

$$X_1 = \frac{l_1^2 f}{12\,\delta_{11}} \cdot K_1 = 1{,}13696 \cdot K_1.$$

ξ^2, ξ^4 vgl. Tab. 22 S. 116.

ξ	ξ^2	ξ^4	ξ^6	ξ^8	$1-\xi^2$	$1-\xi^4$	$1-\xi^6$	$1-\xi^8$
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,2	0,04	0,0016	0,00006	0,00000	0,96	0,9984	0,99994	1,000000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ξ	$1{,}428\,(1-\xi^2)$	$-(1-\xi^4)$	$-0{,}0952\,(1-\xi^6)$	$+0{,}21429\,(1-\xi^8)$	$\{\Sigma\} = K_1$	$X_1 = 1{,}137 \cdot K_1$
0,0	1,428	− 1,0000	− 0,09520	0,21429	0,54709	0,62201
0,2	1,37088	− 0,9984	− 0,09519	0,21429	0,49157	0,55890
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

b) X_2 nach S. 530

$$\frac{3}{3+2r}\,\frac{1}{1+r} = \frac{1}{7} = 0{,}14286,$$

$$X_2 = -\frac{l_1^2}{6\,\delta_{22}}\,\xi \cdot K_2 = -21{,}875 \cdot K_2 \cdot \xi.$$

c) X_3 nach S. 530

$$\frac{1}{1+2r}\,\frac{1}{1+r} = \frac{1}{15} = 0{,}06667,$$

$$X_3 = +\frac{l_1^2}{2\,\delta_{33}} \cdot K_3 = 15{,}625 \cdot K_3.$$

ξ	$1 - \xi^2$	$-0{,}14285\,(1-\xi^6)$	$[\Sigma] = K_2$	$K_2 \cdot \xi$	$X_2 = -21{,}875 \cdot K \cdot \xi$
0,0	1,00	− 0,14286	0,85714	0,00000	− 0,0000
0,2	0,96	− 0,14285	0,81715	0,16343	− 3,5750
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ξ	$1 - \xi^2$	$-0{,}06667\,(1-\xi^6)$	$[\Sigma] = K_3$	$X_3 = 15{,}625 \cdot K_3$
0,0	1,00	− 0,06667	0,93333	14,583
0,2	0,96	− 0,06666	0,89334	13,958
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Ergebnisse für die Abb. 518

ξ	X_1 [t]			X_2 [mt]			X_3 [mt]		
	$r = 1$	$r = 2$	$r = \infty$	$r = 1$	$r = 2$	$r = \infty$	$r = 1$	$r = 2$	$r = \infty$
0,0	0,647	0,622	0,557	− 0,00	− 0,00	− 0,00	15,63	14,58	12,50
0,2	0,572	0,559	0,513	− 4,13	− 3,58	− 2,40	14,88	13,96	12,00
0,4	0,383	0,392	0,393	− 6,85	− 6,11	− 4,20	12,71	12,09	10,50
0,6	0,170	0,186	0,228	− 7,10	− 6,61	− 4,80	9,28	9,01	8,00
0,8	0,030	0,036	0,072	− 4,57	− 4,46	− 3,60	4,91	4,86	4,50
1,0	0,000	0,000	0,000	− 0,00	− 0,00	− 0,00	0,00	0,00	0,00

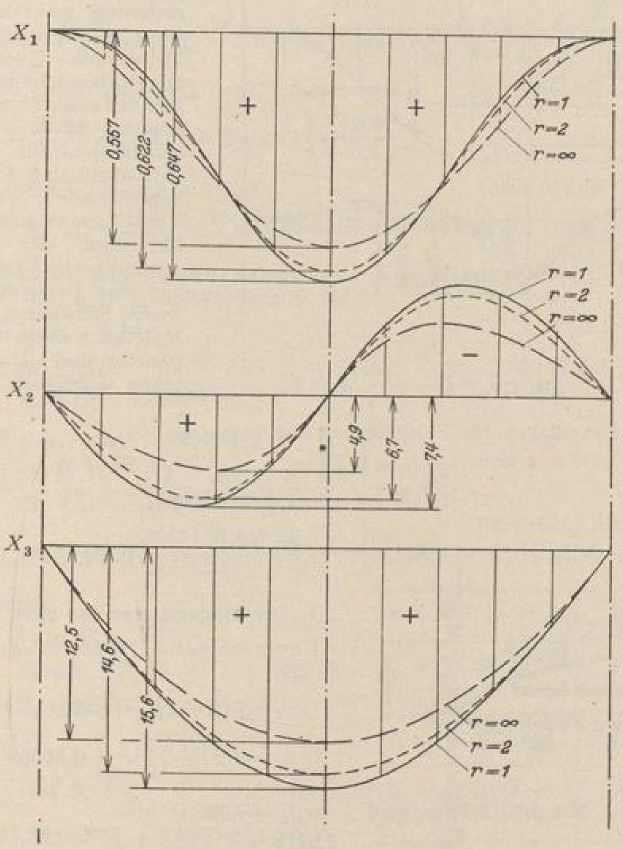


Abb. 518.

5. Einflußlinien der Stützkraft A und der Biegungsmomente im Kämpfer und Scheitel (Abb. 519).

$$A = A_0 + X_2/l_1 = A_0 + X_2/50{,}0\,.$$

$$M_a = X_1 \cdot y_{1,0} - X_2 - X_3; \qquad M_c = M_{c0} - X_1\, y_{2,0} - X_3\,.$$

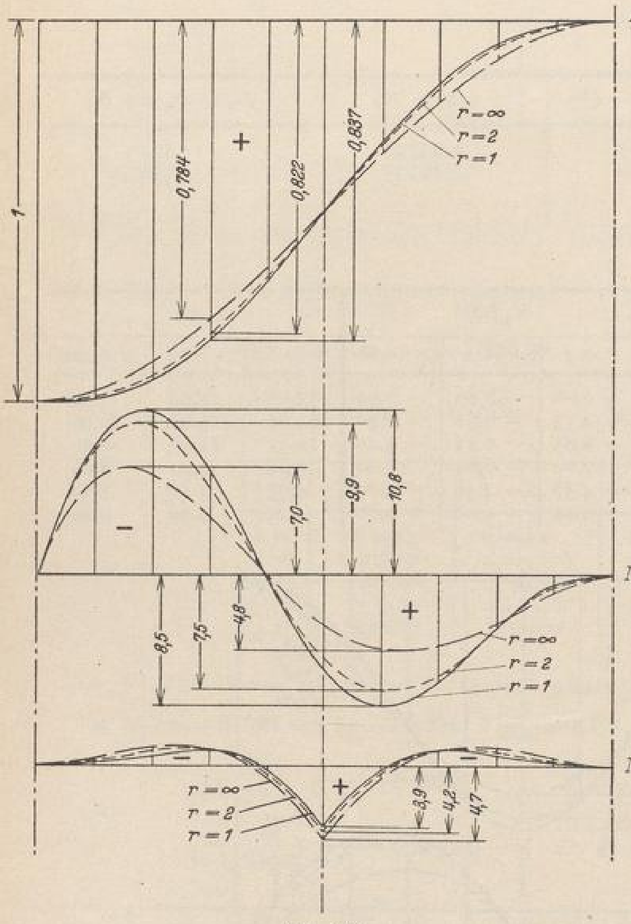


Abb. 519.

Schnittkräfte und Randspannungen eines symmetrischen Bogenträgers als Funktion der Bogenform.

Um den Spannungszustand eines Bogenträgers als Funktion einer mathematisch beschriebenen Mittellinie und Querschnittsänderung zu studieren, werden sechs Träger untersucht, von denen drei nach der quadratischen Parabel, drei andere nach der Kettenlinie gekrümmt sind, die mit großer Annäherung als Stützlinie für Eigengewicht angesehen werden kann. Das Verhältnis

$$n = J_c/J_k \cos\alpha_k$$

(S. 509) wird mit 0,4, 1,0 und 1,29 gewählt. Das Verhältnis $n = 0{,}4$ ist bei zahlreichen Bauwerken eingehalten, das Verhältnis $n = 1{,}0$ vereinfacht die Zahlenrechnung, während $n = 1{,}29$ für $f/l \approx 1/5$ Bogenträger mit gleichbleibendem Querschnitt liefert. Die Untersuchung des Bogenträgers mit einer Parabel oder Kettenlinie als Achse und $n = 0{,}4$ wird als Beispiel für die Anwendung der Tabelle 42 S. 529 ff. ausführlich angeschrieben, für die anderen Verhältniszahlen n jedoch auf die Mitteilung der Ergebnisse beschränkt. Der Vergleich stützt sich auf eine Belastung aus Eigengewicht, Schwinden und halbseitiger Nutzlast. Diese ist relativ ungünstig und daher zur summarischen Bewertung geeignet.

Gemeinsame Grundlagen für Formgebung und Belastung.

$$f = 4{,}12\ \text{m}, \quad l_1 = 13{,}72\ \text{m}, \quad l = 2\,l_1 = 27{,}44\ \text{m},$$

$$d_c = 0{,}52\ \text{m}, \quad J_c = 0{,}0118\ \text{m}^4.$$

Belastungsordinaten (Abb. 520)

Scheitel: $q_s = 2{,}55\ \text{t/m}^2$; Kämpfer: $q_k = 11{,}02\ \text{t/m}^2$.

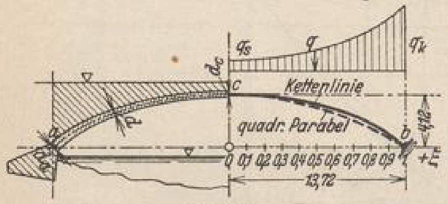


Abb. 520.

