



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

system nach Abschn. 18

$$\epsilon_{11} = \int y^2 \frac{J_c}{J} dy = \frac{h^2 h'}{15} (2 + 3n), \quad \epsilon_{21} = \int y \frac{J_c}{J} ds = \frac{h h'}{4} (1 + n).$$

Ein Kräftepaar 1 am Stützkopf führt zur Verdrehung

$$\epsilon_{22} = \int \frac{J_c}{J} dy = \frac{h'}{3} (2 + n), \quad h' = h \frac{J_s}{J_{oh}}$$

Das Tragwerk zählt neun statisch unbestimmte Schnittkräfte, von denen die Längskräfte X_2, X_5, X_8 im Scheitel der Bogenträger in einer zweiten Stufe berechnet werden, so daß die erste nur die Einspannungsmomente eines sechsfach statisch unbestimmten Balkenträgers als überzählige Größen enthält. Sie werden durch $X_1^{(6)} = Y_1 \dots X_6^{(6)} = Y_6$ bezeichnet und für die vorgeschriebenen Belastungen $P, -X_2 = 1$ aus dem folgenden Ansatz berechnet:

Die $6 EJ_s/l'$ -fachen Beträge der Verschiebungen sind

$$\delta'_{11} = 2, \quad \delta'_{12} = 1, \quad \delta'_{22} = 2 + \frac{6}{l} \epsilon_{22},$$

$$\delta'_{23} = -\frac{6}{l} \epsilon_{22}.$$

Mit $l = l' = 24,0 \text{ m}, \quad h = 21,0 \text{ m},$

$$J_s = 0,018 \text{ m}^4, \quad J_{oh} = 0,0833 \text{ m}^4,$$

$$J_{wh} = 0,667 \text{ m}^4,$$

$$n = 0,0833/0,667 = 0,125, \quad h' = 4,54 \text{ m}$$

nach Abb. 555 ist

$$\epsilon_{11} = 317,0, \quad \epsilon_{12} = 26,8, \quad \epsilon_{22} = 3,21,$$

$$\delta'_{22} = 2,8025, \quad \delta'_{23} = -0,8025.$$

Bedingungsgleichungen der ersten Stufe:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
1	2	1				
3	1	2,8025	-0,8025			
4		-0,8025	2,8025	1		
6			1	2,8025	-0,8025	
7				-0,8025	2,8025	1
9					1	2

Konjugierte Matrix nach Abschnitt 29:

$$\begin{matrix} & -\kappa_{21} & -\kappa_{32} & -\kappa_{43} & -\kappa_{54} & -\kappa_{65} \\ \rightarrow & -0,394501 & +0,333525 & -0,396385 & +0,348534 & -0,500000 & \rightarrow \end{matrix}$$

1	+0,622859	-0,245718	-0,081953	+0,032485	+0,011322	-0,005661	
3	-0,245718	+0,491437	+0,163907	-0,064970	-0,022644	+0,011322	-0,500000 = - κ_{12}
4	-0,081953	+0,163907	+0,470274	-0,186410	-0,064970	+0,032485	+0,348534 = - κ_{24}
6	+0,032485	-0,064970	-0,186410	+0,470274	+0,163907	-0,081953	-0,396385 = - κ_{34}
7	+0,011322	-0,022644	-0,064970	+0,163907	+0,491437	-0,245718	+0,333525 = - κ_{45}
9	-0,005661	+0,011322	+0,032485	-0,081953	-0,245718	+0,622859	-0,394501 = - κ_{56}
	1	3	4	6	7	9	

Die Belastungszahlen $\delta'_{k0} = 6 \delta_{k0}/l$ sind für

$$\begin{aligned}
 -X_2 = 1: \quad & \delta'_{10} = 2f = 16,0, & \delta'_{20} = 2f - \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 9,30, & \delta'_{30} = \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 6,70, \\
 -X_5 = 1: \quad & \delta'_{20} = \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 6,70, & \delta'_{30} = 2f - \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 9,30 = \delta'_{40}, & \delta'_{50} = \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 6,70, \\
 -X_8 = 1: \quad & \delta'_{40} = \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 6,70, & \delta'_{50} = 2f - \frac{6}{l} \varepsilon_{12} = 9,30, & \delta'_{60} = 2f = 16,0.
 \end{aligned}$$