I. Die Bogenachse ist eine Parabel.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 513) nach S. 529.

$$y_1 = f\,(1 - \xi^2) = 4{,}12\,(1 - \xi^2);$$

$$\text{tg}\,\alpha = -2\left(\frac{f}{l_1}\right)\xi = -0{,}60058\,\xi;$$

$\cos\alpha_a = 0{,}8562$. Mit $d_a = 0{,}77$ m wird $J_a = J_b = 0{,}038\ \text{m}^4$ und

$$n = \frac{J_c}{J_a \cos\alpha_a} = \frac{0{,}0118}{0{,}038 \cdot 0{,}8562} = 0{,}36 \approx 0{,}4\,.$$

Approximation des Querschnittes (Abb. 486) nach Tab. 42, 1, b: $J_c/J \cos\alpha = 1 - 0{,}6\,\xi^2$.
Hieraus Gewölbestärken d (Abb. 520), Querschnitte F und Widerstandsmomente W.

2. Hauptsystem nach S. 529 Balken auf 2 Stützen (Abb. 513).

$$\eta_{1,0} = \frac{2}{5}\,\frac{4+0{,}4}{2+0{,}4}, \qquad y = y_1 - y_{1,0}.$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$\eta_{1,0} =$	0,73333	0,66667	0,64316
$y_{1,0} =$	3,02132	2,74668	2,64982

3. Vorzahlen nach S. 531. Bogenträger $n = 0{,}4$; $F_c = 0{,}52\ \text{m}^2$; $f^2 = 16{,}9744$:

$$\nu = \frac{175}{4}\,\frac{0{,}0118}{0{,}52 \cdot 16{,}9744}\,\frac{2+0{,}4}{0{,}4\,(8+0{,}4)+8/3} = 0{,}02329;$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{175} \cdot 27{,}44 \cdot 16{,}9744 \cdot 1{,}02329\,\frac{0{,}4\,(8+0{,}4)+8/3}{2+0{,}4},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{15}\,27{,}44\,(2+3\cdot 0{,}4);$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{3}\,27{,}44\,(2+0{,}4).$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$\nu =$	0,02329	0,01504	0,01313
$\delta_{11} =$	27,35682	42,02512	48,03193
$\delta_{22} =$	5,85387	9,14667	10,73819
$\delta_{33} =$	21,95200	27,44000	30,09253

4. Einflußlinien der überzähligen Größen nach S. 531. Bogenträger $n = 0{,}4$:

$$X_1 = \frac{35}{4}\,\frac{27{,}44}{4{,}12}\,\omega_R^2(\zeta)\,\frac{3\cdot 0{,}4\,(4+0{,}4) + 8\,(1-0{,}4)\,(2+0{,}4)\,\omega_R(\zeta)}{[3\cdot 0{,}4\,(8+0{,}4)+8]\cdot 1{,}02329}$$
$$= 16{,}63150\,\omega_R^2(\zeta) + 36{,}28690\,\omega_R^3(\zeta) \qquad \text{(Abb. 524a)};$$

$$X_2 = -\frac{27{,}44}{2}\,\omega_R(\zeta)\,(1-2\zeta')\left[1 + 6\,\omega_R(\zeta)\,\frac{1-0{,}4}{2+3\cdot 0{,}4}\right]$$
$$= -1{,}715\,\omega_R(\zeta)\,(1-2\zeta')\,[8+9\,\omega_R(\zeta)] \qquad \text{(Abb. 524b)};$$

$$X_3 = \frac{27{,}44}{2}\,\omega_R(\zeta)\left[1 + 2\,\omega_R(\zeta)\,\frac{1-0{,}4}{2+0{,}4}\right]$$
$$= 6{,}86\,[2\,\omega_R(\zeta) + \omega_R^2(\zeta)] \qquad \text{(Abb. 524c)}.$$

Die Einflußlinien X_1, X_2 und X_3 für $n = 1{,}29$ unterscheiden sich nur wenig von den Ergebnissen für $n = 1{,}0$.

5. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht. Bogenträger $n = 0{,}4$; $q_k - q_s = 8{,}47$ nach S. 531:

a) $p = \text{const} = q_s = 2{,}55$:

$$X_1' = \frac{2{,}55\cdot 27{,}44^2}{8\cdot 4{,}12}\,\frac{1}{1{,}02329}; \qquad X_2' = 0; \qquad X_3' = \frac{2{,}55\cdot 27{,}44^2}{20}\,\frac{4+0{,}4}{2+0{,}4},$$

b) $p_\xi = p\,\xi^2 = (q_k - q_s)\,\xi^2 = 8{,}47\,\xi^2$;

$$X_1'' = \frac{8{,}47\cdot 27{,}44^2}{72\cdot 4{,}12}\,\frac{1}{1{,}02329}\,\frac{8\,(1+4\cdot 0{,}4+5\cdot 0{,}16)}{3\cdot 0{,}4\,(8+0{,}4)+8};$$

$$X_2'' = 0; \qquad X_3'' = \frac{8{,}47\cdot 27{,}44^2}{420}\,\frac{16+5\cdot 0{,}4}{2+0{,}4};$$

c) Hieraus folgt:

$$X_1 = X_1' + X_1''; \quad X_2 = 0; \quad X_3 = X_3' + X_3''.$$

d) Längskräfte:

$$V_0 = l_1\left[q_s\,\xi + \frac{q_k - q_s}{3}\,\xi^3\right]$$
$$= 13{,}72\,[2{,}55\,\xi + 2{,}8233\,\xi^3];$$

$$N = -[V_0 \sin\alpha + X_1 \cos\alpha] \quad \text{(Abb. 523)}.$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$X_1' =$	56,9277	57,3903	57,4984
$X_1'' =$	25,1003	27,2322	27,8100
$X_1 =$	82,0280	84,6225	85,3084
$X_3' =$	176,0025	160,0028	154,3612
$X_3'' =$	113,8842	106,2919	103,6150
$X_3 =$	289,8867	266,2947	257,9762

e) Momente:

$$M_0 = \frac{l_1^2}{12}\left[q_k + 5\,q_s - 6\,q_s\,\xi^2 - (q_k - q_s)\,\xi^4\right]$$

$$= 372{,}8688 - 240{,}0039\,\xi^2 - 132{,}8649\,\xi^4\,;$$

$$M = M_0 - X_1\,y - X_3 \quad \text{(Abb. 525).}$$

f) Um die Bauwürdigkeit der drei Gewölbe miteinander zu vergleichen, werden die Randspannungen $\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}$ (Abb. 527) für den homogenen Querschnitt angegeben, wenn auch $\sigma_{b_z} > 5$ kg/cm².

6. Schnittkräfte aus einseitiger Verkehrslast $p = 1{,}0$ t/m². Bogenträger $n = 0{,}4$:

a) Überzählige Größen: $X_1 = 1{,}0\,\frac{27{,}44^2}{16 \cdot 4{,}12}\,\frac{1}{1{,}02329}$;

$$X_2 = -1{,}0\,\frac{27{,}44^2}{64}\,\frac{3 + 2 \cdot 0{,}4}{2 + 3 \cdot 0{,}4}\,; \qquad X_3 = 1{,}0\,\frac{27{,}44^2}{40}\,\frac{4 + 0{,}4}{2 + 0{,}4}\,;$$

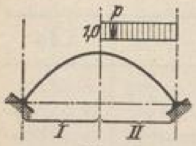


Abb. 521.

$n =$	0,4	1,0	1,29
$X_1 =$	11,1623	11,2530	11,2742
$X_2 =$	− 13,9708	− 11,7649	− 11,1837
$X_3 =$	34,5103	31,3731	30,26669

b) Längskräfte:

$$A_0 = \frac{p\,l_1}{4} = 3{,}43\,; \qquad V_{0I} = A_0\,; \qquad V_{0II} = A_0\,(1 - 4\,\xi)\,.$$

$$N = -\left[V_0 \sin\alpha + X_1 \cos\alpha + X_2/l_1 \sin\alpha\right] \quad \text{(Abb. 523).}$$

c) Momente:

$$M_{0I} = A\,l_1\,(1 + \xi)\,; \qquad M_{0II} = A\,l_1\,(1 + \xi - 2\,\xi^2)\,.$$

$$M = M_0 - X_1\,y + X_2\,\xi - X_3 \quad \text{(Abb. 526).}$$

7. Schnittkräfte aus Schwinden ($t = -15^0$).

Bogenträger $n = 0{,}4$: $\alpha_t = 0{,}00001$, $E = 2\,100\,000$ t/m².

a) $$\delta_{1t} = -2\,100\,000 \cdot 0{,}011815 \cdot 0{,}00001 \cdot 27{,}44 = -101{,}99448\,;$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
X_{1t}	− 3,72830	− 2,42699	− 2,12347

$X_{2t} = X_{3t} = 0$.

b) Längskräfte: $N_t = -X_{1t} \cos\alpha$ (Abb. 523);

c) Momente: $M_t = -X_{1t} \cdot y$ (Abb. 525).

8. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden.

Momente: Abb. 528; Randspannungen: Abb. 529.

II. Die Bogenachse ist eine Kettenlinie.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 516 S. 533)

$$\mathfrak{Cof}\,c = \varkappa = \frac{q_k}{q_s} = 4{,}32, \qquad c = \mathfrak{Ar\,Cof}\,\varkappa = 2{,}14273, \qquad y_s^* = \frac{f}{\varkappa - 1} = 1{,}241\,.$$

$$y_2 = 1{,}241\,(\mathfrak{Cof}\,2{,}14273\,\xi - 1)\,.$$

$$\mathfrak{Sin}\,c = \sqrt{\varkappa^2 - 1} = 4{,}20267, \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{c}{l_1}\,y_s^*\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,c = -0{,}19382\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,c\,.$$

$\cos\alpha_a = 0{,}77534$. Mit $d_a = 0{,}77$ m wird $J_a = J_b = 0{,}038$ m⁴ und

$$n = \frac{J_c}{J_a \cdot \cos\alpha_a} = \frac{0{,}0118}{0{,}038 \cdot 0{,}77534} = 0{,}4\,.$$

Approximation des Querschnitts nach S. 534 mit:

$$\mu = \frac{4{,}32 - 0{,}4}{4{,}32 - 1} = 1{,}18072, \qquad \varphi = \frac{1{,}18072 - 1}{1{,}18072} = 0{,}15306,$$

$$\frac{J_c}{J \cos\alpha} = 1{,}18072\,(1 - 0{,}15306\,\mathfrak{Cof}\,2{,}14273\,\xi)\,.$$

Hieraus Gewölbestärken d (Abb. 522), Querschnitte F und Widerstandsmomente W.

Zahlen für die Ansätze nach Tabelle 42, 3 S. 533:

$$y_s^{*\,2} = 1{,}540, \qquad c^2 = 4{,}59129, \quad (l_1/c)^2 = 40{,}999,$$

$$\mathfrak{Cof}\,c = 4{,}32, \qquad \mathfrak{Cof}^2 c = 18{,}6624, \quad \mathfrak{Cof}\,2c = 36{,}32531,$$

$$\mathfrak{Sin}\,c = 4{,}20267, \quad \frac{\mathfrak{Sin}\,c}{c} = 1{,}96136, \quad \frac{\mathfrak{Sin}\,2c}{2c} = 8{,}47320.$$

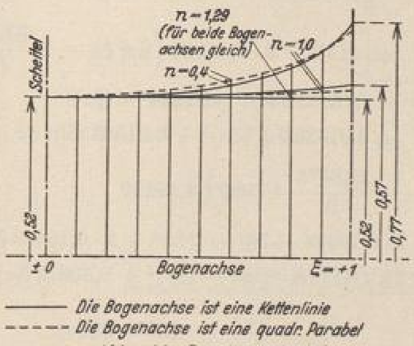


Abb. 522. Gewölbestärken d.

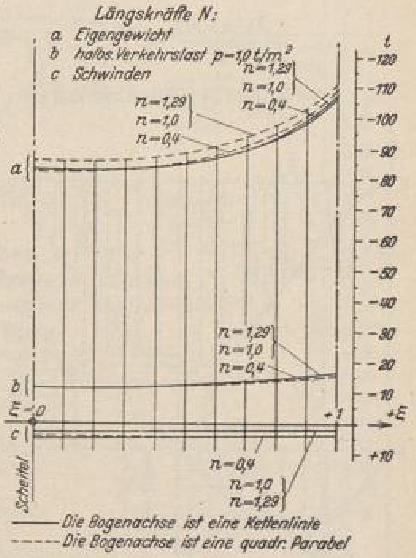


Abb. 523.

2. Hauptsystem nach S. 533 Balken auf 2 Stützen (Abb. 516)

$$y_{2,0} = 1{,}241\,\frac{(1 + 0{,}15306)\,(1{,}96136 - 1) - \dfrac{0{,}15306}{2}\,(1{,}96136 \cdot 4{,}32 - 1)}{1 - 0{,}15306 \cdot 1{,}96136},$$

$$y_{2,0} = 0{,}95158, \qquad y_{1,0} = 4{,}12 - 0{,}951581 = 3{,}168419,$$

$$\psi = 1 + \frac{0{,}951581}{1{,}241} = 1{,}766786, \qquad \begin{cases} \varphi\,\psi = 0{,}270424, \\ \psi^2 = 3{,}121533, \end{cases}$$

$$y = y_{2,0} - y_2,$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$y_{2,0} =$	0,95158	1,19305	1,28204

3. Vorzahlen. Die Ergebnisse ν aus I, 3 können mit hinreichender Genauigkeit für die Achse nach einer Kettenlinie verwendet werden. $n = 0{,}4$ ergab $\nu = 0{,}02329$, somit:

$$\delta_{11} = 2 \cdot 1{,}18072 \cdot 13{,}72 \cdot 1{,}54 \cdot 1{,}02329 \Big[3{,}12153 - 2 \cdot 1{,}76679 \left(1 + \frac{0{,}27042}{2}\right) 1{,}19136$$

$$+ \frac{1}{2}\,(1 + 2 \cdot 0{,}27042)\,(1{,}96136 \cdot 4{,}32 + 1) - \frac{0{,}15306}{3}\,1{,}96136\,(2 + 18{,}6624) \Big] = 24{,}73071,$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{3}\,1{,}18072 \cdot 13{,}72 \left\{ 1 - 3 \cdot 0{,}15306 \left[1{,}96136 + \frac{2}{4{,}59129}\,(1{,}96136 - 4{,}22) \right] \right\} = 6{,}16833,$$

$$\delta_{33} = 2 \cdot 1{,}18072 \cdot 13{,}72\,(1 - 0{,}15306 \cdot 1{,}96136) = 22{,}67247.$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$\delta_{11} =$	24,73071	38,15818	43,77720
$\delta_{22} =$	6,16833	9,14667	10,58675
$\delta_{33} =$	22,67247	27,44000	29,74524

4. Einflußlinien der überzähligen Größen. Biegelinie des Bogenträgers $n = 0{,}4$:

$$\delta_{m\,1} = \frac{1{,}18072}{2}\, 1{,}241 \cdot 40{,}999 \left\{\left[4{,}59129 \left(1{,}76679 + \frac{0{,}15306}{2}\right)\right.\right.$$

$$\left. - 2\,(1 + 0{,}270424)\, 4{,}32 + \frac{0{,}15306}{4}\, 36{,}32531\right] - \left[\left(1{,}76679\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{0{,}15306}{2}\right)(\xi\, c)^2 - 2\,(1 + 0{,}27042)\,\mathfrak{Cof}\,(\xi\, c) + \frac{0{,}15306}{4}\,\mathfrak{Cof}\,(2\,\xi\, c)\right]\Big\}$$

$$= 30{,}03738\, \{[2{,}540848\,\mathfrak{Cof}\,(\xi\, c) - 0{,}038265\,\mathfrak{Cof}\,(2\,\xi\, c) - 1{,}84332\,(\xi\, c)^2\} - 1{,}12325]\,,$$

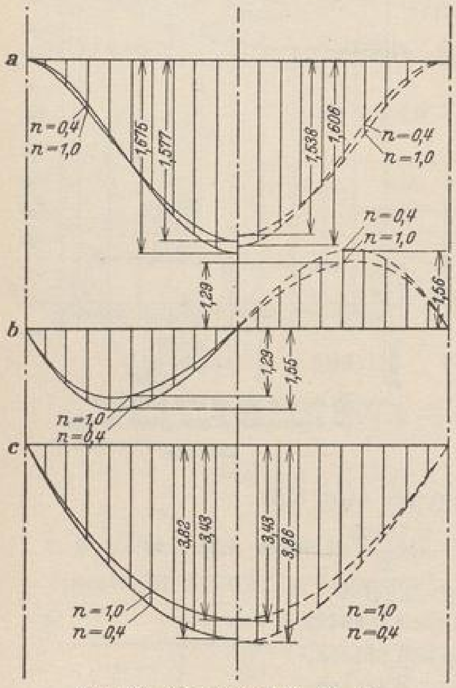


Abb. 524. Einflußlinien X_1, X_2, X_3.
——— Die Bogenachse ist eine Kettenlinie.
– – – Die Bogenachse ist eine quadratische Parabel.

$$\delta_{m\,2} = -\frac{1{,}18072}{6 \cdot 2{,}14273}\, 40{,}999\, \xi\, c \times$$

$$\times \left\{[4{,}59129 - 6 \cdot 0{,}15306\,(4{,}32 - 2 \cdot 1{,}96136)]\right.$$

$$\left. - \left[(\xi\, c)^2 - 6 \cdot 0{,}15306 \left(\mathfrak{Cof}\,\xi\, c - 2\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi\, c}{\xi\, c}\right)\right]\right\}$$

$$= -3{,}7653165\,\xi\, c\,[4{,}22644 - (\xi\, c)^2$$

$$+ 0{,}91836\,\mathfrak{Cof}\,(\xi\, c)] + 6{,}91583\,\mathfrak{Sin}\,\xi\, c\,,$$

$$\delta_{m\,3} = \frac{1{,}18072}{2}\, 40{,}999\, \{[4{,}59129$$

$$- 2 \cdot 0{,}15306 \cdot 4{,}32] - [(\xi c)^2 - 2 \cdot 0{,}15306\,\mathfrak{Cof}\,\xi\, c]\}$$

$$= 24{,}20417\,[3{,}26885 - (\xi\, c)^2 + 0{,}30612\,\mathfrak{Cof}\,\xi\, c]\,,$$

$$X_1 = \frac{\delta_{m\,1}}{\delta_{11}} \qquad \text{(Abb. 524a)},$$

$$X_2 = \frac{\delta_{m\,2}}{\delta_{22}} \qquad \text{(Abb. 524b)},$$

$$X_3 = \frac{\delta_{m\,3}}{\delta_{33}} \qquad \text{(Abb. 524c)}.$$

Die Einflußlinien X_1, X_2 und X_3 für $n = 1{,}29$ unterscheiden sich nur sehr wenig von den entsprechenden Werten für $n = 1{,}0$.

5. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht. Bogenträger $n = 0{,}4$, $q_k - q_s = 8{,}47$, daher nach S. 534:

a) $H_q = \dfrac{8{,}47}{4{,}12}\, 40{,}999 = 84{,}247\,\mathrm{t}$, $\quad 1 + \nu = 1{,}02329$.

b) Längskräfte: $N \approx -\dfrac{H_q}{1+\nu}\,\dfrac{1}{\cos\alpha} = -82{,}330\,\dfrac{1}{\cos\alpha}$ (Abb. 523).

c) Momente: $M = \dfrac{\nu}{1+\nu}\, H_q \cdot y = 1{,}91746 \cdot y$ (Abb. 525).

d) Randspannungen: $\sigma = \dfrac{N}{F} \pm \dfrac{M}{W}$ (Abb. 527).