Infolge der Symmetrie wird daher nach (412)

$$\begin{aligned}
 Y_{11} = Y_{66} = 7,13148, & \quad Y_{21} = Y_{58} = 1,73705, & \quad Y_{31} = Y_{48} = 3,36421, \\
 Y_{41} = Y_{38} = -1,33282, & \quad Y_{51} = Y_{28} = -0,04356, & \quad Y_{61} = Y_{18} = 0,23237, \\
 Y_{15} = Y_{65} = -2,03050, & \quad Y_{25} = Y_{55} = 4,36445, & \quad Y_{35} = Y_{45} = 3,30281.
 \end{aligned}$$

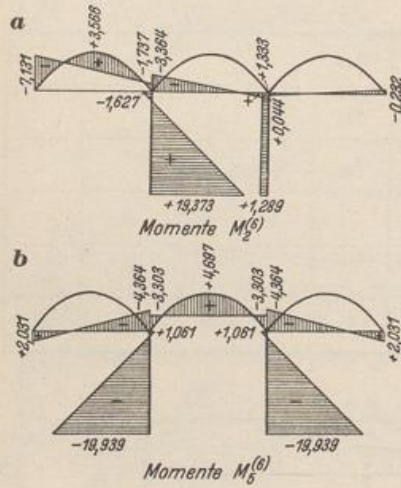


Abb. 556 a zeigt die Momente $M_2^{(6)}$ infolge von $-X_2 = 1$, das Spiegelbild die Momente $M_8^{(6)}$ infolge von $-X_8 = 1$, Abb. 556 b die Momente $M_5^{(6)}$ aus $-X_5 = 1$. Darnach können bei den einfachen elastischen Beziehungen ($J_x/J \cos \alpha$) des Riegels die Biegelinien $\delta_{m2}^{(6)}$, $\delta_{m5}^{(6)}$, $\delta_{m8}^{(6)}$ unmittelbar nach Tab. 12 angeschrieben werden. Dasselbe würde auch bei einer vorgeschriebenen Belastung \mathfrak{B} mit $\delta_{20}^{(6)}$, $\delta_{50}^{(6)}$, $\delta_{80}^{(6)}$ der Fall sein.

Die zweite Stufe des Ansatzes dient zur Berechnung der Längskräfte X_2, X_5, X_8 . Sie besteht aus drei geometrischen Bedingungen für die Formänderung eines sechsfach statisch unbestimmten Hauptsystems. Die Vorzeichen des Ansatzes werden nach S. 161 berechnet. Darnach ist:

$$\begin{aligned}
 \delta_{22}^{(6)} &= \int M_2^{(6)} M_2^{(6)} \frac{J_c}{J} ds \\
 &= 24,0 \left[\frac{8}{15} \cdot 8,0 \cdot 8,0 - \frac{1}{3} 8,0 (7,131 + 1,737) \right] \\
 &\quad - 26,8 \cdot 1,627 + 317 = + 525,036 = \delta_{88}^{(6)},
 \end{aligned}$$

$$\delta_{25}^{(6)} = 24,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8,0 (2,031 - 4,364) + 26,8 \cdot 1,061 - 317 = - 467,877 = \delta_{55}^{(6)},$$

$$\delta_{28}^{(6)} = 24,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8,0 (0,044 - 0,232) + 26,8 \cdot 1,289 = + 22,513,$$

$$\delta_{88}^{(6)} = 24,0 \cdot \frac{8}{15} \cdot 8,0 \cdot 8,0 - 24,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,0 \cdot 3,303 - 2 \cdot 26,8 \cdot 1,061 + 2 \cdot 317 = + 973,546.$$

Bedingungsgleichungen der zweiten Stufe:

	X_2	X_5	X_8
2	+ 525,036	- 467,877	+ 22,513
5	- 467,877	+ 973,546	- 467,877
8	+ 22,513	- 467,877	+ 525,036

Konjugierte Matrix:

	$\delta_{20}^{(6)}$	$\delta_{50}^{(6)}$	$\delta_{80}^{(6)}$
2	+ 0,006 106	+ 0,004 912	+ 0,004 116
5	+ 0,004 912	+ 0,005 749	+ 0,004 912
8	+ 0,004 116	+ 0,004 912	+ 0,006 106