6. Schnittkräfte aus halbseitiger Verkehrslast $p = 1{,}0\,\mathrm{t/m^2}$.

a) Belastungszahlen und überzählige Größen $X_k = \delta_{k0}/\delta_{kk}$:

$$\delta_{10} = 1{,}18072 \cdot 1{,}241 \cdot 40{,}999 \cdot 1{,}0 \cdot 13{,}72 \left[\frac{4{,}59129}{3}\left(1{,}766786 + \frac{0{,}15306}{2}\right)\right.$$

$$\left. - (1 + 0{,}270424)\,(4{,}32 - 1{,}96136) + \frac{0{,}15306}{8}\,(36{,}32531 - 8{,}47320)\right] = 294{,}652\,,$$

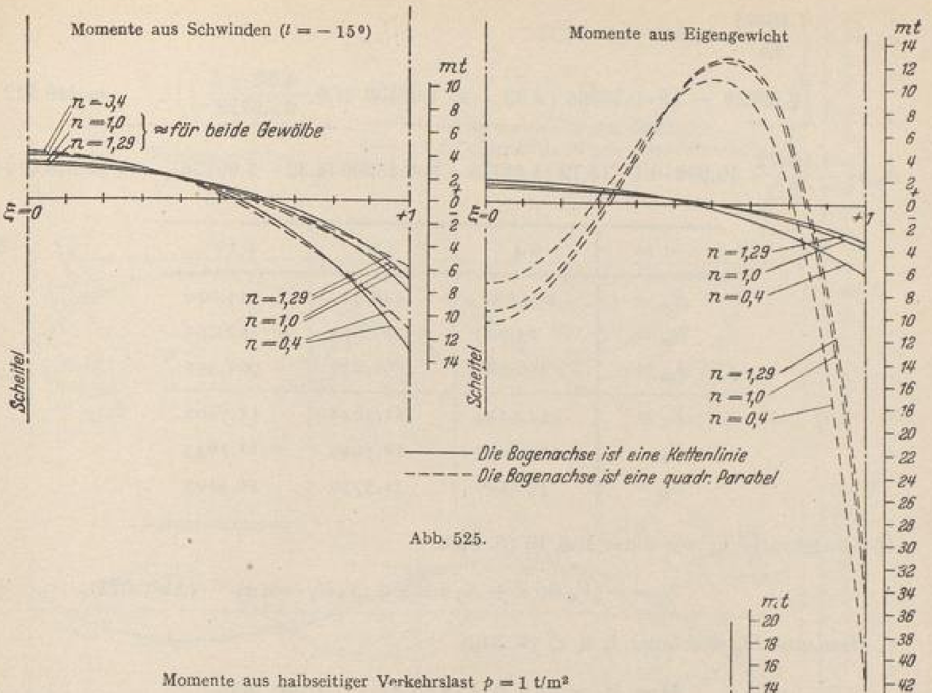


Abb. 525.

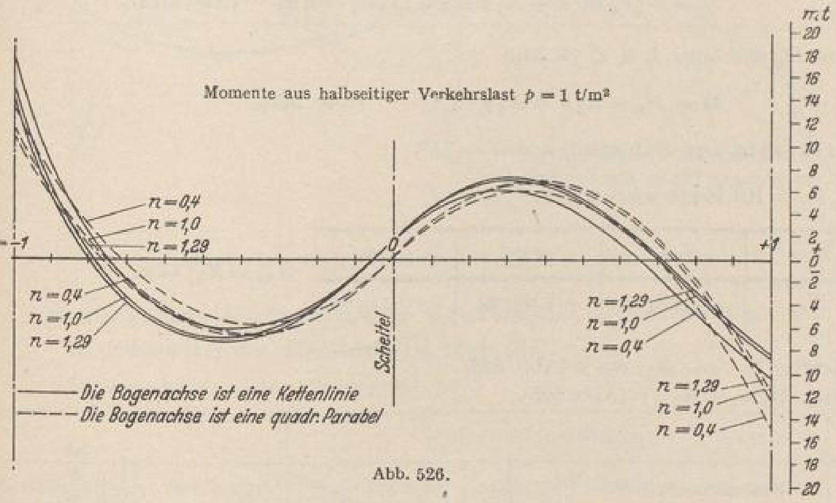


Abb. 526.

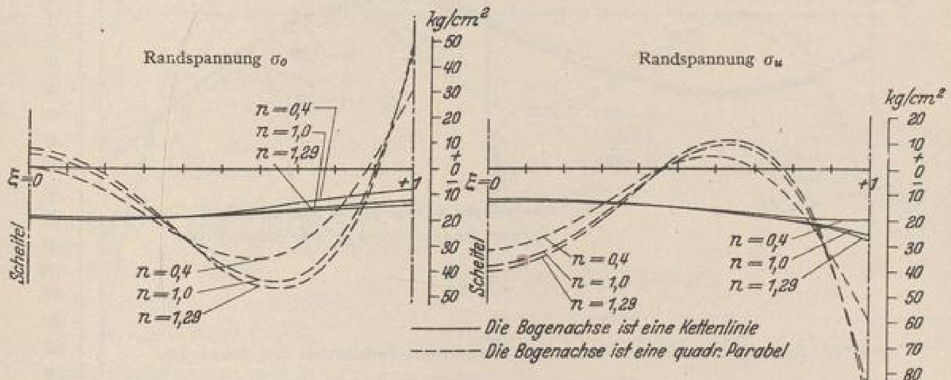


Abb. 527.
Randspannungen aus Eigengewicht.

$$\delta_{20} = -\frac{1{,}18072}{24}\, 40{,}999 \cdot 1{,}0 \cdot 13{,}72$$

$$\times \left[4{,}59129 - 12 \cdot 0{,}15306 \left(4{,}32 - 4 \cdot 1{,}96136 + 6\, \frac{4{,}32 - 1}{4{,}59129}\right)\right] \qquad = 448{,}922\,,$$

$$\delta_{30} = \frac{1{,}18072}{3}\, 40{,}999 \cdot 1{,}0 \cdot 13{,}72\, [4{,}59129 - 3 \cdot 0{,}15306\, (4{,}32 - 1{,}96136)] \qquad = 513{,}079\,.$$

$n =$	0,4	1,0	1,29
$\delta_{10} =$	294,652	448,922	513,079
$\delta_{20} =$	− 85,723	− 107,610	− 118,193
$\delta_{30} =$	776,681	860,876	901,592
$X_1 =$	11,9144	11,7648	11,7202
$X_2 =$	− 13,8972	− 11,7649	− 11,1643
$X_3 =$	34,2566	31,3730	30,3105

b) Längskräfte V_0 wie unter I, 6, b) (S. 540)

$$N = -[V_0 \sin\alpha + X_1 \cos\alpha + X_2/l_1 \cdot \sin\alpha] \qquad \text{(Abb. 523)},$$

c) Momente M_0 wie unter I, 6, c) (S. 540)

$$M = M_0 - X_1 y + X_2 \xi - X_3 \qquad \text{(Abb. 526)},$$

7. Schnittkräfte aus Schwinden ($t = -15^0$).

a) Mit $\delta_{1t} = -101{,}99448$ wie unter I, 7, a) wird:

$n =$	0,4	1,0	1,29
X_{1t}	− 4,12420	− 2,67294	− 2,32985

$X_{2t} = X_{3t} = 0.$

b) Längskräfte: $N_t = -X_{1t} \cos\alpha$ (Abb. 523).
c) Momente: $M_t = -X_{1t} \cdot y$ (Abb. 525).

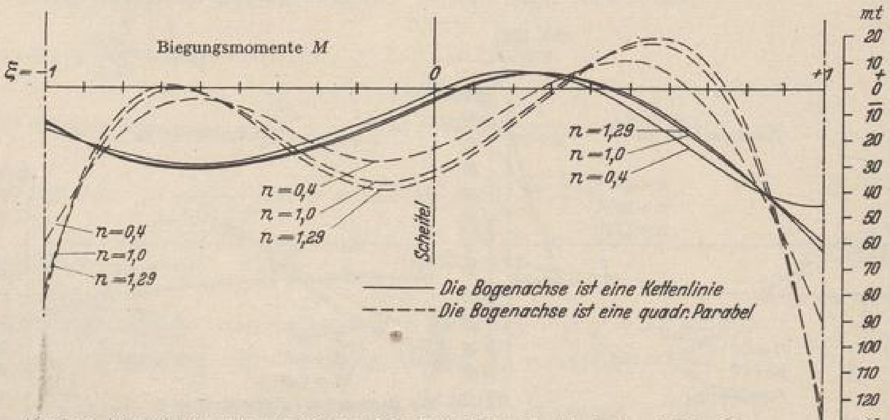


Abb. 528. Biegungsmomente aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden.

8. Schnittkräfte und Randspannungen aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden. Momente: Abb. 528, Randspannungen: Abb. 529.

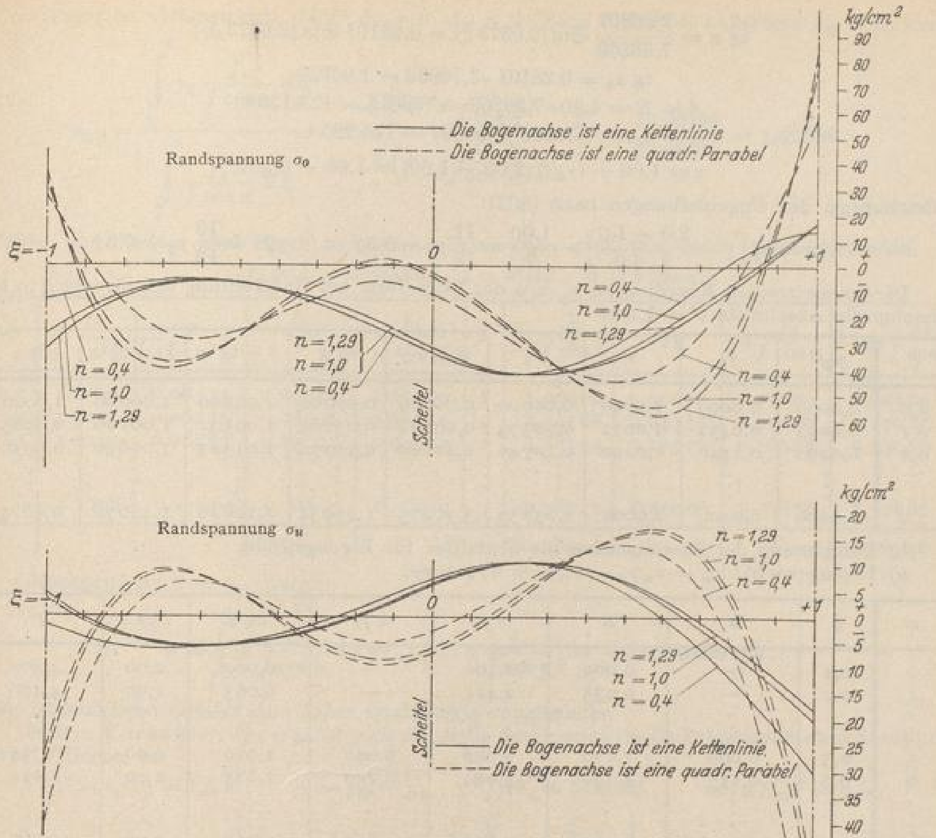


Abb. 529. Randspannungen aus Eigengewicht, halbseitiger Verkehrslast und Schwinden.

Rechenvorschrift zur statischen Untersuchung eines Gewölbes.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 530).

2. Annahmen für Eigengewicht.

		Abmessungen:	Scheitel	Kämpfer
Gewölbe einschl. Isolierung	$\gamma_v = 2{,}4$ t/m³	senkrecht gemessen	1,00 m	2,00 m
Ausgleichbeton	$\gamma_b = 2{,}0$ t/m³		0,00 m	2,30 m
Überschüttung	$\gamma_{ü} = 1{,}8$ t/m³		0,00 m	3,20 m
Fahrbahn	$g_F = 2{,}0$ t/m²		—	—

Eigengewicht $q_s = 4{,}40$ t/m;

$q_k = 17{,}16$ t/m; $\varkappa = 17{,}16/4{,}4 = 3{,}90$.

$J_c = J_s = 0{,}08333\,\text{m}^4$, $J_c/J\cos\alpha$: Seite 547,

$F_c = F_s = 1{,}0\ \text{m}^2$.

3. Bogenform: a) Die Bogenachse y_2 wird nach S. 510 in erster Annäherung als Kettenlinie für Eigengewicht angenommen: $\varkappa = 3{,}90$; $\mathfrak{Sin}\, c = 3{,}769651$.

$y_s^* = 6{,}0/(3{,}9 - 1) = 2{,}06897$;

$c = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, 3{,}90 = 2{,}0373$;

$y_2 = 2{,}06897\,[\mathfrak{Cof}\,(2{,}0373\,\xi) - 1]$;

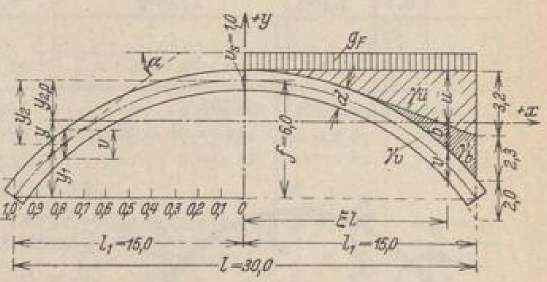


Abb. 530.

angenäherte Berechnung dieser Funktion mit $y_2 = 6{,}0\,(y_2/f)$ durch Interpolation der Tabelle S. 512. $l_1/c = 7{,}36269$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2{,}06897}{7{,}36269}\,\mathfrak{Sin}\,(2{,}0373\,\xi) = 0{,}28101\,\mathfrak{Sin}\,(2{,}0373\,\xi);$$

$$\operatorname{tg}\alpha_k = 0{,}28101 \cdot 3{,}76962 = 1{,}05929;$$

$$A = B = 4{,}40 \cdot 7{,}36269 \cdot 3{,}769615 = 122{,}120\ \text{t};$$

$$H = 4{,}40 \cdot 7{,}36269^2/2{,}06897 = 115{,}285\ \text{t}.$$

$$v = 1{,}00 + (y_2/f)\,(2{,}00 - 1{,}00) = 1{,}00 + (y_2/f);$$

Gleichungen der Bogenlaibungen nach (802):

$$y_2^{(o)} = y_2\left(1 - \frac{2{,}0 - 1{,}0}{2 \cdot 6{,}0}\right) - \frac{1{,}00}{2} = \frac{11}{12}\,y_2 - 0{,}5; \qquad y_2^{(u)} = \frac{13}{12}\,y_2 + 0{,}5;$$

Die geometrischen Koordinaten y_2, v, α der Bogenform bei Unterteilung der Strecke l_1 in 10 gleichgroße Abschnitte $c' = 1{,}5$ m:

ξ	y_2/f	y_2	v	$c\,\xi$	$\mathfrak{Sin}\,c\,\xi$	$\operatorname{tg}\alpha$	$1+\operatorname{tg}^2\alpha$	$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\cos\alpha$
0,0	0,0000	0,0000	1,0000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	1,00000	1,0000
0,1	0,0072	0,0432	1,0072	0,20373	0,20514	0,05765	1,00332	1,00166	0,9983
0,2	0,0290	0,1740	1,0290	0,40746	0,41883	0,11770	1,01385	1,00690	0,9931
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,0	1,0000	6,0000	2,0000	2,03730	3,76975	1,05934	2,12220	1,45678	0,6864

b) Berechnung der Gewölbeachse als Stützlinie für Eigengewicht.

α) Eigengewicht: $q_m = v_m\gamma_v + b_m\gamma_b + \ddot{u}\gamma_{\ddot{u}} + g_F$;

m	ξ	b	$\ddot{u}$	$v\,\gamma_v$	$b\,\gamma_b$	$\ddot{u}\,\gamma_{\ddot{u}}$	g_F	q
0	0,1	—	0,000	2,400	—	0,000	2,00	4,400
1	0,2	—	0,035	2,417	—	0,063	2,00	4,480
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	0,5	0,000	1,070	2,868	0,000	1,926	2,00	6,794
6	0,6	0,115	1,490	3,099	0,230	2,682	2,00	8,011
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1,0	2,300	3,200	4,800	4,600	5,760	2,00	17,160

β) Die Ordinaten y_2 der Stützlinie für die zu q_m äquivalente Gruppe von Einzellasten G_m in den Intervallgrenzen nach S. 75:

$$G_1 = \frac{c'}{6}\,(2\,q_1 + q_2); \qquad G_m = \frac{c'}{6}\,(q_{m-1} + 4\,q_m + q_{m+1}); \qquad G_n = \frac{c'}{6}\,(q_{n-1} + 2\,q_n);$$

$$\overline{V}_{0m} = \sum_0^{m-1} G_m, \qquad \overline{M}_{0m} = \sum_0^m (\overline{V}_{0m} \cdot c'). \qquad H = \overline{M}_{0,10}/f, \qquad y_2 = \overline{M}_{0m}/H.$$

m	ξ	q_m	$q_9 + 2\,q_{10}$ / $q_{m-1} + 4\,q_m + q_{m+1}$	$2\,q_1 + q_2$	G_m	$\overline{V}_{0m}$	$\overline{V}_{0m} \cdot c'$	$\overline{M}_{0m}$	y_2
0	0,0	4,400	—	13,280	3,320	0,000	0,000	0,000	0,00000
1	0,1	4,480	27,069		6,767	3,320	4,980	4,980	0,04335
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	0,9	14,042	84,893		21,223	88,316	132,474	524,510	4,56880
10	1,0	17,160	48,362	—	12,091	109,539	164,309	688,819	6,00000

$$A = B = 121{,}630\ \text{t}; \quad H = 688{,}819/6{,}0 = 114{,}803\ \text{t}.$$

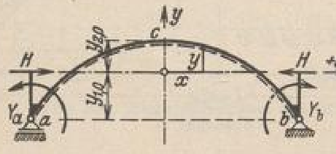


Abb. 531.

4. Hauptsystem zur Berechnung der statisch überzähligen Größen. Balkenträger auf 2 Stützen $l = 2\,l_1 = 30{,}0$ m.

Überzählige Größen nach S. 523:

$$X_1 = H, \qquad X_2 = \tfrac{1}{2}\,(Y_a - Y_b), \qquad X_3 = \tfrac{1}{2}\,(Y_a + Y_b),$$

$$M_1 = +\,y, \qquad M_2 = -\,\xi, \qquad M_3 = 1,$$

$$N_1 = \cos\alpha, \qquad N_2 = 1/l_1 \cdot \sin\alpha, \qquad N_3 = 0.$$

Der Träger ist symmetrisch, daher $\delta_{12} = 0$, $\delta_{23} = 0$. Nach S. 523 ist außerdem $\delta_{13} = 0$, wenn

$$y_{2,0} = \frac{\int\limits_c^a y_2 \frac{J_c}{J\cos\alpha}\,dx}{\int\limits_c^a \frac{J_c}{J\cos\alpha}\,dx} = \frac{\Sigma\left(\lambda\cdot y_2 \frac{J_c}{J\cos\alpha}\right)}{\Sigma\left(\lambda\cdot\frac{J_c}{J\cos\alpha}\right)} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} = \frac{32{,}06796}{22{,}48201} = 1{,}42638\,.$$

Zähler und Nenner sind durch numerische Integration nach Simpson (181) entstanden.

($J_c = J_s = 0{,}08333$, $J = d^3/12$, $d = v\cos\alpha$.)