Die Fehlerempfindlichkeit des Ansatzes wird nach S. 167 geprüft.

$$\varphi = \pm p \frac{\sum |\delta_{ik} D_{ik}|}{D'} \approx \pm p \frac{1024 \cdot 10^6}{48 \cdot 10^6} = \pm 21,4 p.$$

Sie ist nach S. 168 für das Ergebnis ungünstig. Berechnung der überzähligen Schnittkräfte:

$$X_2 = \beta_{22} \delta_{20}^{(6)} + \beta_{25} \delta_{50}^{(6)} + \beta_{28} \delta_{80}^{(6)}.$$

Einflußlinien (X_8 Spiegelbild zu X_2) (Abb. 557).

	Abschnitt l_2	Abschnitt l_5
X_2	$9,3788 \omega_p'' - 3,1397 \omega_D' - 3,0587 \omega_D$	$7,5448 \omega_p'' - 3,0027 \omega_D' - 2,1054 \omega_D$
X_5	$7,5448 \omega_p'' - 2,3511 \omega_D' - 3,2068 \omega_D$	$8,8305 \omega_p'' - 2,7807 (\omega_D' + \omega_D)$

	Abschnitt l_8
X_2	$6,3222 \omega_p'' - 2,7184 \omega_D' - 1,9960 \omega_D$
X_5	$7,5448 \omega_p'' - 2,3511 \omega_D' - 3,2068 \omega_D$

Die Lösung ist bei Ausnutzung der Symmetrie kürzer, jedoch hier mit Rücksicht auf andere Aufgaben allgemein durchgeführt worden.

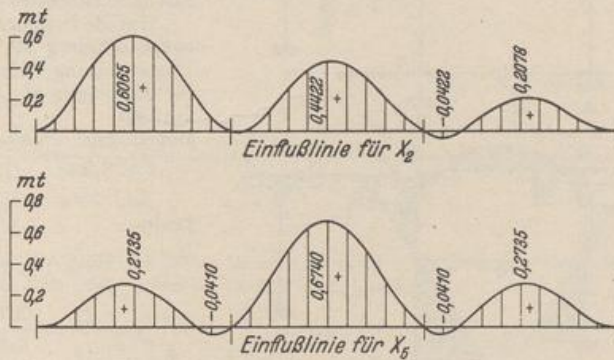


Abb. 557.

Eine angenäherte Untersuchung, bei welcher die Verdrehung φ_H der Stützköpfe H als klein gegen deren waagerechte Verschiebung u_H vernachlässigt wird, ist wesentlich einfacher. Nach S. 563 ist:

$$u_H = (X_k - X_h) \varepsilon_{11}^{(h)} + (X_{h+1} - X_{k-1}) \varepsilon_{12}^{(h)},$$

$$\varphi_H = (X_k - X_h) \varepsilon_{21}^{(h)} + (X_{h+1} - X_{k-1}) \varepsilon_{22}^{(h)},$$

mit

$$\bar{\varphi}_H = 0, \quad \bar{u}_H = (X_k - X_h) \left(\varepsilon_{11}^{(h)} - \frac{\varepsilon_{12}^{(h)} \varepsilon_{22}^{(h)}}{\varepsilon_{21}^{(h)}} \right).$$

Werden die einzelnen Bogenträger l_h, l_k wie bisher als symmetrisch angenommen, so lassen sich aus den statisch unbestimmten Schnittkräften X_{k-1}, X_k, X_{k+1} eines Abschnitts l_k (Abb. 558) nach S. 523 folgende voneinander unabhängige Gruppenlasten bilden:

$$Z_{k-1} = \frac{X_{k-1} - X_{k+1}}{2}, \quad Z_{k+1} = \frac{X_{k-1} + X_{k+1}}{2}.$$

$$Z_k: X_k \text{ in Verbindung mit } Z_{(k+1)k} = -X_k \gamma_0^{(k)}.$$

Da außerdem die Verdrehung der Stützköpfe nach Vorschrift ausgeschlossen wird, sind alle Gruppenlasten $\dots Z_{h-1}, Z_{k-1} \dots Z_{h+1}, Z_{k+1} \dots$ voneinander unab-

hängig. Nach S. 523 ist daher

$$Z_{k-1} = \delta_{(k-1)0} / \delta_{(k-1)(k-1)}, \quad Z_{k+1} = \delta_{(k+1)0} / \delta_{(k+1)(k+1)}.$$