ξ	d	J	$\frac{J_c}{J}$	$\frac{J_c}{J\cos\alpha}$	λ	$\lambda\cdot\frac{J_c}{J\cos\alpha}$	y_2	$y_2\frac{J_c}{J\cos\alpha}$	$\lambda\cdot y_2\frac{J_c}{J\cos\alpha}$
0,0	1,0000	0,08333	1,00000	1,00000	1	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	1,0055	0,08471	0,98375	0,98542	4	3,94168	0,04335	0,04272	0,17088
0,2	1,0219	0,08893	0,93707	0,94357	2	1,88714	0,17516	0,16528	0,33056
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,0	1,3728	0,21564	0,38645	0,56311	1	0,56311	6,00000	3,37866	3,37866
					$\Sigma_1 =$	22,48201		$\Sigma_2 =$	32,06796

Nachprüfung von y_{20} durch:

$$0 = \int\limits_c^a y\frac{J_c}{J\cos\alpha}\,dx = \Sigma\left(\lambda\cdot y\frac{J_c}{J\cos\alpha}\right) = -\,0{,}00003 \approx 0{,}0\,.$$

Die überzähligen Größen sind daher unabhängig voneinander.

5. Die Vorzahlen δ_{kk} ergeben sich ebenfalls durch numerische Integration nach Simpson (181). Hierbei ist

$$c' = l_1/10 = 1{,}5\text{ m}\,,\qquad y = y_{20} - y_2\,,\qquad J_c/F_c = 0{,}08333\,,\qquad \cos\alpha\,F_c/F = v_s/v\,,$$

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= 2\left\{\int\limits_c^a y^2\frac{J_c}{J\cos\alpha}\,dx + \frac{J_c}{F_c}\int\limits_c^a \cos\alpha\,\frac{F_c}{F}\,dx\right\}\\ &= 2\,\frac{c'}{3}\sum\left(\lambda\cdot y^2\frac{J_c}{J\cos\alpha}\right) + 2\,\frac{c'}{3}\,\frac{J_c}{F_c}\sum\left(\lambda\cdot\cos\alpha\,\frac{F_c}{F}\right)\\ &= \delta'_{11} + \delta''_{11} = 1{,}0\,\Sigma_4 + 0{,}08333\,\Sigma_5 = 58{,}01617 + 2{,}01833 = 60{,}03450\,,\end{aligned}$$

$$\delta_{22} = 2\int\limits_c^a \xi^2\frac{J_c}{J\cos\alpha}\,dx = 2\,\frac{c'}{3}\sum\left(\lambda\cdot\xi^2\frac{J_c}{J\cos\alpha}\right) = 1{,}0\,\Sigma_3 = 6{,}13492\,,$$

$$\delta_{33} = 2\int\limits_c^a \frac{J_c}{J\cos\alpha}\,dx = 2\,\frac{c'}{3}\sum\left(\lambda\cdot\frac{J_c}{J\cos\alpha}\right) = 1{,}0\,\Sigma_1 = 22{,}48201\,.$$

ξ	$\xi^2\frac{J_c}{J\cos\alpha}$	λ	$\lambda\cdot\xi^2\frac{J_c}{J\cos\alpha}$	y	y^2	$y^2\frac{J_c}{J\cos\alpha}$	$\lambda\cdot y^2\frac{J_c}{J\cos\alpha}$	$\cos\alpha\,\frac{F_c}{F}$	$\lambda\cdot\cos\alpha\,\frac{F_c}{F}$
0,0	0,00000	1	0,00000	1,42638	2,03456	2,03456	2,03456	1,00000	1,00000
0,1	0,00985	4	0,03940	1,38303	1,91277	1,88488	7,53952	0,99285	3,97140
0,2	0,03774	2	0,07548	1,25122	1,56555	1,47721	2,95442	0,97182	1,94364
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,0	0,56311	1	0,56311	−4,57362	20,91800	11,77913	11,77913	0,50000	0,50000
		$\Sigma_3 =$	6,13492			$\Sigma_4 =$	58,01617	$\Sigma_5 =$	24,21992

6. Die Einflußlinien der überzähligen Größen X_k werden nach S. 525 als Biegelinien δ_{mk} des Balkenträgers berechnet. Hierzu dienen die elastischen Gewichte $\mathfrak{w}_{m1}$, $\mathfrak{w}_{m2}$, $\mathfrak{w}_{m3}$, die in eine äquivalente Gruppe von Einzelkräften $\mathfrak{W}_{m,1}$, $\mathfrak{W}_{m,2}$, $\mathfrak{W}_{m,3}$ verwandelt werden.

$$\mathfrak{W}_0 = \frac{c'}{24}(\mathfrak{w}_1 + 10\,\mathfrak{w}_0 + \mathfrak{w}_{-1}), \qquad \mathfrak{W}_{10} = \frac{c'}{24}(7\,\mathfrak{w}_{10} + 6\,\mathfrak{w}_9 - \mathfrak{w}_8),$$

$$\mathfrak{W}_m = \frac{c'}{12}(\mathfrak{w}_{m-1} + 10\,\mathfrak{w}_m + \mathfrak{w}_{m+1}),$$

$$Q_{\mathfrak{w},m} = Q_{\mathfrak{w},0} + \sum_0^{m-1} \mathfrak{W}_h = A_{\mathfrak{w}} - \sum_m^{10} \mathfrak{W}_h, \qquad M_{\mathfrak{w},(m-1)} = M_{\mathfrak{w},m} + Q_{\mathfrak{w},m} \cdot c'.$$

Der Anteil der Längskräfte an den elastischen Gewichten wird vernachlässigt.

a) $$X_1 = \frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}} = \frac{M_{\mathfrak{w}}}{60{,}03450}, \qquad \mathfrak{w}_{m1} = y_m \frac{J_c}{J_m \cos\alpha_m} \qquad \text{(Abb. 532)}.$$

Mit $\delta_{13} = 2\int\limits_c^a y\frac{J_c}{J}\,ds = 0$ und $\delta_{12} = 2\int\limits_c^a \xi\, y \frac{J_c}{J}\,ds$ ist für $\xi = 0$: $Q_{\mathfrak{w}} = 0$ und für $\xi = \pm 1$ neben $M_{\mathfrak{w}}$ auch $Q_{\mathfrak{w}} = 0$. Die Einflußlinie besitzt daher für $\xi = 0$ und $\xi = \pm 1$ waagerechte Tangenten. Dies kann für $\frac{d}{d_x}(\delta_{m1})$ auch unmittelbar bewiesen werden.

		(1)	(2)		(3)	(4)	(5)
m	ξ	$\mathfrak{w}_{m1}$	$10\,\mathfrak{w}_0 + 2\,\mathfrak{w}_1$ / $\mathfrak{w}_{m-1} + 10\,\mathfrak{w}_m + \mathfrak{w}_{m+1}$	$7\,\mathfrak{w}_{10} + 6\,\mathfrak{w}_9 - \mathfrak{w}_8$	$\mathfrak{W}'_m$	Verbesserung $\Delta\mathfrak{W}'_m$	$\mathfrak{W}_m$
0	0,0	1,42638	16,98954	—	1,06185	+ 0,00033	1,06218
1	0,1	1,36287	16,23569		2,02946	+ 0,00064	2,03010
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
9	0,9	− 1,72804	− 20,97682		− 2,62210	+ 0,00082	− 2,62128
10	1,0	− 2,57545	—	− 27,27542	− 1,70471	+ 0,00053	− 1,70418

$\sum \mathfrak{W}'_m = \int\limits_c^a y\frac{J_c}{J}\,ds \neq 0$. Daher Verbesserung um $\Delta\mathfrak{W}'_m = -k\,|\mathfrak{W}'_m|$

mit $$k = \frac{\sum\limits_0^{10}\mathfrak{W}'_m}{\sum\limits_0^{10}|\mathfrak{W}'_m|} = \frac{-0{,}00457}{14{,}62223} = -0{,}00031254.$$

—	(6)	(7)	(8)	(9)
m	$Q_{\mathfrak{w},m}$	$Q_{\mathfrak{w},m} \cdot c'$	$M_{\mathfrak{w},m}$	X_1 [t]
0	0,00000	0,00000	72,88861	1,21411
1	1,06218	1,59327	71,29534	1,18757
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	4,32546	6,48819	2,55627	0,04258
10	1,70418	2,55627	0,00000	0,00000

b) $$X_2 = \frac{\delta_{m2}}{\delta_{22}} = \frac{M_{\mathfrak{w}}}{6{,}13492}, \qquad \mathfrak{w}_{m2} = -\xi_m \frac{J_c}{J_m\cos\alpha_m} \qquad \text{(Abb. 532)}.$$

Die Funktion $\mathfrak{w}_{m2}$ ist antimetrisch. Daher ist $M_{\mathfrak{w}}$ nicht nur für $\xi = \pm 1$, sondern auch für $\xi = 0$ Null. Die gegenseitige Verdrehung der Endtangenten der Biegelinie δ_{m2} ist δ_{22}.

—	—	(1)	(2)		(3)	(4)
m	ξ	$\mathfrak{w}_{m2}$	$10\,\mathfrak{w}_0$ / $\mathfrak{w}_{m-1} + 10\,\mathfrak{w}_m + \mathfrak{w}_{m+1}$	$7\,\mathfrak{w}_{10} + 6\,\mathfrak{w}_9 - \mathfrak{w}_8$	$\mathfrak{W}_m$	$\xi \cdot \mathfrak{W}_m$
0	0,0	0,00000	0,00000	—	0,00000	0,00000
1	− 0,1	0,09854	1,17411		0,14676	0,01468
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
9	− 0,9	0,49493	5,96339		0,74542	0,67088
10	− 1,0	0,56311	—	6,46037	0,40371	0,40377
					$A_{\mathfrak{w}} =$	3,06767

Da $\mathfrak{w}_1 = -\mathfrak{w}_{-1}$:

$$\mathfrak{W}_0 = \frac{c'}{24}\, 10\, \mathfrak{w}_0\,,$$

$$A_{\mathfrak{w}} = \sum_0^{10} (\xi\, \mathfrak{W}_m)\,,$$

—	(5)	(6)	(7)	(8)
m	$Q_{\mathfrak{w},m}$	$Q_{\mathfrak{w},m} \cdot c'$	$M_{\mathfrak{w},m}$	X_2 [mt]
0	− 1,82992	—	0,00000	0,00000
1	− 1,82992	− 2,74488	2,74488	0,44742
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	1,91848	2,87772	3,99585	0,65133
10	2,66390	3,99585	0,00000	0,00000
(a)	(3,06767)			

c) $X_3 = \dfrac{\delta_{m3}}{\delta_{33}} = \dfrac{M_{\mathfrak{w}}}{22{,}48201}$, $\qquad \mathfrak{w}_{m3} = 1\, \dfrac{J_c}{J_m \cos\alpha_m}$. (Abb. 532).

Die Funktion $\mathfrak{w}_{3m}$ ist symmetrisch, daher für $\xi = 0$: $Q_{\mathfrak{w}} = 0$, für $\xi = \pm 1$: $Q_{\mathfrak{w}} = \pm \frac{1}{2}\delta_{33}$. Die Biegelinie erhält in $\xi = 0$ eine waagerechte Tangente.

m	ξ	$\mathfrak{w}_{m3}$	$10\,\mathfrak{w}_0 + 2\,\mathfrak{w}_1$	$7\,\mathfrak{w}_{10} + 6\,\mathfrak{w}_9 - \mathfrak{w}_8$	$\mathfrak{W}_m$	$Q_{\mathfrak{w},m}$	$Q_{\mathfrak{w},m} \cdot c'$	$M_{\mathfrak{w},m}$	X_3 [mt]
			$\mathfrak{w}_{m-1} + 10\,\mathfrak{w}_m + \mathfrak{w}_{m+1}$						
0	0,0	1,00000	11,97084	—	0,74818	0,00000	0,00000	94,78360	4,21598
1	0,1	0,98542	11,79777		1,47472	0,74818	1,12227	93,66133	4,16606
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	0,9	0,54992	6,62604		0,82826	9,99538	14,99307	16,23546	0,72215
10	1,0	0,56311	—			10,82364	16,23546	0,00000	0,00000

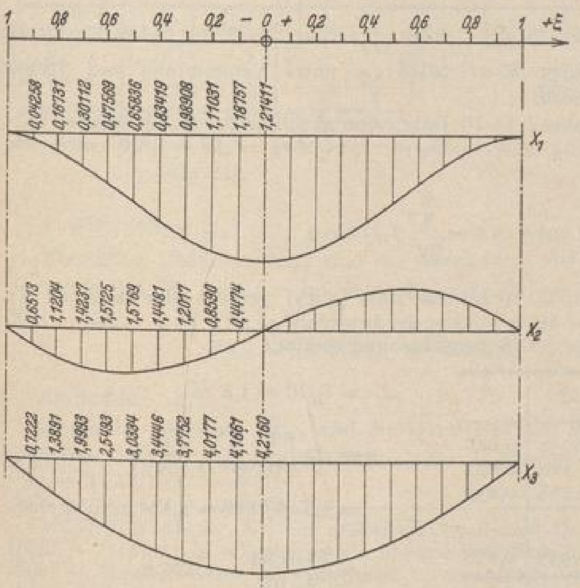


Abb. 532. Einflußlinien X_1, X_2, X_3.

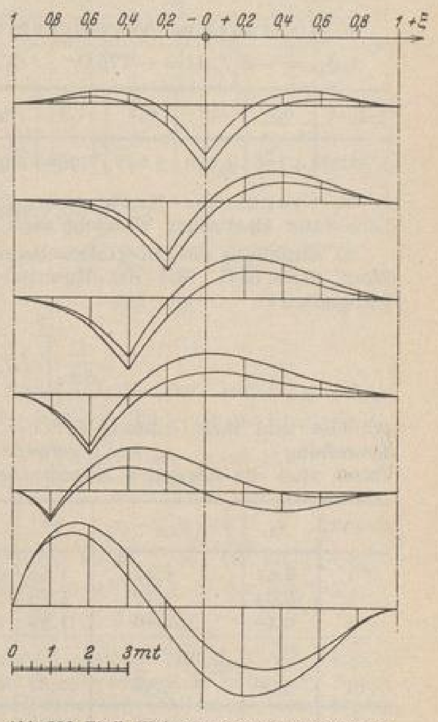


Abb. 533. Einflußlinien für die Kernmomente. Die oberen Linien gelten für die oberen Kernpunkte.

7. Einflußlinie der Schnittkräfte. a) Kernmomente (Abb. 533) im Querschnitt m:

$$M_m = M_{m0} - X_1\, y_m + X_2 \xi_m - X_3\,,$$

im Scheitel c:

$$M_c = M_{c0} - X_1 y_{20} \qquad - X_3,$$

am Kämpfer (a und b):

$$M_a = \qquad + X_1 y_{10} - X_2 \quad - X_3,$$

$$M_b = \qquad + X_1 y_{10} + X_2 \quad - X_3.$$

b) Querkräfte:

$$Q_m = Q_{m0} - X_1 \sin\alpha_m + \frac{X_2}{l_1}\cos\alpha_m.$$

8. a) Biegungsmomente aus Eigengewicht (S. 527).

$$\nu = \frac{\delta''_{11}}{\delta'_{11}} = \frac{2{,}01833}{58{,}01617} = 0{,}03479; \qquad X_1 = \Delta H = -\frac{\nu}{1+\nu} H_q = -0{,}03362\, H_q.$$

Nach Seite 546 ist $H_q = 114{,}803$ t. Dabei ist die geringe Abweichung durch Änderung der Bogenform nicht berücksichtigt.

$$H = H_q + X_1 = 114{,}803 - 3{,}859 = 110{,}944 \text{ t}, \qquad M = -X_1 y = +3{,}859 \cdot y \text{ mt}.$$

$\pm\xi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M [mt]	5,505	5,338	4,829	3,959	2,692	0,976	−1,257	−4,102	−7,675	−12,128	−17,652

Der Einfluß der Längskräfte auf δ_{10} ist nach S. 524 klein von zweiter Ordnung, fällt daher in der Rechnung weg.

b) Biegungsmomente aus Schwinden (S. 524).

$$\alpha_t = 0{,}00001; \qquad t = -15^0; \qquad \delta_{1t} = E J_c \alpha_t t l = -787{,}5;$$

$$\delta_{2t} = \delta_{3t} = 0; \qquad X_{1t} = \delta_{1t}/\delta_{11} = -13{,}117 \text{ t}; \qquad M = -X_{1t} \cdot y.$$

$\pm\xi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M [mt]	18,710	18,141	16,412	13,455	9,148	3,318	−4,273	−13,941	−26,083	−41,218	−59,992

c) Horizontales Ausweichen der Widerlager um $\Delta l = 0{,}001$ m.

$$\delta_{1s} = -E J_c \Delta l = -175{,}0; \qquad \delta_{2s} = \delta_{3s} = 0; \qquad X_{1s} = -2{,}915 \text{ t}; \qquad M = -X_{1s}\, y.$$

$\pm\xi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M [mt]	4,158	4,032	3,647	2,990	2,032	0,736	−0,949	−3,097	−5,796	−9,159	−13,331

9. Graphische Nachprüfung der Einflußlinien unter Verwendung von Stufen konstanter elastischer Wirkung nach (828).

a) Einteilung des Integrationsbereiches l_1 in 10 Teile e von gleichbleibender elastischer Wirkung (Abb. 534). Mit der Unterteilung $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_m = \Delta x = l_1/10$ wird die Integralkurve

$$\frac{1}{\Delta x}\int_0^x J_c/J \cos\alpha \cdot dx = \sum_0^x J_c/J \cos\alpha$$

gebildet und ihre Ordinate für $x = l_1$ in 10 gleiche Teile ($c/\Delta x$) geteilt. Hierdurch ist die Einteilung $e_1, e_2, \ldots, e_{10}$ von l_1 gefunden. Mittelpunkte der Intervalle e_m sind $1', 2' \ldots m' \ldots 10'$. Ihnen sind die folgenden Koordinaten der Bogenachse zugeordnet:

Punkt	y_2	$y = y_{2,0} - y_2$	y^2	ξ	ξ^2
1′	0,01	1,41	1,99	0,032	0,010
2′	0,05	1,37	1,88	0,110	0,012
3′	0,16	1,26	1,59	0,188	0,035
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10′	5,00	− 3,58	12,82	0,933	0,870
Σ	14,24	− 0,04	25,06	—	2,736

$$\Delta x = l_1/10 = 1{,}5 \text{ m}.$$

$$c = \Delta x \left[\frac{1}{10}\sum_c^b \frac{J_c}{J\cos\alpha}\right]$$

$$= 1{,}5 \cdot 0{,}7496 = 1{,}124 \text{ m (Abb. 534)}.$$

$$y_{2,0} = \frac{2 \cdot 14{,}24}{2 \cdot 10} = 1{,}424 \text{ m}.$$

$$\delta'_{11} = 2 \cdot 1{,}124 \cdot 25{,}06 = 56{,}35, \qquad \delta''_{11} = 2{,}02 \text{ (S. 525)}^*, \qquad \delta_{11} = \delta'_{11} + \delta''_{11} = 58{,}37$$

* Der Anteil δ''_{11} kann auch nach den Angaben der S. 514 berechnet werden.

Mit $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \approx 0$ wird

$$\delta_{22} = 2 \cdot 1{,}124 \cdot 2{,}736 = 6{,}153, \qquad \delta_{33} = 2 \cdot 10 \cdot 1{,}124 = 22{,}49\,.$$

b) Einflußlinie X_1:

Verwendung der $(1/c)$fachen $\mathfrak{W}$-Gewichte; Elastische Gewichte $\mathfrak{W}_{m1}/c = \overline{\mathfrak{W}}_{m1}$ sind die Ordinaten y in den Punkten $1', 2' \ldots m'$. Mit $H_{\mathfrak{w}} = \delta_{11}/c$ Einheiten des $\overline{\mathfrak{W}}_{m1}$ ist 1 m im Maßstab der Zeichnung der Maßstab für 1 t der Einflußlinie. Um die Einflußlinie auf den 5fachen Betrag zu vergrößern, wird daher $H_{\mathfrak{w}1} = 58{,}37/(5 \cdot 1{,}124) = 10{,}39$ aufgetragen.