Die überzähligen Größen Z_k sind Wurzeln des folgenden dreigliedrigen Ansatzes:

$$Z_h \delta_{kh} + Z_k \delta_{kk} + Z_r \delta_{kr} = \delta_{k0}.$$

Er enthält bei Belastung eines Abschnittes l_k außer δ_{k0} keine Belastungszahlen, so daß mit den Kennbeziehungen

$$Z_h / Z_k = -\kappa_{hk}, \quad Z_r / Z_k = -\kappa_{rk},$$

$$Z_k = \frac{\delta_{k0}}{-\delta_{kh} \kappa_{hk} + \delta_{kk} - \delta_{kr} \kappa_{rk}},$$

$$Z_k = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{kk}} + \frac{\delta_{k0}}{\delta_{kk}} \frac{\delta_{kh} \kappa_{hk} + \delta_{kr} \kappa_{rk}}{-\delta_{kh} \kappa_{hk} + \delta_{kk} - \delta_{kr} \kappa_{rk}} = Z_{k,0} + Z_{k,1}.$$

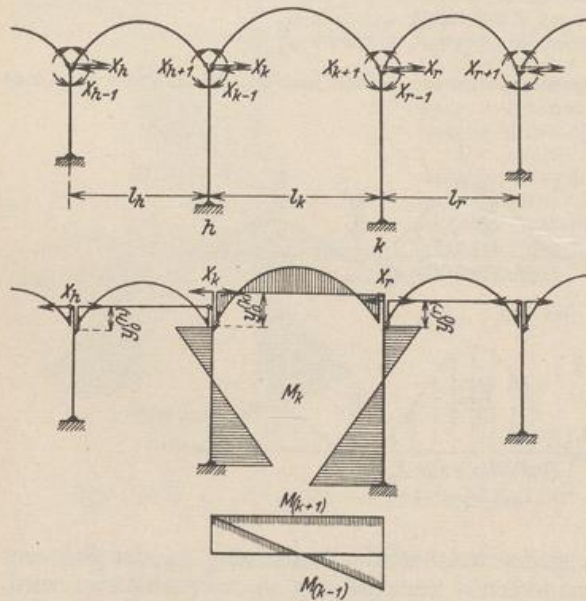


Abb. 558.

Der Anteil $Z_{k,1}$ beschreibt demnach den Einfluß der elastischen Eigenschaften aller übrigen Träger und Pfosten auf die Bogenkraft Z_k .

Um die Brauchbarkeit der Näherungsrechnung zu prüfen, wird die Bogenstellung Abb. 555 untersucht, für die bereits ein genaues Ergebnis vorliegt.

Bogenform: Parabel mit $l=24,0$ m,

$$f = 8,0 \text{ m}, \quad J_o = 0,018 \text{ m}^4,$$

$$J_u / J \cos \alpha = 1, \quad y_0^{(k)} = \frac{2}{3} f.$$

Pfeiler: $h = 21,0$ m,

$$\frac{J_o}{J_v} = 1 - (1-n) \frac{J^2}{h^2},$$

$$n = \frac{J_o}{J_u} = \frac{0,0833}{0,677} = 0,125,$$

$$\epsilon_{11} = 317,0, \quad \epsilon_{12} = 26,8, \quad \epsilon_{22} = 3,21, \quad \text{daher}$$

$$\delta_{22,1} = \frac{4}{45} f^2 l = 136,53,$$

$$\delta_{22,2} = \epsilon_{11} - \frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_{22}} = 93,25,$$

Matrix der Bedingungsgleichungen

	X_2	X_5	X_8
2	229,8	- 93,3	
5	- 93,3	323,0	- 93,3
8		- 93,3	229,8

Konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{hk} .

	$\delta_{20}^{(8)}$	$\delta_{50}^{(8)}$	$\delta_{80}^{(8)}$
2	+ 0,005018	+ 0,001642	+ 0,000667
5		+ 0,004044	+ 0,001642
8			+ 0,005018