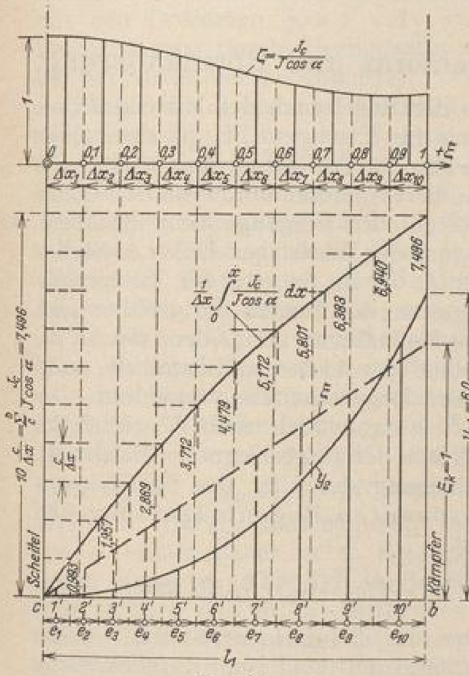


Abb. 534.

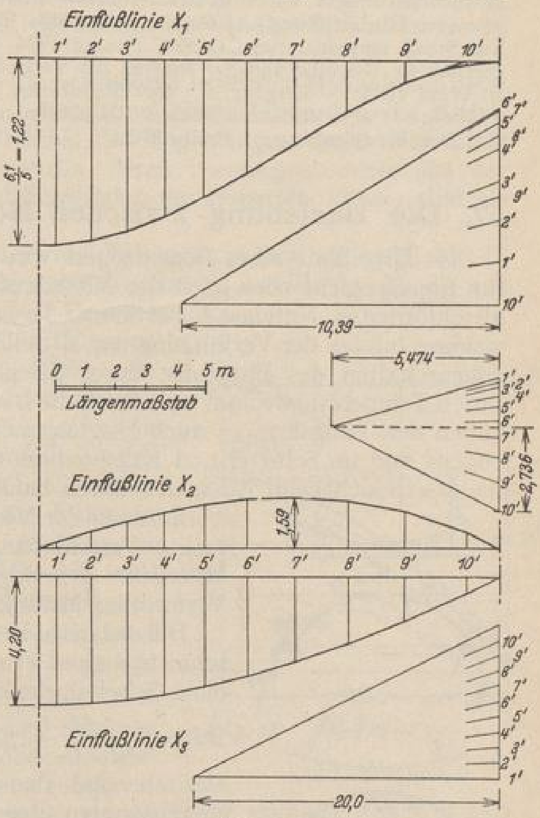


Abb. 535.

c) Einflußlinie X_2:

Elastische Gewichte $\overline{\mathfrak{W}}_{m2}$ sind die Abszissen ξ der Punkte $1', 2' \ldots m'$. Mit $H_{\mathfrak{w}2} = \delta_{22}/c$ Einheiten des $\overline{\mathfrak{W}}_{m2}$ ist 1 m im Maßstab der Zeichnung der Maßstab für 1 m/t der Einflußlinie.

$$H_{\mathfrak{w}2} = 6{,}153/1{,}124 = 5{,}474; \qquad A_{\mathfrak{w}} = \sum_1^n \xi^2 = 2{,}736\,.$$

Einflußlinie X_3:

Elastische Gewichte $\overline{\mathfrak{W}}_{m3}$ sind die Werte 1 in den Punkten $1', 2' \ldots m'$. Mit $H_{\mathfrak{w}3} = \delta_{33}/c$ Einheiten des $\overline{\mathfrak{W}}_{m3}$ ist 1 m im Maßstab der Zeichnung der Maßstab für 1 mt der Einflußlinie. $H_{\mathfrak{w}3} = 22{,}49/1{,}124 = 20{,}0$.

Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Bd. 2, 2. Abt. Leipzig 1908. — Ritter, M.: Beiträge zur Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger. Berlin 1909. — Schönhöfer, R.: Statische Untersuchung von Bögen und Wölbtragwerken. Berlin 1911. — Gaber, E.: Bau und Berechnung gewölbter Brücken und ihre Lehrgerüste. Berlin 1914. — Schächterle, K.: Beiträge zur Berechnung der im Eisenbetonbau üblichen elastischen Bogen und Rahmen. Berlin 1914. — Färber: Statische Berechnung von Gewölben. Dtsch. Bauztg. 1915 S. 156. — Derselbe: Rasche Ermittlung der Formen und Normalkräfte von

Gewölben. Dtsch. Bauztg. 1915 S. 6. — Schürch, H.: Wärmeeinfluß und Wärmebeobachtungen bei Betongewölben. Arm. Beton 1916. — Hawranek, A.: Berechnung von Bogenbrücken bei räumlichem Kraftangriff. Beton u. Eisen 1918. — Derselbe: Nebenspannungen von Eisenbetonbogenbrü-ken. Berlin 1919. — Straßner, A.: Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke und der elastischen Bogenträger Bd. 2. Berlin 1921. — Neumann, G.: Bogenform und Momentenbild. Beton u. Eisen 1922. — Pirlet, J.: Kompendium der Statik der Baukonstruktionen Bd. 2. Derlin 1923. — Proksch, E.: Beitrag zur Querschnittsbemessung der Betongewölbe. Beton u. Eisen 1923. — Derselbe: Der Einfluß elastischer Widerlager auf den eingespannten Bogen. Beton u. Eisen 1923. — Craemer, H.: Der Einfluß einseitig verschiedenschwerer Hinterfüllung auf elastische Gewölbe. Beton u. Eisen 1924. — Kasarnowsky, S.: Zur Statik eingespannter Gewölbe. Bauing. 1924. — Hartmann, F.: Die genauere Berechnung gelenkloser Gewölbe und der Einfluß des Verlaufs der Achse und der Gewölbestärke. Leipzig u. Wien 1925. — Kögler, F.: Gewölbetabellen, 2. Aufl. Berlin 1928. — Gesteschi, Th., u. J. Melan: Bogenbrücken. Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 11 4. Aufl. Berlin 1932. — Bergdorfer, E.: Der Eingelenkbogen. Berlin 1929.

57. Die Beziehung zwischen Bogenform und Formänderung.

Die Mittellinie eines Bogenträgers wird in der Regel nach der Mittelkraftlinie für Eigengewicht oder nach der Mittelkraftlinie für Eigengewicht und der halben gleichförmigen Nutzlast p bestimmt. Diese Form ändert sich jedoch mehr oder weniger infolge der Verkürzung der Mittellinie, hervorgerufen durch die elastischen Eigenschaften des Baustoffs, durch die physikalischen Vorgänge beim Erhärten, durch Temperaturwechsel und durch die Bewegung der Widerlager. Daher entstehen neben den Längskräften auch Biegungsmomente, die im Scheitel des Zweigelenkbogens und im Scheitel und Kämpfer des eingespannten Bogens am größten sind. Sie lassen sich beim Ausrüsten durch bauliche Maßnahmen vermeiden, welche die Verkürzung der Mittellinie ausgleichen und damit die senkrechte Verschiebung des Bogenscheitels verhindern. Die Mittellinie des Bogens ist dann auch nach Abschluß der Verformung Mittelkraftlinie der ausgezeichneten Belastung.

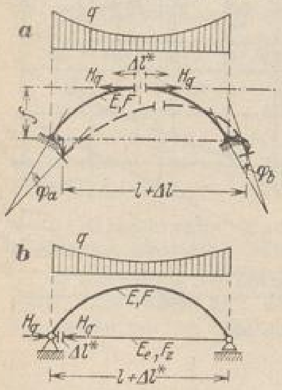


Abb. 536.

Die relative Verschiebung der Ufer des Scheitelquerschnitts c eines eingespannten Bogenträgers mit und ohne Scheitelgelenk ist

$$\Delta l^* = H_q \int \frac{ds}{EF} - \alpha_t t l + \Delta l - f(\varphi_a - \varphi_b). \quad \text{(Abb. 536a)} \qquad (850)$$

Danach sind die Ufer des Scheitelquerschnitts c eines eingespannten Bogenträgers mit und ohne Scheitelgelenk beim Ausrüsten um den Betrag Δl^* gegenseitig zu entfernen. Der Anteil aus der Verdrehung der Widerlager fällt beim Zweigelenkbogen weg. Die relative Verschiebung der Ufer des Anschlußquerschnitts des Zuggliedes eines Zweigelenkbogens ist mit $(l + \Delta l^*) > l$

$$-\Delta l^* = H_q \int \frac{ds}{EF} - \alpha_t t l + \frac{H_q l}{E_z F_z}, \qquad \text{(Abb. 536b)} \qquad (851)$$

um die Biegungsmomente aus der Längenänderung von Bogen und Zugglied zu vermeiden.

Der Ausgleich wird beim Ausrüsten des beiderseits eingespannten Bogenträgers durch Druckpressen erreicht, welche im Bogenscheitel eingebaut werden. Sie liegen beim Ausrüsten des Zweigelenkbogens mit Zugband hinter dem Bogenkämpfer, um hier zunächst die Längskraft des relativ zum Bogenträger beweglichen Zuggliedes aufzunehmen und diesem zuzuführen. Dabei wird die Reckung des Zuggliedes und die Verkürzung des Bogenträgers ausgeglichen, so daß in der Fahrbahn keine Nebenspannungen aus der Formänderung der Hauptträger durch Eigengewicht entstehen (Beispiel S. 519).